

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA



Distribuição de Probabilidade

Lesly Montúfar

11811ETE001

FEELT

23 de novembro de 2018

Questão 1.

Um sistema de computadores usa senhas que são exatamente sete caracteres, e cada caractere é uma das 26 letras (a-z) ou 10 inteiros (0-9). Você mantém uma senha para esse sistema de computadores. Seja A o subconjunto de senhas que começam com uma vogal (a, e, i, o ou u) e seja B o subconjunto de senhas que terminam com um número par (0, 2, 4, 6 ou 8).

(a) 1 ponto Suponha que um invasor selecione uma senha ao acaso. Qual a probabilidade de sua senha ser selecionada?

(b) 2 pontos Suponha que um invasor saiba que sua senha esteja no evento A e selecione uma senha ao acaso a partir desse subconjunto. Qual é a probabilidade de sua senha ser selecionada?

(c) 2 pontos Suponha que um invasor saiba que sua senha esteja em A e em B, e selecione uma senha ao acaso a partir desse subconjunto. Qual é a probabilidade de sua senha ser selecionada?

Solução.

(a) Como são sete caracteres a serem escolhidos e cada caractere possui um espaço amostral que contém letras e números, tem-se o seguinte espaço amostral:

$$\Omega = 26 + 10 = 36$$

Como a escolha de cada caractere é um evento independente, tem-se que a probabilidade de que minha senha seja selecionada (chamada de evento M) é de:

$$P(M) = \frac{1}{36^7} \approx 1,2761 \cdot 10^{-9} \%$$

(b) Pede-se $P(M|A)$, logo o espaço amostral para o primeiro caractere reduz-se a:

$$\Omega_1 = 5 \quad (5 \text{ vogais})$$

Tem-se a seguinte probabilidade:

$$P(M|A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{36^6} \approx 9,1879 \cdot 10^{-9} \%$$

(c) Pede-se $P(M|A \cup B)$, assim, além do espaço amostral para o primeiro caractere reduzir-se, o espaço amostral para o último também reduz-se e obtém-se:

$$\Omega_1 = 5 \quad (5 \text{ vogais})$$

$$\Omega_7 = 5 \quad (5 \text{ números pares})$$

Assim, tem-se o seguinte resultado:

$$P(M|A \cup B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{36^5} \cdot \frac{1}{5} \approx 66,1527 \cdot 10^{-9} \%$$

Questão 13.

5 pontos Medidas de espessura em um processo de recobrimento são feitas com a precisão de centésimo de milímetro. As medidas de espessura estão uniformemente distribuídas, com valores 0,15; 0,16; 0,17; 0,18 e 0,19. Determine a média e a variância da espessura de recobrimento para esse processo.

Solução.

Cálculo da média:

$$\bar{X} = \frac{0,15 + 0,16 + 0,17 + 0,18 + 0,19}{5} = 0,17$$

Cálculo da variância:

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 0,0002$$

Questão 15.

5 pontos A probabilidade de que um visitante de um site na internet forneça dados de contato para informações adicionais é de 0,01. Considere que 1.000 visitantes da página se comportem independentemente. Determine as seguintes probabilidades:

Solução.

Como os ensaios são independentes, seguem a distribuição binomial, que é um tipo de distribuição para uma variável aleatória discreta.

Considere o ato de fornecer os dados de contato como sucesso, logo:

$$n = 1000$$

$$p = 0,01 \quad \text{e} \quad q = 1 - p = 0,99$$

(a) A probabilidade de que nenhum dos visitantes forneçam dados de contato, ou seja $P(X = 0)$, pois $k = 0$ em $n = 1000$ ensaios, é:

$$X \sim b(n, p) \Rightarrow X \sim b(1000, 0.01)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \Rightarrow P(X = 0) = \binom{1000}{0} (0,01)^0 \cdot (0,99)^{1000}$$

Portanto, $P(X = 0) \approx 4,3171 \cdot 10^{-5}$

(b) Pede-se $P(X=10)$, logo:

$$P(X = 10) = \binom{1000}{10} (0,01)^{10} \cdot (0,99)^{1000-10}$$

Portanto, $P(X = 10) \approx 12,57\%$.

(c) Pede-se $P(X > 3)$, mas tem-se a relação:

$$P(X > 3) = 1 - P(X = 0) - (P = 1) - (P = 2) - (P = 3) \quad (1)$$

Do item (a) tem-se $P(X = 0) = 4,3171 \cdot 10^{-5}$.

$$P(X = 1) = \binom{1000}{1} (0,01)^1 \cdot (0,99)^{999} = 4,3601 \cdot 10^{-5}$$

$$P(X = 2) = \binom{1000}{2} (0,01)^2 \cdot (0,99)^{998} = 2,2002 \cdot 10^{-3}$$

$$P(X = 3) = \binom{1000}{3} (0,01)^3 \cdot (0,99)^{997} = 7,3932 \cdot 10^{-3}$$

Substituindo $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ e $P(X = 3)$ em (1), tem-se:

$$P(X > 3) = 1 - 4,3171 \cdot 10^{-5} - 4,3607 \cdot 10^{-4} - 2,2002 \cdot 7,3932 \cdot 10^{-3} \approx 99,01\%$$

Questão 18. A largura do espaçamento é uma propriedade importante em um cabeçote magnético de gravação. Em unidades codificadas, se a largura for uma variável aleatória contínua ao longo da faixa de $0 < x < 2$, com $f(x) = 0,5x$, determine a função densidade de probabilidade acumulada da largura do espaçamento.

Solução. A função de densidade de probabilidade acumulada $F(X)$ é dada por:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

$$\text{Assim, tem-se: } \int 0,5 x \, dx = 0,5 \frac{x^2}{2} = 0,25 x^2$$

$$\text{Logo, escrito de outra forma: } F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ para } x < 0 \\ 0,25x^2, & \text{ para } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & , \text{ para } x > 2 \end{cases}$$

Questão 16. O número de chamadas telefônicas que chegam a uma central é frequentemente modelado como uma variável aleatória de Poisson. Considere que, em média, há 10 chamadas por hora.

- (a) Qual é a probabilidade de que haja exatamente cinco chamadas em uma hora?
- (b) Qual é a probabilidade de que haja três ou menos chamadas em uma hora?
- (c) Qual é a probabilidade de que haja exatamente 15 chamadas em duas horas?
- (d) Qual é a probabilidade de que haja exatamente cinco chamadas em 30 minutos?

Solução.

- (a) Em média, há 10 chamadas por hora, logo $\lambda = 10$ e pede-se $P(N = 5)$.

$$P(N = 5) = \frac{e^{-10} \cdot 10^5}{5!} \approx 0,0378 = 3,78\%$$

- (b) O intervalo de tempo continua sendo 1 hora, $\lambda = 10$ ainda e pede-se $P(N \leq 3)$.

$$P(N \leq 3) = P(N = 0) + P(N = 1) + P(N = 2) + P(N = 3)$$

$$P(N \leq 3) = \frac{e^{-10} \cdot 10^0}{0!} + \frac{e^{-10} \cdot 10^1}{1!} + \frac{e^{-10} \cdot 10^2}{2!} + \frac{e^{-10} \cdot 10^3}{3!}$$

$$P(N \leq 3) = 0,01033 \approx 1,03\%$$

- (c) Em duas horas, espera-se em média $10 \cdot 2$ chamadas = 20 chamadas, pois são em média 10 chamadas por hora. Assim, $\lambda = 20$ chamadas e pede-se $P(N = 15)$.

$$P(N = 15) = \frac{e^{-20} \cdot 10^{15}}{15!} \approx 0,0516 = 5,16\%$$

(d) Em 30 minutos, a média de chamadas é de 10/2 chamadas, logo $\lambda = 5$ chamadas e pede-se $P(N = 5)$, em que $N \sim Pois(5)$.

$$P(N = 5) = \frac{e^{-5} \cdot 5^5}{5!} \approx 0,1754 = 17,54\%$$