

TRANSFORMADA DE LAPLACE

L

Definiciones integrales

Transformada de Laplace	Transformada inversa de Laplace
$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \equiv \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt$ <p>s es en realidad una variable compleja pero se trata como constante durante la integración</p>	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - iR}^{\sigma + iR} e^{st} F(s) ds$ <p>σ es un número real elegido de tal forma que todos los polos de $F(s)$ queden a la izquierda de la recta vertical que pasa por σ</p>

Tabla de transformadas

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t^n n es un entero positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3	\sqrt{t}	$\sqrt{\frac{\pi}{4s^3}}$
4	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
5	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6	$t^n e^{at}$ n es un entero positivo	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
7	$\sen kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$
8	$\cos kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$
9	$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$
10	$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$
11	$e^{at} \sen kt$	$\frac{k}{(s-a)^2 + k^2}$
12	$e^{at} \cos kt$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2 + k^2}$
13	$t \sen kt$	$\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$
14	$t \cos kt$	$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$
15	$\sen kt - kt \cos kt$	$\frac{2k^3}{(s^2 + k^2)^2}$
16	$\sen kt + kt \cos kt$	$\frac{2ks^2}{(s^2 + k^2)^2}$

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
17	$\sinh kt - \sen kt$	$\frac{2k^3}{s^4 - k^4}$
18	$\cosh kt - \cos kt$	$\frac{2k^2 s}{s^4 - k^4}$
19	$1 - \cos kt$	$\frac{k^2}{s(s^2 + k^2)}$
20	$kt - \sen kt$	$\frac{k^3}{s^2(s^2 + k^2)}$
21	$\frac{a \sen bt - b \sen at}{ab(a^2 - b^2)}$	$\frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$
22	$\frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$
23	$\ln t$	$-\frac{\gamma + \ln s}{s}$ $\gamma = 0.5772156649\dots$ es la constante de Euler-Mascheroni
24	$\ln^2 t$	$\frac{\pi}{6s} + \frac{(\gamma + \ln s)^2}{s}$
25	$-(\gamma + \ln t)$	$\frac{\ln s}{s}$
26	$(\gamma + \ln t)^2 - \frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\ln^2 s}{s}$
27	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$	$\ln\left(\frac{s+b}{s+a}\right)$
28	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{\sqrt{4\pi t^3}}$	$\sqrt{s+b} - \sqrt{s+a}$
29	$\frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$
30	$\operatorname{erf}(t)$	$\frac{e^{s^2/4}}{s} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}s\right)\right]$
31	$\frac{\sen t}{t}$	$\arctan \frac{1}{s}$

Teoremas y propiedades diversas

1	Linealidad	$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) + \dots + c_n F_n(s)$ <p>donde c_1, c_2, \dots, c_n son constantes</p>
2	Primer teorema de traslación	$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \Big _{s \rightarrow s-a} = F(s) \Big _{s \rightarrow s-a} = F(s-a)$ $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{at} f(t)$
3	Segundo teorema de traslación donde la función escalón unitario es $\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$	$\mathcal{L}\{f(t-a) \mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as} F(s)$ $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \Big _{t \rightarrow t-a} \mathcal{U}(t-a) = f(t-a) \mathcal{U}(t-a)$
4	Función multiplicada por t^n (derivada de transformada)	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
5	Función dividida entre t (integral de transformada)	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s) ds$
6	Transformada de derivada	$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$ $\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 f}{dt^2}\right\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$ $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
7	Transformada de integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
8	Teorema de convolución donde la integral de convolución es $f * g \equiv \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$	$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s) G(s)$ $\mathcal{L}^{-1}\{F(s) G(s)\} = f * g$
9	Transformada de una función periódica con periodo T tal que $f(t+T) = f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$
10	Transformada de una función periódica con periodo T tal que $g(t+T) = -g(t)$	$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{1+e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} g(t) dt$
		$\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & t_0 - a \leq t \leq t_0 + a \\ 0, & t \leq t_0 - a \text{ o bien } t \geq t_0 + a \end{cases}$ $\mathcal{L}\{\delta_a(t-t_0)\} = e^{-st_0} \frac{e^{sa} - e^{-sa}}{2sa}$
11	Función delta de Dirac $\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$	$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$
12	Derivada de la función delta (función doble impulso)	$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \delta(t-t_0)\right\} = se^{-st_0}$
13	Teorema del valor inicial	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]$
14	Teorema del valor final	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)]$