

Lista de Exercícios referente à Prova 2

Professora Ana Paula

FEELT - EP - Probabilidade e Distribuição de Probabilidade

22 de novembro de 2018

Livro: Estatística Básica. Morettin & Bussab. 6ª. Ed.

Probabilidade (pág. 122-127): 26, 27, 33, 37, 38, 40, 41, 42

Distribuição de Probabilidade Discreta (pág. 151): 20, 21, 22, 24, 25, 26

Distribuição de Probabilidade Contínua (pág. 180): 14, 15, 17, 18, 19, 21, 21

Questão 26. Probabilidade - página 122

Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa ou um prato à base de carne. Considere que 20% dos fregueses do sexo masculino preferem a salada, 30% das mulheres escolhem carne, 75% dos fregueses são homens e os seguintes eventos:

H: freguês é homem A: freguês prefere salada

M: freguês é mulher B: freguês prefere carne

Calcular:

(a) $P(H)$, $P(A|H)$, $P(B|M)$;

(b) $P(A \cap H)$, $P(A \cup H)$;

(c) $P(M|A)$.

Solução. Primeiramente é possível montar uma tabela com os dados fornecidos:

Tabela 1: Tabela dos dados fornecidos.

	Salada	Carne	Total
Homens	20% de 75%	80% de 75%	75%
Mulheres	70% de 25%	30% de 25%	25%
Total	32.5%	67.5%	100%

A partir dessa tabela, foram realizados os cálculos necessários para chegar na tabela, sobre a qual será retirada as informações para a resolução dos itens (a), (b) e (c).

Tabela 2: Desenvolvimento dos dados da Tabela 1.

	Salada (A)	Carne (B)	Total
Homens (H)	15%	60%	75%
Mulheres (M)	17.5%	7.5%	25%
Total	32.5%	67.5%	100%

(a) $P(H)$, $P(A|H)$, $P(B|M)$;

De acordo com a tabela:

$$P(H) = \frac{75\%}{100\%} = 75\%$$

$$P(A|H) = \frac{15\%}{75\%} = 20\%$$

$$P(B|M) = \frac{7.5\%}{25\%} = 30\%$$

(b) $P(A \cap H)$, $P(A \cup H)$;

De acordo com a tabela:

$$P(A \cap H) = P(A|H) * P(H) = 20\% * 75\% = 15\%$$

$$P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H) = \frac{32.5\%}{100\%} + \frac{75\%}{100\%} - 15\% = 92.5\%$$

(c) $P(M|A)$.

De acordo com a tabela:

$$P(M|A) = \frac{17.5\%}{32.5\%} = 53.85\%$$

Questão 27. Probabilidade - página 122

Uma companhia de seguros analisou a frequência com que 2.000 segurados (1.000 homens e 1.000 mulheres) usaram o hospital. Os resultados são apresentados na tabela:

	Homens	Mulheres
Usaram o hospital	100	150
Não usaram o hospital	900	850

- (a) Qual a probabilidade de que uma pessoa segurada use o hospital?
- (b) O uso do hospital independe do sexo do segurado?

Solução. Construiu-se uma nova tabela com os dados totais do problema:

Tabela 3: Dados totais do problema.

	Homens (H)	Mulheres (M)	Total
Usaram o hospital (S)	100	150	250
Não usaram o hospital (N)	900	850	1750
Total	1000	1000	2000

- (a) De acordo a tabela:

$$P(S) = \frac{250}{2000} = 12.5\%$$

- (b) Pede-se a correlação entre as variáveis S, H e M, que são variáveis quantitativas.

Questão 33. Probabilidade - página 123

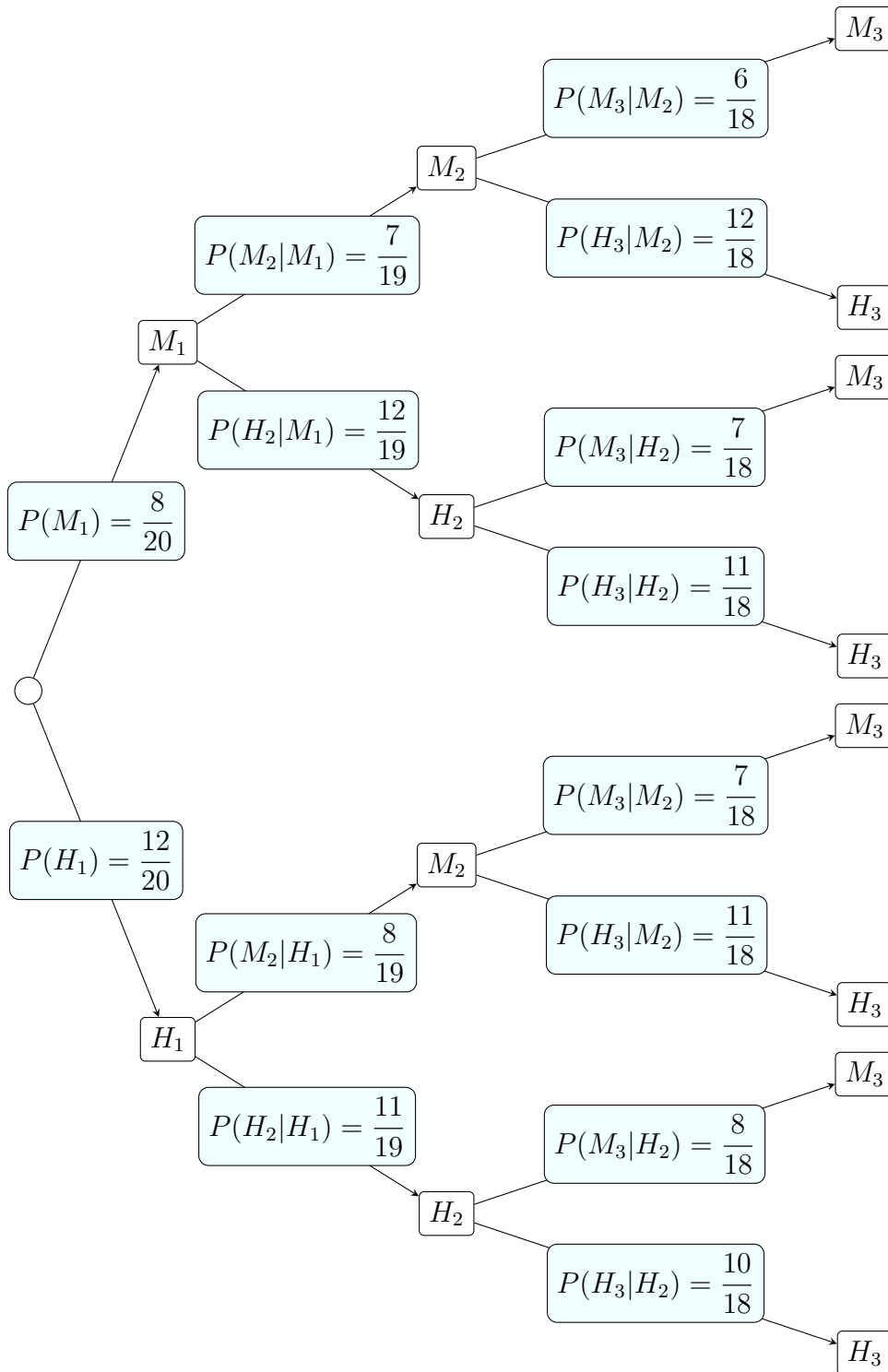
Um grupo de 12 homens e 8 mulheres concorre a três prêmios através de um sorteio, sem reposição de seus nomes. Qual a probabilidade de:

- (a) nenhum homem ser sorteado?
- (b) um prêmio ser ganho por homem?
- (c) dois homens serem premiados?

Solução.

Como não há reposição dos nomes, esse não pode ser considerado um caso de distribuição binomial, uma vez que as $n = 5$ repetições não são situações independentes. Lembrando que a distribuição binomial é um dos 4 modelos probabilísticos vistos em sala para variáveis aleatórias discretas (v.a.).

Assim, é necessário construir o diagrama em árvore com as probabilidades de cada situação, sendo que para o primeiro premiado tem-se o espaço amostral $\Omega_1 = 12 + 8 = 20$, para o segundo $\Omega_2 = 19$ e para o terceiro $\Omega_3 = 18$. Além disso, adote H para homem premiado e M para mulher premiada.



A partir do diagrama em árvore acima tem-se:

(a) $P(\text{nenhum H ser sorteado}) = P(\text{todas M serem premiadas})$, assim:

$$P(M_3|M_2|M_1) = P(M_3|M_2) \cdot P(M_2|M_1) \cdot P(M_1) = \frac{6}{18} \frac{7}{19} \frac{8}{20} \approx 4,91\%$$

(b) A probabilidade de somente um homem ser premiado ($P(B)$) será:

$$P(B) = P(H_3|M_2|M_1) + P(M_3|H_2|M_1) + P(M_3|M_2|H_1)$$

$$P(H_3|M_2|M_1) = P(H_3|M_2) \cdot P(M_2|M_1) \cdot P(M_1) = \frac{12}{18} \frac{7}{19} \frac{8}{20} \approx 9,82\%$$

$$P(M_3|H_2|M_1) = P(M_3|H_2) \cdot P(H_2|M_1) \cdot P(M_1) = \frac{7}{18} \frac{12}{19} \frac{8}{20} \approx 9,82\%$$

$$P(M_3|M_2|H_1) = P(M_3|M_2) \cdot P(M_2|H_1) \cdot P(H_1) = \frac{7}{18} \frac{8}{19} \frac{12}{20} \approx 9,82\%$$

$$\text{Logo, } P(B) = 9,82\% + 9,82\% + 9,82\% = 29,47\%$$

(c) A probabilidade de somente dois homens serem premiados ($P(C)$) será:

$$P(C) = P(H_3|H_2|M_1) + P(M_3|H_2|H_1) + P(H_3|M_2|H_1)$$

$$P(H_3|H_2|M_1) = P(H_3|H_2) \cdot P(H_2|M_1) \cdot P(M_1) = \frac{11}{18} \frac{12}{19} \frac{8}{20} \approx 15,44\%$$

$$P(M_3|H_2|H_1) = P(M_3|H_2) \cdot P(H_2|H_1) \cdot P(H_1) = \frac{8}{18} \frac{11}{19} \frac{12}{20} \approx 15,44\%$$

$$P(H_3|M_2|H_1) = P(H_3|M_2) \cdot P(M_2|H_1) \cdot P(H_1) = \frac{11}{18} \frac{8}{19} \frac{12}{20} \approx 15,44\%$$

$$\text{Logo, } P(C) = 15,44\% + 15,44\% + 15,44\% = 46,32\%$$

Questão 37. Probabilidade - página 123

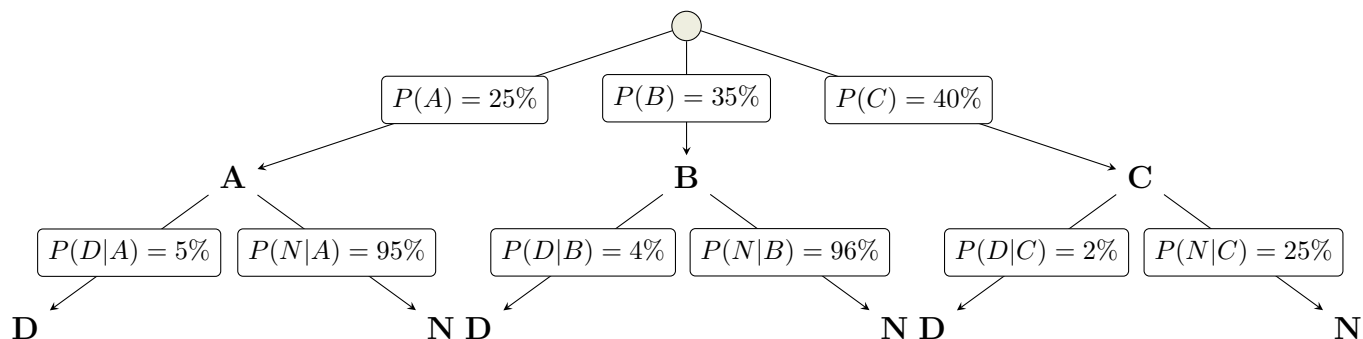
Em uma fábrica de parafusos, as máquinas A, B e C produzem 25%, 35% e 40% do total, respectivamente. Da produção de cada máquina 5%, 4% e 2%, respectivamente, são parafusos defeituosos. Escolhe-se ao acaso um parafuso e verifica-se que é defeituoso. Qual a probabilidade de que o parafuso venha da máquina A; da B; e da C?

Solução. Para a resolução dessa questão será necessário utilizar o Teorema de Bayes.

Teorema de Bayes: Seja $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ uma partição do espaço amostral Ω e A um evento desse espaço amostral, tem-se:

$$P(R_k|A) = \frac{P(A|R_k) \cdot P(R_k)}{\sum P(A|R_i) \cdot P(R_i)}$$

A partir dos dados do problema é possível montar o seguinte diagrama em árvore:



Adote:

D: parafuso defeituoso

N: parafuso não defeituoso

1. Probabilidade de que o parafuso venha da máquina A:

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C)} \\ &= \frac{0,05 \cdot 0,25}{0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,40} = \frac{0,0125}{0,345} = 3,62\% \end{aligned}$$

2. Probabilidade de que o parafuso venha da máquina B:

Do item anterior, tem-se:

$$P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C) = 0,345$$

$$\begin{aligned} P(B|D) &= \frac{P(D|B) \cdot P(B)}{P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C)} \\ &= \frac{0,04 \cdot 0,35}{0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,40} = \frac{0,014}{0,345} = 4,06\% \end{aligned}$$

3. Probabilidade de que o parafuso venha da máquina C:

$$\begin{aligned} P(C|D) &= \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C)} \\ &= \frac{0,02 \cdot 0,40}{0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,40} = \frac{0,008}{0,345} = 2,32\% \end{aligned}$$

Questão 38. Probabilidade - página 123

Um fabricante afirma que apenas 5% de todas as válvulas que produz têm duração inferior a 20 horas. Uma indústria compra semanalmente um grande lote de válvulas desse fabricante, mas sob a seguinte condição: ela aceita o lote se, em dez válvulas escolhidas ao acaso, no máximo uma tiver duração inferior a 20 horas; caso contrário, o lote todo é rejeitado.

(a) Se o fabricante de fato tem razão, qual a probabilidade de um lote ser rejeitado?

(b) Suponha agora que o fabricante esteja mentindo, isto é, na verdade a proporção de válvulas com duração inferior a 20 horas é de 10%. Qual a probabilidade de um lote ser aceito, segundo o critério acima?

Solução. O exercício envolve o conteúdo de variáveis aleatórias discretas, especialmente a distribuição binomial, na qual são realizados n ensaios de Bernoulli.

Na distribuição binomial para n ensaios e k sucessos, logo $n - k$ fracassos, tem-se:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

onde p é a probabilidade de se obter sucesso, e q de se obter fracasso, sendo $q = 1 - p$ (probabilidade complementar).

(a) A probabilidade do lote ser rejeitado equivale dizer:

$$P(0 \leq X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

em que X é o número de válvulas com duração inferior a 20 horas, tal que $X \sim Ber(p)$ e p representa o sucesso - válvula com duração inferior a 20 horas - em $n = 10$ ensaios. Do exercício tem-se $p = 5\% = 0.05$, logo $q = 1 - p = 0.95$.

Assim, tem-se:

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0,05^0 \cdot 0,95^{10-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0,95^{10} \approx 59,87\%$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} 0,05^1 \cdot 0,95^{10-1} = 10 \cdot 0,05 \cdot 0,95^9 \approx 31,51\%$$

$$P(0 \leq X \leq 1) = 59,87\% + 31,51\%$$

(b) Para $p = 10\%$, $0,10$ e $q = 0,90$, tem-se:

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0,10^0 \cdot 0,90^{10-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0,90^{10} \approx 34,87\%$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} 0,10^1 \cdot 0,90^{10-1} = 10 \cdot 0,1 \cdot 0,90^9 \approx 38,74\%$$

$$P(0 \leq X \leq 1) = 34,87\% + 38,74\% = 73,61\%$$

Questão 40. Probabilidade - página 124

A empresa M & B tem 15.800 empregados, classificados de acordo com a tabela abaixo.

Idade/Sexo	Homens (M)	Mulheres (F)	Total
< 25 anos (A)	2.000	800	2.800
25 – 40 anos (B)	4.500	2.500	7.000
> 40 anos (C)	1.800	4.200	6.000
Total	8.300	7.500	15.800

Se um empregado é selecionado ao acaso, calcular a probabilidade de ser ele:

- (a) um empregado com 40 anos de idade ou menos;
- (b) um empregado com 40 anos de idade ou menos, e mulher;
- (c) um empregado com mais de 40 anos de idade e que seja homem;
- (d) uma mulher, dado que é um empregado com menos de 25 anos.

Solução.

(a) Como os eventos são independentes $P(A \cap B) = 0$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2800}{15800} + \frac{7000}{15800} + 0 = \frac{9800}{15800} = 62,03\%$$

(b) $P(A \cup B \cap F) = P(A \cup B|F) \cdot P(F)$

$$P(A \cup B \cap F) = [P(A|F) + P(B|F) - P(A \cap B|F)] \cdot P(A \cup B|F) \cdot P(F)$$

$$= \left[\frac{800}{7500} + \frac{2500}{7500} - 0 \right] \cdot \frac{7500}{15800} = \frac{3300}{15800} = 20,89\%$$

$$(c) P(C \cap M) = P(C|M) \cdot P(M) = \frac{1800}{8300} \cdot \frac{8300}{15800} = 11,39\%$$

$$(d) P(F|A) = \frac{800}{2800} = 28,57\%$$

Questão 41. Probabilidade - página 124

Considere o Problema 40 e suponha que escolhamos dois empregados ao acaso, com reposição. Qual a probabilidade de que:

- (a) ambos sejam do sexo masculino;
- (b) o primeiro tenha menos de 25 anos, e o segundo seja do sexo masculino e tenha menos de 25 anos;
- (c) nenhum tenha menos de 25 anos.

Solução.

Como a escolha dos empregados é com reposição, logo os ensaios são independentes, e o ensaio é repetido $n = 2$ vezes, tem-se que a variável aleatória $X = \text{sexo}$ ou $X = \text{idade}$ segue uma Distribuição Binomial.

- (a) Considere a probabilidade de ser do sexo M como sucesso p .

$$P(M) = \frac{8300}{15800} = 52,53\% \approx 0,53$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$P(X = 2) = \binom{2}{2} (0,53)^2 (1 - 0,53)^{2-2} = p^2 = (0,53)^2 = 28,09\%$$

- (b) Considere dois eventos E_1 e E_2 , tal que:

$$\#E_1 = \#A$$

$$\#E_2 = \#M \cup A$$

Logo, pede-se $P(E_1 \cap E_2)$.

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

Calculando as probabilidades separadamente, tem-se:

$$P(E_1) = P(A) = \frac{2800}{15800}$$

$$P(E_2) = P(M \cup A) = P(M|A) \cdot P(A) = \frac{2000}{2800} \cdot \frac{2800}{15800} = \frac{2000}{15800}$$

Assim, tem-se:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{2800}{15800} \cdot \frac{2000}{15800} = 2,24\%$$

(c) Considere a probabilidade de ser menor de 25 anos como fracasso q .

$$q = P(A) = \frac{2800}{15800} = 17,72\% \approx 0,18\%$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$P(X = 2) = \binom{2}{2} (0,18)^2 (1 - 0,18)^{2-2} = q^2 = (0,18)^2 = 3,24\%$$

$$p = 1 - q \Rightarrow p = 1 - 0,0324 = 96,76\%$$

Questão 42. Probabilidade - página 124

Resolva as questões (a) e (c) do Problema 41, supondo que a amostragem é feita sem reposição.

Solução.

Como a amostragem é feita sem reposição os ensaios não seguem a distribuição de Bernoulli, no entanto o cálculo é intuitivo, por isso não será esquematizado os diagramas em árvore para cada situação.

$$(a) \quad P(M_1 \cup M_2) = P(M_2|M_1) \cdot P(M_1)$$

(como o evento não é independente é necessária essa notação)

$$P(M_1) = \frac{8300}{15800}$$

$$P(M_2|M_1) = \frac{8299}{15799}$$

Assim,

$$P(M_1 \cup M_2) = P(M_1) \cdot P(M_2|M_1) = \frac{8300}{15800} \cdot \frac{8299}{15799} = 27,59\%$$

(c) O cálculo será realizado a partir da probabilidade complementar, ou seja:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)$$

(como o evento não é independente é necessária essa notação)

$$P(A_1) = \frac{2800}{15800}$$

$$P(A_2|A_1) = \frac{2799}{15799}$$

Assim,

$$P(\overline{E}) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{2800}{15800} \cdot \frac{2799}{15799} = 3,14\%$$

Portanto,

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - 0,0314 = 96,86\%$$

Questão 20. Distribuição de Probabilidade Discreta - Página 151

Para os exercícios (a) a (e) abaixo, considere o enunciado: Das variáveis abaixo descritas, assinale quais são binomiais, e para essas dê os respectivos campos de definição e função de probabilidade. Quando julgar que a variável não é binomial, aponte as razões de sua conclusão.

(a) De uma urna com dez bolas brancas e 20 pretas, vamos extrair, com reposição, cinco bolas. X é o número de bolas brancas nas cinco extrações.

(b) Refaça o problema anterior, mas dessa vez as n extrações são sem reposição.

(c) Temos cinco urnas com bolas pretas e brancas e vamos extrair uma bola de cada urna. Suponha que X seja o número de bolas brancas obtidas no final.

(d) Vamos realizar uma pesquisa em dez cidades brasileiras, escolhendo ao acaso um habitante de cada uma delas e classificando-o em pró ou contra um certo projeto federal. Suponha que X seja o número de indivíduos contra o projeto no final da pesquisa.

(e) Em uma indústria existem 100 máquinas que fabricam determinada peça. Cada peça é classificada como boa ou defeituosa. Escolhemos ao acaso um instante de tempo e verificamos uma peça de cada uma das máquinas. Suponha que X seja o número de peças defeituosas.

Solução.

(a) A variável é binomial.

(b) Como não há reposição, a variável não é binomial, pois os ensaios não são independentes.

(c) A variável é binomial.

(d) A variável é binomial.