方差的性质

定理4.3 设k,l及c都是常数，则

(1) $D(c)=0$；反之，如果某个随机变量 X 的方差为零，那么$P(X=c)=1$，其中$c=E(X)$； $E[c-E(c)]^2=0$

(2) $D(kX+c)=k^2D(X)$；

$\mathrm{cov}(X,Y)$

(3) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$；

(4) 当X与Y相互独立时，$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

若$P(X=c)\neq 1$，则$P(X=a)>0 \Rightarrow D(X)\neq 0$

证明:(2) $D(kX+c)=E\left\{\left[(kX+c)-E(kX+c)\right]^2\right\}$

$$=k^2E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}=k^2D(X)$$

(3) $D(X\pm Y)=E\left\{\left[(X\pm Y)-E(X\pm Y)\right]^2\right\}$

$$=E\left\{\left\{\left[X-E(X)\right]\pm\left[Y-E(Y)\right]\right\}^2\right\}$$

$$=E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}+E\left\{\left[Y-E(Y)\right]^2\right\}\pm 2E\left\{\left[X-E(X)\right]\left[Y-E(Y)\right]\right\}$$

$$=D(X)+D(Y)\pm 2E\left\{\left[X-E(X)\right]\left[Y-E(Y)\right]\right\};$$

$\mathrm{cov}(X,Y)$

(4) 当 X 与 Y 相互独立时,有

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E[X-E(X)]E[Y-E(Y)]$$

$$=\{E(X)-E[E(X)]\}\{E(Y)-E[E(Y)]\}=0$$

所以

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$$

性质(4)可以推广：设随机变量 $X_1,\cdots,X_n$相互独立，则

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i);$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} (k_i X_i + c_i)\right)=\sum_{i=1}^{n} k_i^2 D(X_i).$$

例1 利用方差的性质求二项分布的方差.

解 因 $X \sim B(n, p)$，可将 X 视为 n 个 $0-1$ 分布的和，即 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，其中 $X_i \sim B(1, p)$，且相互独立，由方差性质(4)的推广即得

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1-p).$$

例2 设 X,Y 相互独立，且 $X \sim R(0,3), Y \sim E(2)$，试求 $D(X-Y-2), E(X^2Y^2)$.

解 由已知得

$$E(X)=\frac{3}{2}, D(X)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}, E(Y)=\frac{1}{2}, D(Y)=\frac{1}{4}$$

再由独立性和方差性质得

$$D(X-Y-2)=D(X)+D(Y)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$$

由X,Y相互独立，可知X^2,Y^2相互独立，

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2Y^2\right) &= E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right) \\
&= \left\{D(X)+\left[E(X)\right]^2\right\}\left\{D(Y)+\left[E(Y)\right]^2\right\} \\
&= \left(\frac{3}{4}+\frac{9}{4}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

例3 设 X,Y 相互独立且 $X\sim N(1,4),Y\sim N(0,1)$, 求

(1) $E(X-2Y),D(X-2Y)$.

(2)求 $Z=X-2Y$ 的概率密度函数.

解 (1)由期望和方差的性质及已知得

$$E(X-2Y)=E(X)-2E(Y)=1$$

$$D(X-2Y)=D(X)+4D(Y)=4+4=8$$

(2)由正态分布的可加性知 $Z=X-2Y\sim N(1,8)$

因此相应的密度函数为

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{8}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-1)^2}{2\times 8}},\qquad -\infty<z<+\infty$$

(2)由正态分布的可加性知 $Z = X - 2Y \sim N(1,8)$

因此相应的密度函数为

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{8}} e^{-\frac{(z-1)^2}{2\times 8}}, \qquad -\infty < z < +\infty$$

例4 设 X 表示10万元投入到某股票的长期收益, $D(X)=40$; Y 表示10万元投入到黄金期货的长期收益, $D(Y)=20$. 某人现将5万元投入该股票, 50万元投入到黄金期货中, 问该投资组合的风险. 假如股票市场与黄金期货市场相互独立.

解 资产收益的方差即其波动度, 反映了该投资的风险.

$$D(0.5X+5Y)=0.25D(X)+25D(Y)=510$$

$$D(5.5X)=30.25D(X)=1210,\quad D(5.5Y)=30.25D(Y)=605$$

•不要将所有的鸡蛋放于一个篮子中.

X 的中心化随机变量:

$X_* \triangleq X - E(X)$ $\quad E(X_*) = 0$ 且 $D(X_*) = D(X)$

X 的标准化随机变量:

$X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ $\quad E(X^*) = 0$ 且 $D(X^*) = 1$

例如, $X \sim N(-1,16)$,

$X_* = X + 1 \sim N(0,16)$ $\quad X^* = \dfrac{X+1}{4} \sim N(0,1)$

本节内容及要求

1

方差性质

2

熟练使用方差性质

3

熟练计算方差

谢　谢

同济大学数学科学学院概率统计教学团队