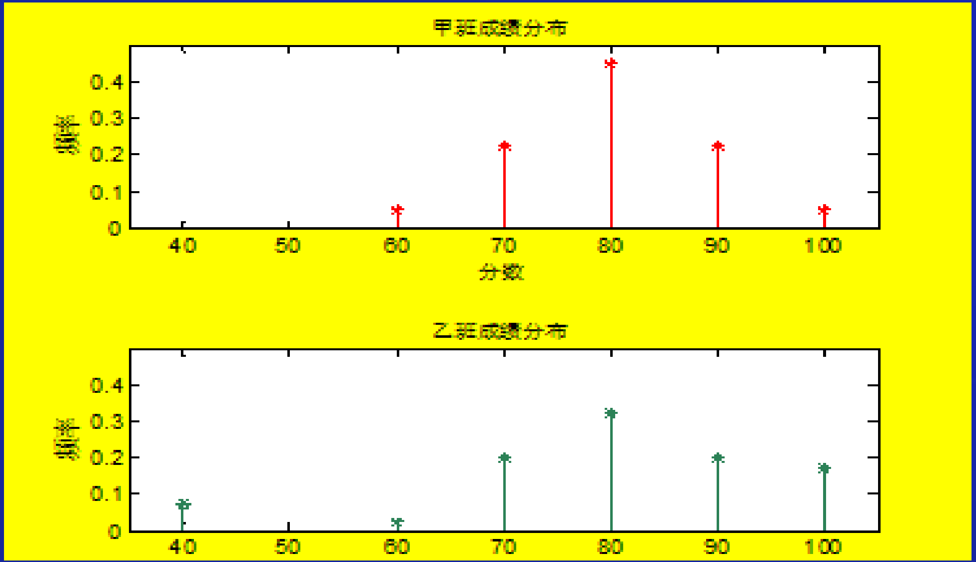
方差的定义
及常见分布的方差

1 方差的定义

2 常用分布的方差

引例(续) 设甲、乙两班各40名学生, 概率统计成绩已知选出一班参加竞赛，应选哪个班级？

解： 甲班平均成绩=乙班平均成绩=80（分）



$$X-E(X)$$

$$\Downarrow$$

$$E\left[X-E(X)\right]=0$$

$$\Downarrow$$

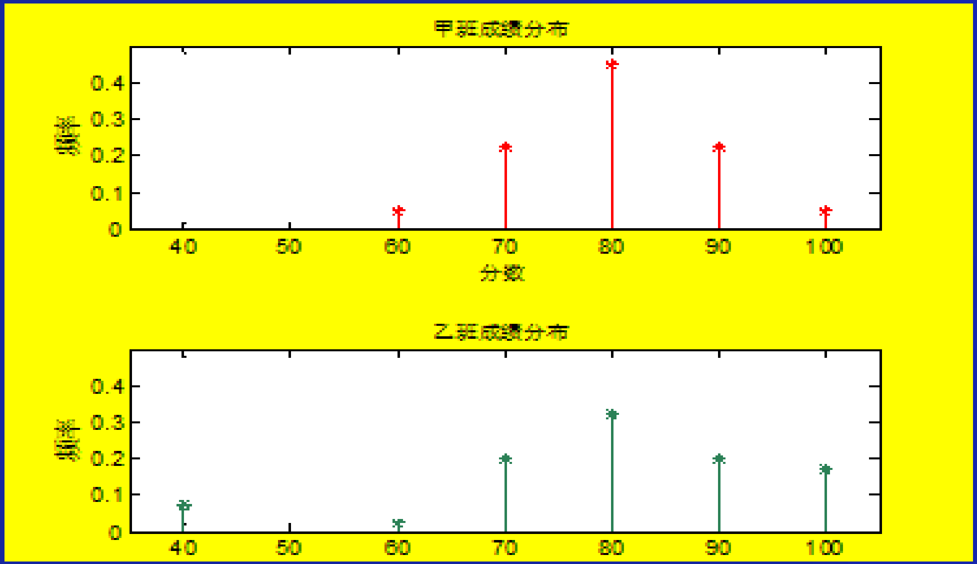
$$E\left|X-E(X)\right|$$

$$\Downarrow$$

$$E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}\triangleq D(X)$$

引例(续) 设甲、乙两班各40名学生, 概率统计成绩已知选出一班参加竞赛，应选哪个班级?

解： 甲班平均成绩=乙班平均成绩=80（分）



甲班成绩 X	60	70	80	90	100
频率 Pr	$\frac{2}{40}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{18}{40}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{2}{40}$
$X-E(X)$	-20	-10	0	10	20
$E[X-E(X)]$	0				
$E\lvert X-E(X)\rvert$	计算复杂				
$E\{[X-E(X)]^2\}$	85				

同理，乙班概率统计成绩的波动计算为240.

应选择甲班，其成绩更稳定 $E\{[X-E(X)]^2\} \triangleq D(X)$

定义4.2 设 X 是一个随机变量，称

$$D(X) \triangleq E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}$$

为 X 的**方差**，而称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的**标准差**.

注: (1)方差反映随机变量分布的波动程度，波动 $\nearrow$ $D(X)\nearrow$

(2)方差是 X 的函数 $g(X)=\left[X-E(X)\right]^2$ 的数学期望

$$D(X)=\sum_i\left[a_i-E(X)\right]^2 p_i\,,\quad D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(X)\right]^2 f(x)dx.$$

(3)方差的计算公式 $D(X)=E(X^2)-E^2(X).$

由期望性质即可推导如下:

$$
\begin{aligned}
D(X) &= E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{X^2-2X\cdot E(X)+\left[E(X)\right]^2\right\} \\
&= E(X^2)-2\cdot E(X)\cdot E(X)+\left[E(X)\right]^2 \\
&= E(X^2)-E^2(X).
\end{aligned}
$$

常见离散型分布的方差:

1.$0-1$分布$B(1,p)$:　　$D(X)=p(1-p)$;

2.二项分布$B(n,p)$:　　$D(X)=np(1-p)$;

3.泊松分布$P(\lambda)$:　　$D(X)=\lambda$.

1. 0-1分布 $B(1,p)$: $E(X)=p \quad D(X)=p(1-p)$

X	0	1
P_r	$1-p$	p

$$E\left(X^2\right)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p$$

$$D(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p)$$

2. 二项分布 $B(n,p)$: $E(X)=np \quad D(X)=np(1-p)$

3.泊松分布 $P(\lambda)$:　$E(X)=\lambda \quad D(X)=\lambda$

$$E\left(X^2\right)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot\frac{1}{k!}\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{k-1}{(k-1)!}+\frac{1}{(k-1)!}\right]\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\boxed{e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}}$$

$$=\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}+\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda^2+\lambda$$

$$D(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

常见连续型分布的方差:

1.均匀分布 $R(a,b)$: $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$;

2.指数分布 $E(\lambda)$: $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$;

3.正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$: $D(X)=\sigma^2$.

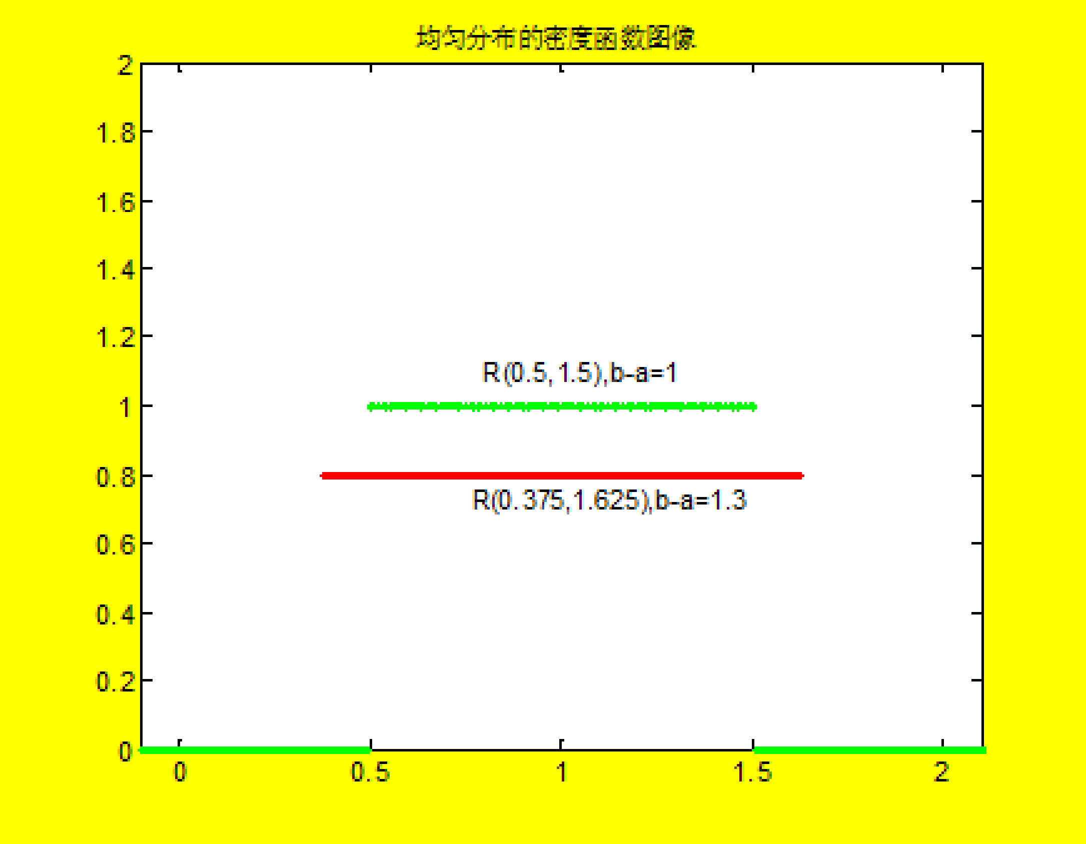
1.均匀分布 $R(a,b)$: $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$ $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 0, & \text{其余}\end{cases}}$$



均匀分布的密度函数图像
R(0.5, 1.5),b-a=1
R(0.375,1.625),b-a=1.3
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2

2.指数分布 $E(\lambda)$: $E(X)=\frac{1}{\lambda}$ $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

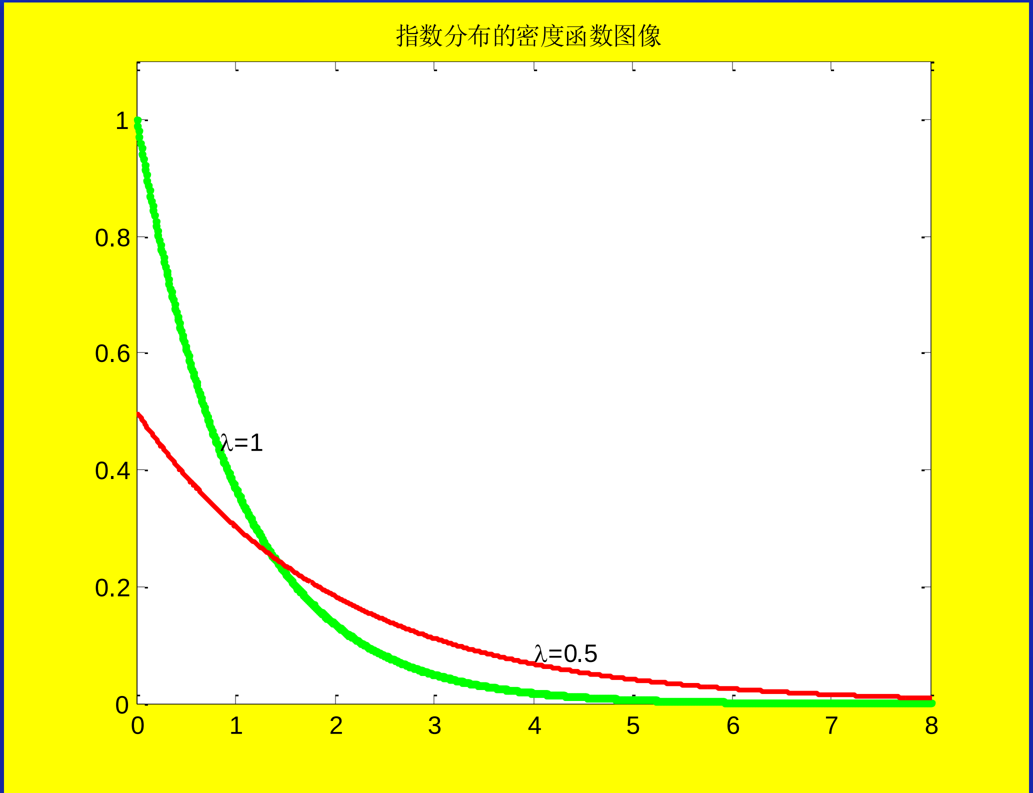
$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其余}\end{cases}$$

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=\lambda\int_0^{+\infty}x^2\cdot e^{-\lambda x}dx=\lambda\cdot\frac{2!}{\lambda^{2+1}}=\frac{2}{\lambda^2},$$

$$D(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

$$I_n=\int_0^{+\infty}x^n e^{-\alpha x}dx=\frac{n!}{\alpha^{n+1}},\quad n\geq 0,\alpha>0$$



指数分布的密度函数图像
λ=1
λ=0.5
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8

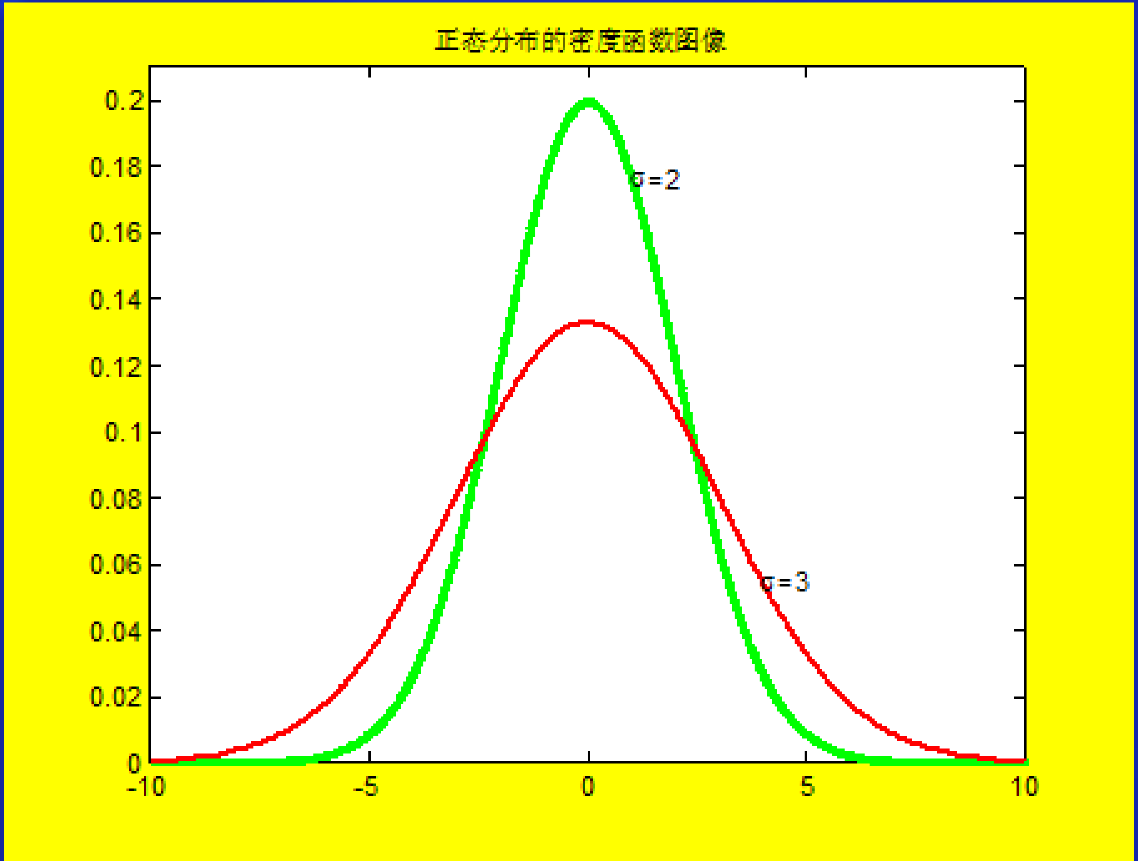
3.正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$： $E\left(X\right)=\mu.\ D(X)=\sigma^2$

$$D\left(X\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\mu\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{令}\frac{x-\mu}{\sigma}=t}{=}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2t^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\sigma dt$$

$$=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}tde^{-\frac{t^2}{2}}=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\underbrace{\left[te^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{0}-\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{\sqrt{2\pi}}\right\}$$

$$=\sigma^2$$


正态分布的密度函数图像
σ=2
σ=3
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-10
-5
0
5
10

例1 设区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$，随机变量 (X,Y)服从D上的均匀分布，求$Z=(X-Y)^2$的期望和方差.

解 随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$$

故 $E(Z)=E\left[(X-Y)^2\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-y)^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 (x-y)^2\mathrm{d}y=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}\,x=\frac{1}{6}$$

$$E\left(Z^2\right)=E\left[(X-Y)^4\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-y)^4 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 (x-y)^4\mathrm{d}y=\frac{1}{15}$$

所以

$$D(Z)=E\left(Z^2\right)-\left[E(Z)\right]^2=\frac{1}{15}-\frac{1}{36}=\frac{7}{180}$$

例2 设随机变量 X 服从区间 $(-a, a)$ 上的均匀分布，且满足 $P(X>1)=\frac{1}{3}$，试求方差 $D(X)$.

解 由 $P(X>1)=\frac{1}{3}$，知 $\frac{1}{3}=\int_1^a \frac{1}{2a}\mathrm{d}x=\frac{a-1}{2a} \Rightarrow a=3$

即 $X \sim R(-3,3)$，故

$$D(X)=\frac{[3-(-3)]^2}{12}=3.$$

例3 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-3x} & x>0 \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$ 求$E(X)$.

解 记 $Y\sim E(3)$, 则 $E(Y^2)=D(Y)+E^2(Y)=\frac{2}{9}$, 所以

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2e^{-3x}\mathrm{d}x=\frac{2!}{3^{2+1}}=\frac{2}{27}$$

或者 $=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}x^2\cdot 3e^{-3x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}E(Y^2)=\frac{2}{27}.$

本节内容及要求

下节内容

1

方差定义

常见分布的方差

2

方差的概率意义

熟练使用常见分布方差

3

方差的性质

谢　谢

同济大学数学科学学院概率统计教学团队