

FORMULARIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Ecuación lineal: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$, $y = \left(\int \frac{q(x)}{e^{-\int p(x)dx}} dx + c \right) e^{\int p(x)dx}$

Factor integrante: $e^{\int p(x)dx}$

Ecuación exacta: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad y \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

$$\text{Factor integrante: } m(x) = e^{\int \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx} \quad y \quad m(y) = e^{\int \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dy}$$

Soluciones por sustitución

Ecuación homogénea:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Función homogénea: $f(tx,ty) = t^k f(x,y)$

Sustituciones: $x = uy$ o $y = vx$

Ecuación de Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

Sustitución: $w = y^{1-n}$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dx} + (1-n)P(x)w = (1-n)f(x)$$

APLICACIONES (ED de Primer Orden)

Ley de enfriamiento de Newton: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$

Trayectorias ortogonales: $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{c_1} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{c_2} = -1$

Circuitos eléctricos: $L \frac{di}{dt} + Ri = E(t)$, $R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t)$, $i = \frac{dq}{dt}$

Caída libre (resistencia del aire \approx velocidad): $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$

Mezclas: $\frac{dA}{dt} = R_i - R_o = \begin{pmatrix} \text{razón de entrada} \\ \text{de la sal} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{razón de salida} \\ \text{de la sal} \end{pmatrix}$

$$R_i = \begin{pmatrix} \text{razón de entrada} \\ \text{de la salmuera} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{concentración de sal en el} \\ \text{efluente de entrada} \end{pmatrix}$$

$$R_o = \begin{pmatrix} \text{razón de salida} \\ \text{de la salmuera} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{concentración de sal en el} \\ \text{efluente de salida} \end{pmatrix}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Segunda solución (reducción de orden): $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$

Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

- Raíces reales diferentes: $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x}$
- Raíces reales iguales: $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + \dots + c_n x^{n-1} e^{m_1 x}$
- Raíces complejas diferentes (de la forma $m_k = a_k + b_k i$ y $m_{k+1} = a_k - b_k i$): $y = e^{a_k x} (c_1 \cos b_k x + c_2 \sin b_k x) + \dots + e^{a_{n/2} x} (c_{n-1} \cos b_{n/2} x + c_n \sin b_{n/2} x)$
- Raíces complejas iguales: $y = e^{a_k x} (c_1 \cos b_k x + c_2 \sin b_k x) + \dots + x^{n-1} e^{a_k x} (c_{n-1} \cos b_k x + c_n \sin b_k x)$

Ecuaciones no homogéneas con coeficientes constantes

Operador anulador (coeficientes indeterminados)

- D^n anula $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$
- $(D - \alpha)^n$ anula $e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \dots, x^{n-1} e^{\alpha x}$
- $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n$ anula $x^{n-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$ y $x^{n-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$

Soluciones propuestas (coeficientes indeterminados)

Forma de la función $g(x)$

Constante: a $x^s A$ (1)

Polinomio: $p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ $x^s P_n(x) = x^s [A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0]$ (2)

Exponencial: $a e^{\alpha x}$ $x^s A e^{\alpha x}$

Senos y cosenos: $a \cos \beta x + b \sin \beta x$ $x^s [A \cos \beta x + B \sin \beta x]$

Producto de polinomio y exponencial: $p_n(x) e^{\alpha x}$ $x^s P_n(x) e^{\alpha x}$

Productos de senos y cosenos por polinomios:
 $p_n(x) \cos \beta x + q_m(x) \sin \beta x$
donde: $q_m(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$

Productos de senos y cosenos por exponencial: $a e^{\alpha x} \cos \beta x + b e^{\alpha x} \sin \beta x$ $x^s e^{\alpha x} [A \cos \beta x + B \sin \beta x]$

Productos de polinomios, senos y cosenos y exponencial:
 $p_n(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + q_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$
donde $N = \max(n, m)$

(1) El entero no negativo s se elige como el menor entero tal que ningún término de la solución particular $y_p(x)$ sea solución de la ecuación homogénea correspondiente.

(2) $P_n(x)$ debe incluir todos los términos aunque $p_n(x)$ tenga algunos términos nulos.

Variación de parámetros: $c'_i(x) = \frac{\Delta_i}{w(y_1, y_2, \dots, y_n)}$

Ecuaciones homogéneas con coeficientes variables

- Raíces reales diferentes: $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} + \dots + c_n x^{m_n}$
- Raíces reales iguales: $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x + \dots + c_n x^{m_1} (\ln x)^{n-1}$
- Raíces complejas diferentes: $y = x^{\alpha_1} (c_1 \cos(\beta_1 \ln x) + c_2 \sin(\beta_1 \ln x)) + \dots + x^{\alpha_{n/2}} (c_{n-1} \cos(\beta_{n/2} \ln x) + c_n \sin(\beta_{n/2} \ln x))$
- Raíces complejas iguales: $y = x^{\alpha_1} (c_1 \cos(\beta_1 \ln x) + c_2 \sin(\beta_1 \ln x)) + \dots + x^{\alpha_1} (\ln x)^{\frac{n}{2}-1} (c_{n-1} \cos(\beta_1 \ln x) + c_n \sin(\beta_1 \ln x))$

APLICACIONES (ED de Orden Superior)

Ecuación General del Movimiento: $m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$

Movimiento Armónico Simple

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2},$$

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{c_1}{A}, \quad \cos\phi = \frac{c_2}{A} \quad \text{y} \quad \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}$$

Movimiento Vibratorio Amortiguado

$$2\lambda = \frac{\beta}{m}, \quad \text{Caso 3: } x(t) = Ae^{-\lambda t} \operatorname{Sen}(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + \phi), \quad \text{cuasiperiodo} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}},$$

$$\text{cuasifrecuencia} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}{2\pi}, \quad t = \frac{n\pi - \phi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}, \quad t^* = \frac{(2n+1)\pi/2 - \phi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}$$

$$\text{Circuitos eléctricos: } L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t)$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Definición: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$

Primer Teorema de la Traslación: $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) = F(s)|_{s \rightarrow s-a}$

Forma inversa: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}_{s \rightarrow s-a} = e^{at} f(t)$

Función escalón unitario: $U(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$

Segundo Teorema de la Traslación: $\mathcal{L}\{f(t-a)U(t-a)\} = e^{-as} F(s)$

Forma inversa: $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = f(t-a)U(t-a)$

Forma alterna: $\mathcal{L}\{g(t)U(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{g(t+a)\}$

Derivadas de transformadas: $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n \frac{d^n \mathcal{L}\{f(t)\}}{ds^n}$

Convolución:

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Teorema de la Convolución:
Forma inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g$$

Transformada de una derivada:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Transformada de una integral:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Forma inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < a \\ h(t), & t \geq a \end{cases} \quad \text{se puede escribir } f(t) = g(t) - g(t)U(t-a) + h(t)U(t-a)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ g(t), & a \leq t < b \\ 0, & t \geq b \end{cases} \quad \text{se puede escribir } f(t) = g(t)[U(t-a) - U(t-b)]$$

MÉTODO MATRICIAL (Sistemas de ecuaciones diferenciales)

$$X = Ke^{At}, \quad (A - \lambda I)K = 0, \quad \det(A - \lambda I) = 0$$

- Valores propios reales distintos:

$$X = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n K_n e^{\lambda_n t}$$

- Valores propios repetidos

$$\text{Para } m=2, \quad X_2 = Kte^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t}, \quad \text{con } (A - \lambda_1 I)P = K$$

$$\text{Para } m=3, \quad X_3 = K \frac{t^2}{2} e^{\lambda_1 t} + Pte^{\lambda_1 t} + Qe^{\lambda_1 t}, \quad \text{con } (A - \lambda_1 I)Q = P$$

- Valores propios complejos: $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i$,

$$X_1 = [B_1 \cos \beta t - B_2 \operatorname{sen} \beta t] e^{\alpha t}, \quad X_2 = [B_2 \cos \beta t + B_1 \operatorname{sen} \beta t] e^{\alpha t},$$

con $B_1 = \operatorname{Re}(K_1)$ y $B_2 = \operatorname{Im}(K_1)$

Solución general: $X = X_c + X_p = \Phi(t)C + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{\det \Phi(t)} \begin{pmatrix} \phi_{22} & -\phi_{12} \\ -\phi_{21} & \phi_{11} \end{pmatrix}, \quad \text{o en general } \Phi^{-1}(t) = \frac{1}{\det \Phi(t)} \operatorname{adj}(\Phi(t)), \quad \text{con}$$

$$\operatorname{adj}(\Phi(t)) = \operatorname{cof}(\Phi(t))^T$$

SERIES DE POTENCIAS

Solución en torno a puntos ordinarios: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$

Si $x_0 = 0$, entonces $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$