FORMULARIO DE VARIABLE COMPLEJA

$z = x + iy$, $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$; $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$ si y solo si $x_1=x_2$ y $y_1=y_2$.
$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
$(x_1 + iy_1)*(x_2 + iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2) + i(y_1x_2+x_1y_2)$

$z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}\right),(z\neq 0)$, $\frac{z_1}{z_2}=z_1z_2^{-1}$

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $\bar{z}=x-iy$, $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$, $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$

; $z\bar{z}=|z|^2$, $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$, $x=r\cos\theta$

$y=r\operatorname{sen}\theta$, $z=r\operatorname{cis}\theta$, $z_1z_2=r_1r_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$;

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)$, $z^n=r^n\operatorname{cis}n\theta$;

$z^{1/n}=\sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\frac{\theta+k(360^\circ)}{n}$

$w=f(z)$; $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$e^z=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y)$; $e^{z+w}=e^ze^w$; $e^z\neq 0$

$|e^z|=e^x$; e^z es periodica ; $\overline{e^z}=e^{\bar{z}}$

$e^z=1\Leftrightarrow z=2\pi ni, n\in\mathbb{Z}$; $\operatorname{sen} z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$; $\operatorname{sen}^2 z+\cos^2 z=1$

$\operatorname{sen}(-z)=-\operatorname{sen}(z)$; $\cos(-z)=\cos(z)$

$\operatorname{sen}(z\pm w)=\operatorname{sen} z\cos w\pm\cos z\operatorname{sen} w$

$\cos(z\pm w)=\cos z\cos w\mp\operatorname{sen} z\operatorname{sen} w$

$\operatorname{senh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$; $\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$

$\cosh^2 z-\operatorname{senh}^2 z=1$; $\operatorname{senh}(-z)=-\operatorname{senh}(z)$

$\cosh(-z)=\cosh(z)$

$\operatorname{senh}(z\pm w)=\operatorname{senh} z\cosh w\pm\cosh z\operatorname{senh} w$

$\cosh(z\pm w)=\cosh z\cosh w\pm\operatorname{senh} z\operatorname{senh} w$

$\operatorname{sen} iz=i\operatorname{senh} z$; $\cos iz=\cosh z$; $\ln z=\ln|z|+i\arg z$

$a^b=e^{b\ln a}$. Sea $f:A\subset\mathbb{C}$ con A abierto y $L\in\mathbb{C}$

$\lim_{z\to zo}f(z)=L$ si para toda e>0 existe d > 0 tal que para $0<|z-z_0|<\delta$ se tiene que $|f(z)-L|<\varepsilon$. Si $\lim_{z\to zo}f(z)$ existe este es único. Si $\lim_{z\to zo}f(z)=L$ y $\lim_{z\to zo}g(z)=M$, entonces: $\lim_{z\to zo}f(z)+g(z)=L+M$

$\lim_{z\to zo}f(z)g(z)=LM$; $\lim_{z\to zo}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{L}{M}$

Si f y g son iguales en una vecindad de z_0 excepto en z_0 y $\lim_{z\to zo}f(z)=L$ entonces $\lim_{z\to zo}g(z)=L$

Si f(z)=u(x,y)+iv(x,y), entonces: $\lim_{z\to zo}f(z)=L=L_1+iL_2$ si y solo si $\lim_{(x,y)\to(xo,y0)}u(x,y)=L_1$ y $\lim_{(x,y)\to(xo,y0)}v(x,y)=L_2$.

f es continua en z_0 si $\lim_{z\to zo}f(z)=f(z_0)$

Si f y g son continuas en z_0 entonces:
f+g es continua en z_0. fg es continua en z_0
f/g es continua en z_0 siempre que $g(z_0)\neq 0$
f(z)=u(x,y) + iv(x,y) es continua en $z_0=x_0+iy_0$ si y solo si u(x,y) y v(x,y) son continuas en (x_0, y_0).

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

a) f es derivable en z_0 si $f'(z_0)$ existe.
f es derivable en $A\subset\mathbb{C}$ si $f'(z_0)$ existe $\forall z_0\in A$, en este caso se dice que f es analítica u holomorfa en A.

b) f es analítica en z_0 si f' existe en una vecindad de z_0.
Una función analítica en **C** se llama entera.
Si $f'(z_0)$ entonces f es continua en z_0.
Teorema de Cauchy – Riemann. Si f(z)=u+iv es analítica en $z_0=x_0+iy_0$ entonces las funciones u y v satisfacen: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ en (x_0, y_0)

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\qquad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\qquad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

f(z)=u+iv es analítica en (x_0,y_0) si y solo si u y v tienen primeras derivadas parciales continuas en (x_0,y_0) y satisfacen las ecuaciones de Cauchy – Riemann en (x_0,y_0).
Si f y g son analíticas en A, entonces:
f+g es analítica en A y (f+g)' = f' + g'.
fg es analítica en A y (fg)' = fg' + f'g.
f/g es analítica en A y $(f/g)'=(gf'-fg')/g^2$ g≠0.

Integrales:

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b[u(x,y)+iv(x,y)][x'(t)+iy'(t)]dt$$

$$\int_\gamma(u,-v)\cdot(dx,dy)+i\int_\gamma(v,u)\cdot(dx,dy)$$

$$\int_\gamma[f(z)+g(z)]dz=\int_\gamma f(z)dz+\int_\gamma g(z)dz$$

$$\int_{-\gamma}f(z)dz=-\int_\gamma f(z)dz$$

$$\int_{\gamma1+\gamma2}f(z)dz=\int_{\gamma1}f(z)dz+\int_{\gamma2}f(z)dz$$

$\int_\gamma f(z)dz=\int_\Gamma f(z)dz$ Si Γ es una reparametrización de γ.

Si ∃ F analítica tal que F'=f entonces:

$$\int_\gamma f(z)dz=F(\gamma(b))-F(\gamma(a))=F(z)\Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}$$

Teorema de Cauchy – Goursat. Si f es analítica dentro y sobre una curva cerrada simple, entonces:

$$\oint_\gamma f(z)dz=0$$

Si f es analítica en una región simplemente conexa A y γ es suave en A, entonces: $\oint_\gamma f(z)dz=0$.

Análisis de Fourier

Si n y m ∈ Z, no negativos distintos,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx=0$$

Para cualquier par de enteros m y n

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\operatorname{sen}(nx)dx=0$$

Para cualquier entero positivo n:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2(mx)dx=\pi$$

Sea f una función integrable en [-L, L], los coeficientes de fourier en [-L, L] son:

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos(\tfrac{n\pi x}{L})dx\quad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\operatorname{sen}(\tfrac{n\pi x}{L})dx$$

La serie de Fourier de f es:

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

Sea f una función integrable en [-L, L]. Si f es par ⇒ $\int_{-L}^{L}f(x)dx=2\int_0^L f(x)dx$ Si f es impar $\int_{-L}^{L}f(x)dx=0$ Si f es par, la serie de fourier es

$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$ en donde $a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$ y

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\tfrac{n\pi x}{L})dx$$

Si f es impar su serie de Fourier es $\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$ en donde

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}(\tfrac{n\pi x}{L})dx$$

Si f continua en [-L, L] y f(L)=f(-L) y f' c.p.t entonces:

$$f'(x)=\frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-na_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+nb_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

$$\int_{-L}^{x}f(t)dt=a_0(x+L)+\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{a_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)-b_n\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)-\cos(n\pi)\right]\right\}$$

La serie de Fourier en cosenos de f en [0, L] es como la serie de una función par. La serie de Fourier en senos es como la serie de una función impar.
La transformada finita de Fourier en senos F_s de f se def:
$F_S(n)=\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}(nx)dx$. Sean f y f' cont en [0, pi], f'' c.p.t. ⇒ $S_n\{f''(x)\}=-n^2F_S(n)+nf(0)-n(-1)^nf(\pi)$
con n=1,2,3,...
La transformada finita de Fourier en cosenos F_c de f:
$F_C(n)=\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx$. Sean f y f' cont en [0, pi], f'' c.p.t. ⇒ $C_n\{f''(x)\}=-n^2F_C(n)-f'(0)+(-1)^nf'(\pi)$
con n=1,2,3,...
Serie de Fourier compleja de f (con periodo T):
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\omega 0t}$ donde ω0=2π/T y

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-in\omega 0t}dt$$

La integral de Fourier o representación integral:
$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty[A(\omega)\cos(\omega t)+B(\omega)\operatorname{sen}(\omega t)]d\omega$ t ∈ R en donde:
$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos(\omega\xi)d\xi$ y $B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\operatorname{sen}(\omega\xi)d\xi$
La integral de Fourier en cosenos: $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty[A(\omega)\cos(\omega t)]d\omega$
donde $A(\omega)=2\int_0^\infty f(\xi)\cos(\omega\xi)d\xi$ pasa lo mismo con la integral de Fourier en senos.
La integral de fourier compleja: $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[C(\omega)e^{i\omega t}]d\omega$
donde: $C(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{i\omega\xi}d\xi$
La transformada de fourier:
$F\{f(t)\}=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}dt$
La transformada inversa de Fourier:
$F^{-1}\{F(\omega)\}=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$

Tabla de derivadas:

$\frac{d}{dx}x=1$, $\frac{d}{dx}u^n=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}uv=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$

$\frac{d}{dx}\sqrt{u}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}\frac{u}{v}=\frac{v(du/dx)-u(dv/dx)}{v^2}$

si y=f(u), u=g(x): $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}u=\cos u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\cos u=-\operatorname{sen}u\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}\operatorname{tg}u=\sec^2u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\cot u=-\csc^2u\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}\sec u=\sec u\operatorname{tg}u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\csc u=-\csc u\cot u\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen}u=\frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}$

$\frac{d}{dx}\arccos u=-\frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}$, $\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}u=\frac{du/dx}{1+u^2}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\cot u=-\frac{du/dx}{1+u^2}$, $\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\sec u=\frac{du/dx}{u\sqrt{u^2-1}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\csc u=-\frac{du/dx}{u\sqrt{u^2-1}}$, $\frac{d}{dx}\operatorname{senh}u=\cosh u\frac{du}{dx}$

$$\frac{d}{dx}\cosh u=\operatorname{senh}u\frac{du}{dx}$$

$\frac{d}{dx}\operatorname{tgh}u=\sec h^2u\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}c\operatorname{tgh}u=-\cosh^2u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\sec hu=-\sec hu\operatorname{tgh}u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\csc hu=-\csc hu\coth u\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}\ln u=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\log_a u=\frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}a^u=a^u\ln a\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}u^v=vu^{v-1}\frac{du}{dx}+u^v\ln u\frac{dv}{dx}$

INTEGRALES:

$\int du=u+c$, $\int(du+dv-dw)=u+v-w+c$

$\int u^ndu=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c;n\neq -1$, $\int\frac{du}{u}=\ln u+c$

$\int e^udu=e^u+c$, $\int a^udu=\frac{a^u}{\ln a}+c;a=cte.$

$\int\ln udu=u(\ln u-1)+c$, $\int ue^udu=e^u(u-1)+c$

$\int\operatorname{sen}udu=-\cos u+c$, $\int\cos udu=\operatorname{sen}u+c$

$\int\operatorname{tg}udu=\ln|\sec u|+c$, $\int\cot udu=\ln|\operatorname{sen}u|+c$

$\int\sec udu=\ln|\sec u+\operatorname{tg}u|+c$

$\int\csc udu=\ln|\csc u-\cot u|+c$, $\int\sec^2udu=\operatorname{tg}u+c$

$\int\csc^2udu=-\cot u+c$, $\int\sec u\operatorname{tg}udu=\sec u+c$

$\int\csc u\cot udu=-\csc u+c$, $\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{1}{a}+c$

$\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c=-\frac{1}{2}\operatorname{tgh}^{-1}\frac{u}{a}+c$

$\int\frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+c=\frac{1}{2}\operatorname{tgh}^{-1}\frac{u}{a}+c$

$\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\operatorname{arcsen}\frac{u}{a}+c$

$\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|+c$

$=\operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a}+c(+)=\cosh^{-1}\frac{u}{a}+c(-)$

$\int\frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a}+c$

$\int\sqrt{a^2-u^2}du=\frac{1}{2}\left(u\sqrt{a^2-u^2}+a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}\right)$

$\int\sqrt{u^2\pm a^2}du=\frac{1}{2}(u\sqrt{u^2\pm a^2}\pm a^2\ln|u+\sqrt{u^2\pm a^2}|)+c$