INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

APUNTES DE CÁLCULO I

ELABORADOS POR

PROF. EDUARDO CHÁVEZ LIMA

M. EN C. MARIO H. RAMÍREZ DÍAZ

PROF. ANGEL SALVADOR MONTIEL SANCHEZ

2 MAYO DE 2005

PREFACIO

En el proceso de recopilación de material didáctico para la elaboración de los presentes apuntes fueron considerados tres aspectos fundamentales. Primero un apego total al programa de estudios de la asignatura de Calculo 1 de la ESCOM-IPN, segundo la experiencia misma en la impartición del curso en repetidas veces, así como la observancia de las necesidades del alumno en cuanto a la asignatura y tercero, la importancia de la aplicación del Cálculo en diversos campos de las ciencias e ingenierías. Considerando lo anterior, este material podrá ser de gran utilidad para el estudio de la mayoría de los tópicos de la asignatura. Estos tres factores en conjunto, dan como resultado un balance teórico-práctico optimo en su contenido, manejando los conceptos, definiciones y teoremas, a nuestro parecer, en sus formas más básicas, sin dejar del lado el formalismo que implica la materia, procurando además, no dar punto final a ningún tema sin antes respaldarlo dentro de un marco práctico debidamente estructurado de problemas resueltos, dando lugar todo lo anterior, a un seguimiento programático por demás completo.
El presente material contempla en su primer capítulo de manera introductoria algunas definiciones y conceptos fundamentales relacionados con las desigualdades los cuales son de suma importancia para el desarrollo posterior del curso. En el capítulo, 2 se enfoca a la descripción y desarrollo de límites y continuidad, considerando además en sus primeras secciones aplicaciones prácticas muy interesantes. Continuando con el programa, se desarrollan los conceptos relativos a derivadas, se manejan los conceptos de valores extremos y algunos teoremas importantes. Finalmente en el capítulo 3, se presenta la integral definida para la solución de una gran variedad de problemas.
El diseño, formato y presentación fueron pensados de tal forma, que los conceptos importantes se recalcan, por una parte, para resaltar su importancia, y por otra, para que el lector no tenga ninguna dificultad para la localización de algún tema en particular, cubriendo así el 100% del programa de la asignatura de Cálculo I, impartida en la ESCOM-IPN. Por al motivo, consideramos que los apuntes, pueden ser utilizados como material didáctico tanto por el profesor en la impartición del curso, como por el alumno a manera de guía, esperando así, que el presente trabajo sea un apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura.

PROF. EDUARDO CHÁVEZ LIMA

M. EN C. MARIO H. RAMÍREZ DÍAZ

PROF. ANGEL SALVADOR MONTIEL SANCHEZ

INDICE

INTRODUCCIÓN

CAPITULO II

CAPITULO III

3. 1 Integral indefinida

3.1.1. Función primitiva

3.2 Propiedades de la integral indefinida

3.3 Familias de funciones primitivas

3.3.1 Integración por cambio de variable.

3.3.1.1 Método en el que una función se toma bajo el signo de la diferencial.

3.3.1.2 Método de sustitución.

3.4.3 Integración por partes.

3.4 Integración de las clases principales de funciones elementales

3.4.1. Integrales elementales que contienen un trinomio de segundo grado.

3.4.2 Integración de fracciones racionales.

3.4.3 Integración de funciones trigonométricas e hiperbólicas.

3.4.4 Integración de ciertas funciones irracionales.

INTRODUCCIÓN.

Han existido en la historia de la humanidad hombres que dedican toda su vida al estudio de la ciencia; todo esto para que en la actualidad tengamos herramientas firmes para poder resolver problemas de suma importancia.

Podríamos mencionar a Arquímedes (287-212 A. C.) quién dio un método muy especial para calcular por ejemplo: el volumen de la esfera y otras figuras, algunos historiadores consideran que su método tuvo contribuciones o bases para el cálculo.

Uno de los más importantes es Isaac Newton (1641-1727 D. C.) a quién se le atribuye en forma específica el descubrimiento del cálculo infinitesimal pero si Isaac llegó a este descubrimiento fue porque se apoyo en hombros de gigantes como Rene Descartes (1596-1650), aunque a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646- 1716) se le debe la notación que conocemos en la actualidad.

El cálculo se invento en el siglo XVII para proporcionar una herramienta que resolviera algunos problemas en los que interviene el movimiento, por ejemplo para calcular el vuelo de un cohete, para predecir la trayectoria de una partícula cargada a través de un campo magnético y en general para tratar los diversos aspectos del movimiento, se necesitan los métodos del cálculo.

Se inventó para ayudar a resolver problemas de física y posteriormente se ha aplicado en muchos campos diferentes de la ciencia.

Una de las razones porque el cálculo es tan versátil es porque la derivada se utiliza en las razones de cambio de muchas cantidades por ejemplo:

1) Un químico usa las derivadas para predecir algunas reacciones químicas.

2) Un biólogo utiliza las derivadas en investigaciones sobre el crecimiento del número de bacterias en un cultivo.

OBJETIVOS.

0) REALES.

Expresando las propiedades de los números reales (campo, orden, valor absoluto), el alumno deberá resolver desigualdades entre ecuaciones lineales (A.3) y ecuaciones cuadráticas, así como combinaciones escribiendo el intervalo, solución y su gráfica.

1) CONCEPTO DE FUNCION.

Dada una función (polinomial, cocientes lineales, raíces cuadradas de pol de grado 2). El alumno escribirá el dominio y el rango por medio de (B.2) intervalos; apoyándose en tablas y gráficas.

2) FUNCIONES.

2.1) FUNCION LINEAL.

Dada una función lineal, el alumno obtendrá el valor de la pendiente y su intersección (B.1) con el eje vertical y la graficará apoyándose en una tabla.

Dada una tabla de valores para una función lineal, el alumno escribirá la ecuación en su (B.2) forma punto pendiente; así como su gráfica.

2.2) FUNCION EXPONENCIAL.

Dada una función exponencial, el alumno la graficará empleando una tabla de valores (B.1) los valores del dominio los tomará en un intervalo de [-5,5].

Dada una función exponencial y una tabla de valores de la misma, el alumno obtendrá el valor de la base y de la constante (B:2) para escribir la fórmula de dicha función y la graficará.

2.3) LOGARITMOS (*log*).

dada una ecuación de la forma $b = p \times a^x$, el alumno empleará una calculadora y tablas para obtener por ensayo y error el valor aproximado del exponente x, apoyándose en una calculadora (B.1).

Dada una ecuación de la forma $b = p \text{ x } a^x$, el alumno aplicará las propiedades de los logaritmos base 10 para determinar el valor del exponente x, apoyándose de una calculadora (B:2).

2.3.3.) LOGARITMO NATURAL (*ln*).

Dada una ecuación de la forma $b = Pe^x$, el alumno empleará una calculadora y tablas para obtener por ensayo y error el valor aproximado del exponente x (B.1).

Dada una ecuación de la forma $b = P \text{ x } e^x$, el alumno aplicará las propiedades de los logaritmos base e para determinar el valor del exponente x, apoyándose de una calculadora (B.2).

2.4) FUNCION INVERSA.

Dada una función, el alumno empleará su gráfica para decidir, si es o no invertible, si se escribirá la función inversa y si no mostrará gráficamente que es cortada por una línea horizontal en más de un punto (B.2).

0.- EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES.

El cálculo se basa en el sistema de los números reales y en sus propiedades. Pero, ¿Cuáles son los números reales y cuáles son sus propiedades?. Para contestar la pregunta comencemos con algunos sistemas numéricos más simples.

LOS ENTEROS Y LOS NUMEROS RACIONALES.

Los números más simples son los números naturales:

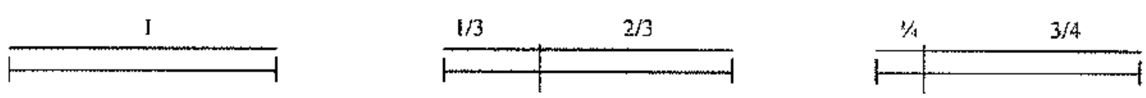
$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ etc.}$$

Con ellos podemos <u>contar</u>: nuestros libros, nuestros amigos y nuestro dinero. Si agregamos sus inversos aditivos y el cero, obtenemos los ENTEROS:

$$-3, -2, -1, 0, -1, -2, -3 \text{ etc.}$$

Cuando tratamos de <u>medir</u> longitudes, pesos o voltajes, los enteros son inadecuados. "Están demasiado espaciados para dar la suficiente precisión". Llegamos a considerar a los cocientes (razón) de los enteros, como números, tales como:

$$\frac{3}{4}, \frac{-7}{8}, \frac{21}{5}, \frac{16}{2}, \frac{1}{5} \text{ y } \frac{-17}{1}$$

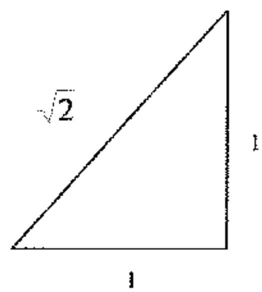


Los números se pueden escribir en la forma $\frac{m}{n}$; donde m y n son enteros y n = 0, se llaman <u>números racionales.</u>

¿SIRVEN LOS NUMEROS RACIONALES PARA MEDIR TODAS LAS LONGITUDES? **NO**

Este problema o este sorprendente hecho fue descubierto por los antiguos griegos varios siglos antes de cristo. Demostraron que a pesar de que $\sqrt{2}$ mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados tienen longitudes unitarias (figura 2), no puede escribirse como cociente de dos enteros. Por tanto, $\sqrt{2}$ es un irracional (no racional). También lo son $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}, \pi$ y gran cantidad de números más.

Figura 2



DEMOSTRACIÓN DE LA IRRACIONALIDAD DE $\sqrt{2}$.

Se quiere demostrar que <u>no</u> hay número racional cuyo cuadrado sean 2:

Suponemos que <u>si</u> y sea p / q un número racional cuyo cuadrado sea 2 y tal que p / q es una función irreducible, o sea, que p y q no tienen más factores comunes que $\pm$ 1 (o sea que p y q son primos entre sí, como se dice).

Entonces $(p/q)^2 = 2$, $p^2 = 2q^2$ y p^2 es par. Ahora p es par porque si p fuera impar p^2 sería impar. (Todo impar tiene la forma 2m+1, como $(2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$ se tiene $2(2h^2 + 2m + 1)$.

Si $2m^2 + 2m = k \Rightarrow 2k + 1 \therefore p^2$ es impar. Así, pues, p = 2m.

Substituyendo p =2m en $p^2 = 2q^2$ resulta $q^2 = 2m^2$, o sea, que q^2 es par y q es par.

De modo que p y q tienen el factor número 2 contra lo supuesto que no tenían más factores comunes que ± 1. Esta contradicción permite afirmar que no hay número racional cuyo cuadrado sea 2.

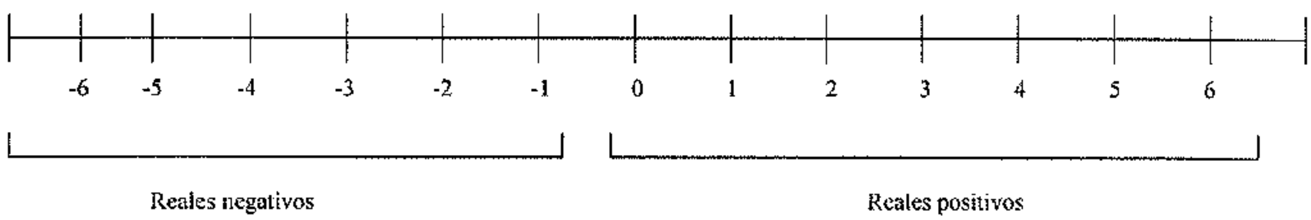
Los números reales los podemos clasificar de la siguiente manera:

Reales

- Racionales: Tienen expansiones decimales periódicas. Es decir, Se repiten indefinidamente después de cierto término Como por ejemplo: $\frac{7434}{2310} = 3.2181818....$

- Irracionales: Tienen expansiones decimales infinitas, no Periódicas como por ejemplo: $\Pi = 3.141592654...$
  $\sqrt{2} = 1.41421356...$

A los números reales se les puede asociar puntos sobre una recta l (recta real o recta numérica) de tal manera que a cada número real le corresponde uno y sólo un punto de la recta *l*.



PROPIEDADES DE CAMPO.

Dados dos números reales x *y* y podemos sumarlos o multiplicarlos para obtener dos números reales x + y *y* x * y. La adición y la multiplicación tienen las siguientes propiedades. (Los llamamos propiedades de campo).

1. Leyes conmutativas. $x + y = y + x$ y $x * y = y * x$

2. Leyes asociativas. $x + (y+z) = (x+y)+z$ y $x (yz) = (x y)z$

3. Ley distributiva. $x(y + z) = xy + xz$

4. Elementos neutros. Hay dos números distintos 0 y 1, que Satisfacen las propiedades $x + 0 = x$ y $x \times 1 = x$

5. Inversos. Cada número tiene un inverso aditivo $-x$, que satisface la expresión $x + (-x)= 0$.

Ejemplos:

Si $x = 4$, $y = 15$, $z = -3$, $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{-1}{6}$ y $r = \frac{3}{4}$

Calcular:

a) $x + (y + z)$
b) $(x + y) + z$
c) $p(qr)$
d) $(pq)(r)$
e) $x(p + q)$

para que el alumno resuelva

Ejercicio: ¿Por qué no son números $\frac{0}{0}$ y $\frac{1}{0}$?

PROPIEDADES DE ORDEN.

1) Tricotomía: Si x *y* y son números, se cumple una y sólo una de las siguientes propiedades: $x < y$ o $x = y$ o $x > y$

2) Transitividad: $x < y$ *y* $y < z \Rightarrow x < z$

3) Aditiva: $x < y \leftrightarrow x + z < y + z$

4) Multiplicativa: Cuando z es positivo, $x < y \leftrightarrow x z > y z$

Observación 1. La relación de orden $\leq$ se lee ("es menor o igual que") y es prima hermana de <. Se define como:

$$x \leq y \Rightarrow y - x \text{ es positiva o cero}$$

Observación 2. Las propiedades de orden 2, 3, 4 se cumplen también cuando los símbolos < y > son reemplazados por $\leq$ y $\geq$.

Ejemplos:

$3 < 5$ ó $5 > 3$; $-2 < -1$ ó $-1 > -2$; $x \leq 3$ significa que x es igual a 3 *i.e.* $x = 3$ ó menor que 3.

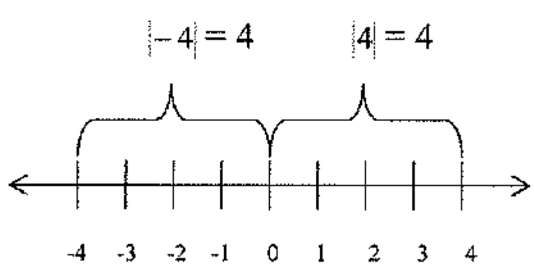
$3 < 5$ porque $5 - 3 = 2 > 0$ *i.e.* 2 es positivo.

$-2 < -1$ porque $-1 - (-2) = 1 > 0$ *i.e.* 1 es positivo.

0.1) VALOR ABSOLUTO.

Si un número real <u>a</u> es la coordenada de algún punto A sobre la recta coordenada o recta numérica l, y el símbolo $|a|$ se usa para denotar el número de unidades (o la distancia) entre el punto A y el origen sin importar la dirección.

Veamos la siguiente figura:



Para el punto con coordenada –4 tenemos $|-4| = 4$, también para $|4| = 4$. En general si a es negativo cambiamos su signo para contar (formulario) y si a es no negativo, entonces $|a| = a$.

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a \leq 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

Encuentre $|3|$, $|-3|$, $|\sqrt{2}-2|$, $|2-\sqrt{2}|$ y $|0|$

Solución:

Como:

3, 2-$\sqrt{2}$, 0 son no negativos tenemos que:

$|3| = 3$, $|2-\sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$ y $|0| = 0$

Como:

-3, $\sqrt{2}$ - 2 son negativos usamos la fórmula $|a|$ = -a y obtenemos:

$|-3| = -(-3) = 3$ y $|\sqrt{2}-2| = -(\sqrt{2}-2) = 2 - \sqrt{2}$

Ejercicio:

Encuentre los siguientes valores absolutos:

$|-8|$, $|-5-3|$, $|-5|+|-3|, -|-5|-|-3|$ $|\sqrt{2}|$

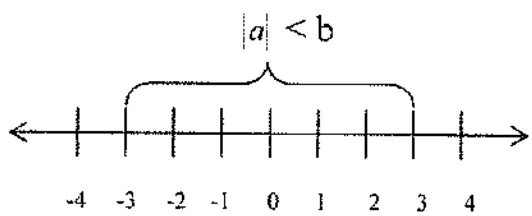
Para todos los números reales a y b se tiene que:

$|a| = |-a|$
$|ab| = |a||b|$
$-|a| \leq a \leq |a|$

y si b es cualquier positivo, se tiene:

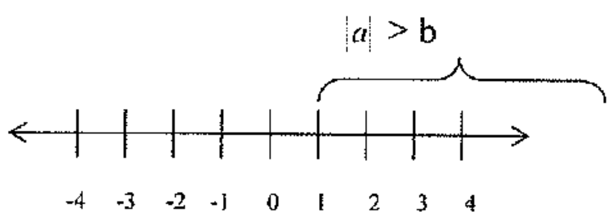
1) $|a| < b \iff -b < a < b$
2) $|a| > b \iff a > b$ ó $a < -b$
3) $|a| = b \iff a = b$ ó $a = -b$

Ilustración:



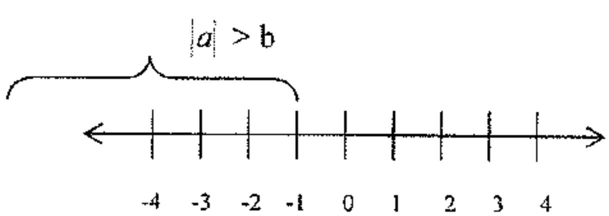
b = 3

a = todos los reales mayores que –3 y menores que 3.



b = 1

a = todos los reales mayores que b ó



b=-1

a = todos los números mayores que -1

Ejercicios:

1) Encontrar todos los valores de x si $|x| < 5$ y graficar.
2) $|x| > 5$ todos los valores de x y graficar.

DESIGUALDAD DEL TRIANGULO.

Si a y b son números reales, entonces $|a+b| \leq |a| + |b|$

Demostración:
Conocemos las propiedades:

$-|a| \leq a \leq |a|$ λ $-|b| \leq b \leq |b|$ Sumando ambas obtenemos:

$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$ de aquí se tiene:

$(a+b) \leq |a| + |b|$

Ejemplos:

$1 = |-1| = |-3+2| < |-3| + |2| = 3 + 2 = 5$

$5 = |3+2| = |3| + |2| = 5$

Observación: el concepto de valor absoluto se puede usar para definir la distancia entre dos puntos cualesquiera sobre una recta lineal. En este caso es innecesario preocuparnos por el orden en el que restamos una coordenada de la otra, *i.e.* es lo mismo sobre la recta real.

Definición: Sean a y b respectivamente las coordenadas de dos puntos A y B sobre la recta coordenada *l*. La distancia entre A y B se denota por d(A, B) y está dada por d(A, B) = $|b-a|$ (ó longitud del segmento AB) como $|b-a|$ = $|a-b|$ tenemos que d(A, B) = d(B, A) y a demás la distancia entre el origen 0 y el punto A es:

$$D(0, A) = |a-0| = |a|$$

0.2) INTERVALOS.

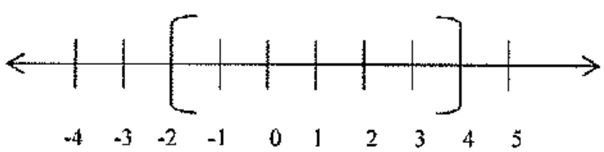
$\Re$ denota el conjunto de los números reales, y son de vital importancia los subconjuntos de $\Re$, llamados intervalos.

Varias clases de intervalos aparecerán en el curso, por lo que presentamos la terminología y notación para ellos. La doble desigualdad $a < x < b$ describe un <u>intervalo abierto</u> que consiste en todos los números comprendidos entre a y b, sin incluir los extremos a y b. Lo designaremos mediante el símbolo (a, b) (figura 1) por el contrario, la desigualdad $a \leq x \leq b$ describe el correspondiente <u>intervalo cerrado</u>, que sí incluye los extremos a y b. Se denota por [a, b] (figura 2)

Figura 1:

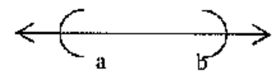
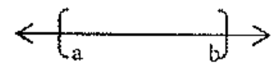
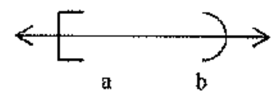
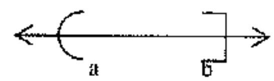
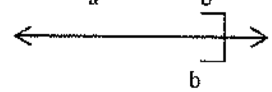
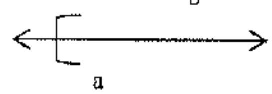
(-2,4) ≡ todas las x entre –2 y 4 es decir, $-2 < x < 4$

Figura 2:



[-2,4] ≡ todas las x donde –2 hasta 4 es decir, $-2 \leq x \leq 4$

La tabla representa una amplia variedad de posibilidades y presenta nuestra notación:

Notación de conjuntos	**Notación de intervalos**	**Gráfica**
$\{x: a < x < b\}$	(a,b)	
$\{x: a \leq x \leq b\}$	$[a,b]$	
$\{x: a \leq x < b\}$	$[a,b)$	
$\{x: a < x \leq b\}$	$(a,b]$	
$\{x: x \leq b\}$	$(-\infty,b]$	
$\{x: x < b\}$	$(-\infty,b)$	
$\{x: x \geq a\}$	$[a + \infty)$	
$\{ x: x > a\}$	$(-\infty,\infty)$	

"APLICACIONES"

0.2.1) Solución de desigualdad.

Como en el caso de las ecuaciones, el procedimiento para resolver desigualdades consiste en transformar la desigualdad un peso cada vez hasta que el conjunto solución sea "obvio". Las herramientas principales son las propiedades de <u>orden</u> y de <u>campo</u>. Ellos implican que debemos realizar ciertas operaciones en una desigualdad sin cambiar el conjunto solución.

En particular:

1) Se puede añadir el mismo número o ambos miembros de una desigualdad.
2) Se puede multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número positivo.

3) Se pueden multiplicar ambos miembros por un número negativo, pero entonces se debe invertir el sentido del signo de desigualdad.

Ejemplo 1:

Resuelva la desigualdad de 2x < 4x-2, dibuje la gráfica, ¿y cuál es el intervalo solución?

Solución:

$2x-7<4x-2$	
$2x<4x+5$	(sumamos 7)
$-2x<5$	(sumamos $-4x$)
$x>-5/2$	(multiplicamos por $-1/2$)

Conjunto solución: $\left(-\frac{5}{2},\infty\right)=\left\{x:x>-\frac{5}{2}\right\}$

Observaciones: Resolver una desigualdad significa encontrar todas sus soluciones y decimos que dos desigualdades son equivalentes si tienen exactamente las mismas soluciones.

Veamos que significa lo anterior:

Si tenemos $x^2-3<2x+4$ y si en x sustituimos números como 4 y 5 obtenemos resultados falsos como $13<12$ y $22<14$ respectivamente y para otros números como 1 y 2 obtenemos resultados verdaderos $-2<6$ y $1<8$ respectivamente. En general si en una desigualdad sustituimos a $\leftarrow$ x y obtenemos resultados verdaderos entonces a es la solución de la desigualdad.

Ejercicio:

Resolver la desigualdad $4x+3>2x-5$.

Solución:

$X>-4$ $\quad(-4,\infty)$

Ejemplo 2:

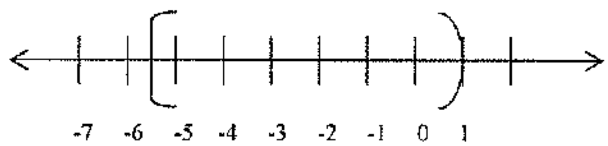
Resuelva la desigualdad $-5 \leq 2x + 6 < 4$

Solución:

$-5 \leq 2x + 6 < 4$

$-11 \leq 2x < 2$ (sumamos -6)

$-\frac{11}{2} \leq x < -1$ (multiplicamos por ½)



Intervalo solución:

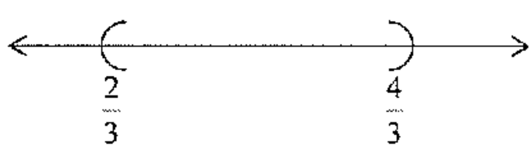
$$[-\frac{11}{2}, -1) = \{ x: -\frac{11}{2} \leq x < -1\}$$

Ejercicio:

Resolver $-5 < \frac{4-3x}{2} < 1$ ¿intervalo solución? ¿gráfica?

Solución:

(2/3, 14/3)



Ejemplo 3:

Resuelva la desigualdad cuadrática $x^2 - x < 6$ ¿intervalo solución? ¿gráfica?

Solución:

$x^2 - x - 6$

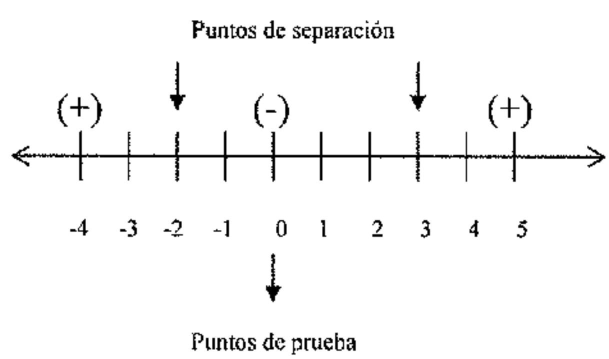
$x^2 - x - 6 < 0$ (sumamos -6)

$(x-3)(x+2) < 0$ (factorizamos)

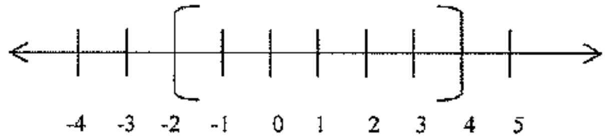
Vemos que -2, 3 son puntos de separación; dividen el eje numérico real en tres intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$, $(3, \infty)$. En cada uno de estos intervalos, $(x-2)(x+2)$ tiene signo constante (es decir, es siempre positivo o siempre negativo). Para encontrar el signo de cada intervalo usemos los puntos de prueba -3, 0, 5 (cualesquiera de los puntos de los tres intervalos sirve). Veamos los resultados en la tabla siguiente:

Punto de prueba	**Valor de (x – 3) (x + 2)**	**Signo**
-3	6	(+)
0	-6	(-)
5	14	(+)

La información que hemos obtenido se resume en la parte superior de la figura siguiente:



Concluimos que el conjunto solución de (x – 3) (x + 2) < 0 es el intervalo (-2,3). Su gráfica aparece en la parte inferior de la figura anterior:



Ejercicios:

1. Resuelva $8x^2 - x - 2 > 0$ ¿intervalo? ¿gráfica? ¿tabla?
2. Resuelva $|x-3| < 0.1$ ¿intervalo? ¿gráfica? ¿tabla?
3. Resuelva $|2x-7| < 3$ ¿intervalo? ¿gráfica? ¿tabla?

Ejercicios:

I.- En los casos siguientes substituya la coma entre cada par de números reales por el símbolo apropiado <, > o =.

1.-

a) -2, -5
b) -2, 5
c) -1, 2 + 3
d) -3, 0
e) -1, 2 – 3
f) 8, -3

2.-

a) 2, $\sqrt{4}$
b) π, 22/7
c) ¾ - 2/3, 1/15
d) $\sqrt{2}$, 1.4
e) $\frac{4053}{1110}$, $\frac{3}{\sqrt{2}}$

II.- Rescriba las expresiones en los casos siguientes, suprimiendo el signo de valor absoluto, es decir; encuentre los valores absolutos.

3.-

a) $|2-5|$
b) $|-5|+|-2|$
c) $|5|+|-2|$
d) $|-5|-|-2|$
e) $\left|\pi-\dfrac{22}{7}\right|$
f) $(-2)/|-2|$
g) $|1/2-0.5|$
h) $|(-3)^2|$

4.-

a) $|4-8|$
b) $|-4|-|-8|$
c) $|-3|^2$
d) $|-0.67|$
e) $|-3-\pi|$
f) $|-4+8|$
g) $|2-\sqrt{4}|$
h) $-|-3|$

III.- Si A, B y c son puntos sobre la recta coordenada con coordenadas -5, -1, 7 respectivamente, encuentre:

a) d(A, B)
b) d(C, B)
c) d(B, C)
d) d(A, C)

IV.- Resuelva las siguientes desigualdades y exprese la solución en términos de intervalos, así como gráficamente.

1) $5x - 6 > 1$
2) $7 - 2x \geq -3$
3) $3x + 2 < 5x - 8$
4) $5 > 2 - 9x > -4$
5) $\frac{5}{7-2x} > 0$
6) $\left|\frac{2x+3}{5}\right| < 2$
7) $3x - 5 < 10$
8) $|2x+1| > 5$
9) $2 + 7x < 3x - 10$
10) $-1 < \frac{3-7x}{4} \leq 6$
11) $\frac{4}{x^{2+9}} > 0$
12) $\rightarrow \left|\frac{7-3x}{2}\right| \leq 1$
13) $2 - 7x \leq 16$
14) $\rightarrow |x+2| < 1$
15) $12 \geq 5x - 3 > -7$
16) $6 \leq 4x - 1 \leq 2$
17) $|x-10| < 0.3$
18) $|5-11x| \geq 41$

1) FUNCION.

1.1) ¿QUE ES UNA FUNCION? CONCEPTO

En matemáticas el concepto de función es realmente importante; en está época el estudio del cálculo inicia con un estudio de las funciones.

Expresa una idea de conocimientos de un número expresado a otro; si conocemos la longitud de un cuadrado podemos determinar su área, es decir; el área esta en función del lado del cuadrado y si la circunferencia es un circulo conocido podemos determinar su radio, es decir; el área del circulo esta en función del radio del mismo.

En la vida cotidiana existe el concepto de función, por ejemplo:

1) El precio de un boleto del teatro esta en función del lugar que se quiera ocupar.
2) La cantidad de leche que produce una vaca está en función del alimento que consuma.
3) La distancia que recorre un automóvil, está en función de la cantidad de gasolina que lleve el tanque.

Ejemplo:

Área del círculo.

El área del círculo está en función de su radio y está dada por la fórmula $A = \pi r^2$ para cada valor de r obtenemos un valor específico de área, la cual podemos analizar en la siguiente gráfica:

Radio	**Área**
0	0
1	π
2	4π
3	9π
(hasta *n*)	$n\pi$

Dónde:

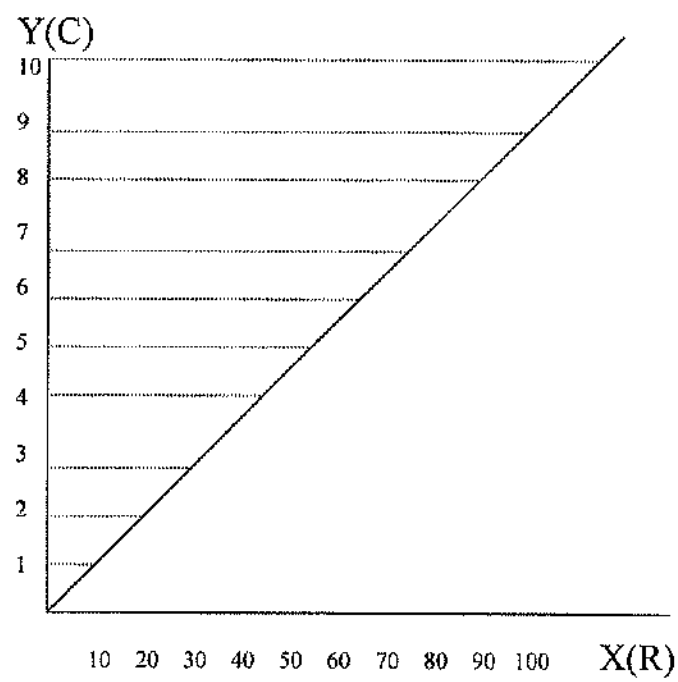
$A = \pi \ r^2 \quad \& \quad n \in N$

Ejemplo:

Un profesor aplico un examen de 100 preguntas, realizo una tabla de valores y graficó los mismos. La escala de calificaciones es de 100 preguntas es a 10.

Tabla de valores

Respuesta (R)	**Calificación (C)**
0	0
10	1
20	2
30	3
40	4
50	5
60	6
70	7
80	8
90	9
100	10



Lo anterior nos motiva a la definición de función:

Definición: Una cantidad y es una función de otra x, si cada valor de x tiene un único valor de y asociado. Escribimos y = f(x) donde f es el nombre de la función. Decimos que y es el valor de la variable dependiente & x es la variable independiente.

Definición: El dominio de una función son todos los valores posibles de la variable independiente. El rango de una función son todos los valores posibles de la variable dependiente.

Nota: En el ejemplo anterior $y = \frac{x}{10}$ *frecuentemente se observa que una cantidad es una función de otra o, encontrar una función que represente una situación dada se le llama "modelo matemático". Las funciones se pueden representar por medio de tablas, gráficas y fórmulas.*

En la gráfica del ejemplo anterior el dominio de la función $y = \frac{x}{10}$ está dado por $x \geq 60$ o más bien $60 \leq x \leq 100$, es decir; dónde los alumnos pueden aprobar el examen y además $x \in [60,10]$ para que sea considerado como aprobado y el rango está dado por los valores posibles de y es decir; $y \geq 6$.

Nota: Para poder estudiar una función y = f(x) se necesita conocer el campo de variación de la variable independiente que es el dominio de la función.

Ejemplo:

Determinar el campo de variación de la variable independiente x en la función siguiente:

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

Solución:

Como y debe ser real $4 - x^2 \geq 0$, o sea $x^2 \leq 4$ o bien, $|x| \leq 2$.

Ejemplo:

Determinar el campo de variación de la variable independiente X en la función siguiente:

$$y = \frac{1}{x-2}$$

Solución:

Está definida para todos los valores posibles de x excepto para x = 2 y el dominio se puede expresar como:

$$x < 2, x > 2 \text{ o por } x \neq 2$$

Problemas de la sección: 1)

1. Dar ejemplos de variables y constantes.

2. Dar ejemplos de funciones dentro de lo cotidiano.

3. Dar ejemplos de funciones de problemas matemáticos.

4. si $f(x) = x^x$, obtenga f(-1) & f(1/2).

5. Si $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ demuestre que: $f(2) + 2f(0) = f(1)$

   Escribir una fórmula sencilla para la regla de correspondencia de la función: {(0,1), (1,3), (2,5), (3,7), (4,9)}

6. El dominio de la función es $D = \{-1/2, 0, 2/3, 5/2, 1 + \sqrt{2}\}$ y la regla de correspondencia es $f(x) = x^2 - 2x$. Hallar las parejas ordenadas de la función.

7. Determinar el dominio y rango de las funciones:
   a) $y = x^2 + 4$
   b) $y = \sqrt{x^2} + 4$
   c) $y = \frac{x}{x+3}$

8. Suponga que una hoja de estaño de 8 por 15 cm. se hace un cenicero recortado en cuadros de igual tamaño de las esquinas y doblando las cejas para formar los lados:
    a) Si x representa la longitud de los lados de los cuadrados recortados de las esquinas, encuentre una forma para el volumen del cenicero en términos de x.
    b) Encuentre una desigualdad para encontrar las restricciones físicas sobre el valor de x.
    c) Haga una tabla de valores de x y dibuje la gráfica de la fórmula del volumen v(x).

1.2 LIBRERÍA DE FUNCIONES.

1.2.1 Función lineal

Este tipo de funciones son las más comúnmente usadas, representan un estado de incremento (una función f es incrementada si los valores de $y = f(x)$ incrementan cuando x incrementa) o un estado de decrecimiento (la función decrece si el valor de $y = f(x)$ decrece cuando x incrementa).

Definición: Llamaremos a una función lineal, si un cambio o incremento en la variable independiente causa un cambio proporcional o incremento en la variable dependiente.

Ilustremos el concepto de función lineal mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

El salto con garrocha olímpico.

Durante los primeros años de las olimpiadas, la altura de los ganadores de salto con garrocha incrementó aproximadamente como lo muestra la tabla 1.1, el ganador incrementaba el salto en 8 pulgadas cada 4 años, la altura es una función lineal del tiempo sobre el periodo de 1990-1912 el original esta en 130 pulgadas y tiene un incremento equivalente a 2 pulgadas cada año, es decir; si y es la altura en pulgadas y *t* es el número de años medidos desde 1900, nosotros podemos escribir:

$$y = f(t) = 130 + 2t$$

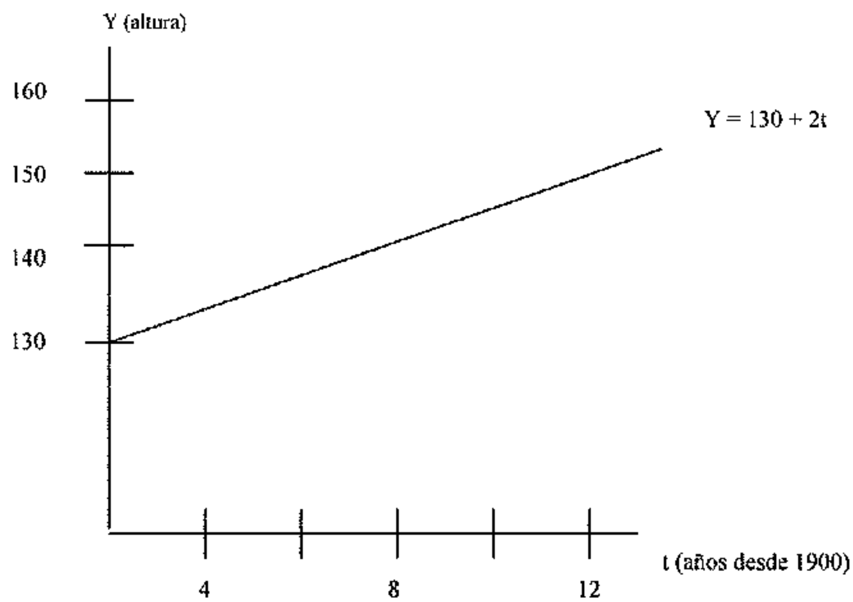
Podemos visualizar la inclinación en la figura 1.2 como la razón o proporción.

$$\text{Inclinación: } \frac{aumento}{años} = \frac{8}{4} = 2$$

Tabla 1.1

Año	Altura (plg)
1900	130
1904	138
1908	146
1912	154

Gráfica de la función lineal:



En general una función lineal tiene la forma y = f(x) = b + mx.

Donde: m es la inclinación o la proporción de cambio de y respecto a x. y b es la intersección con el eje vertical o valor de y cuando x = 0.

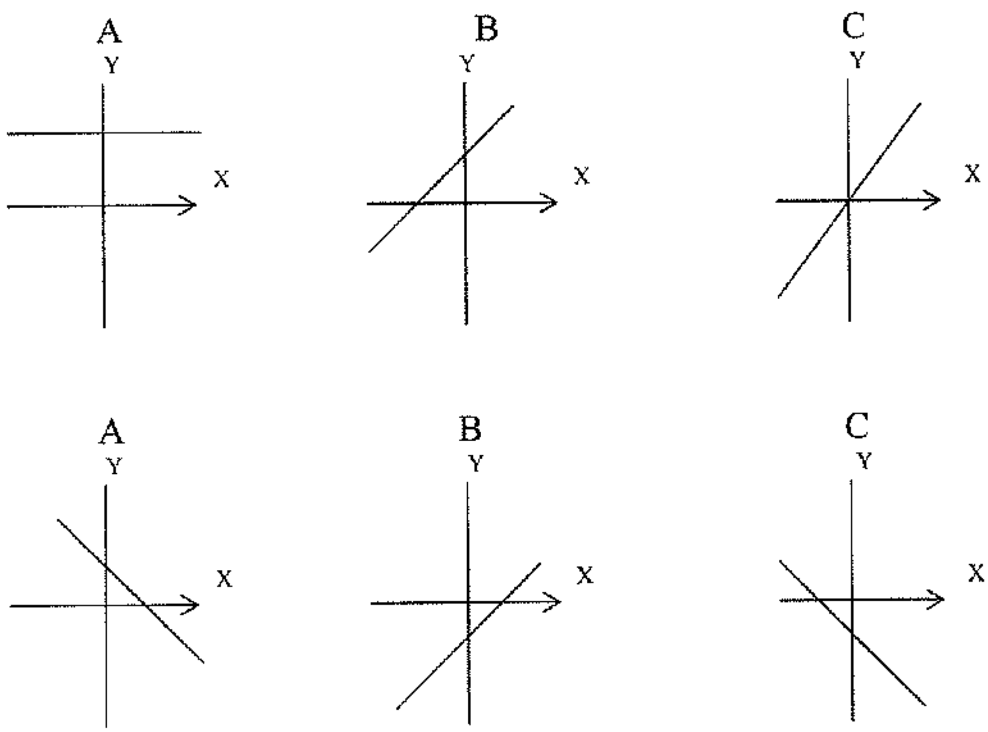
Ejercicios de la sección 2.1:

De las siguientes ecuaciones ver que gráfica le corresponde de la figura siguiente:

I.

a) $y = x - 4$
b) $-2x + 3 = y$
c) $4 = y$
d) $y = -3x - 4$
e) $y = x + 5$
f) $y = \frac{1}{2} x$

Figura:



II. De la siguiente taba de valores encontrar una ecuación lineal:

X	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
Y	27.8	29.2	30.6	32.0	33.4

Solución:

$\Delta y = K \Delta 0$
$\Delta y = 1.4$
$k = 1.4 = 14$
$y = mx + b$
$y = 14x + b$
$b = y - 14x$
$b = 27.8 - 14(5.2) = -45$
$b = 14x - 45$

III. Una ecuación de línea es $3x + 4y = -12$. Hallar la longitud de la porción de la línea que esta entre x y y interceptada.

1.2.2 Función exponencial.

INCREMENTO DE POBLACION.

Consideraremos los datos para la población de México en los inicios de los ochentas, en la tabla siguiente.

Año	**Población en millones**	**Cambio en la población (millones)**	
1980	67.38	80-81	1.75
1981	69.13	81-82	1.80
1982	70.93	82-83	1.84
1983	72.77	83-84	1.89
1984	74.66	84-85	1.94
1985	76.60	85-86	1.99
1986	78.99		

ESTIMACIÓN DE LA POBLACION DE MEXICO EN 1980-1986

Se ve como es el incremento de la población, así como el valor del incremento de la población de año en año mostrado en la cuarta columna. Si la población tiene un incremento lineal, todos los números en la cuarta columna tendrán el mismo valor. Pero usualmente las poblaciones se incrementan, hay más gente al tener más bebés, no es sorprendente ver que el valor de cada medida en la cuarta columna se incrementa.

Supongamos que dividimos la población del año reciente entre la del año previo, obtenemos aproximadamente:

$$\frac{población 1981}{población 1980} = \frac{69.13 millones}{67.38 millones} = 1.026$$

$$\frac{población 1982}{población 1981} = \frac{70.93 millones}{69.13 millones} = 1.026$$

El factor obtenido por los cálculos es 1.026 que nos muestra el incremento por alrededor de 2.6% entre 1980 y 1981 y entre 1981 y 1982.

Si tú realizas cálculos similares para otros años tú puedes encontrar el incremento de población por un factor de alrededor de 1.026 o 2.6% cada año. Cada vez tienes una constante como factor de crecimiento (aquí 1.026), tienen un crecimiento exponencial. Si t es el número de años desde 1980.

Cuando $t = 0$, Población $= 67.38 = 67.38\,(1.026)^0$

Cuando $t = 1$, Población $= 69.13 = 67.13\,(1.026)^1$

Cuando $t = 2$, Población $= 70.93 = 69.13\,(1.026) = 67.38\,(1.026)^2$

Cuando $t = 3$, Población $= 72.77 = 70.93\,(1.026) = 67.38\,(1.026)^3$

Población $= 67.38\,(1.026)^t$

Esta es una función exponencial con base 1.026, esta es llamada exponencial, t es el exponente, la base representa el factor por el cual se incrementa cada año.

Ejemplo:

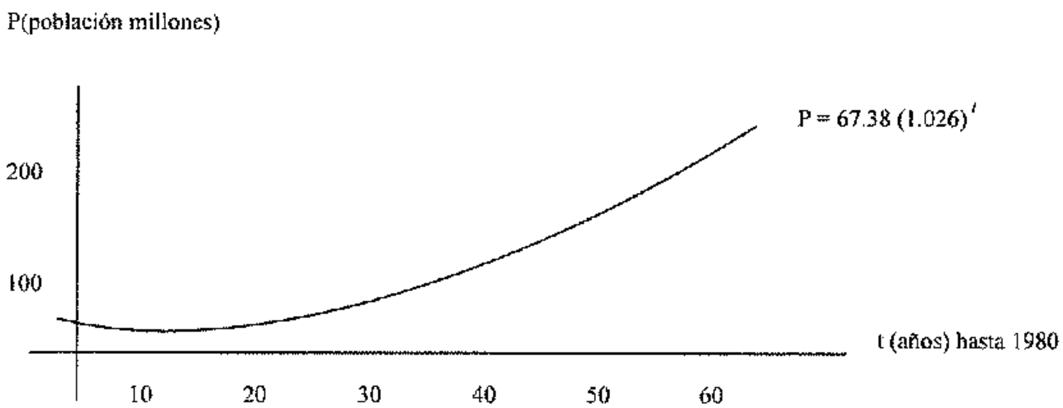
Estime la población en México en el año:

a) 2007 (cuando $t = 27$)
b) 2034 (cuando $t = 54$)
c) 2061 (cuando $t = 81$)

Solución:

a) $P = 67.58\ (1.026)^{27} = 134.74 \approx 67.38\ (2)$ millones
b) $P = 67.38\ (1.026)^{54} = 269.46 \approx 67.38\ (4)$ millones
c) $P = 67.38\ (1.026)^{81} = 538.85 \approx 67.38\ (8)$ millones

Observando los resultados del ejemplo, podemos ver algunas cosas sorprendentes, después de 27 años la población es el doble, después de otros 27 años en (t = 54), se tiene el doble otra vez. La población mundial se pobla cada 38 años.



En general, P es una <u>función exponencial</u> de t con base a, es decir:

$$P = P_0 a^t$$

Dónde:

P_0 = Es la cantidad inicial (cuando t = 0)
A = Es el factor por el cual P cambia cuando t incrementa con a > o
y $a \neq 1$.

Veamos un ejemplo usando la regla de tres: Tonos musicales.

Los tonos de una nota musical son determinados por la frecuencia de la vibración causada. La diferencia media o promedio c en el piano, por ejemplo, corresponde a una vibración de 263 ciclos por segundo. Una nota de una octava tiene aproximadamente media C de 526 ciclos por segundo, y una nota de dos octavas tiene aproximadamente media C de 1052 ciclos por segundo. Ver la tabla siguiente:

Número n de octavos con media aprox. C	Número de ciclos por seg.
0	263
1	526
2	1052

Nótese que:

$$\frac{526}{263}=2 \qquad \& \ \frac{1052}{526}=2 \qquad \& \ \frac{2104}{1052}=2$$

Así podemos ver que:

$$f(1) = 526 = 263*2 = 263*2^1$$
$$f(2) = 1052 = 526*2 = 263*2^2$$
$$f(3) = 2104 = 1052*2 = 263*2^3$$

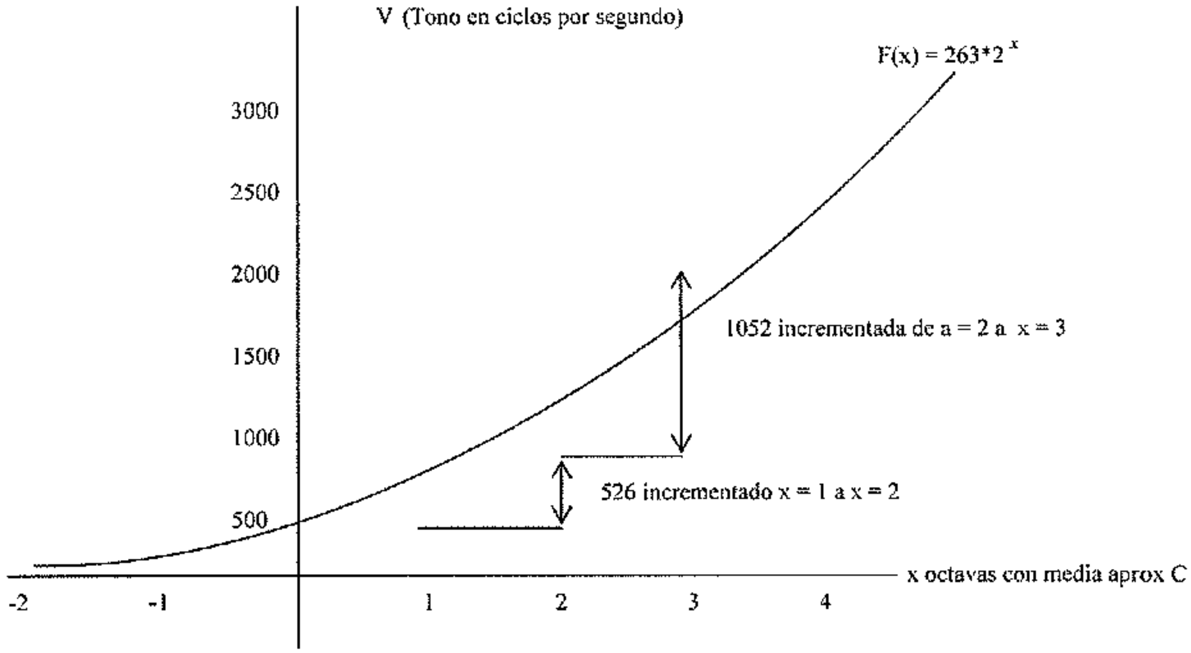
En general:

$$V = f(n) = 263*2^n$$

Para cada valor de n (número de octavas), se tiene un valor de V (número de ciclos por segundo) *i.e.* $V = f(n)$ con $f(n) = 263*2^n$.

Para valores negativos de n en la tabla siguiente esta función representa octavas debajo de la media C. Loas notas en un piano son representadas por valores de n entre -4 y 4, y el oído humano escucha para valores de n entre -4 y 7.

n	$V = f(n) = 263*2^n$
-3	$263*2^{-3} = 263\left(\frac{1}{2^3}\right) = 32.875$
-2	$263*2^{-2} = 263\left(\frac{1}{2^2}\right) = 67.75$
-1	$263*2^{-1} = 263\left(\frac{1}{2}\right) = 131.5$
0	$263*2^0 = 263$



Reglas para manipular exponenciales:

1. $a^x \bullet a^t = a^{x+t}$ porque, por ejemplo, $2^4 \bullet 2^3 = (2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2)\,(2 \bullet 2 \bullet 2) = 2^7$

2. $\dfrac{a^x}{a^t} = a^{x-t}$ porque, por ejemplo, $\dfrac{2^4}{2^3} = \dfrac{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2}{2 \bullet 2 \bullet 2} = 2^4$

3. $(a^x) = a^{xt}$ porque, por ejemplo, $(2^3)2 = 2^3 \bullet 2^3 = 2^6$

Definimos también:

1. $a^0 = 1$, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ y en general, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

2. $a^{1/2} = \sqrt{a}$, $a^{1/3} = \sqrt{a}$ y en general, $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

Ejercicios:

1) Cada una de las funciones en la tabla es creciente, pero cada crecimiento es diferente. ¿Cuál de las gráficas representa mejor a cada función?

T	g(t)	t	h(t)	t	k(t)
1	23	1	10	1	2.2
2	24	2	20	2	2.5
3	26	3	29	3	2.8
4	29	4	37	4	3.1
5	33	5	44	5	3.4
6	38	6	50	6	3.7

a)

b)

c)

2) Para cada problema 3, 4, encontrar una fórmula para las funciones representadas por los datos:

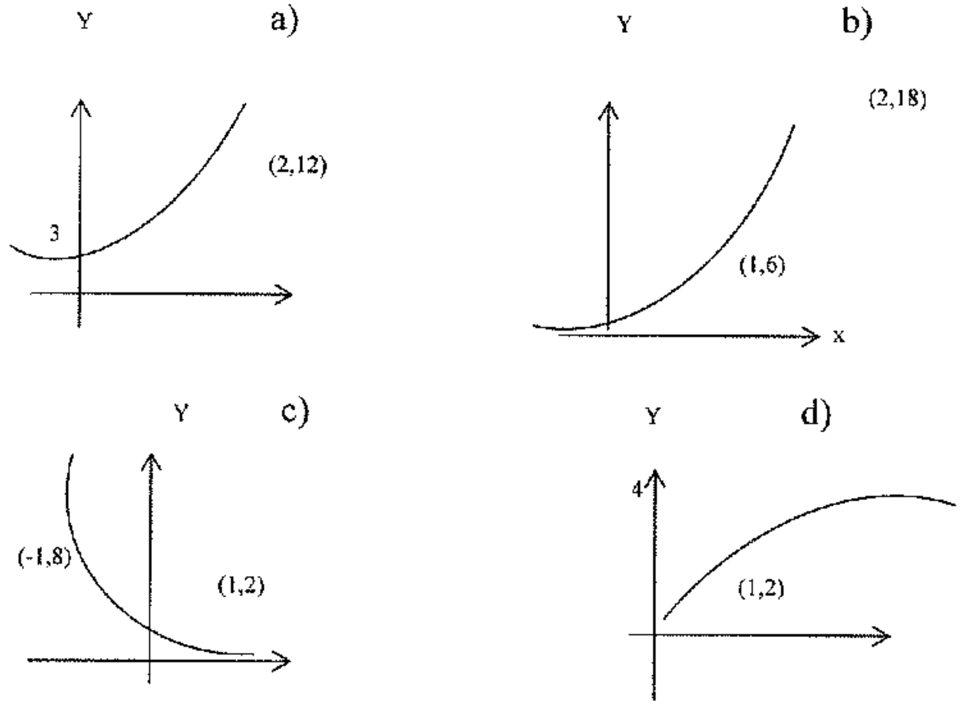
(3)

x	0	1	2	3
f(x)	4.30	6.02	8.43	4.80

(4)

t	0	1	2	3
g(t)	5.50	4.40	3.52	2.82

3) Encontrar posibles funciones para las gráficas siguientes:



4) Cuando los juegos olímpicos se realizaron en la ciudad de México en 1968, hubo mucha discusión acerca del efecto causado por la altitud (734 pies ≈ 2450 metros) sobre los atletas. La presión del aire recae exponencialmente a 0.4% cada 100 pies ≈ 35 metros. ¿Qué porcentaje se reduce la presión del aire para el movimiento al nivel de la ciudad de México?

1.2.3 Logaritmos

Ilustremos el concepto de logaritmos por medio del siguiente ejemplo:

Una función para la población de México (en millones) es:

$P = f(t) = 67.38(1.026)^t$ (la población en función del tiempo).

T es el número de años desde 1980. 67.38 millones en 1980 y crece al 2.6% al año. Ahora queremos encontrar el valor de t para lo cual la población llega ha ser 100.

Encontrar t mediante ensayo y error en la función de población.

$$P = f(15) = 67.38\,(1.026)^{15} \approx 99.0$$

$$P = f(16) = 67.38\,(1.026)^{16} \approx 101.6$$

$\therefore$ t está entre 15 & 16.

y se le suma a 1980 + 15 = 1995, dónde la población llega a 100 millones.

Pero sería mejor tener una función que de t en términos de P. Esta función es el logaritmo.

Definición: El logaritmo base 10 de x es la potencia de 10 que necesitas para tener x. Es decir, $log_{10} x = y$, entonces $10^y = x$.

Ejemplo:

$log_{10} 10^3 = 3$. Donde 3 es la potencia de 10 para tener 1000.

Ejemplo:

$$log_{10}(0.1) = -1 \text{ porque } 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

Regla de logaritmos:

1) $log\,(AB) = log\,A + log\,B$

2) $log\,(A/B) = log\,A - log\,B$

3) $log\,(A^P) = P\,log\,A$

Como logaritmo x es la potencia de 10 dónde x se justifica lo siguiente:

$$log\,10^x = x$$

$$10^{\log x} = x$$

Ejemplo: Encontrar t cuando $2^t = 7$.

Tomemos logaritmo base 10:

$Log\,(2)^t = log\ 7$

t = $log\ 2 = log\ 7$ entonces t (0.301) = 0.845

Entonces $t = \dfrac{0.845}{0.301} = 2.81$

Ejemplo:

Resolver $100 = 67.38\,(1.026)^t$

Usando logaritmos; dividir la ecuación entre 67.38, y tenemos que:

$$\frac{100}{67.38} = \frac{67.38}{67.38}(1.026)^t \text{ entonces } 1.484 = (1.026)^t$$

Aplicar logaritmo base 10 a ambos lados:

$log\,(1.484) = log\,(1.026)^t$ entonces:

$log\,(1.484) = t\ log\,(1.026)$ entonces:

$$t = \frac{\log(1.484)}{\log(1.026)} = \frac{0.1714339}{0.0111473} = 15.5 \quad \therefore\ t \approx 15.5$$

Nota: Los logaritmos no siempre pueden ser usados para encontrar exponentes. Algunos ejemplos sólo pueden ser numéricamente o mediante el uso de gráficas.

Ejemplo:

Resolver $1 + x = 2^x$

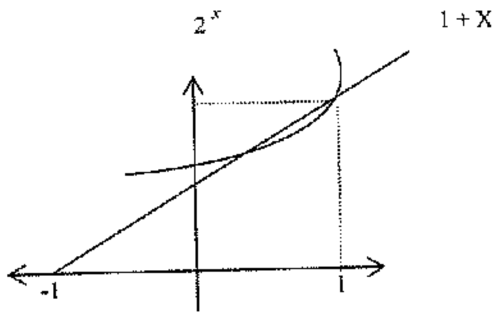
Aplicar logaritmo base 10 a ambos lados:

$$log\,(1 + x) = log\,(2^x)$$

$$log\,(1 + x) = x\,log\,2$$

$$log\,(1 + x) = x\,(0.30)$$

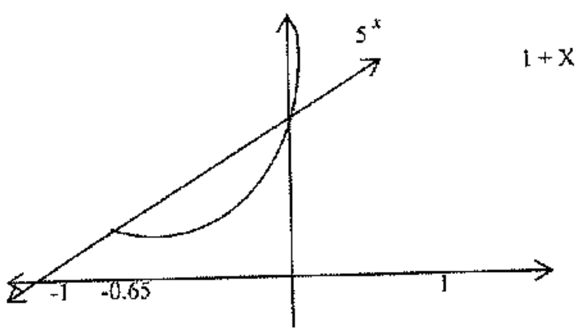
Se puede adivinar que x= 0, 1 satisfacen la ecuación, también lo podemos ver gráficamente:



Gráficamente se ve que 0 y 1 son soluciones de la ecuación.

Ejemplo:

Resolver $1 + x = 5^x$



Aquí los logaritmos no tienen ayuda y el adivinar no es tan fácil, X = 0 en una solución. Y de la gráfica se reduce otra X = -0.65.

Ejercicios de la sección 2.3

1) En los siguientes problemas encontrar el valor de t usando calculadora o gráficas para visualizar las soluciones.

2) Aplique las propiedades de los logaritmos y encuentre el valor de t.

   a) $5^t = 7$
   b) $2 = (1.02)^t$
   c) $7 \bullet 3^t = 5.2^t$
   d) $5.02\,(1.04)^t = 12.01\,(1.03)^t$
   e) $a = b^t$
   f) $P = P_0\, a^t$
   g) $Q = Q_0\, a^{nt}$
   h) $P_0\, a^t = Q_0\, b^t$

Simplifique hasta donde sea posible los siguientes problemas, usando las propiedades de los logaritmos:

   i) $\mathit{log}\, A^2 + \log B - \mathit{log}\, A - \log B^2$

   j) $2\, \mathit{log} \propto - \, 3 \log B - \dfrac{\log \propto}{\propto}$

   k) $\dfrac{\log A^2 - \log A}{\log B - 1/2 \log B}$

   l) $\mathit{log}\,(10^{x+7})$

   m) La población de una región crece exponencialmente. Si ahí hubo 40,000,000 de gente en 1980 (t = 0) y 56,000,000 en 1990. encontrar una expresión de población en función del tiempo t para el cual la función de población llegue al año 2000 ¿Cuál será la población en el años 2000?

1.2.3.1 Logaritmo natural: Logaritmo para base *e*.

Muchos fenómenos que ocurren en la naturaleza son modelados usando una función exponencial con base *e*.

El crecimiento de la población puede ser escrita en la forma:

$$P = P_0\, e^{kt}$$

Mientras que el decaimiento radiactivo está dado por:

$$Q = Q_0\, e^{-kt}$$

Los logaritmos para base *e* son usados tan frecuentemente que son llamados logaritmos naturales y tienen su propia notación.

El logaritmo natural de X, escrito *ln* x, se define como el mínimo camino para alguna otra base, es decir:

$Ln\ x = log_e\ x = C$ de otra forma:

$$e^c = x$$

Así *ln* x es la potencia de *e* necesaria para obtener x. Las reglas para el logaritmo natural son las mismas para el logaritmo base 10.

4) $ln\,(AB) = ln\ A + ln\ B$

5) $ln\,(A/B) = ln\ A - ln\ B$

6) $ln\,(A^p) = P\ ln\ A$

Y como antes $ln\ 1 = 0$ porque $e^0 = 1$

Ejemplo:

El desprendimiento de floro carbono usado en pulverizadores caseros (polucrizadores de aire, crema de afeitar, etc.)destrozan el ozono en la capa atmosférica. Si la centricidad de ozono Q, está decayendo exponencialmente en una taza continúa anualmente de 25%. ¿De qué largo se tomaría para medir la dispersión del ozono?

Solución:

Si Q es la cantidad inicial de ozono sabemos que:

$$Q = Q_0 \, e^{-0.0025t}$$

Queremos encontrar el valor de T, el valor de t haciendo:

$$Q = \frac{Q_0}{2} \text{ como } \frac{Q_0}{2} = Q_0 \, e^{-0.0025T}$$

Hablando del logaritmo natural:

$$ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0.0025 \text{ t}$$

$$-0.6931 = -0.0025 \text{ t}$$

$$\text{t} \approx 277 \text{ años.}$$

En el ejemplo pasado el crecimiento fue dado sin embargo en muchas situaciones donde esperamos encontrar una tasa de crecimiento exponencial no es dado como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

La población de Kenia fue de 19.5 millones en 1984 y 21.2 millones en 1986. asumiendo este crecimiento exponencialmente encontramos una fórmula para la población de Kenia como función del tiempo:

$$P = P_0 \, e^{kt} = 19.5 \, e^{kt} \quad \text{Dónde:}$$

$P_0 = 19.5$ es el valor inicial de P.

Encontramos k usando el factor de que P = 21.2 cuando t = 2, así:

$$21.2 = 19.5\ e^{k(t)}$$

Para encontrar K dividimos ambos lados por 19.5, dónde:

$$1.087 = \frac{21.2}{19.5} = e^{2k}$$

Ahora tomando el logaritmo natural:

$$ln\ (1.087) = ln\ \left(e^{2t}\right)$$

Usando la calculadora y el factor de que:

$ln\ \left(e^{2k}\right) = 2k$, así encontramos que, $0.0834 = 2k \therefore k \approx 0.042$ o cerca de 4.2% . Después:

$$P = 19.5\ e^{0.042t}$$

Estos datos muestran que la población de Kenia es creciente continuamente en 4.2% anual, consecuentemente el más rápido en el mundo dónde se elige para expresar la población de Kenia en la forma:

$$P = P_0\ e^{kt}$$

Sin embargo podríamos igualmente tener escrito:

$P = P_0\ a^t$ y resolver para a.

Como antes algunos problemas exponenciales pueden ser dados con o sin el uso de *e*.

Ejercicios de la sección 2.3.1

1) Construir una tabla de valores para x = 1.......10 comparar los valores de $f(x) = \log x$ & $g(x) = \ln x$ use los valores para comparar ambas funciones.

2) Resolver para t usando el logaritmo natural:

   a) $a = b\,e^{t}$
   b) $P = P_0\,e^{xt}$
   c) $A\,e^{kt} = e^{bt}$
   d) $C\,e^{-\alpha t} = b\,e^{-\wp t/n}$

3) En 1986 la población de Costa Rica fue de 2.5 millones, asumiendo que la población está creciendo en una tasa continua del 2.8% al año.

   a) Expresar P como una función de t.
   b) En que año llegará la población a 5 millones.

CAPITULO II.

CONCEPTOS CLAVES: LA DERIVADA.

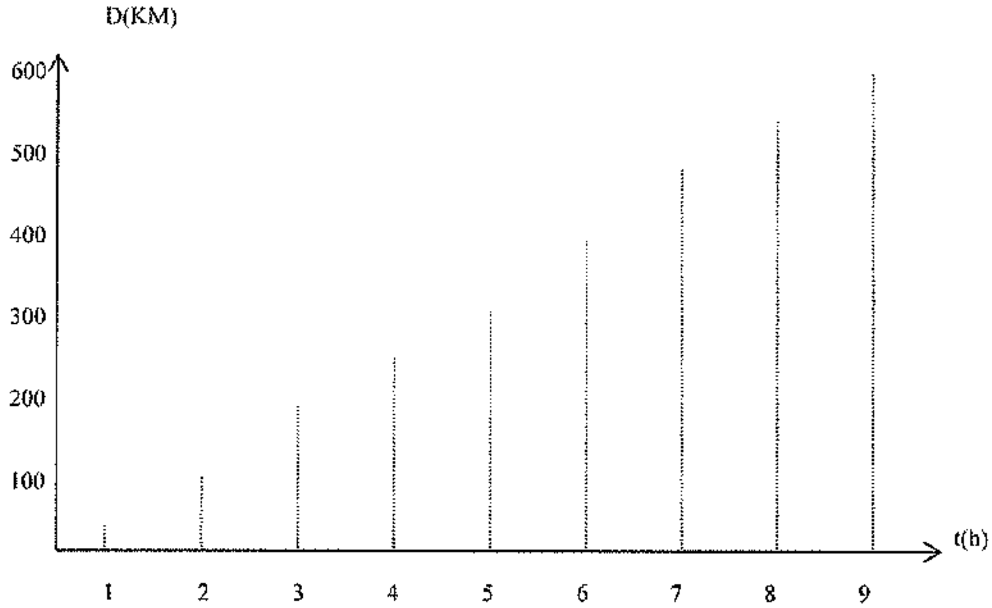
2a. Razones de cambio

Para iniciar imaginemos un automóvil que realiza un cierto recorrido desde una ciudad A hasta una ciudad B. Y que, cada hora, se anota la distancia recorrida. Los datos pueden ser ordenados en una tabla como la siguiente:

Tiempo (h)	Distancia en (km)
0	0
1	15
2	110
3	200
4	240
5	300
6	390
7	480
8	570
9	600

La tabla nos muestra que cuando el tiempo es 0, la distancia recorrida es 0, para cada hora el recorrido del automóvil es de 15 km. Al cabo de dos horas a recorrido 110 km., es decir, durante la segunda hora recorrió 95 km., en la tercera hora, 90 km., pero en la cuarta y quinta hora solamente avanzó 40 y 60 km., respectivamente.

Los motivos por los cuales se recorren diferentes distancias para un mismo intervalo de tiempo. , pueden ser muy variadas, quizá, el conductor se detuvo a comer o había demasiado tráfico, tal vez el camino estaba en pésimas condiciones antes de llegar a la ciudad B. La tabla la podemos representar gráficamente.



Si queremos conocer la velocidad total entonces recordemos que V = d/t, donde la velocidad media la podemos encontrar como:

$$\text{Velocidad media} = \frac{dis\tan ciarecorrida}{tiempo} = \frac{600Km}{9h} = 66.7\text{Km/h}$$

Pero también podemos calcularla para distintas partes del recorrido. Para las tres primeras horas tenemos:

$$V = \frac{200Km}{3h} = 66.7\text{Km/h}$$

Que coincide con la anterior, ahora para las tres últimas horas tenemos:

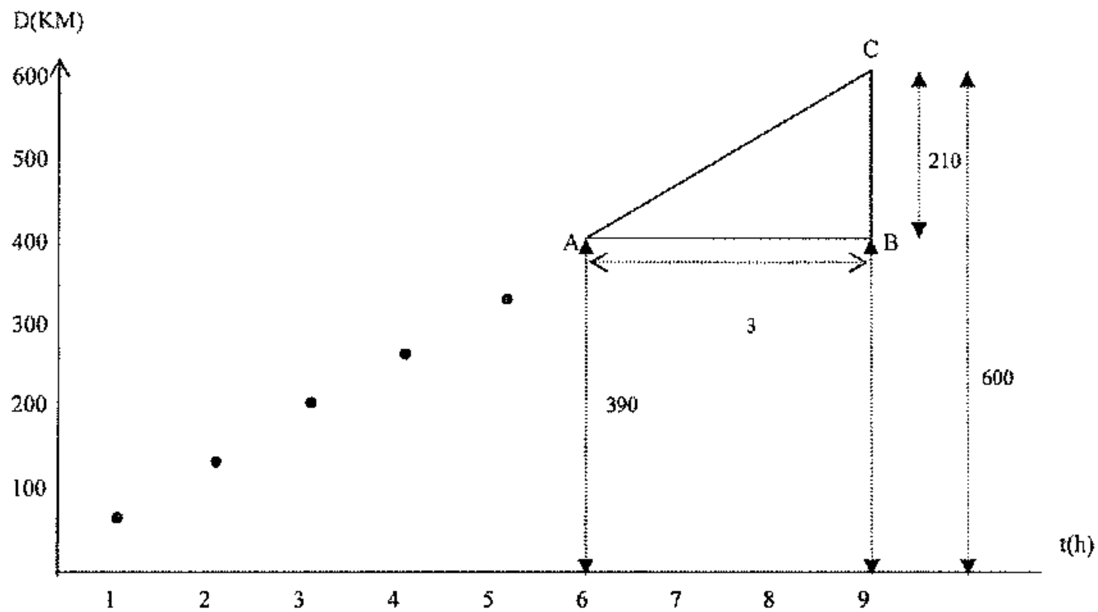
$$V = \frac{600Km - 390Km}{9h - 6h} = \frac{210}{3}\text{ Km/h} = 70\text{Km/h}$$

Que ya no es la misma que en los costos anteriores. Aunque el método para calculas las velocidades promedio o medida ha sido la misma, es decir:

$$\text{Velocidad media} = \frac{dis\tan ciarecorridaen[t_1, t_2]}{duraciónde[t_1, t_2]} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Dónde x_1 y x_2 son las distancias desde la ciudad A al punto donde se encuentra el automóvil en los tiempos t_1 y t_2 respectivamente. Dónde $t_1 > t_2$ en general pues si $t_1 = t_2$ entonces la división está indeterminada.

Ahora veamos gráficamente lo que ocurre:



Si queremos calcular la velocidad media durante el intervalo [6,9]. En el triángulo rectángulo ABC, el lado AB corresponde a un tiempo de tres horas, y BC corresponde a una distancias (600-390)Km, entonces:

$$\text{Velocidad media} = \frac{210Km}{3h} = 70\text{Km/h} = \frac{BC}{AB} = \text{velocidad media}$$

$$\text{y en general velocidad media} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$$

2b. Necesidad de la velocidad promedio y la velocidad instantánea.

Para la velocidad promedio o media hemos visto en la sección anterior como podemos obtenerla para diferentes intervalos, una indicación burda para las velocidades a las cuales viaja el automóvil durante su recorrido, por ejemplo, el automóvil tardó 1 hora en recorrer los primeros 15 Km. Ahora bien ¿Mantuvo una velocidad más o menos constante de 15 Km/h o se movió durante una media hora a razón de 30 Km/h y perdió otra media hora esperando los cambios de luces en los cruces?.

Los datos de la tabla no nos permiten información para responder estas preguntas, por lo cual necesitamos una tabla más detallada; por ejemplo, una tabla que expresara, minuto a minuto, la distancia al punto de partida, por ejemplo:

Tiempo (min)	**Distancia(Km)**
0	0
1	0.1
2	0.35
3	0.6
4	0.6
5	0.6
.	.
.	.
.	.
60	15.0
.	.

De donde parece que hubo una congestión del tráfico a 0.6 Km del punto de partida. Usando esta tabla podemos calcular las velocidades medias igual que antes, por ejemplo:

La velocidad promedio durante el tercer minuto fue de 0.25 Km/Min. Esto es, 15 Km/h. Pero una vez mas tales velocidades dan una idea muy basta de la realidad indicada por el velocímetro. ¿Fue la velocidad más o menos de unos 15 Km/h durante todo el tercer minuto, o hubo una aceleración alta durante los primeros segundos, seguida de una frenada brusca?. Supuesto que son las interrupciones del tránsito las que causan los periodos de inmovilidad, la tabla nos dice cuándo ocurren; sin embargo, nada nos informa sobre el uso que se hace de los frenos.

Para conseguir ese tipo de información habría que tomar menores intervalos de tiempo, probablemente una tabla que mostrara las distancias recorridas durante cada segundo. Sería adecuado para ello, por ejemplo:

Tiempo (seg)	**Distancia(Km)**
...	...
150	570
151	585
152	595
153	600
...	...

La velocidad media durante el intervalo de un segundo [150,151] es 15m/seg = 54Km/h; durante el intervalo siguiente es solamente 10m/seg y en el siguiente, es 5m/seg, lo que indica una frenada o una colisión.

Si seguimos este proceso cada vez nos aproximamos cada vez más a la realidad del recorrido total es pues factible, pensar que se pueden encontrar siempre intervalos más pequeños para que la velocidad media correspondiente a ese intervalo satisfaga las preguntas relacionadas con el, por lo que nos vemos en la necesidad de que en lugar de ajustar los intervalos a las preguntas, pudiésemos tener una definición que garantice que satisfará todas las cuestiones que se hagan, por lo que nuestro intervalo se estaría reduciendo con cada restricción hasta que fuese prácticamente cero. Nuestro intervalo, entonces estaríamos hablando de una velocidad instantánea.

Veamos ahora un segundo ejemplo:

Nosotros podemos observar como es la rapidez de un pequeño objeto cuando es lanzado, hacia arriba en donde prácticamente el objeto, será analizado en tres fases, cuando sube, cuando baja y cuando cae.

Sea la tabla de datos:

Tiempo (seg.)	Altura (metros)
0	6
1	90
2	142
3	162
4	150
5	100
6	30

Donde vemos que pasará el primer segundo 90-6 = 84 metros.

Para el segundo siguiente el objetivo viajará únicamente 122-90 = 52 metros.

En consecuencia el objetivo viaja sobre el primer intervalo $0 < t < 1$, el segundo intervalo $1 < t < 2$, entonces como:

$$V = \frac{d}{t}$$

Nosotros podemos decir que la rapidez promedio sobre el intervalo $0<t<1$ es de 84 metros/segundo, en el segundo intervalo es 52 metros/segundo.

Sobre esto ahora nosotros podemos hacer una distinción entre velocidad y rapidez. Supongamos un objeto moviéndose a lo largo de una línea, si fijamos una dirección positiva, la velocidad es positiva si es en la misma, y negativa si es en la dirección opuesta, rapidez es la magnitud de la velocidad.

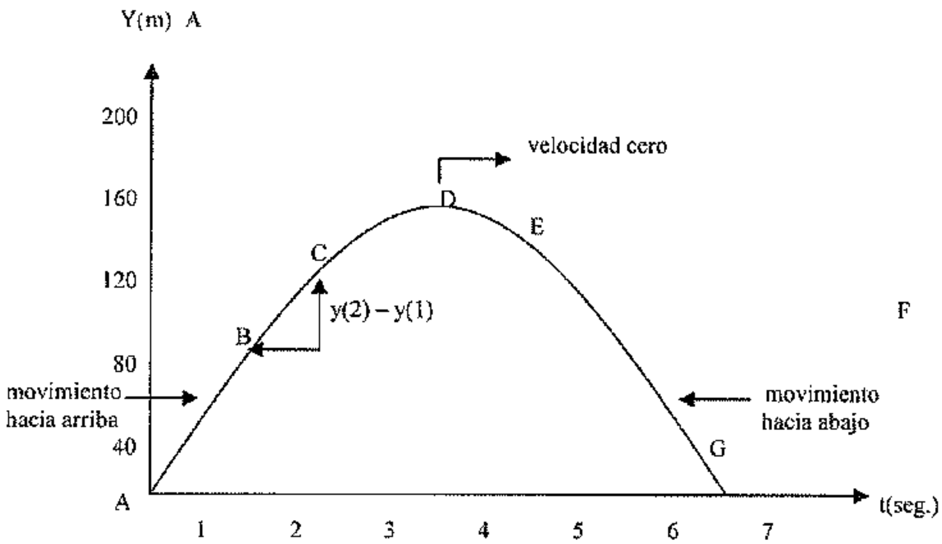
La velocidad promedio de un objeto sobre el intervalo $a < t < b$ es el cambio neto en la posición durante el intervalo dividido por $(b - a)$.

Ejercicio 1: Calcule la velocidad promedio del objeto sobre el intervalo $3 < t < 4$ ¿Cuál es el significado del signo de la respuesta?

Solución:

$$(150-162) = -12 \text{ metros.}$$

2c. Visualización de la velocidad



Como ahora nosotros podemos visualizar la velocidad promedio sobre esta gráfica consideremos el intervalo 1 < t < 2 y la expresión:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{Distancia\ recorrida\ en\ 1<t<2}{Tiempo\ requerido} = \frac{y(2)-y(1)}{2-1} = \frac{142-90}{1} =$$

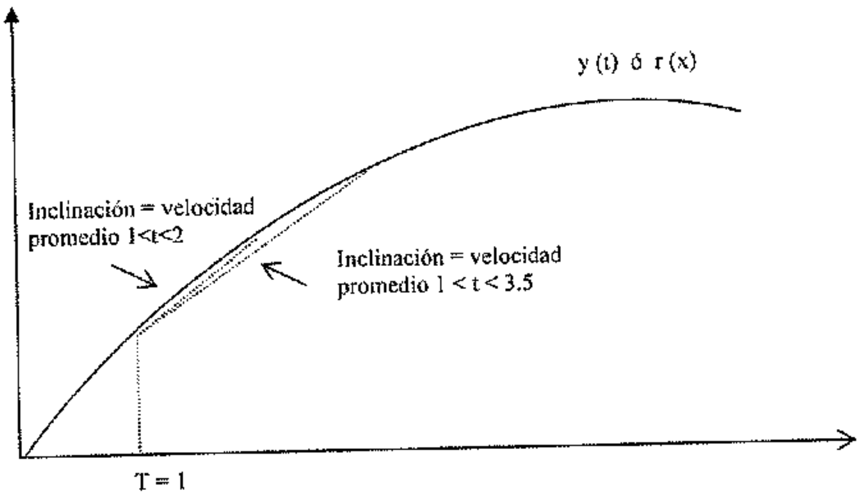
52m/s.

Tal como se esperaba, ahora y(2) - y(1) es el cambio en la altura sobre el intervalo, o la distancia recorrida la cual se marca verticalmente sobre la gráfica.

El uno en el denominador es el tiempo requerido y es marcado horizontalmente en la gráfica. De todo esto:

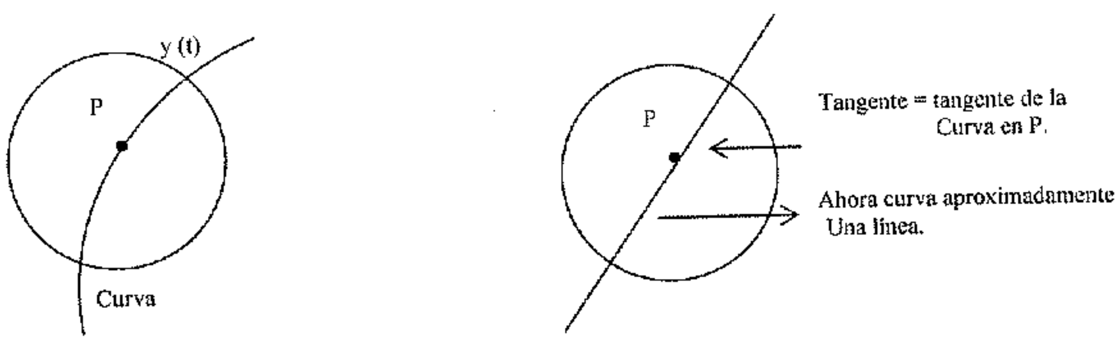
$$\text{Velocidad promedio} = \frac{Distancia\ recorrida}{Tiempo\ requerido} = \text{inclinación de la línea BC.}$$

La siguiente pregunta sería: ¿Cómo podemos visualizar la velocidad en un instante?. Lo que equivale a preguntarse como se puede ver la velocidad instantánea.



Se han graficado las velocidades promedio o inclinaciones (pendientes) para dos intervalos con punto inicial en t = 1.

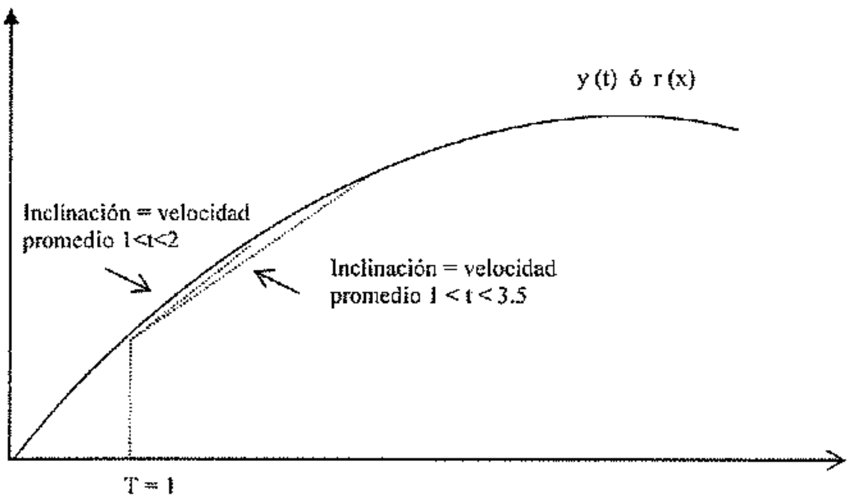
Si se empieza a reducir el intervalo, es decir si se toma t para valores muy cercanos a 1 entonces las líneas secantes se estarán aproximando cada vez más a la curva en un punto centrado de interés. Llamémosle P, gráficamente tenemos que:



Esta línea es aproximada por pequeños segmentos de línea, donde la pendiente de esta línea amplificada es la llamada velocidad instantánea. Entonces podemos decir que la tangente o pendiente de ésta línea amplificada, es la pendiente en el punto P para la curva, es decir:

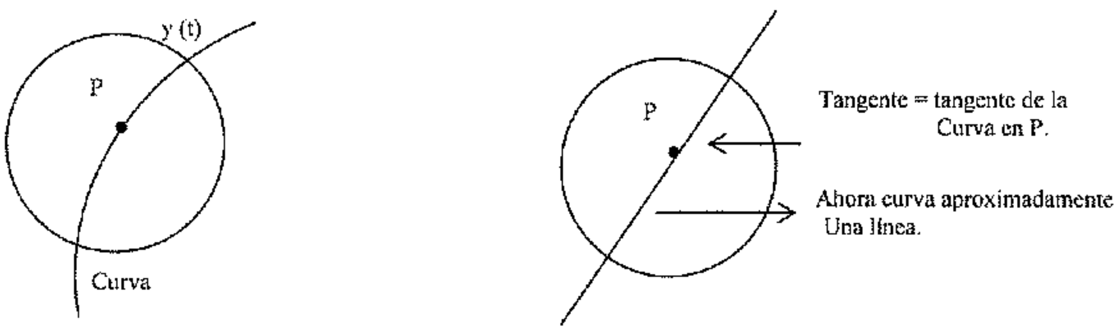
La velocidad instantánea es la pendiente de la curva en el punto.

Observación: podemos ver que para este caso la altura es función del tiempo. En el punto B la curva tiene una mayor pendiente positiva indicando que el objeto va hacia arriba más rápidamente; para el punto D es el mayor punto de altura para el objeto, en este caso la pendiente es igual a cero y el objeto se encuentra a punto de iniciar el regreso a tierra. En el punto E la curva tiene



Se han graficado las velocidades promedio o inclinaciones (pendientes) para dos intervalos con punto inicial en t = 1.

Si se empieza a reducir el intervalo, es decir si se toma t para valores muy cercanos a 1 entonces las líneas secantes se estarán aproximando cada vez más a la curva en un punto centrado de interés. Llamémosle P, gráficamente tenemos que:



Esta línea es aproximada por pequeños segmentos de línea, donde la pendiente de esta línea amplificada es la llamada velocidad instantánea. Entonces podemos decir que la tangente o pendiente de ésta línea amplificada, es la pendiente en el punto P para la curva, es decir:

La velocidad instantánea es la pendiente de la curva en el punto.

Observación: podemos ver que para este caso la altura es función del tiempo. En el punto B la curva tiene una mayor pendiente positiva indicando que el objeto va hacia arriba más rápidamente; para el punto D es el mayor punto de altura para el objeto, en este caso la pendiente es igual a cero y el objeto se encuentra a punto de iniciar el regreso a tierra. En el punto E la curva tiene una pequeña pendiente negativa, indicando una lenta velocidad de descenso. Finalmente la pendiente de la curva en el punto G es la más grande de las pendientes negativas, indicando una mayor velocidad de descenso.

La definición precisa de velocidad (instantánea y promedio).

Ahora sí hacemos un análisis de lo visto, hasta aquí podemos definir la velocidad promedio de una manera natural. Si vemos la velocidad promedio alrededor de un punto t, tomando cada vez intervalos más pequeños vemos que la velocidad promedio "converge". Como Y (t) es la altura y si tomamos el intervalo a<t<b entonces:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{Cambioenlaaltura}{Cambioeneltiempo} = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}$$

Si nosotros estamos interesados en observar la velocidad instantánea en $t = a$, entonces podemos tomar intervalos cada vez más pequeños alrededor del punto $t = a$, podemos considerar intervalos de la forma $a < t < a + h$ donde h es el lado del intervalo, entonces sobre el intervalo $a < t < a + h$:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{y(a+h) - y(a)}{h}$$

Ahora recordemos que antes dijimos que la velocidad instantánea es el número hacia el cual se aproxima por intervalos decrecientes en el lado, es la velocidad promedio, es decir; cuando h viene a ser muy pequeña, entonces la velocidad instantánea en $t = a$ es:

$$\text{El límite cuando h se aproxima a cero de } \frac{y(a+h) - y(a)}{h}$$

Finalmente introducimos un pequeño cambio para economizar la escritura: sustituiremos la frase el limite cuando h se aproxima a cero por:

$$\begin{array}{l} Lim \\ h \to 0 \end{array}$$

De donde finalmente nuestra definición queda:

$$\text{Velocidad instantánea en } t = a = \lim_{h \to 0} \frac{y(a+h) - y(a)}{h}$$

Observación: Estas definiciones son las fundamentales para el resto del curso, nosotros no nos debemos confundir con la notación, el intervalo cada vez puede ser más pequeño alrededor de a pero nunca será cero.

El objetivo para esta sección es que el alumno pueda comprender a través de prácticas como las mostradas, como se genera el concepto de velocidad promedio y aceleración instantánea. (comprensión, cómputo, análisis).

Ejercicios para esta sección:

1. Encuentre la velocidad promedio sobre el intervalo $0 \leq t \leq 0.2$ y estime la velocidad en t = 0.2 de un carro cuya posición esta dada por la tabla:

T (seg.)	**D (m.)**
0	0
0.2	0.5
0.4	1.8
0.6	3.8
0.8	6.5
0.10	9.6

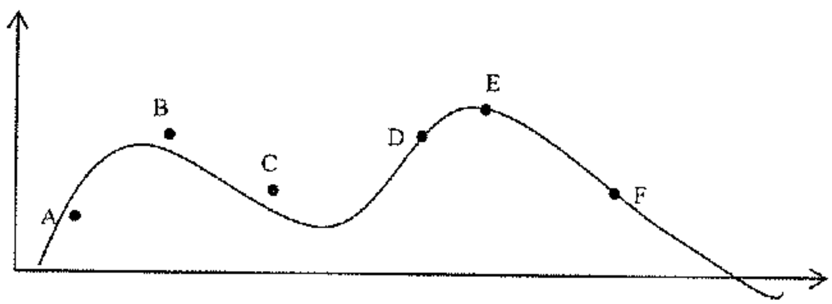
2. Una pelota es lanzada hacia arriba y la altura esta dada por la función $Y(t) = F(t) = -16t^2 + 50t + 36$.
   a. En que intervalo se alcanza la mayor altura.
   b. Cuál es la velocidad promedio de la pelota para el primer segundo.
   c. Aproxime la velocidad de la pelota para t = 1 segundo.
   d. Grafique la función y diga como varia la pendiente.
   e. Use la gráfica para decidir en que tiempo t se tiene la mayor altura.

3. Un auto conducido a velocidad constante. Muestre gráficamente la distancia recorrida por el auto como función del tiempo.

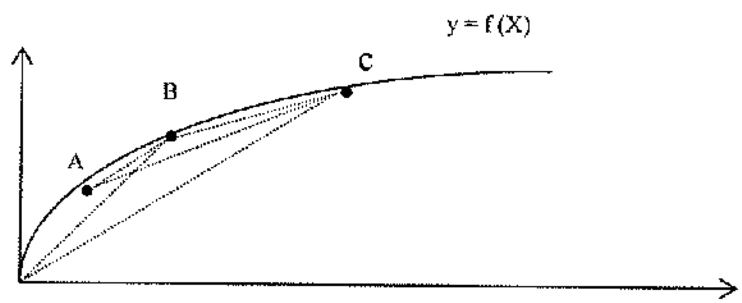
4. Un auto es conducido con una velocidad creciente, dibuje una posible gráfica para la distancia recorrida como función del tiempo.

5. Un auto avanza rápidamente, luego desciende su velocidad; muestre una posible gráfica para la distancia como función del tiempo.

6. Para la función mostrada en la figura, diga en que puntos de la curva la pendiente es positiva o negativa, cuales puntos tienen la máxima pendiente positiva o negativa:



7. Para la gráfica siguiente, arreglar las siguientes pendientes en orden creciente:



8. Supóngase s = f(t) representa la distancia de una partícula de un punto como función del tiempo t, muestre un posible gráfica para f, si la velocidad promedio de ña partícula entre t = 2 y t = 6 es igual a la velocidad instantánea en t = 5

2.1. La derivada

La sección anterior nos dio ciertos resultados que ahora vamos a aplicar a cualquier función denotada por Y = f (x), la cual no necesariamente tiene que ser distancia o altura en función del tiempo, para el caso de la altura se tiene que:

$$\frac{y(a+h)-y(a)}{h}$$

La cuál es el cambio en la altura dividido por la longitud de un pequeño intervalo de tiempo, ahora podemos considerar el caso general:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Para alguna función f esta razón es llamada el cociente de una diferencia, que podemos preguntar que es lo que nos representa el numerador, f (a+h)- f(a) mide el cambio en f durante el intervalo de a a a+h, entonces:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{Promedio del rango de f sobre el intervalo a a a+h}$$

Esta razón compara el cambio en los valores de la función f (x), con h, el cambio en x, si un pequeño cambio en x produce un largo cambio en f (x), esta razón puede ser grande; si un pequeño cambio en x produce un pequeño cambio en f (x), la razón puede ser pequeña.

Ejemplo 1:

La función r en función del volumen de una esfera, donde r es el radio de la esfera esta dada por la fórmula:

$$r\,(v) = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{1/3}$$

Calcular el cambio de la razón de la velocidad promedio de r con respecto a v sobre los intervalos 0 < v < 1 y 1 < v < 2.

Solución:

Razón de cambio promedio

del radio para $0 < v < 1$ $\quad = \dfrac{r(1)-r(0)}{1} = \left(\dfrac{3}{4\pi}\right)^{1/3} - 0 = 0.62.....$

Razón de cambio promedio

del radio para $1 < v < 2$ $\quad = \dfrac{r(1)-r(0)}{1} = \left(\dfrac{6}{4\pi}\right)^{1/3} - \left(\dfrac{3}{4\pi}\right)^{1/3} = 0.16....$

Como se puede ver, la razón puede decrecer cuando el volumen se incrementa. Nuevamente cuando escribamos esta razón de cambio tenemos que:

Razón de cambio de f

en el punto a $\quad = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

La razón de cambio de f en el punto a es llamada algunas veces la razón de cambio instantánea de f en a. Este número es muy importante y se la da un nombre especial, la derivada de f en a y se denota por f'(a), entonces:

La derivada de f en a es:

$$F'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ejemplo 2:

Estime la razón instantánea del cambio de radio de una esfera respecto al cambio en el volumen en v = 1, para h pequeños.

Solución: Con h = 0.01 y h = - 0.01

$\dfrac{r(1.01)-r(1)}{0.01} \approx 0.2061$ y $\dfrac{r(0.99)-r(1)}{-0.01} \approx 0.2075$

con h = 0.001 y h = - 0.001

$$\frac{r(1.001)-r(1)}{0.001} \approx 0.2067 \text{ y } \frac{r(0.999)-r(1)}{-0.001} \approx 0.2069$$

los resultados de estos valores sugieren que el límite es entre 0.2067. si seguimos dando otros valores a h nosotros confirmaremos esto.

Ahora veamos la utilidad de nuestra definición de derivada y lo práctica que resulta respecto al caso anterior (ejemplo 2).

Ejemplo 3:

Encuentre la derivada de la función $f(x) = x^2$ en el punto $x = 1$.

Solución: $f'(1) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ se tiene que:
$h \to 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2}{h} - 1^2 = \lim_{h \to 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h+h^2}{h}$$

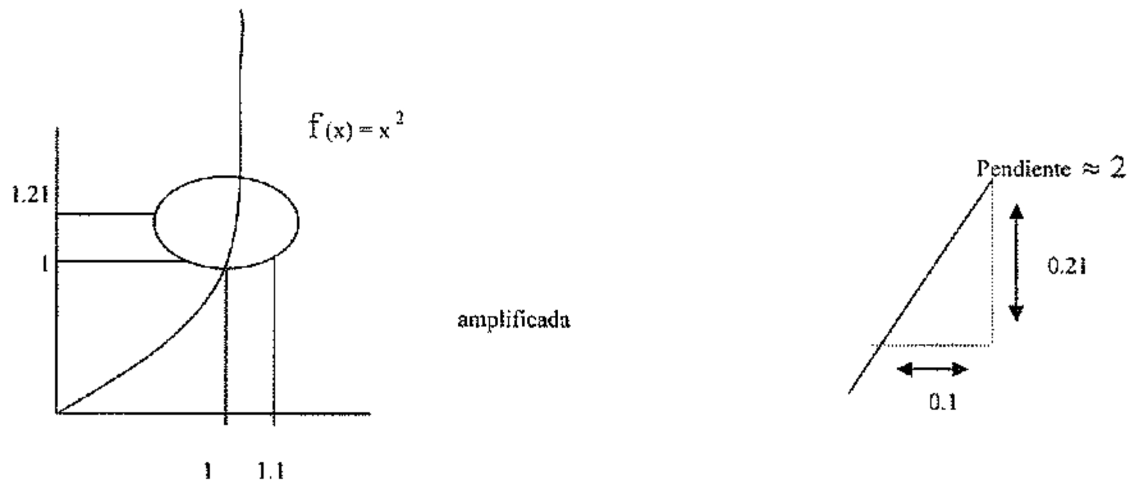
Ahora como señalamos en una observación previa, h puede ser muy pequeño pero nunca cero, puede tomar valores tan pequeños como (0.1, 0.01, 0.0001, etc.) si se hacen los cálculos, o otra alternativa es dividir entre h en la expresión $\frac{2h+h^2}{h}$, una operación válida, para encontrar el límite únicamente examinamos valores cercanos pero nunca igual a cero. Nosotros obtenemos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{h(2+h^2)}{h} = \lim_{h \to 0}(2+h)$$

Dónde este límite es claramente igual a 2 en x = 1, por tanto la razón de cambio de k es 2.

¿Cómo podemos pensar el resultado de que la derivada sea igual a 2?.

La derivada es la razón de cambio, nos dice que para pequeños cambios en x, se producen cambios en $f(x) = x^2$ como un ejemplo, si x cambia de 1 a 1.1, un cambio neto de 0.1, f (x) puede cambiar por alrededor de 0.2, mostrémoslo gráficamente:



Gráfica de $f(x) = x^2$ cerca de $x = 1$ tiene pendiente x^2.

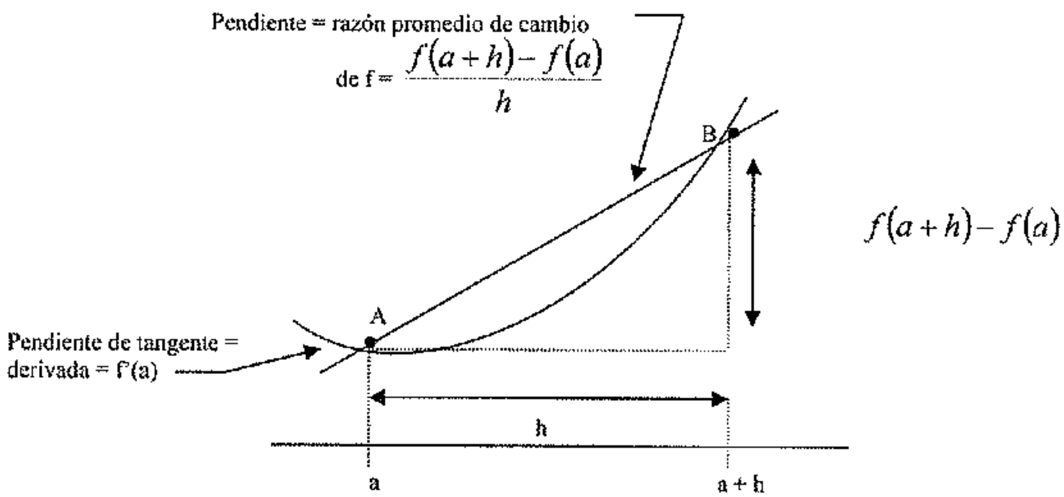
Ahora mostremos la derivada de $f(x) = x^2$ numéricamente, notemos que cerca de $x = 1$, cada tiempo el valor de x se incrementa por 0.001, los valores de x^2 se incrementan aproximadamente por 0.002, entonces cerca de $x = 1$ la gráfica es aproximadamente lineal con pendiente $\frac{0.002}{0.001} = 2$.

X	$\mathbf{X^2}$	**Diferencia en valores de $\mathbf{x^2}$**
0.998	0.996004	
0.999	0.998001	0.001997
1.000	1.000000	0.001999
1.001	1.002001	0.002001
1.002	1.004004	0.002003
x incrementa en 0.001		Todos son aprox. 0.002

Tabla de valores de $f(x) = x^2$ cerca de $x = 1$.

Visualización de la derivada:

Como con la velocidad, nosotros podemos visualizar la derivada f'(a) como la pendiente de la gráfica de f en a, considerando el cociente de la diferencia $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, el numerador, $f(a+h)-f(a)$ es la distancia vertical marcada en la figura y h es la distancia horizontal, tenemos la razón promedio de cambio de f = $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ = pendiente de la línea AB.



Como h viene a ser muy pequeña, la pendiente de la línea AB viene a ser la pendiente de la curva en A ó:

Razón de cambio instantánea de f = derivada = $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ = Pendiente de la curva en A.

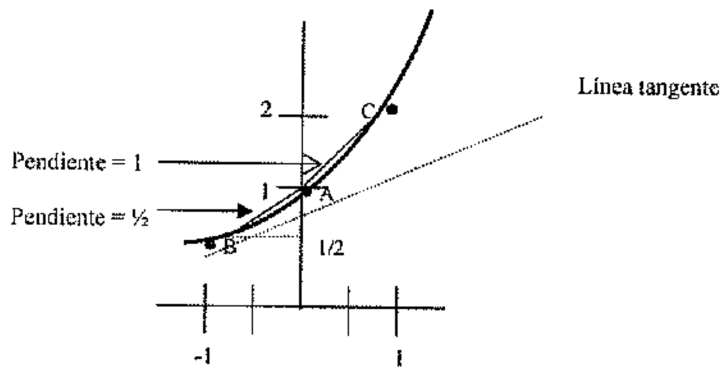
Alternativamente, observe que como h es muy pequeña, la línea AB viene a ser tangente a la curva en A, donde podemos visualizar:

La derivada es la pendiente de la línea tangente en A.

La interpretación de la pendiente es muy útil para obtener información acerca de la derivada como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4:

Encuentre la derivada de $f(x) = 2^x$ en $X = 0$ gráficamente y geométricamente:



Solución:

Gráficamente si tomamos una línea tangente a 2^x en $x = 0$ y si tomamos otros segmentos como BA y AC podemos ver que la pendiente se encuentra entre ½ y 1.

Numéricamente: aquí emplearemos el cociente de la diferencia en $x = 0$:

$$\frac{f(o+h)-f(o)}{h} = \frac{2^h - 2^0}{h} = \frac{2^h - 1}{h}$$

Como h es pequeño hagamos una tabla de valores:

h	**2^h**	**Diferencia del cociente $2^h - 1/h$**
-0.0003	0.999792077	0.693075
-0.0002	0.999861380	0.693099
-0.0001	0.999930688	0.693123
0	1	
0.0001	1.00006932	0.693171
0.0002	1.00013864	0.693195
0.0003	1.00020797	0.693219

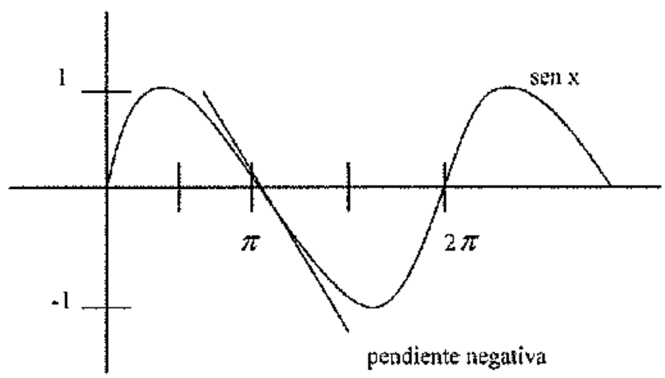
Como h toma valores tanto positivos como negativos vemos que por ambos lados se aproxima la derivada alrededor de 0.6931 en x = 0.

La derivada esta entre 0.693123 y 0.693171.

Ejemplo 5:

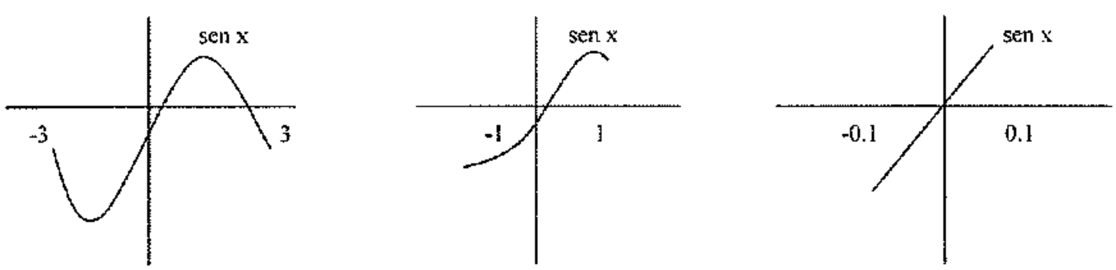
¿Es la derivada de *sen x* en x = π positiva o negativa?

Solución:



Ejemplo 6: Por aproximación sobre el punto (0,0) sobre la gráfica del seno estime la derivada del seno de x en x = 0.

Solución:



Sobre el intervalo -0.1 $\leq x \leq 0.1$, la gráfica muestra que la derivada se aproxima a 1.

Ejemplo 7:

Encuentre la derivada de f (x) = x^2 +1 en x = 3 algebraicamente:

Solución:

Otra vez empleamos el cociente de la diferencia:

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{(3+h)^2+1-10}{h}=\frac{9+6h+h^2-9}{9}=\frac{6h+h^2}{h}$$

Si recordamos que h no puede ser cero, podemos dividir entre h y obtenemos:

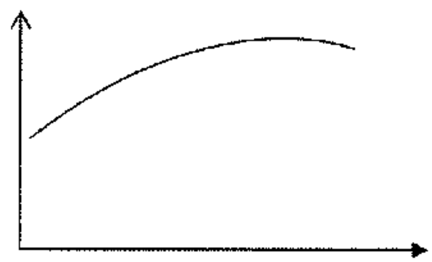
$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h}\lim_{h\to 0}6+h=6$$

El objetivo para esta sección es que el alumno visualice el concepto de derivada y que gráficamente y numéricamente lo pueda representar.
(comprensión, cómputo, análisis).

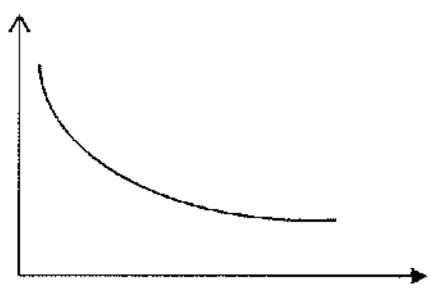
Ejercicios para la sección:

1. Sobre la gráfica mostrada en la figura para y = f (x) y tomando h > 0 marque las siguientes expresiones:

   a. f (x)
   b. f (x+h)
   c. f (x+h) - f (x)
   d. h
   e. Usando los incisos de la a) a la d), compruebe si puede representar la cantidad $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ como la pendiente de una línea sobre la gráfica:



2. De manera similar para la siguiente figura:

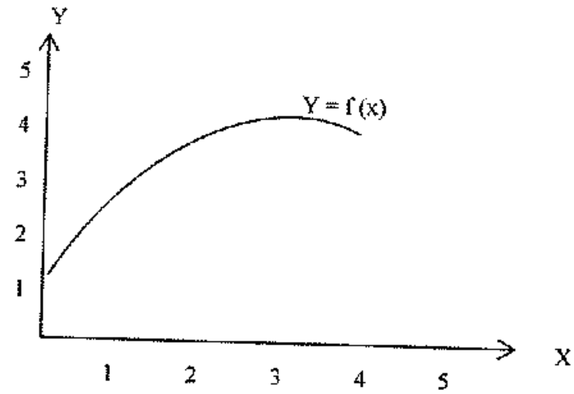


3. Pruebe que puede representar lo siguiente sobre la figura:

   a. f (4)
   b. f (4) – f (2)

c. $\frac{f(5)-f(2)}{5-2}$

d. $\frac{f(4)}{4}$

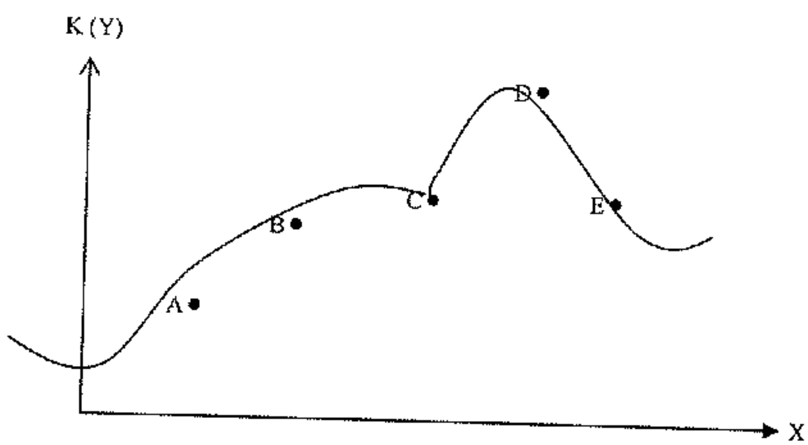


4. Empleando la figura del inciso 3. ordene en ascenso las siguientes expresiones:

$$0,\ \ 1,\ \ f'(3),\ \ f(3) - f(2)$$

5. Refiriéndose a la figura de la gráfica k (x) conteste lo siguiente:

   a. ¿Entre cuál par de puntos consecutivos es el cambio de la razón promedio de k más grande?.
   b. ¿Entre cuál par de puntos consecutivos el cambio de la razón promedio de k es cero?.
   c. ¿Entre cuál par de puntos consecutivos son las razones de cambio de k aproximadamente iguales?.



6. Si f (x) = x^2+4x. Estime f '(3) geométricamente, numéricamente y gráficamente.

7. Para x^5, emplee una tabla para estimar g '(2) y g '(-2).

8. Para f (x) = log x, estime f '(1), de la gráfica de f (x).

9. Estime la derivada de f (x) = x^x en x = 2.

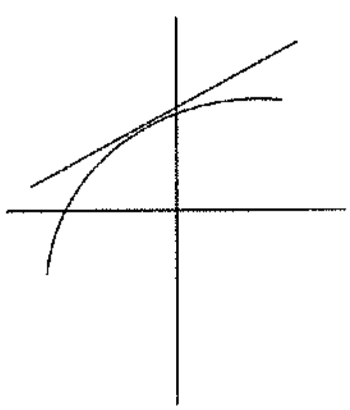
10. Sea g (x) = $\sqrt{x}$ y f (x) = k x^2, dónde a es una constante:

    a. Encuentre la pendiente de la línea tangente a la gráfica de g en el punto (4,2).
    b. Encuentre la ecuación de ésta línea tangente.
    c. Si la gráfica de f (x) contiene el punto (4,2), encuentre k.
    d. Se interceptan en algún lugar las gráficas con las tangentes.

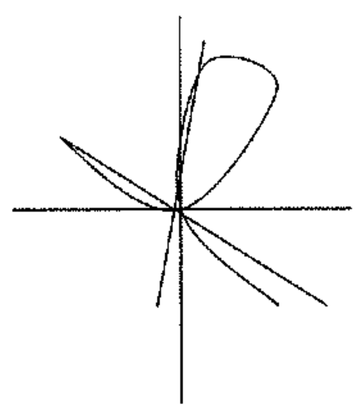
Observaciones:

a. Cuando se habla de tangente no se entenderá como aquella que toca una curva en un solo punto, puesto que una definición tal resulta demasiado restrictiva, puesto que una curva puede cumplir alguno de estos casos:

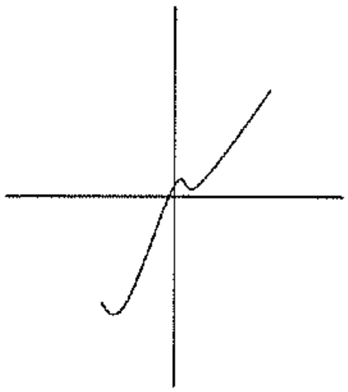
   a1) Una tangente.
   a2) Dos o más tangentes.
   a3) Ninguna tangente.
   a4) O que tal tangente intercepte en uno o más puntos a una curva.



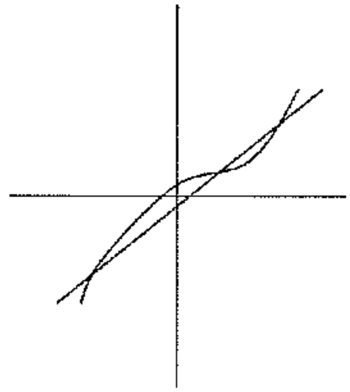
a1)



a2)



a3)



a4)

b. Pueden emplearse notaciones alternativas para la derivada, Dx, $\frac{df}{dx}$,
f '(x),...

c. Para el cálculo de la derivada pueden emplearse otros métodos pero que esencialmente son los mismos, como el llamado de los cuatro pasos:

Sea: $y = x^2 + 3$

1) $(Y + \Delta Y) = (x + \Delta x)^2 + 3$
$Y + \Delta Y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3$

2)
$$\begin{array}{l} Y + \Delta Y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3 \\ \quad - Y - x^2 - 3 \\ \hline \Delta Y = 2x\Delta x + \Delta x^2 \end{array}$$

3) $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = 2x + \Delta x$

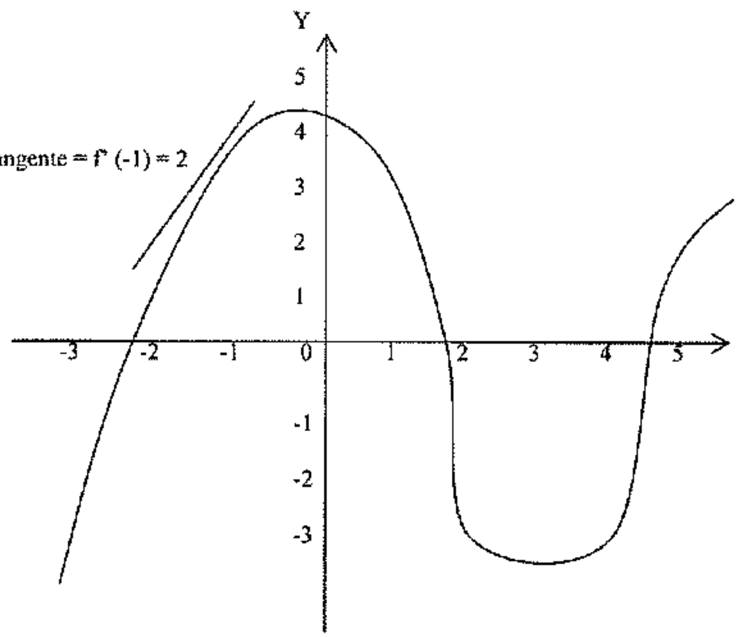
4) $\Delta X \to 0 \Rightarrow \frac{\Delta Y}{\Delta X} = 2x$

2.2. La función derivada

Ya hemos visto la manera de obtener la derivada de una función en un punto fijo, y vimos como da información cerca del punto. Ahora consideraremos puntos arbitrarios e investigar que ocurre con la variación de la derivada de una función.

Primero recordemos que la derivada la podemos ver geográficamente como una línea recta que se mueve sobre la curva pero que son tangentes en algún punto, entonces al encontrar la derivada en un punto, nosotros encontramos la pendiente de la línea tangente allí.

Ejemplo 1: Estime la derivada de la función dada por la gráfica en x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.



Solución:

De la gráfica se puede estimar la derivada en cualquier punto, si se toma una tangente en el punto deseado y trazando líneas paralelas a los ejes se puede estimar la pendiente de la recta en ese punto.

Para $x = -1$, $f'(-1) \approx 2$, notemos que la pendiente en $x = -2$ es positiva y muy grande, la pendiente en $x = -1$ es positiva, pero pequeña, para $x = 0$ la pendiente es negativa, podemos hacer una tabla:

x	Derivada en x
-2	6
-1	2
0	-1
1	-2
2	-2
3	-1
4	1
5	4

Entonces vemos como la derivada depende del punto X, que se tome entonces:

La función derivada es:

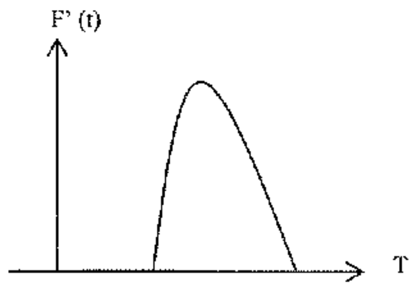
$$f'(x) = \lim_{h \to 0 \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para cada valor de x para el cual dicho límite exista, nosotros diremos que f es diferenciable en ese valor x, y si el límite existe para todo x del dominio de k, diremos que es diferenciable en cada punto del dominio, o incluso podemos pensar que es diferenciable en cada punto del dominio, excepto para unos cuantos puntos aislados.

2.2.1. Propiedades de la derivada

a. Si f ' > 0 sobre un intervalo, entonces f es creciente sobre el intervalo.
b. Si f ' < 0 sobre un intervalo, entonces k es decreciente sobre el intervalo.

Ejemplo 2: Supongamos una gráfica de la derivada de t, que se puede decir del signo de la derivada en cada intervalo:



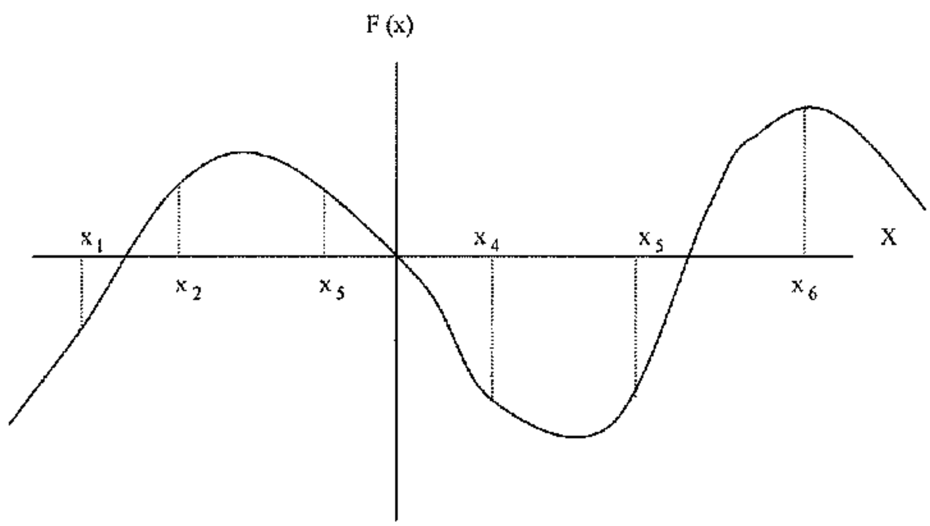
Solución:

Sobre intervalos donde f' (t) = 0, f no cambia y se dice que es constante, sobre el pequeño intervalo donde f' (t) > 0, f es creciente, en el punto donde tiene pico f' (t) toma su mayor valor.

Ejercicios:

1) En la gráfica siguiente diga para que valores de x es:

   a. f (x) más grande.
   b. f (x) más pequeña.
   c. f' (x) más grande.
   d. f' (x) más pequeña.



2) a) Si f (x) es par entonces f' (x) es impar.
   b) Si f (x) es impar entonces g' (x) es par.

(Use argumentos geométricos).

2.3. Interpretación de la derivada

Nosotros hemos visto que la derivada puede ser interpretada como una pendiente y como una velocidad, ahora nos proponemos que a través de algunos ejemplos pueda ser más clara la interpretación de la derivada.

Aceleración: Como ya se dijo antes se consideró una función digamos s (t) que podemos ver como el desplazamiento de un cuerpo en un tiempo t = a. Luego tenemos que la velocidad es:

$$\text{Velocidad} = s'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

Y la aceleración es la razón de cambio de la velocidad, v (t) o también podemos definir:

$$\begin{pmatrix} \textit{Aceleración promedio} \\ \textit{de } c \textit{ a } c+h \end{pmatrix} = \frac{v(c+h) - v(e)}{h}$$

Y como lo hicimos para la velocidad instantánea ahora lo podemos para la aceleración instantánea:

$$\begin{pmatrix} \textit{Aceleración instantánea} \\ \textit{en} \quad t = e \end{pmatrix} = v'(c) = \lim \frac{v(e+h) - v(e)}{h}$$

Ejemplo 1:

Consideremos un coche de carreras que va de cero mph. a 60 mph. en cinco segundos, como lo muestra la tabla. ¿Encuentre la aceleración promedio de el coche en los dos primeros segundos?.

T (seg.)	V (m/seg.)
0	0
1	30
2	52
3	68
4	80
5	88

Solución:

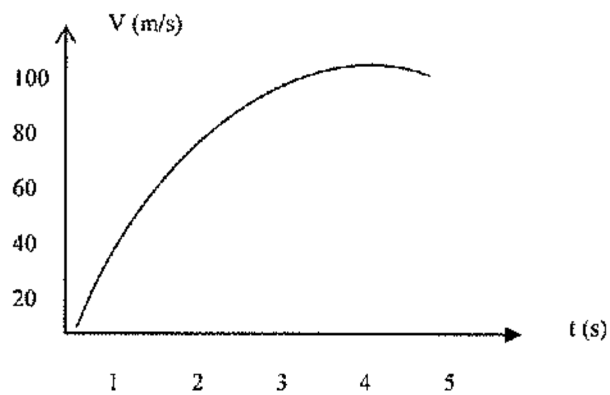
La magnitud de la aceleración promedio sobre un intervalo, la encontramos calculando la razón de cambio de la velocidad promedio sobre el intervalo, las unidades de la aceleración son m/s^2.

$$\bar{a} = Aceleración\ Promedio\ de\ 0 < t < 1 = \frac{Cambio\ en\ la\ Velocidad}{Tiempo} = \frac{30-0}{1} = 30m/s^2$$

$$\bar{a} = Aceleración\ Promedio\ de\ 1 < t < 2 = \frac{52-30}{2-1} = 22m/s^2$$

Ejemplo 2:

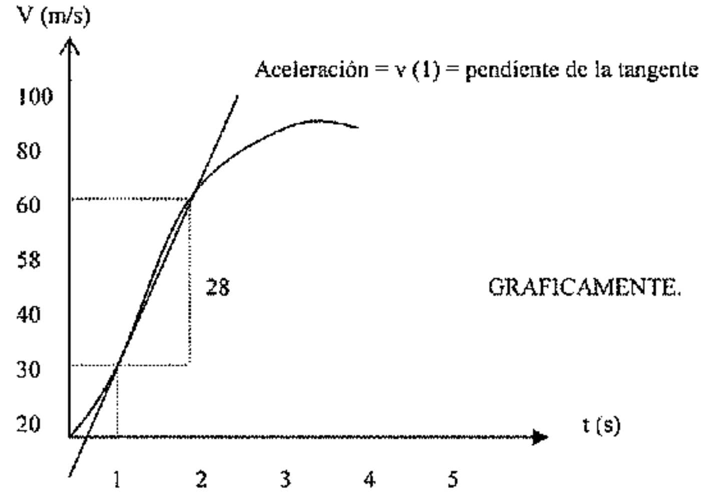
La gráfica de la figura siguiente muestra la velocidad de un coche de carreras como una función del tiempo. ¿Estime la aceleración en t = 1?



Solución:

La aceleración en t = 1, es la derivada v' (1), la pendiente de la tangente a la curva de la velocidad en t = 1, entonces una estimación para la aceleración en t = 1 es:

$$V'(1) = \frac{28}{1} = 28m/s^2$$



Otra interpretación de la derivada:

Ejemplo 3:

El costo (c) de la construcción de una casa de A metros cuadrados de área esta dada por la función c = P (A). ¿Cuál es la interpretación práctica de la función f' (A)?.

Solución:

$$f'(x) = \frac{dc}{dA}$$

Esto es el costo dividido por un área, donde esto es medido en pesos por metro cuadrado, el dc es el costo extra de construcción para dA extra en m^2 de casa, es decir $\frac{dc}{dA}$ es el costo extra por m^2 entonces f ' (A) es el costo por m^2 de construcción extra.

Ejemplo 4:

El costo de extracción de T toneladas de un metal es C = f (t) pesos. ¿Qué significa la expresión f' (2000) = 100?.

Solución:

$$f'(2000) = \left.\frac{dc}{dT}\right|_{T=2000} = 100$$

$$\frac{dc}{dT} = Medida\, en\, Pesos\ \ por\, Tonelada$$

Entonces la extracción de 2000 toneladas costo aproximadamente 100 pesos, luego por un número menor de toneladas pagaríamos menos.

Ejemplo 5:

Una persona tiene que llenar un tinaco con agua, si lo que llena de agua tiene un ritmo de $10cm^3/seg$. ¿Qué función expresa la derivada para este caso?.

Solución:

Como tenemos involucrado un volumen de un tinaco y sabemos cual es el ritmo de llenado, entonces el volumen de agua en el tinaco se incrementará a cada segundo, luego el volumen es función del tiempo, tendríamos que:

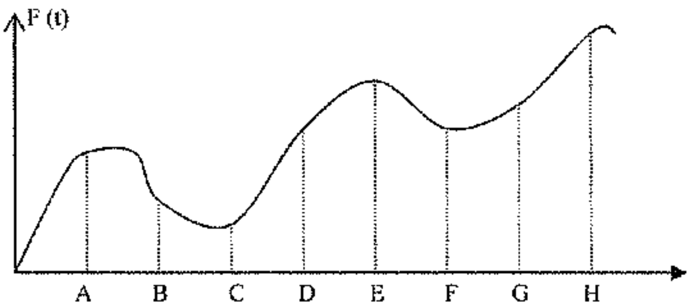
$$V'(t) = \frac{dV}{dt} = 10$$

El objetivo para esta sección es que el alumno pueda ver que la derivada no es otra cosa que una función, la cual también el puede expresar como una variación de la velocidad (comprensión , cómputo, análisis).

Ejercicios para la sección:

1) Considerando la gráfica mostrada, conteste los incisos:

   a. Si f (t) nos da la posición de la partícula en el tiempo t enliste los puntos donde la partícula tiene velocidad cero.
   b. Si ahora suponemos que f (t) es la velocidad de la partícula en un tiempo t, ¿Cuál es el significado de los puntos enlistados en la respuesta a ?



2) Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = 50$ y f' (x) es positiva para toda x, ¿Qué es $\lim_{x \to \infty} f'(x)$?

3) Si \$1000 nos dan un 7% en t años, tu balance es \$13, donde B = f (t). ¿Cuáles son las unidades de $\frac{dB}{dT}$ y cuál es la interpretación financiera de $\frac{dB}{dT}$?

4) La temperatura T, en C° en un día frío esta dada por T = f (t), donde t es el tiempo en minutos donde la temperatura puede aumentar o descender.

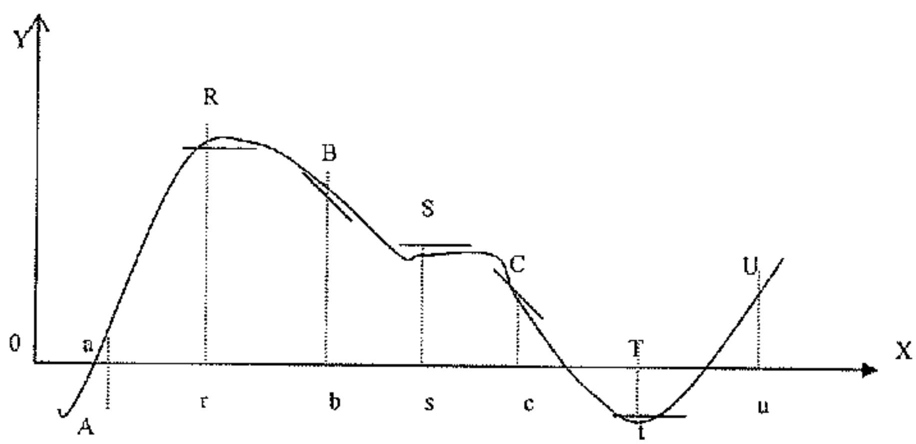
   a. ¿Qué indica el signo de f ' (t)?
   b. ¿Qué interpretación práctica tiene f ' (200) = 2?

2.4. Concavidad y convexidad

Un arco de una curva $y = f(x)$ es cóncavo si en cada uno de sus puntos esta situado por encima de la tangente. Al aumentar x, $f'(x)$ o aumenta sin cambiar de signo.

Un arco de curva $y = f(x)$ es convexo o cóncavo hacia abajo, si en cada uno de sus puntos el arco esta situado por debajo de la tangente. Al aumentar x, $f'(x)$ o disminuye sin cambiar de signo.

Puntos de inflexión: Es un punto en el cuál la curva cambia de cóncavidad (convexa).



Para $a < x < R$ convexo hacia arriba.
Para $b < x < s$ convexo hacia abajo.
Para B, S, C inflexión.

2.5. La segunda derivada

Para una función f, la derivada de f' es llamada la segunda derivada y se escribe f ”.

Si y = f (x), la segunda derivada puede escribirse como $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ó $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

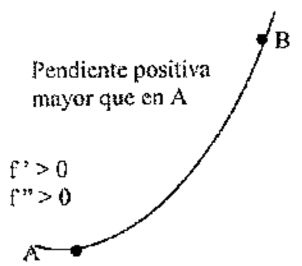
¿Cuál es la utilidad de la segunda derivada?.

Si f ” es la derivada de f ' tenemos:

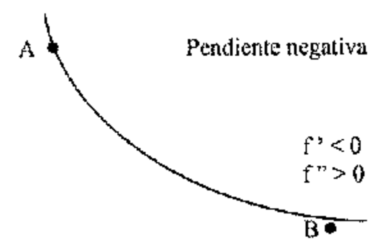
i) si f ” > 0 sobre un intervalo, entonces f ' es creciente sobre el intervalo.
ii) Si f ” < 0 sobre un intervalo, entonces f ' es decreciente sobre el intervalo.

Veamos gráficamente lo que ocurre con f ”:

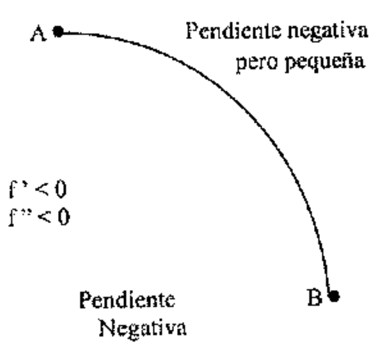
a)



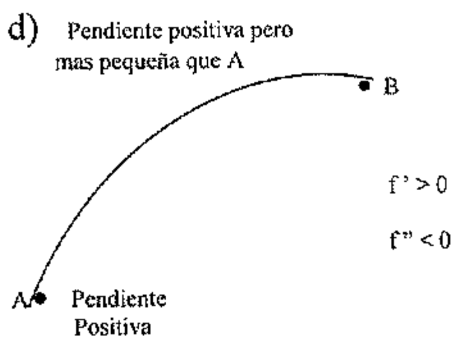
b)



c)



d)



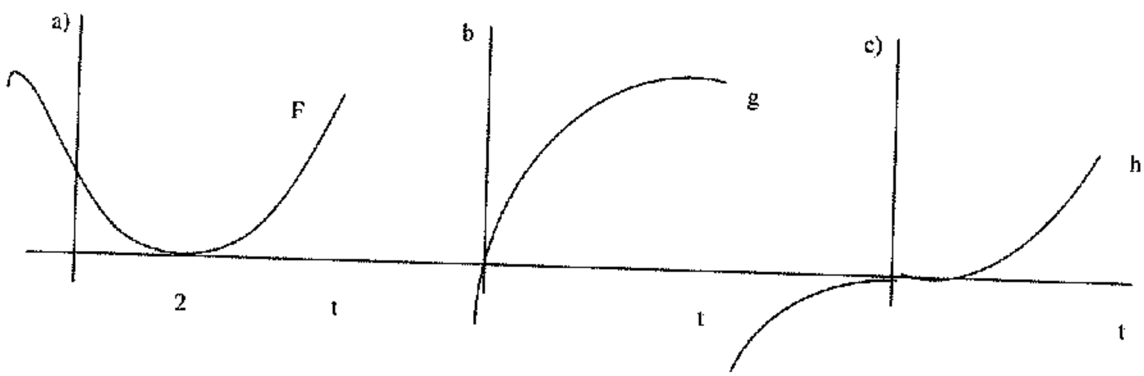
De estos resultados tenemos:

f ” > 0 implica f ’ es creciente o la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre el intervalo.

f ” < 0 implica f ’ es decreciente o la gráfica de f ’ es concava hacia abajo sobre el intervalo.

Ejercicio:

Para las gráficas dadas por los tres dibujos diga cuando la segunda derivada es positiva y donde negativa.



2.5.1. Velocidad y aceleración

La velocidad, v, de un cuerpo en movimiento es la razón en la cual la posición, s, esta cambiando:

$$V = \frac{ds}{dt}$$

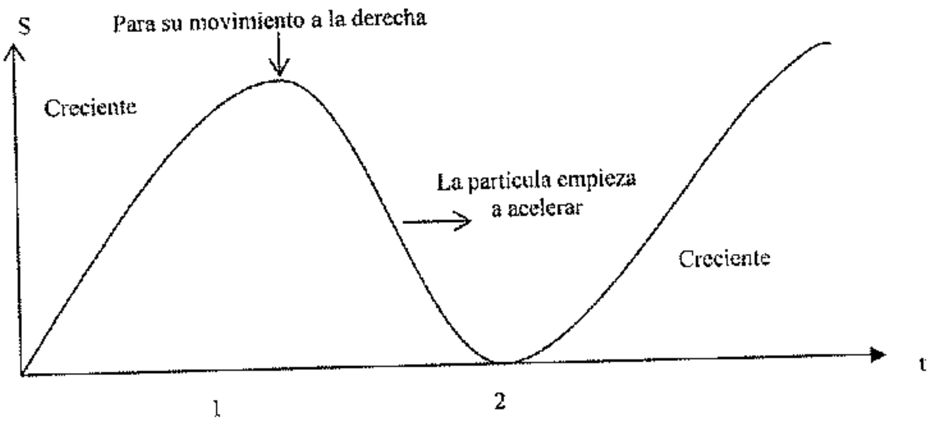
la aceleración de un cuerpo en movimiento describe cómo esta cambiando la velocidad con el tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{ó} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Ejemplo:

Una partícula se esta moviendo a lo largo de una línea recta, si la distancia, s, a la derecha de un punto fijo es dada por la figura, estime:

a. Cuándo la partícula se esta moviendo a la derecha y cuándo se esta moviendo a la izquierda.
b. Cuándo la partícula es acelerada y cuándo es desacelerada.



Solución:

a. La partícula es movida a la derecha, s, es incrementada (creciente) de $0 < t < 2/3$ y $t > 2$, para $2/3 < t < 2$, el valor de s es decreciente, la partícula se mueve a la izquierda.
b. La partícula es acelerada para $t > 4/3$.

El objetivo para esta sección es que el alumno reconozca cuándo una curva es cóncava hacia arriba (concava hacia abajo), dependiendo de la ubicación de ésta, con respecto a la derivada (este por arriba o por abajo) y que la puede representar gráficamente. (comprensión, cómputo, análisis).

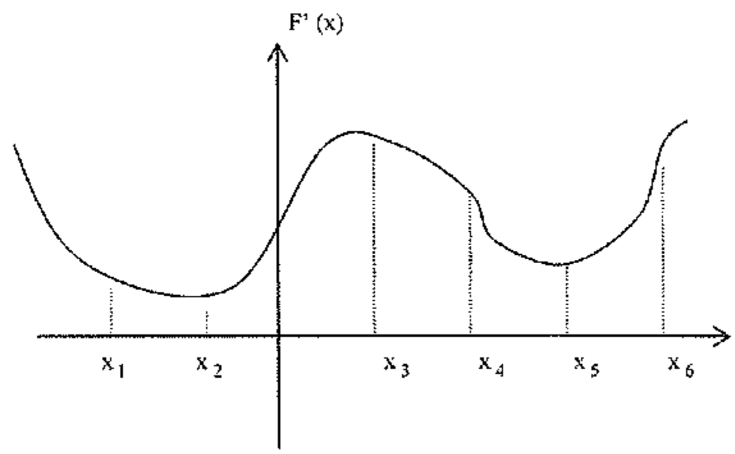
Ejercicios para esta sección:

1) Si f ” es positiva sobre un intervalo. ¿Cómo es f ’ sobre el intervalo y como es f sobre el intervalo?. Si f ” es negativa sobre un intervalo, ¿Cómo es f ’ sobre el intervalo y como es f sobre el intervalo?.

2)
   a. Muestre una curva donde la primera y segunda derivada son positivas en cada punto.
   b. Muestre una curva donde la segunda derivada es negativa en cada punto, pero la primera derivada es positiva en cada punto.
   c. Muestre una curva donde la segunda derivada es positiva en cada punto, pero donde la primera derivada es negativa en cada punto.
   d. Muestre una curva donde la primera y segunda derivada son en cada punto negativas.

3) La gráfica de f ’ (no de k) esta dada por el dibujo, en cuál de los valores marcados de x es:

   a. f (x) es mayor.
   b. f (x) es menor
   c. f ’ (x) es mayor.
   d. f ’ (x) es menor.
   e. f ” (x) es mayor.
   f. f ” (x) es menor.



2.6. Algo sobre límites

Como ya vimos anteriormente se inicio hablando de un cociente, ahora queremos formalizar la noción de límite que ya también hemos mencionado.

La expresión:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Es llamada la diferencia del cociente de k, que era medida en el intervalo a < x < a + h, como h puede tomarse cada vez más pequeña, esta razón promedio se va aproximando a un valor particular, si dicho número es L, decimos que L es el límite de la diferencia cuando h se aproxima a cero, en símbolos tenemos:

$$L = \lim \frac{f(a+h)-k(a)}{h}$$

Donde h nunca será cero pues tendríamos para el caso general $\frac{0}{0}$, lo cual no esta permitido y el límite es inventado para poder evitar este problema.

El límite tiene una gran aplicación en el cálculo, la velocidad instantánea es una de ellas, actualmente se puede investigar el límite de cualquier función en un punto, por ejemplo el valor de:

$$\lim_{h \to 2} h^2 = 4$$

Pues cada vez podemos tomar valores de h muy cercanos a 2, pero no siempre es tan fácil encontrar dicho límite, por ejemplo:

$$\lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h} = ?$$

Podemos tomar valores como h = 0.01, 0.001, 0.0001; notemos que si h = 0 el valor esta indefinido pues 1 no esta definido, por tanto el camino es seguir tomando valores muy cercanos a cero pero nunca igual a cero.

Una de las técnicas más socorridas para encontrar límites es la de límites laterales, es decir; si tenemos:

$$\lim_{h \to 2} f(h) \quad \text{h→2}$$

Podemos aproximarnos; tomando valores menores a 2 y valores mayores a 2, por ejemplo:

h = 1.9, 1.99, 1.999
h = 2.1, 2.01, 2.001

Si f (h) se aproxima al mismo valor por ambos lados entonces este número es llamado el límite de f cuando h se aproxima a 2.

Si el límite por la derecha es igual a el límite por la izquierda entonces el límite existe, si es diferente entonces no existe.

El objetivo para esta sección es que el alumno a partir de que la derivada se ha definido como un límite, él pueda resolver otros límites diferentes.

Ejercicios:

1) Calcule:

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$$

Usando la gráfica de $Y = (1+x)^{1/x}$ puedes reconocer esta respuesta.

2) Usando una gráfica calcule:

$$\lim_{x \to 0} (1+2x)^{1/x}$$

3) Cómo explicarías la siguiente prueba:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \qquad \text{ó} \qquad \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$

4) Calcule:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + 2x + 3}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} + 3x + 2$$

2.7. Algo sobre diferenciabilidad

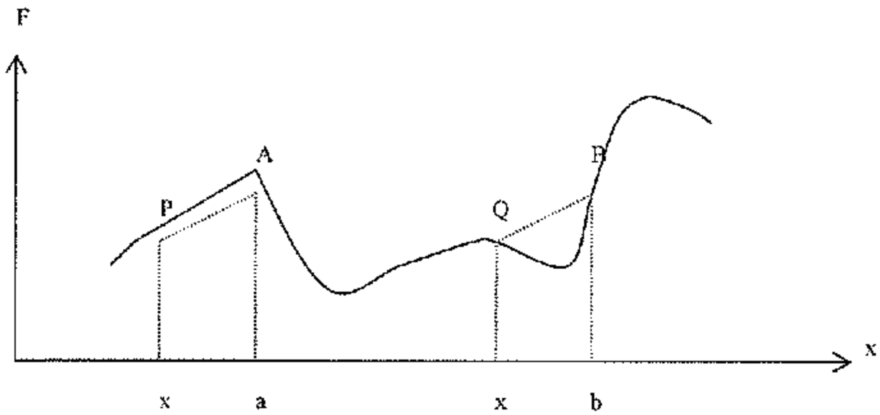
Nosotros hemos dado la definición de derivada de una función f, y vimos que esta tiene una interpretación geométrica como la pendiente de la línea tangente a la gráfica de k, y pudimos decir que si la derivada existía en cada punto, entonces la función era diferenciable en cada punto.

Una función es diferenciable en un punto si cuando subimos sobre ella no tiene picos en el punto. Pues ya hemos visto antes que como la derivada es un límite, entonces no podemos tener para un solo punto dos límites diferentes. Por tanto el que una función sea continua no nos asegura que sea derivable, pero si es deribable entonces es continua.

Dos de los caminos que puedes seguirse para ver si una función es diferenciable en un punto es:

1) Un punto o esquina en el punto.
2) Una línea tangente vertical ahí.

Gráficamente tendríamos:



En A esta un problema pues tiene una esquina o pico como x se aproxima a a de la izquierda, la pendiente de la línea que une a P y A converge a un número positivo.

Como x se aproxima a por la derecha, la pendiente de la línea que une a P y A converge a algún número negativo, entonces las pendientes se aproximan a números diferentes, como se aproxima por lados deferentes en $x = a$.

En B, no existe pico pero como, x se aproxima a b por la derecha y por la izquierda la pendiente de la línea QB no converge, pues será una pendiente infinita.

Luego la gráfica será diferenciable en todo el dominio menos en $x = a$ y $x = b$.

DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES MAS REPRESENTATIVAS.

Ya hemos analizado lo que significa la derivada de una función y algunas propiedades de la misma, ahora veamos como extender esto a un mayor número de funciones.

Ejemplo:

Hallar la derivada de f si f (x) = $x^2 - \frac{1}{x}$

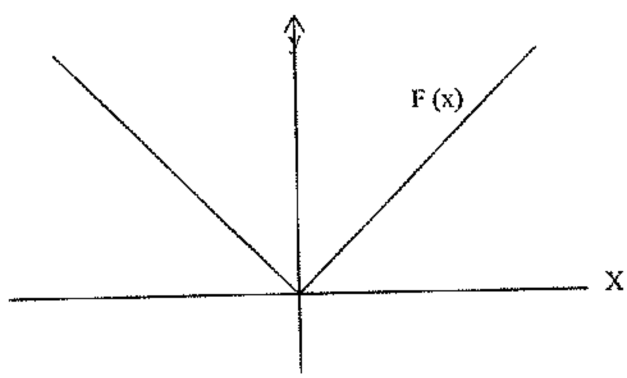
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - \left(\frac{1}{x+h}\right) - \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - \frac{1}{x+h} - x^2 + \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + \left(\frac{-x + x + h}{x(x+h)}\right)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + \frac{h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h) + \frac{h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0}\left(2x + h + \frac{h}{x(x+h)}\right) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

Ejemplo 2:

Hallar la derivada de la función valor absoluto si f (x) = $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0, \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$



Solución:

Como tiene pico en x = 0 ahí la derivada no existe, esto es:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{|h|} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{|h|} = -1$$

Como $1 \neq -1$ la derivada de 0 no existe.

Ejemplo 3:

Hallar la derivada de $f(x) = e$

Solución:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e-e}{h} = \frac{0}{h} = 0 \quad \therefore \text{ f' (x)} = 0$$

Ejemplo 4:

Hallar la derivada de f (x) = x

Solución:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1 \quad \therefore \text{ f' (x)} = \text{x'} = 1$$

Ejemplo 5:

Hallar la derivada de f (x) = x^n

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right)$$

y como cada sumando a excepción del primero tiene como factor un h, al obtener un límite resulta:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Ejemplo 6:

Hallar la derivada de una función multiplicada por una constante: g (x) = c f (x).

Solución:

$$G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c(f(x+h)) - cf(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{cf(x+h) - f(x)}{h} = c \bullet f'(x)$$

Ejemplo 7:

Si f y g son funciones derivables en a entonces f + g es también derivable en a y (f + g)'(a) = f' (a) + g'(a).

Solución:

$$(k+g)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) + g(a+h) - g(a)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(a) + g'(a)$$

Con el ejemplo 5 y 6 podemos derivar una función polinomial.

Si $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n$

Entonces $f'(x) = na_0x^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}$

Ejemplo 8:

Si f y g son funciones reales derivables en a, entonces $f \bullet g$ es también derivable en a y $(f \bullet g)'(a) = f(a) \bullet g'(a) + f'(a) \bullet g(a)$.

Solución:

$$(f \bullet g)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \bullet g)(a+h) - (f \bullet g)(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) \bullet g(a+h) - f(a) \bullet g(a)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a) - f(a) \bullet g(a)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{h} \bullet \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \bullet \lim_{h \to 0} g(a) =$$

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) \bullet g'(a) + f'(a) \bullet g(a)$$

Pero como f y g son derivables en a también son continuas en a, entonces:

$$(f \bullet g)'(a) = f(a) \bullet g'(a) + f'(a) \bullet g(a)$$

Ejemplo 9:

Si g es una función real derivable en a y $g(a)\neq 0$ entonces la función $\frac{1}{g}$ también es derivable en a y $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=\frac{-g(a)}{(g(a))^2}$.

Solución:

$$\lim_{h\to 0}\ \frac{1}{hg}(a+h)-\frac{1}{g}(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(a)-g(a+h)}{hg(a+h)g(a)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\ -\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\bullet\frac{1}{g(a+h)g(a)}=-\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\bullet\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(a+h)g(a)}=$$

$$-g'(a)\bullet\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(a+h)g(a)}=-g'(a)\bullet\frac{1}{(g(a))^2}$$

Ejemplo 10:

Un resultado que se deriva del anterior es: si k y g son funciones reales derivables en a y g (a) $\neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ también es derivable en a y $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

Solución:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\left(f\bullet\frac{1}{g}\right)'(a)=f'(a)\bullet\frac{1}{g}(a)+f(a)\bullet\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=$$

$$\frac{f'(a)}{g(a)}+\left(\frac{-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}\right)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Este resultado permite el cálculo de las derivadas de funciones racionales

Ejemplo 11:

Hallar la derivada de una composición de funciones sabiendo que $(g \bullet f)'(a) = g'(k(a)) \bullet f'(a)$

Solución:

$$(g \bullet f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \bullet \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

$$\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \bullet \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \bullet f'(a)$$

Pero como f es dervable en a, entonces f es continua en a, es, si $x \to a$ entonces $f(x) \to (a)$ por lo cual:

$$\lim_{f(x) \to f(a)} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \bullet f'(a) = g'(f(a)) \bullet f'(a)$$

Esta solución es válida sólo en el caso que x al estar próxima a a se cumple que $f(x) \neq f(a)$.

Ejemplo 12:

Hallar la derivada de la función $f(x) senx$.

Solución:

$$\lim_{h \to 0} \frac{sen(a + h) - sen(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{sena \cosh + \cos asenh - sena}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{sena(\cosh - 1) + \cos a \dfrac{senh}{h}}{h} \right) = (sena)(0) + \cos a(1) = \cos a \therefore sen'a = \cos a$$

Ejemplo 13:

Hallar la derivada de la función $f(x) = \cos x$.

Solución: sean f y g funciones reales definidas por:

$f(x) = \frac{\pi}{2} + x$ y $g(x) = senx$ por lo cual tenemos que:

$$\cos(x) = sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = (g \bullet f)(x)$$

Por regla de la cadena se tiene que:

$$\cos' x = (g \bullet f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)(1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -senx$$

$$\therefore \cos' x = -senx$$

De estos resultados para el seno y el coseno se pueden derivar las siguientes:

$$tg'(x) = \left(\frac{sen}{\cos}\right)'(x) = \sec^2 x$$

$$ctg'(x) = \left(\frac{\cos}{sen}\right)'(x) = -\csc^2 x$$

$$\sec'(x) = \left(\frac{1}{\cos}\right)'(x) = tgx \sec x$$

$$\csc'(x) = \left(\frac{1}{sen}\right)'(x) = -ctgx \csc x$$

Ejemplo 14:

Hallar la derivada de la función $f(x) = \log aX$:

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log aX}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right) =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \bullet \frac{x}{h} \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \log_a\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{x/h}$$

Si consideramos que $f(h) = \frac{x}{h}$ entonces $\lim\limits_{h \to 0} f(h) =$ luego:

$$\frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \log a\left(1 + \frac{1}{f(h)}\right)^{f(h)} = \frac{1}{x} \log a^{e}$$ por ser la función logaritmo continuo.

Un caso particular es cuando la base del logaritmo es el número e, en este caso se tiene que $\log_e e = 1$ *por lo cual la derivada de la función logaritmo natural se reduce a* $\frac{1}{x}$*, esto es:*

$$f(x) = Lnx \quad \textit{entonces} \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Ejemplo 15:

Si $f(x) = Ln|x|$ entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$ lo cual se prueba por casos:

a. Si x > 0 , $Ln|x| = Lnx \therefore f'(x) = \frac{1}{x}$

b. Si x < 0 , $Ln|x| = Ln(-x)$ lo cual se puede interpretar como una composición de funciones donde $g(x) = Lnx$, h(x) = -x y:

$$f(x) = (g \bullet h)(x) = Ln(-x) \text{ y aplicando la derivada tenemos:}$$
$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

Ejemplo 16:

Hallar la derivada de una composición de funciones, recordando que $(f \bullet g)(x) = x$.

Solución:

$$(f \bullet g) = (x) = x$$

$$(f \bullet g)'(x) = x' = 1$$

$$f'(g(x))g'(x) = 1 \text{ y como } g'(x) \neq 0$$

$$f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(Y_0)} \text{ ó } \begin{array}{l} f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1 \\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} \end{array}$$

Ejemplo 17:

Empleando el resultado anterior, hallar la derivada de la función $f(x) = a^x$.

Solución:

Para $X \varepsilon \Re$ y Y > 0 se tiene que: $Y = a^x \Leftrightarrow \log_a Y = x$. Luego:

$$f'(x) = \frac{1}{(\log_a)'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{Y}{\log_a e} = y\log_e a = a^x Lga$$

En particular, en el caso que la base sea e, se tiene que su derivada es e^x. Esto es si $f(x) = e^x$ entonces $f'(x) = e^x$.

Veamos: $f'(x) = e^x Lne = e^x \bullet 1 = e^x$.

Ejemplo 18:

Hallar la derivada de la función derivada por:

$f(v) = senhv = \dfrac{e^v - e^{-v}}{2}$ llamada coseno hiperbólico de v .

Solución:

$$f'(v) = \frac{e^v \frac{dv}{dx} + e^{-v}\frac{dv}{dx}}{2} = \frac{e^v - e^{-v}}{2}\frac{dv}{dx} = \cosh v \frac{dv}{dx}$$

pues $\cosh v = \dfrac{e^v - e^{-v}}{2} =$ coseno hiperbólico de v.

Ejemplo 19:

Cuando se nos da una función implícita por ejemplo:

$$ax^6 + 2x^3y - y^7x = 10$$

Debemos de despejar $\frac{dy}{dx}$, por lo que derivamos ambos lados de la ecuación término a término:

$$\frac{d}{dx} = \left(ax^6\right) + \frac{d}{dx}\left(2x^3y\right) - \frac{d}{dy}\left(xy^7\right) = \frac{d}{dx}(10)$$

$$6ax^5 + 2x^5\frac{dy}{dx} + 6x^2y - y^7 - 7xy^6\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left(2x^3 - 7xy^6\right)\frac{dy}{dx} = y^7 - 6ax^5 - 6x^2y \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y^7 - 6ax^5 - 6ax^2y}{2x^3 - 7xy^6}$$

Aunque notemos que en la derivada siguen apareciendo x y y.

El objetivo: El alumno aplicará los pasos y conocimientos anteriores para aplicar la derivada de una extensa lista de funciones.

Nota: los ejercicios para esta sección se remitirá al alumno a una serie de libros que manejen un nivel aplicativo más que teórico.

2.8. Máximos y mínimos.

Una de las mayores aplicaciones sobre el uso de derivadas es el de encontrar los valores máximos y mínimos de las funciones que se reducen a una cuestión práctica.

En muchos problemas de economía, ingeniería y física es importante averiguar, lo grande o pequeña que puede volverse una magnitud. Si el problema admite una formulación matemática, es a menudo reducible al problema de hallar los valores extremos de una función.

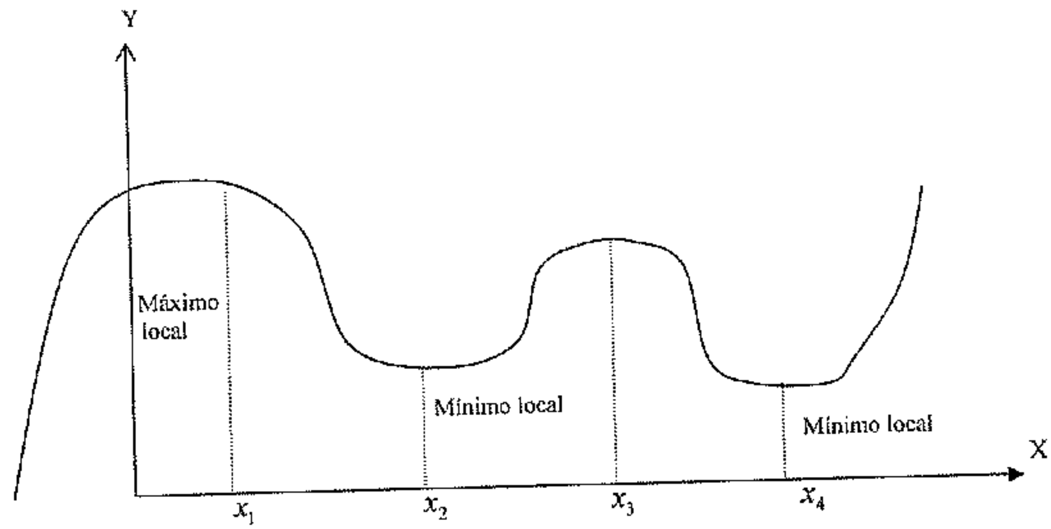
En esta sección, consideraremos funciones que están definidas sobre un intervalo abierto o sobre la unión de intervalos abiertos.

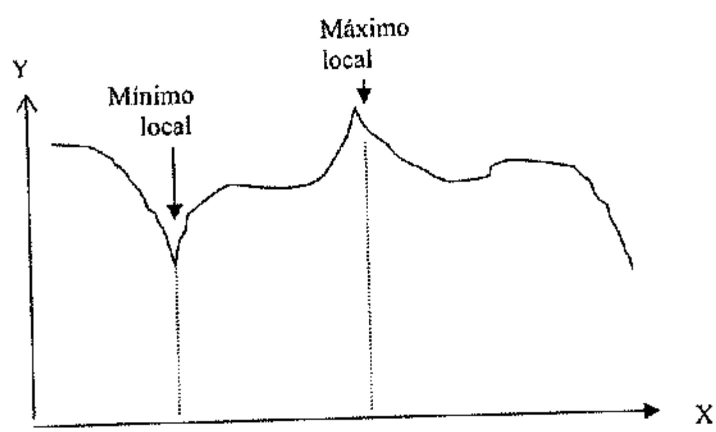
Comencemos con una definición:

a. Se dice que una función f posee un máximo local (o relativo) en e si y sólo si $f(c) \geq f(x)$ para todo x suficientemente próximo a c.

b. Se dice que posee un mínimo local (o relativo) en c si y sólo si $f(c) \geq f(x)$ para todo x suficientemente próximo a c.

Gráficamente:





Una inspección cuidadosa de tales figuras sugiere que los máximos y mínimos locales tienen lugar solamente aquellos puntos en que la tangente es horizontal $f'(c) = 0$, o bien donde no existe tangente $f'(e)$ no existe. Esto es lo que ocurre efectivamente.

Si f posee un máximo o un mínimo local en e entonces $f'(c)=0$ ó $f'(e)$ no existe.

Demostración: Si $f'(c)>0$ ó $f'(c)<0$ ya vimos antes que la función es creciente o decreciente, entonces existen números x_1 y x_2 que siendo arbitrariamente próximos a c satisfacen:

$$f(x_1)<f(c)<f(x_2)$$

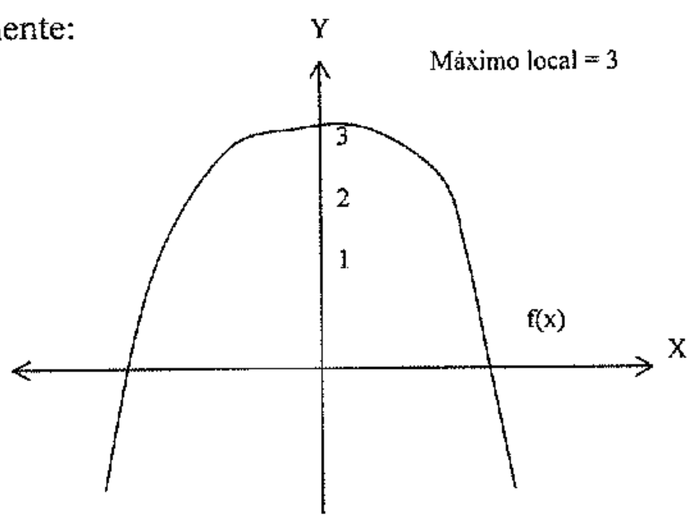
Esto hace imposible la existencia de máximo o mínimo local en c. Luego sólo estudiar, los puntos críticos para saber dónde están los máximos o mínimos locales.

Nota: Puntos críticos son los valores donde la derivada es igual a cero.

Ejemplo 1:

En el caso de $f(x)=3-x^2$ la derivada es $f'(x)=-2x$ existe en todas partes puesto que $f'(x)=0$ solamente para $x=0$, o es el único punto crítico. El número $f(0)=3$ es evidentemente un máximo local.

Gráficamente:

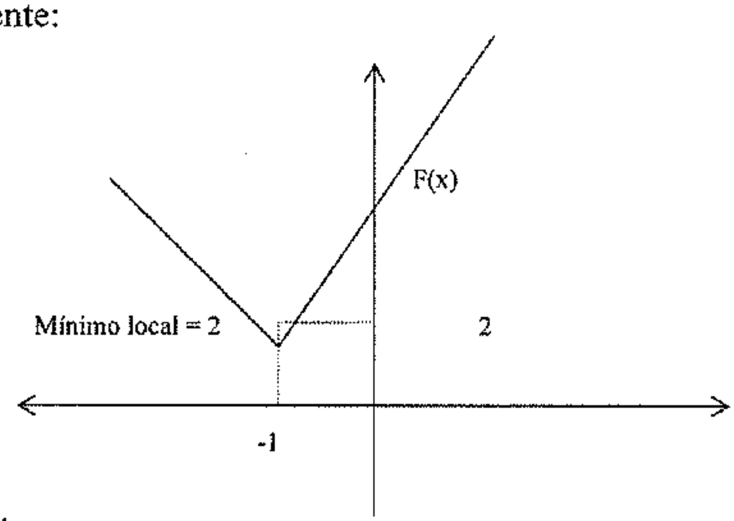


Ejemplo 2:

En el caso de $f(x) = |x+1| + 2$ la derivada es $f'(x) = 1, x > -1$ y $-1, x < -1$.

Esta derivada nunca se anula y sólo en -1 no existe. El número -1 es el único punto crítico, el valor $f(-1) = 2$ es un mínimo local.

Gráficamente:

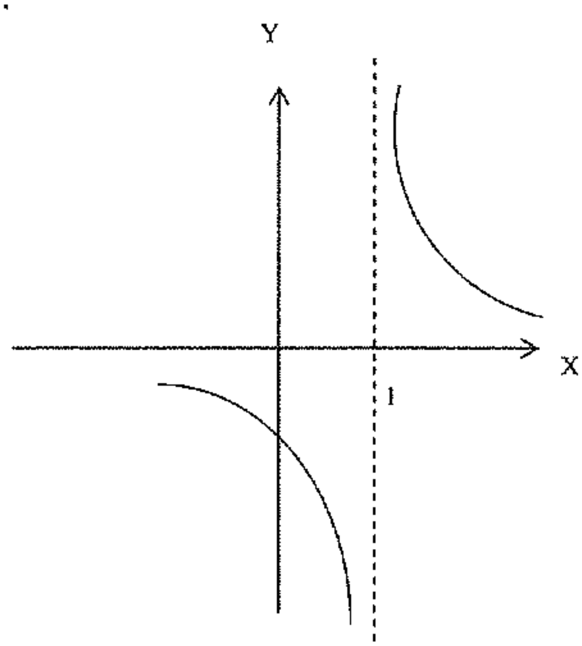


Ejemplo 3:

En el caso de $f(x) = \frac{1}{x-1}$ la derivada es $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$.

Existe en todo el dominio de f y no es nunca cero. No existen, por tanto, puntos críticos ni valores extremos.

Gráficamente:

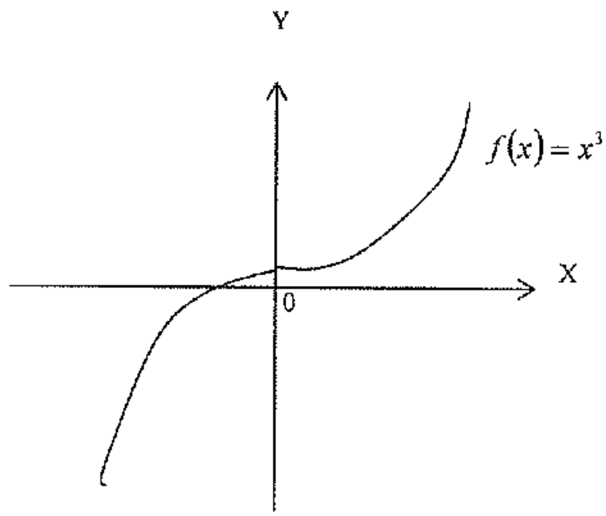


Observación: el hecho de que c sea punto crítico de f no garantiza que f(c) sea un valor extremo local.

Ejemplo 4:

En el caso de la función $f(x) = x^3$ la derivada $f'(x) = 3x^2$ es cero en cero, pero $f(0) = 0$ no es valor extremo local, la función es creciente en su dominio.

Gráficamente:



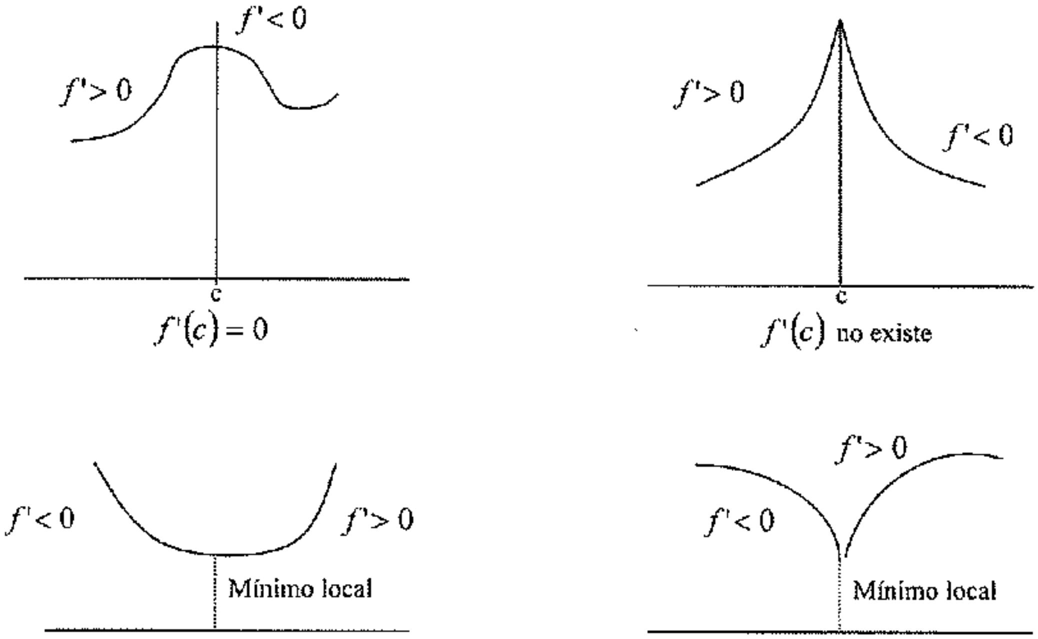
Podemos ahora generalizar dos criterios.

Criterio 1: (El criterio de la derivada primera).

Supongamos que c es un punto crítico de f y que f es continua en c, si existe un intervalo (c-h, c + h) tal que $f'(x) > 0$ para todo x en (c-h, c) y $f'(x) < 0$ para todo x en (c, c + h), entonces $f(c)$ es un máximo local. Si ambas desigualdades se invierten entonces $f(c)$ es un mínimo local.

Demostración: En el primer caso f crece en (c-h, c) y decrece en (c, c + h), lo que hace de $f(c)$ un máximo local. En el segundo caso f decrece en (c-h, c) y crece en (c, c + h) lo que hace de $f(c)$ un mínimo local.

Gráficamente:



Criterio 2: (El criterio de la segunda derivada).

Supongamos que $f'(c) = 0$

Si $f''(c) > 0$, $f(c)$ es un valor mínimo local.
Si $f''(c) < 0$, $f(c)$ es un valor máximo local.

Ejemplo 5:

Para el caso $f(x) = x^3 - x$ la derivada es $f'(x) = 3x^2 - 1$, los puntos críticos son $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{1}{\sqrt{3}}$ siendo cero el valor de la derivada en ambos.

Como segunda derivada: $f''(x) = 6x$

Puesto que $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$ y $f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0$ el criterio de la derivada segunda nos dice que $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ es un máximo local y que $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ es un mínimo local.

2.9. Máximos y mínimos en los extremos del intervalo.

Para las funciones definidas sobre un intervalo abierto o sobre la unión de intervalos abiertos, los puntos críticos son aquellos para los que la derivada es cero o no existe.

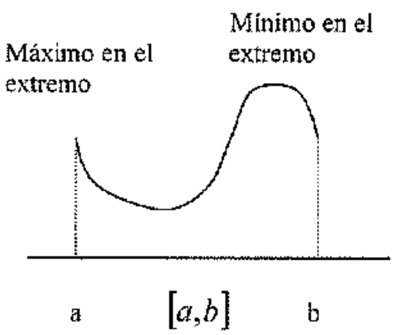
Para el caso de funciones definidas sobre intervalos cerrados:

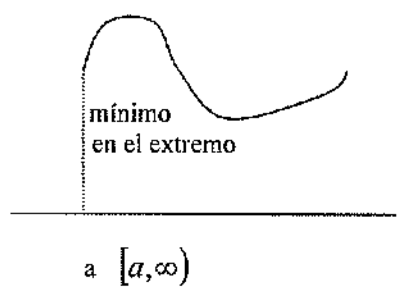
$$[a,b],[a,\infty),(-\infty,b]$$

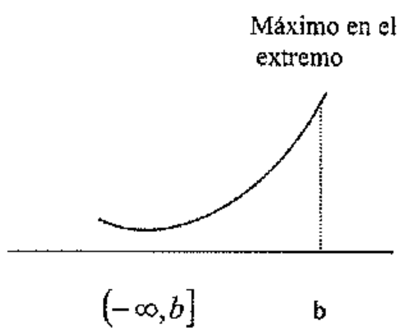
Los extremos del dominio a y b en este caso $[a,b]$, a en el caso de $[a,\infty)$ y b en el caso de $(-\infty,b]$. Se llaman también puntos críticos.

Los extremos del intervalo pueden dar lugar a lo que se denomina máximo en el extremo y mínimo en el extremo.

Gráficamente:







2.10. Máximos y mínimos absolutos.

$F(d)$ se llama valor máximo absoluto de f (o simplemente valor máximo de f) sí y solo si $F(d) \geq f(x)$ para todo x en el dominio de f.

$F(d)$ se llama valor mínimo absoluto de f (o simplemente valor mínimo de f) sí y solo si $F(d) \leq f(x)$ para todo x en el dominio de f.

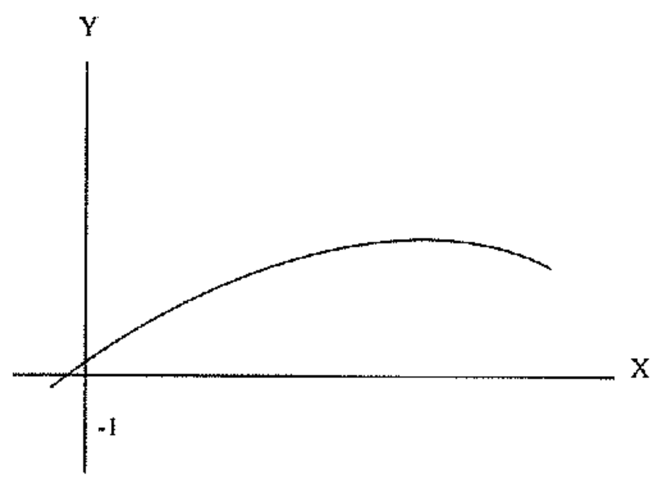
Ejemplo 6:

Hallar los puntos críticos y clasificar los valores extremos de $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ como:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

Puesto que la derivada $f'(x)$ nunca es cero, no existen puntos críticos en el interior, el número cero es un punto crítico ya que es un extremo del dominio puesto que $f'(x) > 0$ para todo x en $(0,\infty)$ y f es continua en $(0,\infty)$, f a de ser creciente en $[0,\infty)$, lo que hace de $f(0) = -1$ un mínimo en el extremo que es también un mínimo absoluto.

Gráficamente:



Mínimo absoluto

El objetivo: El alumno representará gráficamente qué ocurre cuando la derivada vale cero o cuándo ésta no existe, para encontrar los máximos y mínimos cuando éstas existen.

Ejercicios para la sección:

1) Hallar los puntos críticos y valores extremos locales para:

   a. $x^3 + 3x - 2$
   b. $x + \frac{1}{x}$
   c. $x^2(1 - x)$
   d. $\frac{1}{|x - 2|}$
   e. $x^3(1 - x)^2$
   f. $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$

2) Hallar los puntos críticos y clasificar los valores extremos para:

   a. $f(x) = \sqrt{x + 2}$
   b. $f(x) = (x - 1)(x - 2)$
   c. $x^2 - 4x + 1, x \varepsilon [0,3]$
   d. $2x^2 + 5x - 1, x \varepsilon [-2,0]$
   e. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$
   f. $f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}, x \varepsilon [-1,2]$
   g. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x - 1}$
   h. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$
   i. $f(x) = \begin{cases} -2x, x < 1 \\ x - 3, 1 \leq x \leq 4 \\ 5 - x, 4 < x \end{cases}$

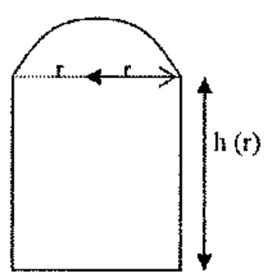
j. $f(x)=\begin{cases} -x^2, 0 \le x < 1 \\ -2x, 1 < x < 2 \\ -\frac{1}{2}x^2, 2 \le x \le 3 \end{cases}$

PROBLEMAS ADICIONALES SOBRE MAXIMOS Y MINIMOS.

Las técnicas de las dos últimas secciones pueden aplicarse a una amplia variedad de problemas de máximos y mínimos.

Problema 1:

Una ventana tiene la forma de un rectángulo rematado por su parte superior con un semicírculo y se quiere contornear con P metros de borde metálico. Hallar el radio de la parte semicircular si el área total de la ventana ha de ser máxima.



Solución:

Sea r el radio de la parte semicircular y h (r) la altura de la parte rectangular. El área total de la ventana viene dada por la función:

$$A(r)=2rh(r)+\frac{\pi r^2}{2}$$

Puesto que el perímetro total de la ventana es P, tenemos:

$P = 2r + 2h(r) + \pi r$ y entonces:

$h(r) = \dfrac{P - 2r - \pi r}{2}$ sustituyendo:

$$h(r) = \frac{P - 2r - \pi r}{2}$$

Con la fórmula del área obtenemos:

$$A(r) = 2r\left(\frac{P - 2r - \pi r}{2}\right) + \frac{\pi r^2}{2} = \mathrm{P}r - 2r^2 - \frac{\pi r^2}{2}$$

Nuestro problema ahora es simplemente averiguar que valor de r hace máxima la función A, diferenciando obtenemos:

$$A'(r) = P - 4r - \pi r$$

Haciendo $A'(r) = 0$

$$P - 4r - \pi r = 0 \therefore r = \frac{P}{4 + \pi}$$

Puesto que la derivada segunda:

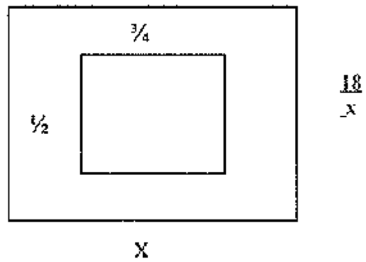
$$A''(r) = -4 - \pi$$

Es constantemente negativa, podemos concluir que $r = \dfrac{P}{4 + \pi}$ proporciona el máximo deseado.

Problema 2:

El área de una superficie es $18m^2$, sabiendo que en su interior hay otra forma de que los márgenes superior e inferior son de ¾ m. y que los márgenes laterales son de 1/2m. ¿Hallar las dimensiones de la superficie exterior para que el área comprendida entre los márgenes sea máxima?

Solución:



Sean x = longitud 18/x = anchura de la superficie en metros.

El área entre márgenes esta dada por la función:

$$A = (x-1)\left(\frac{18}{x} - \frac{3}{2}\right)$$

$$A'(x) = \frac{18}{x^2} - \frac{3}{2}$$

$A'(x) = 0$ da el valor crítico $x = \sqrt[3]{2}$

Las dimensiones de la superficie exterior son:

$$x = \sqrt[3]{2} \text{ y } \frac{18}{x} = \sqrt[3]{3}m.$$

El objetivo: El alumno encontrará la solución de un problema dado, en el cual, se empleen los criterios vistos para máximos y mínimos y pueda representar geométrica, analítica y numéricamente en qué consiste la solución y el uso de la derivada.

Ejercicios para la sección:

1) Hallar los puntos críticos y valores extremos locales para:

   a. Su producto sea máximo.
   b. La suma de sus cuadrados sea mínima.

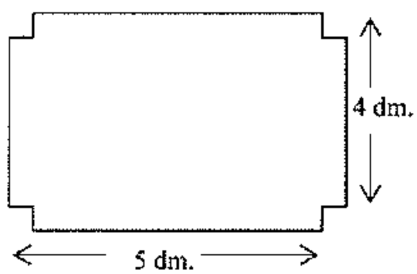
2) Hallar el radio de R del cono circular recto de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio r.

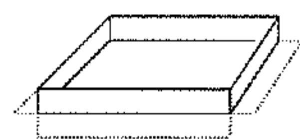
3) Hallar el área máxima para un rectángulo inscrito en un círculo de radio r.

Nota: también la lista será ampliada y se remitirá al alumno a libros que traten este tipo de problemas (Granville, Sokowsky, etc).

Para reafirmar conceptos veamos el ejemplo siguiente:

De un cartón rectangular de 4x5 decímetros construyamos una caja sin tapa, para esto recortemos cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas del cartón y doblemos las cejas con el fin de formar los lados.



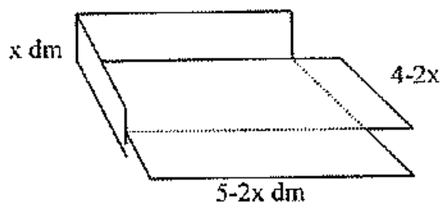


Usemos la letra x para representar la longitud de los lados de los cuadrados recortados de las esquinas. Las dimensiones de la caja que obtenemos al doblar las cajas entonces se expresan de la manera siguiente:

Longitud = 5-2x dm. Anchura 4-2x dm. Altura = x dm.

Ahora podemos calcular el valor de la caja por medio de estas otras dimensiones:

$$Volumen = (5-2x)(4-2x)x dm^3$$



Podemos observar que para cada valor x obtenemos un volumen específico, por lo cual el volumen esta en función de los posibles valores de x, por lo cual cumple con el concepto de función dado anterior.

Por otro lado x puede ser considerado como una variable sujeta a restricciones físicas, por ejemplo; el cartón es de 4 dm de ancho, es imposible recortarle cuadros de las esquinas de más de 2 dm de longitud por lado, es decir x debe satisfacer la desigualdad.

$$0 \leq x \leq 2do \min iov(x)$$

Como el volumen de la caja depende del valor de x podemos escribir:

$$v(x) = (5-2x)(4-2x)x$$

INTEGRAL INDEFINIDA Y METODOS DE INTEGRACIÓN

INTEGRAL INDEFINIDA

1. Función primitiva

Se dice que una función $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, con definición en cierto conjunto X, si se cumple la condición $F'(x) = f(x)$ para toda x que pertenece al conjunto X. Ahora, dadas $G(x)$ y $F(x)$ funciones primitivas con la condición citada sobre $f(x)$, entonces se cumple que $G(x) = F(x) + c$, con c constante.

De otra forma; $G(x)$ y $F(x)$ a lo más son diferentes por una constante si, ambas son funciones primitivas de $f(x)$. De aquí, que se diga, que existe una **familia de funciones primitivas** de acuerdo a los elementos de c constante, tomando así la totalidad de las funciones que son primitivas a la función mencionada dadas por el conjunto

$$\{F(x)+c\}$$

Dicho lo anterior, denotaremos esta familia por el símbolo

$$\int f(x)dx.$$

La cual denominaremos **INTEGRAL DEFINIDA** de la función $f(x)$.

De tal forma que, definiremos

$$\int f(x)dx = \{F(x)+c\} \qquad (*)$$

Por tanto, como tradicionalmente se define, entenderemos explícitamente que

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

Representa la familia de elementos que cumple la antiderivada, siendo c constante arbitraría.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2. $\int f'(x)dx = f(x) + c$

3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \qquad (a \neq 0)$

4. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

FAMILIAS DE FUNCIONES PRIMITIVAS

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1)$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$, *(a>0, a≠ 1;* $\int e^x dx = e^x + c$

4. $\int senx dx = -\cos x + c$

5. $\int \cos x dx = senx + c$

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$

7. $\int \dfrac{dx}{sen^2 x} = -ctgx + c$

8. $\int \dfrac{dx}{senx} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + c$

9. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4})\right| + c$

10. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{2} arctg\dfrac{x}{a} + c, \qquad (a \neq 0)$

11. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsen\frac{x}{a} + c, \quad |x| < |a|$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c, \quad |x| > |a|$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + c$

15. $\int sh \quad xdx = ch \quad x + c$

16. $\int ch \quad xdx = sh \quad x + c$

17. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = th \quad x + c$

18. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth \quad x + c$

1. **Integración por cambio de variable.** Existen dos variables de este método

a) **Método en el que una función se toma bajo el signo de la diferencial.** Sea que se requiere calcular la integral $\int f(x)dx$. Supongamos que existen las funciones derivables $u = \varphi(x)$ y $g(u)$ tales que la expresión subintegral $f(x)dx$ pueda ser escrita en la forma:

$$f(x)dx = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(u)du$$

(la transformación mencionada se denomina introducción de $u = \varphi(x)$ bajo el signo de la diferencial). Observemos que se verifica la relación:

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(u)du\Big|_{u=\varphi(x)}$$

Por ello, el calculo de la integral $\int f(x)dx$ se reduce al calculo de otra integral $\int g(u)du$ (la cual puede resultar mas simple que la inicial) y a la sustitución ulterior de $u = \varphi(x)$.

b) **Método de sustitución.** Supongamos que se requiere calcular la integral $\int f(x)dx$, donde la función $f(x)$ esta definida en cierto conjunto X. Introduzcamos una nueva variable u mediante la formula:

$$x = \varphi(u): U \to X,$$

Donde la función $\varphi(u)$ es derivable en cierto conjunto U y realiza una aplicación biunívoca de U sobre X, es decir, tiene su inversa

$$u = \varphi^{-1}(x): X \to U$$

Al sustituir $x = \varphi(u)$ en la expresión subintegral inicial, obtenemos

$$f(x)dx = f(\varphi(u))\varphi'(u)du = g(u)du$$

Luego, resulta valida la igualdad

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(u))\varphi'(u)du\Big|_{u=\varphi^{-1}(x)} = \int g(u)du\Big|_{u=\varphi^{-1}(x)}$$

Es decir, el cálculo de la integral $\int f(x)dx$ se reduce al cálculo de otra integral $\int g(u)du$ (la cual puede resultar más simple que la de partida) y la sustitución ulterior $u = \varphi^{-1}(x)$.

c) **Integración por partes.** Si u(x) y v(x) son funciones derivables, se verifica la siguiente formula de integración por partes:

$$\int u \quad dv = uv - \int v \quad du \qquad (2)$$

Esta formula se usa en aquellos casos cuando la expresión subintegral $f(x)dx$ puede ser representada en la forma udv de modo tal que la integral en el segundo miembro de (2) pueda resultar mas sencilla que la integral inicial, siempre que se lijan adecuadamente las expresiones de u y dv. En este caso se debe tomar en consideración que u ha de reunir los factores que se simplifican en la derivación. Por ejemplo, si bajo el signo de integral figura el producto de un polinomio, mientras que la expresión restante debe formar parte de dv. La formula (2) puede aplicarse mas de una vez.

INTEGRACION DE LAS CLASES PRINCIPALES DE FUNCIONES ELEMENTALES

1. **Integrales elementales que contienen un trinomio de segundo grado.** Las integrales del tipo:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad y \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Se reducen a las integrales tabulares formando un cuadrado perfecto en el trinomio de segundo grado *****(meter las integrales***

2. Integración de fracciones racionales. Las fracciones del tipo

$$\frac{A}{x-\alpha}, \frac{A}{(x-\alpha)^k}, \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \frac{Ax+b}{\left(x^2+px+q\right)^k},$$ donde $k = 2,3,\ldots; A, B, \alpha, p, q$ son constantes, siendo $p^2 - 4q < 0$, llevan el nombre de fracciones simples.

La integración de la fracción de cuarto tipo, después de hacer en el numerador una derivada del trinomio de segundo grado que figura en el denominador y formado un cuadrado perfecto en dicho trinomio, se reduce al cálculo de las integrales:

$$\int \left(x^2+px+q\right)^{-k} d\left(x^2+px+q\right) = -\frac{1}{(k-1)\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}$$

Y

$$\int \frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^k}$$

La ultima integral puede calcularse según la formula concurrente ****(agregar formula)****

La integración de la fracción racional arbitraria $\frac{Pm(x)}{Qn(x)} = \frac{a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0}$ con coeficientes reales se efectúa, en el caso general, del modo siguiente.

1) Si $m \geq n$, es decir, si la fracción inicial $\frac{p_m(x)}{Q_n(x)}$ es impropia, se debe separar previamente en esta fracción la parte entera, esto es, representarla de la forma:

$$\frac{p_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)} \qquad (1)$$

donde $M_{m-n}(x)$ y $R_r(x)$ son polinomios de grados $m-n \geq 0$ y r, respectivamente, además $r < n$, es decir, la fracción $\frac{p_m(x)}{Q_n(x)}$ se realiza mediante la división del numerador por el denominador.

2) Según muestra la formula (1), la operación de separación de la parte entera reduce la integración de una fracción racional arbitraria a la de un polinomio y de una fracción racional propia.

La integración de la fracción racional propia $\frac{p_m(x)}{Q_n(x)}$, $m < n$, se efectúa mediante el desarrollo de la fracción en una suma de fracciones simples de los cuatro tipos mencionados mas arriba, seguido de una integración ulterior.

El desarrollo citado se lleva a cabo de la manera siguiente. Supongamos que el denominador $Q_n(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ tiene raíces reales $\alpha_1, ..., \alpha_l$ cuya multiplicidad es $s_1, ..., s_l$ y pares complejos conjugados de las raíces $\beta_1, \bar{\beta}_1, ..., \beta_k, \bar{\beta}_k$ cuya multiplicidad es $t_1, ..., t_k$, respectivamente, $(s_1 + ... + s_l + 2t_1 + ... + 2t_k = n)$, es decir, se verifica el desarrollo:

$$Q_n(x) = a_n (x - \alpha_1)^{s_1} ... (x - \alpha_l)^{s_l} (x^2 + p_1 x + q_1)^{t_1} ... (x^2 + p_k x + q_k)^{t_k},$$

donde

$$x^2 + p_v x + q_v = (x - \beta_v)(x - \bar{\beta}_v), \qquad v = 1, ..., k$$

Entonces, el desarrollo de la fracción $\dfrac{p_m(x)}{Q_n(x)}$ en una suma de fracciones simples tendrá por expresión

$$\frac{p_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x - \alpha_1} + ... + \frac{A_{s_1}^{(1)}}{(x - \alpha_1)^{s_1}} + ... + \frac{A_1^{(l)}}{x - \alpha_l} + ... + \frac{A_{s_l}^{(l)}}{(x - \alpha_l)^{s_l}} + \frac{B_1^{(1)} x + C_1^{(1)}}{x^2 + p_1 x + q_1} +$$
$$... + \frac{B_{t_1}^{(1)} x + C_{t_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{t_1}} + ... + \frac{B_1^{(k)} x + C_1^{(k)}}{x^2 + p_k x + q_k} + ... + \frac{B_{t_k}^{(k)} x + C_{t_k}^{(k)}}{(x^2 + p_k x + q_k)^{t_k}} \qquad (2)$$

Los coeficientes A_i, B_i y C_i en este desarrollo se determinan igualando entre si los coeficientes que tienen las mismas potencias de x del polinomio $P_m(x)$ y del que se obtiene en el numerador del segundo miembro (2) después de reducirlo a un denominador común (método de coeficientes indeterminados). Los coeficientes mencionados pueden determinarse también suponiendo x, en la igualdad (2) o alguna otra equivalente, igual a los números adecuadamente elegidos (en primer lugar, a los valores de las raíces reales del denominador $Q_n(x)$).

3. Integración de funciones trigonométricas e hiperbólicas.

a) Integrales del tipo $\int sen^m x \cos^n x \quad dx$

Si al menos uno de los números m o n es entero positivo impar, entonces, separando de la potencia impar un factor y expresando con ayuda de la formula $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ la potencia par restante en términos de una función complementaria, llegamos a una integral tabular.

b) Para integrar los productos de los senos y cosenos de distintos argumentos se emplean las formulas trigonométricas:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right),$$
$$sen\alpha sen\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right),$$
$$sen\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(sen(\alpha-\beta)+sen(\alpha+\beta)\right)$$

c) Las integrales del tipo $\int R(sen \quad x, \cos \quad x)dx$,

donde $R(u,v)$ es una función racional de dos variables, se reducen a las integrales de la función racional de un argumento nuevo t mediante la sustitución $tg\frac{x}{2}=t$. En este caso se emplean las formulas

$$sen \quad x = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

d) La integración de las funciones hiperbólicas se realiza igual que la de las funciones trigonométricas, con la particularidad de que se emplean las siguientes formulas:

$$ch^2x - sh^2x = 1, \qquad shx \quad chx - \frac{1}{2}sh2x,$$
$$ch^2x = \frac{1}{2}(ch2x+1), \quad sh^2x = \frac{1}{2}(ch2x-1),$$
$$1-th^2x = sch^2x, \qquad 1-cth^2x = \csc h^2x.$$

4. Integración de ciertas funciones irracionales.

a) Las integrales del tipo

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx,$$

donde $R(x,y,z,\ldots)$ es una función racional de sus argumentos y $m_1, n_1, m_2, n_2,$ son números enteros, se calculan con ayuda de la sustitución

$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, donde s es el denominador común para las fracciones
$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$

b) El calculo de las integrales del tipo

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

donde R es una función racional de dos argumentos, se realiza con ayuda de sustituciones trigonométricas de la manera siguiente. Formando un cuadrado perfecto en el trinomio de segundo grado y realizando, a continuación, el cambio de variable $u = x + \frac{b}{2a}$, la integral de partida se reduce a la integral de uno de los tres tipos siguientes:

1) $\int R\left(u, \sqrt{l^2-u^2}\right)du,$
2) $\int R\left(u, \sqrt{l^2+u^2}\right)du,$
3) $\int R\left(u, \sqrt{u^2-l^2}\right)du.$

Las últimas integrales se reducen a las integrales del tipo $\int R(sen\ t, \cos\ t)dt$, o bien $\int R(sh\ t, ch\ t)dt$ por medio de las sustituciones trigonométrica o hiperbólica:

1) $u = l\ \ sen\ \ t$ ó $u = l\ \ th\ \ t,$
2) $u = l\ \ tg\ \ t$ ó $u = l\ \ sh\ \ t,$
3) $u = l\ \ \sec\ \ t$ ó $u = l\ \ ch\ \ t,$ *respectivamente.*