协方差

定义4.3 设(X,Y)是二维随机变量，称

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

为X与Y的**协方差**，记为$\operatorname{cov}(X,Y)$. **(covariance)**

$$\text{设}g(X,Y)=\left[X-E(X)\right]\left[Y-E(Y)\right]$$

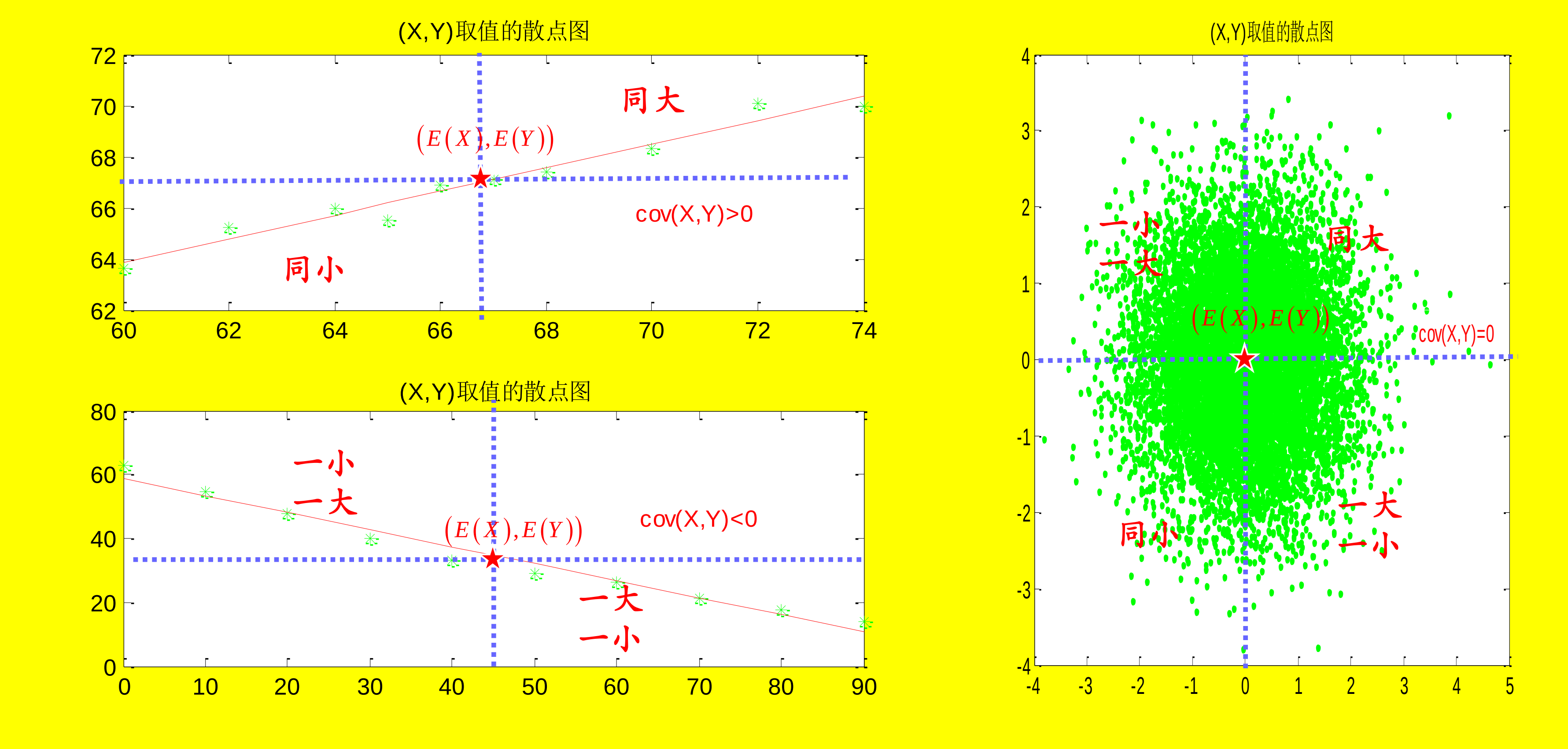
$$\operatorname{cov}(X,Y)>0\text{即}E\left[g(X,Y)\right]>0$$

$$\Leftrightarrow\{X>E(X)\}\cap\{Y>E(Y)\}\text{或}\{X<E(X)\}\cap\{Y<E(Y)\}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)<0\text{即}E\left[g(X,Y)\right]<0$$ 以较大的可能发生

$$\Leftrightarrow\{X>E(X)\}\cap\{Y<E(Y)\}\text{或}\{X<E(X)\}\cap\{Y>E(Y)\}$$

协方差反映 的是X与Y之间协同发展变化的趋势



协方差刻画了随机变量之间的**线性关系**

注：(1)由定义及期望性质可得协方差的计算公式：

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X,Y)&=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}\\
&=E[XY-X\cdot E(Y)-E(X)\cdot Y+E(X)\cdot E(Y)]\\
&=E(XY)-E(Y)E(X)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y)\\
&=E(XY)-E(X)E(Y).
\end{aligned}$$

(2) $\operatorname{cov}(X,X)=D(X)$

(3)在方差的性质(3)中，显然有

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$$

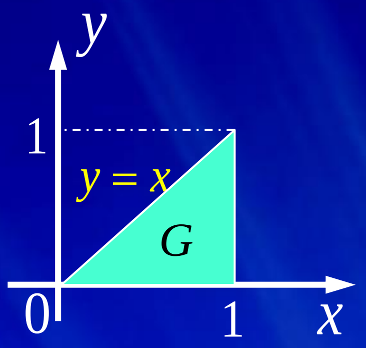
$$D(aX\pm bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)\pm 2ab\operatorname{cov}(X,Y)$$

(4)在方差的性质(4)中，当X与Y相互独立时，有

$$\operatorname{cov}(X,Y)=0.$$

例1 设(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x & (x,y)\in G\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$$



试求协方差 $\operatorname{cov}(X,Y)$. 其中$G=\{(x,y):0<y<x<1\}$

解 $E(X)=\int_0^1 dx\int_0^x x\cdot 3x dy=\dfrac{3}{4}$, $E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^x y\cdot 3x dy=\dfrac{3}{8}$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^x xy\cdot 3x dy=\frac{3}{10}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{3}{160}$$

例2 设(X,Y)的联合概率函数，求协方差 $\operatorname{cov}(X,Y)$.

$X \backslash Y$	1	2
-1	$1/4$	$1/6$
1	$1/4$	$1/3$

解 $E(X) = -1\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)+1\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$,

$$E(Y) = 1\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+2\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}$$

$$E(XY)=(-1)\times\frac{1}{4}+(-2)\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{12}.$$

定理4.4　设k,l,c都是常数，则(X,Y)的协方差满足

(1) $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$；

(2) $\operatorname{cov}(X,c)=0$；

(3) $\operatorname{cov}(kX,lY)=kl\operatorname{cov}(X,Y)$；

(4) $\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{m}X_i,\sum_{j=1}^{n}Y_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{cov}(X_i,Y_j)$.

证明： (2) $\operatorname{cov}(X,c)=E\{[X-E(X)][c-E(c)]\}=0$

(3) $\operatorname{cov}(kX,lY)=E\{[kX-kE(X)][l-lE(Y)]\}=kl\operatorname{cov}(X,Y)$

(4) $\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y_1)=E[(X_1+X_2)Y_1]-E(X_1+X_2)E(Y_1)$

$=E(X_1Y_1)+E(X_2Y_1)-E(X_1)E(Y_1)-E(X_2)E(Y_1)$

$=\operatorname{cov}(X_1,Y_1)+\operatorname{cov}(X_2,Y_1)$

例3 设随机变量 X_1, X_2 相互独立，且都服从参数为1的指数分布，$Y = 4X_1 - 3X_2, Z = X_1 + X_2$，试求 $\operatorname{cov}(Y, Z)$.

解 $\operatorname{cov}(Y, Z) = \operatorname{cov}(4X_1 - 3X_2, X_1 + X_2)$

$$= 4\operatorname{cov}(X_1, X_1) + 4\operatorname{cov}(X_1, X_2)$$

$$-3\operatorname{cov}(X_2, X_1) - 3\operatorname{cov}(X_2, X_2)$$

$$= 4D(X_1) + \operatorname{cov}(X_1, X_2) - 3D(X_2) = 1$$

本节内容及要求

1

协方差定义

理解协方差的概率含义

2

协方差的性质

熟练使用性质

下讲内容

1,2

相关系数

谢　谢

同济大学数学科学学院概率统计教学团队