

FORMULARIO DE ALGEBRA LINEAL

CAPITULO 1 RESUMEN: SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

- Un **vector región de n componentes** es un conjunto ordenado de n números denominados **escalares**, escritos como (x_1, x_2, \dots, x_n) .

- Un **vector columna de n componentes** es un conjunto ordenado de n números escritos como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- Un vector cuyas componentes son todas cero se denomina vector cero.
- La **suma de vectores** y la **multiplicación por escalares** está definida por.

$$a+b = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} \text{ y } \alpha a = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

- Una **matriz de mxn** es un arreglo rectangular de mn números arreglados en m regiones y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Una matriz cuyas componentes son todas cero se denomina **matriz cero**.
- Si A y B son matrices de mxn, entonces $A+B$ y αA (α un escalar) son matrices de mxn.

- La componente de ij de $A+B$ es $a_{ij}+b_{ij}$

- La componente de αA es αa_{ij}

- El **producto escalar** de dos vectores de n componentes es:

$$a \cdot b = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

PRODUCTO DE MATRICES:

- Sea A una matriz de mxn y B una matriz de nxp. Entonces AB es una matriz de mxp y la componente de ij de AB es $(\text{región } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B)$

$$a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

- En términos, los productos de matrices no son conmutativos: es decir, casi siempre ocurre que $AB \neq BA$.

LEY ASOCIATIVA DE LA MULTIPLICACION DE MATRICES:

- Si A es una matriz de nxm, B es de mxp y C es de pxq, entonces $A(BC) = (AB)C$ y

tanto $A(BC)$ como $(AB)C$ son matrices de nxq.

LEY DISTRIBUTIVA PARA MULTIPLICACION DE MATRICES:

- Si todos los productos están definidos, entonces.

$$A(B+C) = AB+AC \text{ y } (A+B)C = AC+BC$$

- La **matriz de coeficientes** de un sistema lineal.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Es la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- El sistema lineal anterior se puede escribir utilizando la **matriz aumentada**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & : & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & : & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & : & b_n \end{pmatrix}$$

También se puede escribir como $Ax=b$, donde.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} y b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Una matriz está en la **forma escalonada reducida por reglones** si se cumplen las cuatro condiciones dadas en la página 13
- Una matriz está en la **forma escalonada por reglones** si se cumple las tres primeras condiciones de la página 13.
- Un **pivote** es el primer componente diferente de cero en el reglón de una matriz.
- Las tres **operaciones elementales con reglones** son:
 - Multiplicar el reglón i de una matriz por $c = R_i \rightarrow cR_i$, donde $c \neq 0$
 - Multiplicar el reglón j por c y sumarlo al reglón i $j = R_j \rightarrow R_j + cR_i$.
 - Permutar los reglones i y j : $R_i \leftrightarrow R_j$.

- El proceso de aplicación de operaciones elementales con reglones a una matriz se denomina **reducción por reglones**.
- La **eliminación de Gauss-Jordan** es el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones mediante la reducción por reglones de la matriz aumentada a la forma escalonada por reglones, usando el proceso descrito en la página 9.
- La **eliminación de Gauss** es el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones reduciendo por reglones la matriz aumentada a la forma escalonada por reglones y utilizando la **sustitución hacia atrás**.
- Un sistema lineal que tiene una o más soluciones se denomina **consistente**.
- Un sistema lineal que no tiene solución se le denomina **inconsistente**.
- Un sistema lineal que tiene soluciones cuenta con, ya sea, una solución única o un número infinito de soluciones.
- Un sistema **homogéneo** de m ecuaciones con n incógnitas es un sistema lineal de la forma:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + \color{red}{i} a_{12}x_2 + \color{red}{i} a_{13}x_3 + \color{red}{i} a_{1n}x_n & \color{red}{i} & 0 \\ \cdots & + a_{1n}x_n & \color{red}{i} & 0 \\ \cdots & + a_{2n}x_n & \color{red}{i} & 0 \\ & \vdots & \color{red}{i} & \\ & a_{m1}x_1 + \color{red}{i} a_{m2}x_2 + \color{red}{i} & & \color{red}{i} \\ \vdots & & + a_{nm}x_n & \vdots & \vdots & \color{red}{i} = 0 \\ \color{red}{i} & & & \color{red}{i} & \cdots & \end{array}$$

- Un sistema lineal homogéneo siempre tiene la **solución trivial** (o **solución cero**)

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

- La solución para un sistema lineal homogéneo diferentes de la trivial, se denomina **soluciones no triviales**.
- El sistema lineal homogéneo anterior tiene un número infinito de soluciones si tiene más incógnitas que ecuaciones. $(n > m)$
- La **matriz identidad** $n \times n$, I_n , es la matriz de $n \times n$ con unos en la **diagonal principal** y ceros en otra parte, I_n se denota generalmente por I .
- Si A es una matriz cuadrada, entonces $AI = IA = A$
- La matriz A de $n \times n$ es **invertible** si existe una matriz A^{-1} de $n \times n$ tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

En este caso la matriz A^{-1} se llama **inversa** de A .

- Si A es invertible, su inversa es única.
- Si A y B son matrices invertibles de $n \times n$, entonces AB es invertible:
 - Se escribe la matriz cuadrada aumentada. $(A|I)$
 - Se reduce A por reglones a la forma escalonada reducida por reglones.
 - Si la forma escalonada reducida por reglones de A es I , entonces A^{-1} será la matriz a la derecha de la raya vertical punteada.

Si la forma escalonada reducida por regiones de A contiene un reglón de ceros, entonces A no es invertible.

- La matriz de

$$2 \times 2, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ es invertible si y solo si}$$

El determinante de

$$A, \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0, \text{ en cuyo}$$

caso:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

- Dos matrices A y B son **equivalentes por reglón** si, A se puede transformar en B reduciendo por regiones.

- Sea A una matriz de nxn. Si $AB=I$ o $BA=I$, entonces A es invertible y $B=A^{-1}$

- Si $A = (a_{ij})$, entonces la transpuesta de A

, es denotada por A^t , esta dada por

$$A^t = (a_{ji}). \text{ Esto es, } A^t \text{ se obtiene}$$

intercambiando los reglones y las columnas de A.

HECHOS SOBRE LA TRANSPUESTA:

- Si todas las sumas y los productos están definidos y A es invertible, entonces.

$$(A^t)^t = A ; (AB)^t = B^t A^t ; (A+B)^t = A^t + B^t$$

si A es invertible, entonces $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

- Una matriz cuadrada A es **simétrica** si $A^t = A$.

- Una **matriz elemental** es una matriz cuadrada que se obtiene llevando a cabo exactamente una operación con reglones sobre la matriz identidad. Los tres tipos de matrices elementales son:

○

$c R_i$ se multiplica el reglón i de I por c:

○

$j + c R_i$ se multiplica el reglón i de I por $c R_j$

○

P_{ij} se permutan los reglones i y j.

- Una matriz cuadrada es invertible si y solo si el producto de matrices elementales.
- Cualquier matriz cuadrada se puede escribir como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior.

FACTORIZACION LU:

- Suponga que la matriz invertible A se puede reducir por regiones a una matriz triangular superior sin realizar permutaciones. Entonces existen matrices únicas L y U, tales que L es triangular inferior con unos en la diagonal, U es una matriz superior invertible y $A=LU$.

MATRIZ DE PERMUTACION:

- $E = P_0$ es una **matriz de permutación elemental**. Un producto de matrices permutación elementales se denomina **matriz de permutación**.

FACTORIZACION PA=LU:

- Sea cualquier matriz mxn. Entonces existe una matriz permutación P tal que $PA=LU$, donde L y U son como en la factorización LU. En términos generales, P, A y U no son únicas.

TEOREMA DE RESUMEN:

- Sea A una matriz de nxn, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

I. A es invertible

II. La única solución al sistema homogéneo $AX=0$ es la solución trivial ($x=0$).

III. El sistema $Ax=b$ tiene una solución única para cada n-vector b.

IV. A es equivalente por regiones a la matriz identidad de nxn, I_n .

V. A se puede escribir como un producto de matrices elementales.

VI. $\det A \neq 0$ (por ahora, $\det A$ está definido solo si A es una matriz de 2x2).

VII. La forma escalonada por regiones de A tiene n pivotes.

VIII. Existe una matriz permutación P, una matriz triangular inferior L con unos en la diagonal, y una matriz triangular superior invertible U, tales que $PA=LU$.

CAPITULO 2 RESUMEN: DETERMINANTES

- El **determinante** de una matriz de 2x2,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ esta dado por.}$$

determinante de $A = \det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- **Determinante de 3x3.**

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- El **menor ij** de la matriz A de nxn, denotado por M_{ij} , es la matriz de (n-1) x (n-1) obtenida al eliminar el reglón i y la columna j de A.

- El **cofactor ij** de A, denotado por A_{ij} esta dado por :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

DETERMINANTES DE NXN:

- Sea A una matriz de nxn. entonces.

$$\det A = a_{11}A_{11} = a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{1k}$$

La suma anterior se denomina **la expansión de detA por cofactores en el primer reglón.**

- Si A es una matriz de nxn, triangular superior, triangular inferior o diagonal, cuyas componentes en la diagonal son $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, entonces.

$$\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

- Si $A=LU$ es una factorización LU de A, entonces

$$\det A = \frac{\det U}{\det P} = \pm \det U$$

TEOREMA BASICO:

- Si A es una matriz de nxn, entonces:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}$$

Para $i=1,2,\dots,n$ y $j=1,2,\dots,n$.

Es decir, el determinante de A se puede obtener expandiendo en cualquier reglón o columna de A.

- Si cualquier reglón o columna de A es vector cero, entonces $\det A=0$.
- Si cualquier reglón (columna) de A se multiplica por un escalar, entonces $\det A$ se multiplica por c.
- Si A y B son dos matrices de nxn que son iguales excepto por la columna j (reglón i) y C es la matriz que es idéntica a A y B excepto que la columna de j (reglón i) de C es la suma de la columna de j de A y la columna j de B (reglón i de A y reglón i de B), entonces $\det C = \det A + \det B$.
- El intercambio de cualesquiera dos columnas o regiones distintos de A tiene el efecto de multiplicar $\det A$ por -1.
- Si cualquier reglón (columna) de A se multiplica por un escalar y se suma a cualquier otro reglón (columna) de A, entonces $\det A$ no cambia.
- Si un reglón (columna) de A es un múltiplo de otro reglón (columna) de A, entonces $\det A=0$.

$$\det A = \det A^t$$

- la matriz A de nxn es invertible si y solo si $\det A \neq 0$.

$$\det AB = \det A \det B.$$

- Si A es invertible, entonces $\det A \neq 0$ y:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \det A$$

- Sea A una matriz de nxn. La **adjunta** o **adjugada** de A, denotada por $\text{adj}A$, es la matriz de nxn cuya componente ij es A_{ji} , el cofactor ji de A.

- Si $\det A \neq 0$, entonces A es invertible y:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}A$$

TEOREMA DE RESUMEN:

- Sea A una matriz de nxn. Entonces las siguientes siete afirmaciones son equivalentes.

- I. A es invertible
- II. La única solución al sistema homogéneo $Ax=0$ es la solución trivial ($x=0$).
- III. El sistema $Ax=b$ tiene una solución única para cada vector n-vector b.
- IV. A es equivalente por regiones a I matriz identidad de nxn, I_n .

- V. A es el producto de matrices elementales.
- VI. La forma escalonada por regiones de A tiene n pivotes
- VII. $\det A \neq 0$.

REGLA DE CRAMER:

- sea A una matriz de nxn con $\det A \neq 0$. Entonces la solución única al sistema $Ax=b$ está dada por:

$$x_1 = \frac{D_1}{\det A}, x_2 = \frac{D_2}{\det A}, \dots, x_n = \frac{D_n}{\det A}$$

Donde D_j es el determinante de la matriz obtenida al reemplazar la columna de j de A por el vector columna de b.

CAPITULO 3 RESUMEN: VECTORES EN R^2 o R^3

- el **segmento de recta dirigido** que se extiende de P a Q en R^2 o R^3 denotado por \overrightarrow{PQ} es el segmento de recta que va de P a Q.
- dos segmentos de recta dirigidos en R^2 o R^3 son **equivalentes** si tienen la misma magnitud (longitud) y dirección.

DEFINICION GEOMETRICA DE UN VECTOR:

- Un vector en R^2 o R^3 es el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos en R^2 o R^3 equivalentes a un segmento de recta dirigido dado.

Una representación de un vector tiene su punto inicial en el origen y se denota por \vec{v} .

DEFINICION ALGEBRAICA DE UN VECTOR:

- Un vector v en el plano xy $\begin{pmatrix} R \\ i \ j \ 2 \end{pmatrix}$ es un par ordenado de números reales (a,b). Los números a y b se llaman **componentes** del vector v. El **vector cero** es el vector (0,0). En R^3 , un vector v es una **terna** ordenada de numero reales (a,b,c). El **vector cero** en R^3 es el vector (0,0,0).
- Las definiciones geométricas y algebraicas de un vector en R^2 [R^3] se relacionan de la siguiente manera: si $v=(a,b)$ [(a,b,c)], entonces una representación de v es \vec{v} , donde $R=(a,b)$ [$R=(a,b,c)$].
- Si $v=(a,b)$, entonces la **magnitud de v**, denotada por $|v|$, está dada por $|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si $v=(a,b,c)$, entonces $|v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- Si v es un vector en R^2 , entonces la **dirección de v** es un angulo en $[0, 2\pi]$, que forma cualquier representación de v con el lado positivo del eje x.

DESIGUALDAD DEL TRIANGULO:

- En R^2 o R^3 $|u+v| \leq |u| + |v|$
- En R^2 sean $i=(1,0)$, y $j=(0,1)$; entonces $v=(a,b)$ se puede escribir como $v=ai+bj$.
- En R^3 sean $i=(1,0,0)$, $j=(0,1,0)$ y $k=(0,0,1)$; entonces $v=(a,b,c)$ se puede escribir como:

$$v = ai + bj + ck$$

- Un **vector unitario** u en R^2 o R^3 es un vector que satisface $|u|=1$. En R^2 un vector unitario se puede escribir como:

$$u = (\cos\theta)i + (\sin\theta)j$$

Donde θ es la dirección de u.

- Sean $u=(a_1, b_1)$ y $v=(a_2, b_2)$; entonces el **producto escalar** o **producto punto** de u y v, esta denotado por $u \cdot v$, esta dado por:

$$u \cdot v = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Si $u=(a_1, b_1, c_1)$ y $v=(a_2, b_2, c_2)$ entonces:

$$u \cdot v = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

- El **ángulo** φ entre dos vectores u y v en R^2 o R^3 es el único número en $[0, \pi]$ que satisface:

$$\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

- Dos vectores en R^2 o R^3 son **paralelos** si el ángulo entre ellos es 0 o π . Son paralelos si uno es un múltiplo escalar del otro.
- Dos vectores en R^2 o R^3 son **ortogonales** si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$. Son ortogonales si y solo si su producto escalar es cero.
- Sean u y v dos vectores diferentes de cero en R^2 o R^3 . La **proyección** de u sobre v es un vector, denotado por $\text{proy}_v u$, que está definido por:

$$\text{proy}_v u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v$$

Es escalar $\frac{u \cdot v}{|v|}$ se llama la **componente** de u en la dirección de v .

- La **dirección** de un vector v en R^3 es el vector unitario:

$$u = \frac{v}{|v|}$$

- Sea $v = (a, b, c)$, entonces $\cos \alpha = \frac{a}{|v|}$, $\cos \beta = \frac{b}{|v|}$, $\cos \gamma = \frac{c}{|v|}$ se llaman **cosenos directores** de v .
- Sea $u = a_1 i + b_1 j + c_1 k$ y $v = a_2 i + b_2 j + c_2 k$, entonces el **producto cruz** o el **producto vectorial** de u y v , denotado por $u \times v$, está dado por:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO CRUZ:

- $u \times 0 = 0 \times u = 0$
- $u \times v = -v \times u$
- $(\alpha u) \times v = \alpha(u \times v)$
- $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$
- $(u \times v) \cdot w = u \cdot (v \times w)$ (el triple producto escalar)

- $u \times v$ es ortogonal tanto a u como a v
- Si ni u ni v son el vector cero, entonces u y v son paralelos si y solo si $u \times v = 0$

- Si φ es el ángulo entre u y v , entonces $|u \times v| = |u||v| \sin \varphi$ es el área del paralelogramo con lados u y v .
- Sean $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ dos puntos sobre una recta L en R^3 . Sea $v = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$ y sea $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$ y $c = z_2 - z_1$

ECUACION VECTORIAL DE UNA RECTA:

$$\vec{r} = \vec{OP} + tv$$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE UNA RECTA:

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

ECUACIONES SIMETRICAS DE UNA RECTA:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

- Sea P un punto en R^3 y sea n un vector dado diferentes de cero; entonces el conjunto de todos los

puntos Q para los que $\overrightarrow{PQ} \cdot n = 0$ constituye un plano en R^3 . El vector n se llama **vector normal** del plano.

- Si $n = ai + bj + ck$ y $P = (x_0, y_0, z_0)$ entonces la ecuación del plano se puede escribir:

$$ax + by + cz = d$$

Donde:

$$d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \overrightarrow{OP} \cdot n$$

- El **plano xy** tiene la ecuación $z=0$; el **plano xz** tiene la ecuación $y=0$; el **plano yz** tiene la ecuación $x=0$.
- Dos planos son **paralelos** si sus vectores normales son paralelos. Si los dos planos no son paralelos, entonces se intersecan en una línea recta.

CAPITULO 4 RESUMEN: ESPACIOS VECTORIALES

- Un **espacio vectorial real** V es un conjunto de objetos, denominados **vectores**, junto con dos operaciones denominadas **suma** (denotada por $x+y$) y **multiplicación por un escalar** (denotada por αx) que satisface los siguientes axiomas:

✓ Si $x \in V$ y $y \in V$, entonces $x + y \in V$ (**cerradura bajo suma**)

✓ Para todo $x, y, z \in V$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ (**ley asociativa de la suma de vectores**).

✓ Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo $x \in V$, $x + 0 = 0 + x = x$ (**el 0 se llama vector cero o idéntico aditivo**).

✓ Si $x \in V$, existe un vector $-x$ en V tal que $x + (-x) = 0$ (**-x se llama inverso aditivo de x**)

✓ Si x, y están en V, entonces $x + y = y + x$ (**ley conmutativa de la suma de vectores**)

✓ Si $x \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha x \in V$ (**cerradura bajo la multiplicación por un escalar**)

✓ Si x, y están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (**primera ley distributiva**)

✓ Si $x \in V$ y α, β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (**segunda ley distributiva**)

✓ Si $x \in V$ y α, β son escalares, entonces $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (**ley asociativa de la multiplicación por escalares**)

✓ Para cada $x \in V$, $1x = x$

- El **espacio** $R^n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} : x_i \in R$ para $i = \{1, 2, \dots, n\}$

- El **espacio** $P_n = \{ \text{polinomios de grado menor que o igual a } n \}$

- El **espacio** $C[a, b] = \{ \text{funciones reales continuas en el intervalo } [a, b] \}$

- El **espacio** $M_{mn} = \{ \text{matrices de } m \times n \text{ con coeficientes reales} \}$

- El **espacio** $C^n = \{ (c_1, c_2, \dots, c_n) : c_i \in C \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \}$.

C denota el conjunto de números complejos.

- Un **subespacio** H de un espacio vectorial V es un subconjunto de V que es en si un espacio vectorial.

- Un subespacio no vacío H de un espacio vectorial V es un subespacio de V si las dos siguientes reglas se cumplen:

✓ Si $x \in H$ y $y \in H$, entonces $x + y \in H$

✓ Si $x \in H$, entonces $\alpha x \in H$ para cada escalar α

- Un **subespacio propio** de un espacio vectorial V es un subespacio de V diferente de $\{0\}$ y de V.

- Una **combinación lineal** de los vectores v_1, v_2, \dots, v_n es un espacio vectorial V es la suma de la forma:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son escalares.

- Se dice que los vectores v_1, v_2, \dots, v_n en un espacio vectorial V generan a V si todo vector en V se puede expresar como una combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_n .

- El **espacio generado por un conjunto de** vectores v_1, v_2, \dots, v_n en un espacio vectorial V es el conjunto de combinaciones lineales de v_1, v_2, \dots, v_n .

- Gen $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un subespacio de V.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL:

- Se dice que los vectores v_1, v_2, \dots, v_n en un espacio vectorial V son **linealmente dependientes** si existen escalares c_1, c_2, \dots, c_n no todos ceros tales que:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son **linealmente independientes**.

- Dos vectores en un espacio vectorial V son linealmente independientes si y solo si uno es múltiplo escalar del otro.
- Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en R^n generan a R^n .
- Un conjunto de n vectores en R^m es linealmente independiente si $n > m$.

BASE:

- Un conjunto de vectores v_1, v_2, \dots, v_n es una base para un espacio vectorial V si:

✓ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

✓ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ generan a V.

- Todo conjunto de n vectores linealmente independientes en R^n es una base en R^n .
- La **base canónica** en R^n consiste en n vectores:

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, c_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

DIMENSION:

- Si el espacio vectorial V tiene una base finita, entonces la dimensión de V es el número de vectores en cada base y V se denomina un **espacio vectorial de dimensión finita**. De otra manera V se denomina **espacio vectorial de dimensión infinita**. Si $V = \{0\}$, entonces se dice que V tiene **dimensión cero**.

La dimensión de V se denota por $\dim V$.

- Si H es un subespacio del espacio de dimensión finita V, entonces $\dim H \leq \dim V$.

- Los únicos subespacios propios de R^3 son los conjuntos de vectores que están en una recta o en un plano que pasa por el origen.

- El **espacio nulo** de una matriz A de nxn es el subespacio de R^n dado por:

$$N_A = \{x \in R^n : Ax = 0\}$$

- La nulidad de una matriz A de nxn es la dimensión de N_A y se denota por $v(A)$.

- Sea A una matriz de mxn. La **imagen de A** denotado por $\text{Im}(A)$, es el subespacio de R^m dado por:

$$\mathfrak{I}(A) = \{y \in R^m : Ax = y \text{ para alguna } x \in R^n\}$$

- El **rango de A**, denotado por $p(A)$, es la dimensión de la imagen de A.

- El **espacio de los reglones de A**, denotado por R_A , es el espacio generado por los reglones de A

y es un subespacio de R^n .

- El **espacio de las columnas de A**, denotado por C_A , es el espacio generado por las columnas de A

y es un subespacio de R^m .

- Si A es una matriz de mxn, entonces:

$$C_A = \mathfrak{I}(A) \text{ y } \dim R_A = \dim C_A = \dim \text{Im}(A) = p(A)$$

Más aun:

$$p(A)+v(A)=n$$