

VECTORES ALEATORIOS

Sean $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ variables aleatorias, definimos al vector aleatorio

$$(X, Y): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Es decir, un vector aleatorio es una variable aleatoria que toma valores en $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$

Ejemplo

1) Se toma una muestra al azar de estudiantes y se mide la estatura de hombres y mujeres

X la estatura mayor en los hombres

Y la estatura mayor en las mujeres

$$(X, Y) \rightarrow \text{Las estaturas máximas en la muestra}$$

Ejemplo

Se tiran 2 dados al azar y

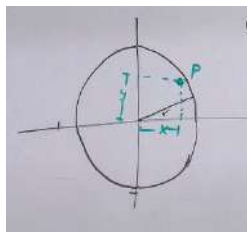
$$X_1 = \text{El resultado del primer dado}$$

$$X_2 = \text{El resultado del segundo dado}$$

$$(X_1, X_2) = \text{Vector con el resultado conjunto}$$

Ejemplo

Se tira un dardo al azar en un círculo de radio r



$$P = (X, Y)$$

Ejemplo

Se toman 3 bolas al azar de una urna, con 10 bolas numeradas del 1 al 10

$$(X_1, X_2, X_3) = \text{Muestra de las 3 bolas seleccionadas}$$

DISTRIBUCIÓN CONJUNTA

Sea $\vec{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio

$$F(x, y) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq y)$$

Es la distribución conjunta de \vec{X} , recordar que

$$P(X_1 \leq x, X_2 \leq y) = P(\{w \in \Omega: X_1(w) \leq x\} \cap \{w \in \Omega: X_2(w) \leq y\})$$

DISTRIBUCIONES MARGINALES

Si $\vec{X} = (X_1, X_2)$ es un vector aleatorio y F su distribución conjunta, la distribución marginal de X_1

$$F_{X_1}(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = \lim_{y \rightarrow \infty} P(X_1 \leq x, X_2 \leq y)$$

La distribución marginal de X_2

$$F_{X_2}(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = \lim_{x \rightarrow \infty} P(X_1 \leq x, X_2 \leq y)$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD CONJUNTA

Si X_1, X_2 son variables aleatorias discretas, definimos a la función de densidad conjunta como:

$$f(X_1, X_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

Si X_1 y X_2 son variables aleatorias continuas y además existe una función no negativa tal que

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds$$

Entonces $f(x, y)$ es una densidad conjunta

Hay que recordar que:

$$\int_c^d \int_a^b f(s, t) dt ds = \int_c^d \left(\int_a^b f(s, t) dt \right) ds$$

Y también para el caso en que X_1, X_2 son discretas

$$F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_i \leq y} f(x_i, y_i)$$

Distribución Conjunta

Densidad de probabilidad conjunta

DENSIDAD MARGINAL

Sea $\vec{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio, y $f(x, y)$ su densidad conjunta definimos a la densidad marginal del X_1

$$f_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

La densidad marginal de X_2

$$f_{X_2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Ejemplo:

Tablas de contingencia/matriz de confusión

Se toma una muestra en una clínica y se registra si un paciente es fumador o no lo es, $X = 1 \rightarrow$ Es fumador, también se registra si tiene un padecimiento crónico $Y = 1 \rightarrow$ Tiene algún padecimiento crónico

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 1$	$\frac{5}{100}$	$\frac{20}{100}$
$X = 0$	$\frac{3}{100}$	$\frac{72}{100}$

$$P(X = 0, Y = 1) = \frac{72}{100}$$

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{3}{100}$$

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{20}{100}$$

$$P(X = 1, Y = 0) = \frac{5}{100}$$

Calcular la probabilidad de que sea fumador

$$P(X = 1) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) = \frac{5}{100} + \frac{20}{100} = \frac{25}{100}$$

$$P(X = 0) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y = 0) = \frac{72}{100} + \frac{3}{100} = \frac{75}{100}$$

	$Y = 0$	$Y = 1$	SUBTOTAL MARGINAL DE X
$X = 1$	$\frac{5}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{25}{100}$
$X = 0$	$\frac{3}{100}$	$\frac{72}{100}$	$\frac{75}{100}$
SUBTOTAL MARGINAL DE Y	$\frac{8}{100}$	$\frac{92}{100}$	

Densidad marginal de X

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{25}{100} & \text{si } x = 1 \\ \frac{75}{100} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Densidad marginal de Y

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{8}{100} & \text{si } y = 0 \\ \frac{92}{100} & \text{si } y = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo

Sean X, Y dos variables aleatorias que pueden tomar $-1, 0, 1$ con la siguiente densidad conjunta

		X			
		-1	0	1	
Y	-1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$
	0	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$
	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$
		$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{5}{16}$	

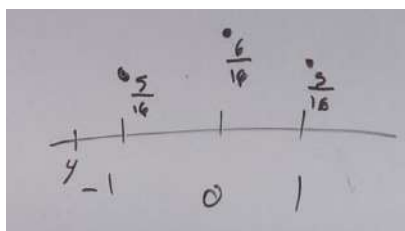
a) Obtener las densidades marginales de X y de Y

Marginal de Y

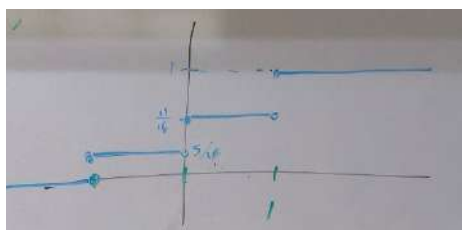
$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{5}{16} & \text{si } y = -1 \\ \frac{6}{16} & \text{si } y = 0 \\ \frac{5}{16} & \text{si } y = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Marginal de X

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{5}{16} & \text{si } y = -1 \\ \frac{6}{16} & \text{si } y = 0 \\ \frac{5}{16} & \text{si } y = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < -1 \\ \frac{5}{16} & -1 \leq y < 0 \\ \frac{11}{16} & 0 \leq y < 1 \\ \frac{16}{16} & 1 \leq y \end{cases}$$



b) Calcular $P(X > y)$ y $P(X = Y)$

		X		
		-1	0	1
Y	-1	0	1	1
	0	0	0	1
	1	0	0	0

$$P(X > Y) = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16}$$

$$P(X > Y) = P(X > Y, X = 1, Y = -1) + P(X > Y, X = 0, Y = -1) + P(X > Y, X = 1, Y = 0)$$

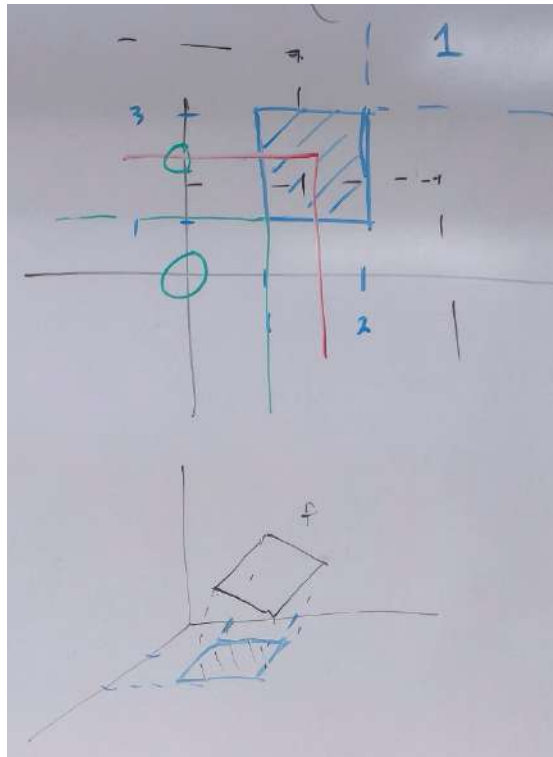
$$P(X = Y) = \frac{2}{16}$$

Ejemplo

Sean X, Y dos variables aleatorias

$$f(x, y) = \frac{3x - y}{5} \quad \text{si } 1 \leq x \leq 2, \quad 1 \leq y \leq 3$$

$$0 \quad \text{en otro caso}$$



a) Encontrar la función de distribución

Si $x < 1, y < 1$

$$F(x, y) = 0$$

Si $x < 1, 1 \leq y \leq 2$

$$F(x, y) = 0$$

Si $1 \leq x \leq 2, y < 1$

$$F(x, y) = 0$$

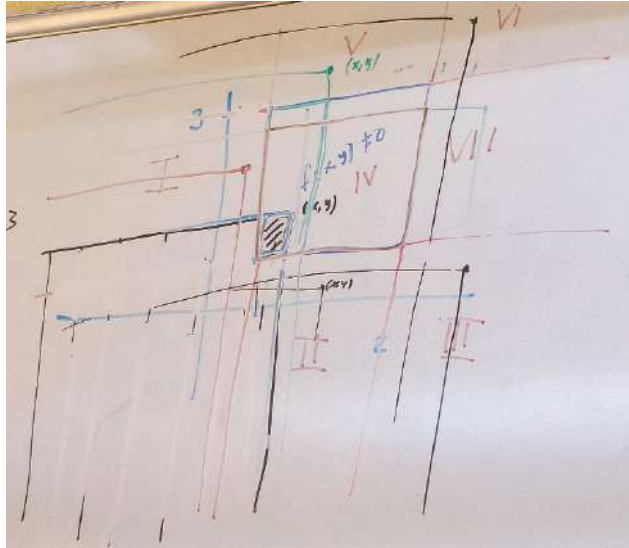
Si $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{35-t}{5} dt ds = \int_1^x \int_1^y \frac{35-t}{5} dt ds \\ \int_1^y \frac{35-t}{5} dt &= \frac{35}{5} t - \frac{t^2}{10} \Big|_1^y = \frac{35}{5} y - \frac{y^2}{10} - \left(\frac{35}{5} - \frac{1}{10} \right) = \frac{35}{5} (y-1) - \frac{y^2-1}{10} \\ \int_1^x \frac{3}{5} (y-1) - \frac{(y^2-1)}{10} ds &= \frac{3}{5} (y-1) \int_1^x ds - \frac{(y^2-1)}{10} \int_1^x ds \\ &= \frac{3}{5} (y-1) \left(\frac{s^2}{2} \right) \Big|_1^x - \frac{(y^2-1)}{10} s \Big|_1^x = \frac{3}{5} (y-1) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{y^2-1}{10} \right) (x-1) \\ &= \frac{3}{10} y x^2 - \frac{3x}{10} + \frac{3}{10} (y-1) - \frac{x(y^2-1)}{10} + \frac{y^2-1}{10} \end{aligned}$$

La función de distribución conjunta

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds = \iint f(s, t) dt ds$$

$$R = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < t \leq y, -\infty < s \leq x\}$$



En I, $-\infty < x < 1, -\infty < y < \infty$

$$f(x, y) = 0$$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) ds dt = 0$$

En II, $-\infty < x < \infty, y < 1$

$$F(x, y) = 0$$

En III

$$F(x, y) = 0$$

En IV

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds$$

$$F(x, y) = \int_1^x \int_1^y f(s, t) dt ds = \int_1^x \int_1^y \frac{35-t}{5} dt ds = \frac{1}{5} \int_1^x \int_1^y 35 - t dt ds$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_1^y (35 - t) dt \right) = \int_1^y 35 dt - \int_1^y t dt = 35 \int_1^y dt - \frac{t^2}{2} \Big|_1^y = 35t \Big|_1^y - \frac{t^2}{2} \Big|_1^y \\
&= 35(y - 1) - \left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} \int_1^x 35(y - 1) - \frac{1}{2}(y^2 - 1) ds = \frac{1}{5} \int_1^x 35(y - 1) ds - \frac{1}{5} \int_1^x \frac{1}{2}(y^2 - 1) ds \\
&= \frac{1}{5} 3(y - 1) \int_1^x s ds - \frac{1}{10}(y^2 - 1) \int_1^x ds = \frac{1}{5} 3(y - 1) \left[\frac{s^2}{2} \Big|_1^x \right] - \frac{1}{10}(y^2 - 1) (s \Big|_1^x) \\
&= \frac{3}{5}(y - 1) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{10}(y^2 - 1)(x - 1)
\end{aligned}$$

$$F(x, y) = \frac{3}{10}(y - 1)(x^2 - 1) - \frac{1}{10}(y^2 - 1)(x - 1)$$

En V $1 \leq x \leq 2, 3 < y$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds &= \frac{1}{5} \int_1^x \int_1^3 35 - t dt ds = \frac{1}{5} \int_1^x 35(3 - 1) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) ds \\
F(x, y) &= \frac{1}{5} \int_1^x (6s - 4) ds = \frac{6}{5} \frac{s^2}{2} \Big|_1^x - \frac{4}{5} s \Big|_1^x = \frac{6}{10}(x^2 - 1) - \frac{4}{5}(x - 1)
\end{aligned}$$

En VI

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \int_1^2 \int_1^3 \frac{35 - t}{5} dt ds \\
F(x, y) &= 1
\end{aligned}$$

En VII

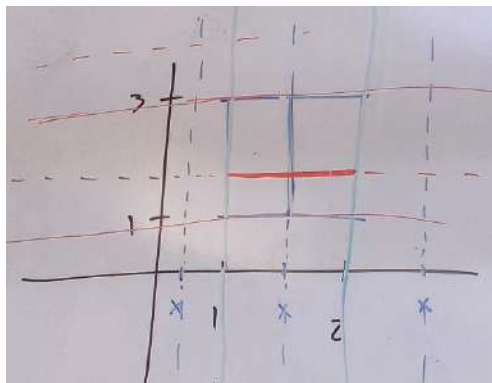
$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds = \frac{1}{5} \int_1^2 \left(\int_1^y (35 - t) dt \right) ds$$

$$= \frac{1}{5} \int_1^2 35(y-1) - \left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \right) ds = \frac{3}{5} (y-1) \frac{s^2}{2} \Big|_1^2 - \frac{1}{10} (y^2-1) s \Big|_1^2$$

$$= \frac{3}{5} (y-1) \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{10} (y^2-1) (2-1) = \frac{9}{10} (y-1) - \frac{1}{10} (y^2-1)$$

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in I \cup II \cup III \\ \frac{3}{10} (y-1)(x^2-1) - \frac{1}{10} (x-1)(y^2-1) & \text{si } (x, y) \in IV \\ \frac{6}{10} (x^2-1) - \frac{4}{5} (x-1) & \text{si } (x, y) \in V \\ \frac{9}{10} (y-1) - \frac{1}{10} (y^2-1) & \text{si } (x, y) \in VII \\ 1 & \text{si } (x, y) \in VI \end{cases}$$

b) Encontrar las densidades marginales de X y de Y



$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = 0$$

$$1 \leq x < 2$$

$$= \int_1^3 \frac{3}{5} (x-y) dy = \frac{3}{5} \int_1^3 x dy - \frac{1}{5} \int_1^3 y dy = \frac{3}{5} x y \Big|_1^3 - \frac{1}{5} \frac{y^2}{2} \Big|_1^3$$

$$= \frac{3}{5} x (3-1) - \frac{1}{10} (3^2 - 1^2) = \frac{6}{5} x - \frac{8}{10}$$

$$2 < x < \infty$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy$$

$$f_x(x) = \frac{6}{5}x - \frac{8}{10} \quad 1 \leq x \leq 2$$

0 en otro caso

$$y < 1$$

$$f_y(y) = 0$$

$$1 \leq y \leq 3$$

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_1^2 \frac{3x - y}{5} dx = \int_1^2 \frac{3x}{5} dx - \int_1^2 \frac{y}{5} dx = \frac{3x^2}{5} \Big|_1^2 - \frac{y}{5} x \Big|_1^2 \\ &= \frac{3}{10} (2^2 - 1^2) - \frac{y}{5} (2 - 1) = \frac{9}{10} - \frac{y}{5} \end{aligned}$$

Si $y > 3$

$$f(y) = 0$$

$$f_y(y) = \frac{9}{10} - \frac{y}{5} \quad 1 < y < 3$$

0 en otro caso

Ejemplo

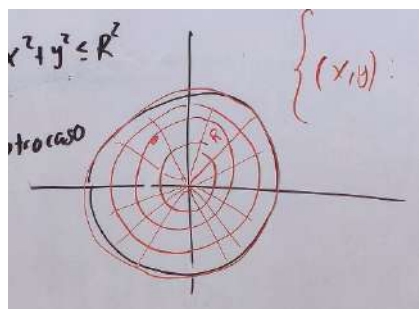
Se tira un dado al azar, en un objetivo en forma circular de radio R

X = Coordenada x del punto en donde cae el dado

Y = Coordenada y del punto en donde cae el dado

$$f(x, y) = \frac{1}{\text{Area}(R)} \quad (x, y) \in R = \frac{1}{\pi R^2} \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$$

0 en otro caso *0 en otro caso*

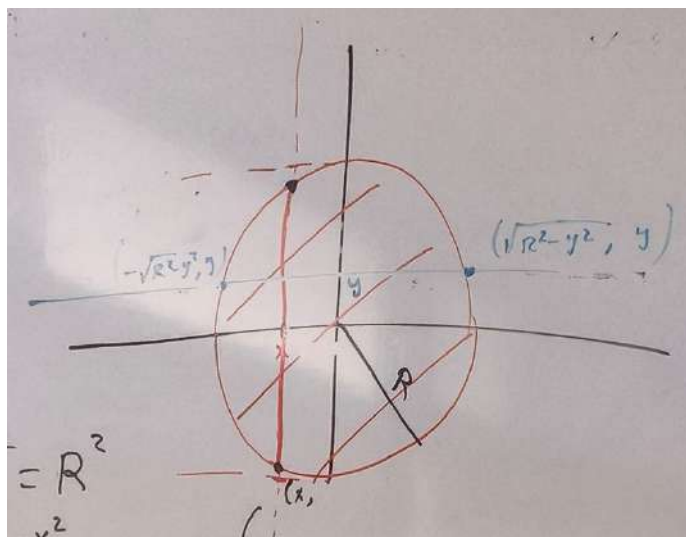


$$\{(x, y): x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y^2 = R^2 - x^2$$

$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$



$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2} & -R \leq x \leq R \\ 0 & x \notin [-R, R] \end{cases}$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{1}{\pi R^2} dy = \frac{1}{\pi R^2} y \Big|_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{\pi R^2} & -R \leq y \leq R \\ 0 & y \notin [-R, R] \end{cases}$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} \frac{1}{\pi R^2} dx = \frac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{\pi R^2}$$

VECTORES INDEPENDIENTES

$\vec{V}(x, y)$ es un vector aleatorio, decimos x, y son independientes si para todo x, y

$$f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

Integrando

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) ds dt = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_x(t) f_y(s) ds dt$$

$$F(x, y) = \left(\int_{-\infty}^x f_x(t) dt \right) \left(\int_{-\infty}^y f_y(s) ds \right) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

X y Y son independientes si

$$f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

Si X y Y son independientes entonces

$g(x), f(y)$ también son independientes

Si X y Y son independientes

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ para todo X, Y

Ejemplo

Si (X, Y) es un vector aleatorio con función de densidad $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)}$

$$-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$

¿Son independientes X y Y ?

Primero calculamos $f_x(x)$, la marginal de X y de Y

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)} dy = \int \frac{1}{2\pi} e^{x^2} \cdot e^{-y^2} dy = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2} dy \cdot \sqrt{2\pi} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} e^{-x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} \quad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2} \quad -\infty < y < \infty$$

Multiplicamos las marginales de X y Y

$$f_x(x) \cdot f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2} = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)} = f(x, y)$$

$\therefore X$ y Y son independientes

Teorema

Si X y Y son variables aleatorias independientes entonces la función de densidad de $S = X + Y$ está dada por

$$f_{x+y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(t) f_y(z-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(t) f_x(z-t) dt$$

$$f_x * f_y(z)$$

La convolución de f_x y f_y

