Gobierno
del Estado de México

Tecnológico de Estudios Superiores del Oriente del Estado de México

Organismo Público Descentralizado del Gobierno del Estado de México

CUADERNILLO DE EJERCICIOS
DE
CÁLCULO INTEGRAL

Recopilo: Lic. Telésforo Zamorano Soriano

Febrero de 2011.

INDICE

CUADERNILLO DE EJERCICIOS DE CÁLCULO INTEGRAL

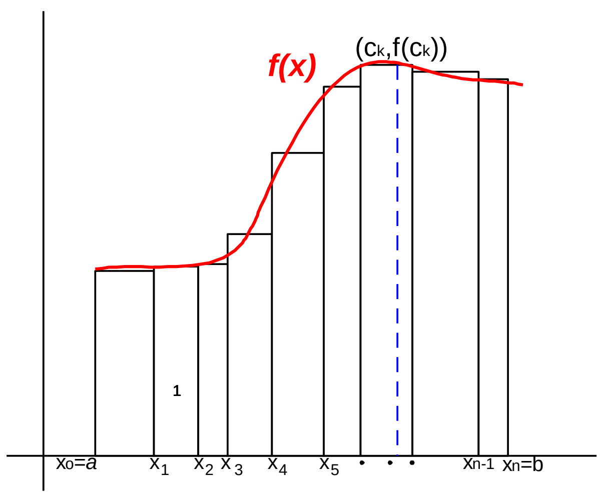
Unidad 1: Teorema fundamental del cálculo.

1.1 Medición aproximada de figuras amorfas, notación sumatoria y Sumas de Riemann.

Ya se han definido las sumas de Riemann que para una partición dada en un intervalo ***[a,b]*** nos llevan a una suma que en el límite corresponde con el número:

$$I = \lim_{\|P\| \to 0+} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Está selección se muestra en la siguiente figura.



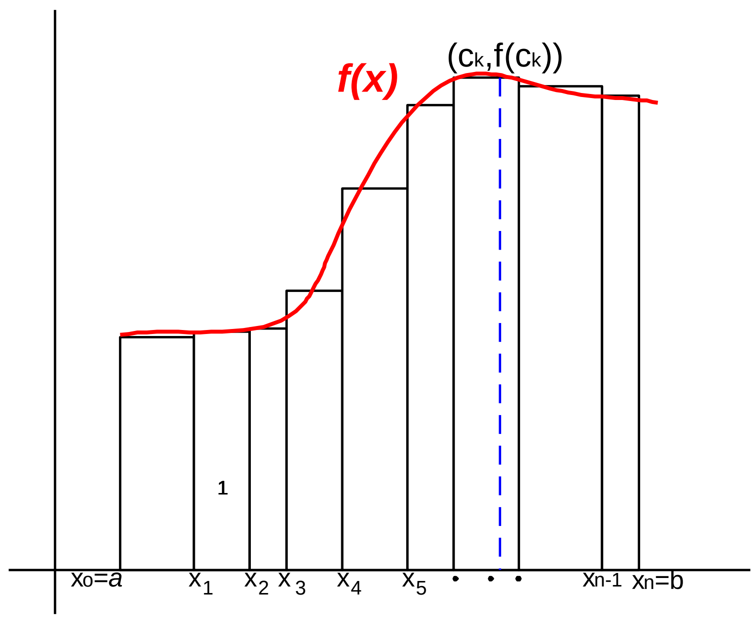
Por su importancia el número ***I*** se representa por $I = \int_a^b f(x)dx$ y se lee "integral de *f* de *x* desde a hasta *b*".

El número definido como Integral definida entre ***a*** y ***b*** y escrito como $\int_a^b f(x)dx$, es un número real asociado al área bajo la curva, sin embargo integral y área no son exactamente lo mismo; la integral resulta ser una herramienta para calcular el área bajo la curva, pero existe de manera independiente como objeto abstracto.

Sin embargo decir que el número *I* está asociado al área bajo una curva, no implica que sean lo mismo, de otra forma sería redundar en concepto ¿En qué consiste esa diferencia?

Sea una función *f* continua en el intervalo $[a,b]$ y una partición *P* arbitraria del intervalo en *n* intervalos limitados por los puntos $a=x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n=b$ con la única condición de que: $a=x_0< x_1< x_2< x_3< ...< x_{n-1}< x_n=b$, así al conjunto $P=\{x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n\}$ lo llamamos partición de $[a,b]$.

P define *n* subintervalos cerrados determinados por $[x_0, x_1],[x_1, x_2,], ...,[x_{n-1}, x_n]$, en el que la longitud de cada subintervalo será $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, para los valores adecuados de $k=1,2,3,...,n$. Si en cada subintervalo se selecciona un punto c_k y se construye un rectángulo con el intervalo como base y de altura $f(c_k)$, se tendrá que el área del rectángulo será $f(c_k)\Delta x_k$. Está selección se muestra en la siguiente figura.



Como se tienen n rectángulos, se suman todas las áreas, si $f(c_k)<0$ el producto $f(c_k)\Delta x_k$ <0; incluyendo esta consideración se suman todos los productos obteniendo: $S_p = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$.

Esta suma que depende de P y de las selecciones de los c_k, la denominamos Suma de Riemann para f en $[a,b]$.

Si definimos la norma de una partición P, como la longitud del intervalo más largo de la partición y se escribe **$\|P\|$.**

Resuelva los siguientes ejercicios:

1. Aproxima mediante sumas el valor de $\int_1^2 (x^2 - 1)dx$.
2. Calcula el valor de ***ln9*** aproximadamente.
3. Empleando $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + c$ aproxima el valor de π.
4. Calcule $\int_{-1}^{1} (1 + 2x - 3x^2 + x^3)dx$
5. Calcule $\int_0^{\pi} sen^2 2x \cos 2x dx$
6. Calcule $\int_0^1 \frac{dx}{1 - e^{-2x}}$
7. Calcule el promedio de ***f(x) = sen(x)*** en ***[0,π]***. En que lugar se presenta ese promedio
8. Calcule el promedio de $\boldsymbol{g(x) = (x-1)^2}$, en el intervalo ***[1,4].***

Calcula el diferencial de las siguientes funciones:

9. $f(x) = 3x + 1$

10. $f(x)=\sqrt{x^2+x-1}$

11. $f(x)=3xsenx$

12. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

13. $f(x)=xe^{2x-1}$

14. Encuentre el diferencial ***df*** de la función en términos de ***x***: $f(u)=u^3+sen(2+3u)$ si se sabe que $u(x)=3x\cos x$

15. Calcule una aproximación lineal alrededor del punto dado ***x = 3***, para la función: $f(x)=5x^2\cos(x-\pi)$

16. Para la función $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{|x^3|}$ tomando ***x = -1*** y ***Δx = 0.001***, calcular:
    a) El cambio exacto de la función para el valor de ***x*** dado si se tiene el incremento ***Δx***.
    b) El cambio de la función empleando diferenciales.
    c) El error que se genera entre en calculo exacto y el encontrado empleando diferenciales.
17. Un cono circular recto tiene radio en su base de ***5 cm*** y altura de ***12 cm***. ¿Cuánto crece aproximadamente su volumen si su generatriz crece ***1%***?
18. Una lata de aluminio para bebidas gaseosas mide ***2.54 cm*** de radio y ***17.3 cm*** de alto, mientras el espesor de la lámina con que está hecha es de ***0.74 mm***. Si simultáneamente se provocara un error máximo en radio, altura y espesor del ***k%*** en cada magnitud:
    a) ¿Cuánto varía en porcentaje el peso de la lata?
    b) ¿Cuánto varía en porcentaje la cantidad de lámina empleada para construir la lata?

c) ¿Cuánto varía en porcentaje el volumen que puede contener la lata?

d) En cada caso ¿Qué magnitud al variar resulta la más crítica: la altura, el radio o el espesor de la lata?

e) ¿Qué valor tiene máximo puede tener ***k*** si ninguna de las magnitudes mencionadas en los incisos a, b y c, debe de modificar su valor más de un ***1.5%***?

1.2 Definición de integral definida.

Definición: ***La integral definida*** de una función en un intervalo *[a,b]* es el número *I* que satisface la siguiente condición: $I = \underset{\|P\|\to 0+}{lím} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$, para cualesquier elección de números c_k en las subdivisiones de la partición. El número I se representa por $I = \int_a^b f(x)dx$ y se lee "integral de *f* de *x* desde a hasta *b*".

Cuando la selección de los c_k de cada intervalo corresponde con el máximo en el intervalo, se dice que se tiene una Suma superior de Riemann y se representa por U_P porque depende la parición. De igual forma, si la selección se hace sobre los mínimos de cada subintervalo, se obtendrá una Suma inferior de Riemann, escrita L_P. En el límite se tendrá que:

$$\underset{\|P\|\to 0+}{lím} U_P = \underset{\|P\|\to 0+}{lím} L_P = \int_a^b f(x)dx$$

Debido a que en general $U_P \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \le L_P$. Una función para la que el límite existe se dice que es Riemann integrable o comúnmente "integrable" en *[a,b]*.

1.3 Teorema de existencia y propiedades de la integral definida.

El concepto de Integral definida tiene infinidad de aplicaciones y todas ellas asociadas a la modelación de procesos de acumulación, ¡de diferenciales!

Muchas de las propiedades del número denominado parten de las cualidades de las áreas por ser números con una relación muy estrecha, por ejemplo:

a) ¿Cuál será el área entre un punto y el eje ***x***? ¿Es posible trazar al menos un rectángulo "bajo" el punto? Una consecuencia importante de este análisis es que si una función tiene discontinuidades salvables la integral existe. ¿Qué diferencia existe en calcular una integral en ***(a,b)*** ó en ***[a,b]***?

b) El recorrido de la curva al calcular la integral se hizo de ***a*** hacia ***b***. ¿Cambiará el resultado si el recorrido se hace en sentido contrario? ¿Cuál sería el signo de las bases de los rectángulos? ¿Qué signo tendrá la suma final?

c) Si tienes que resolver la integral desde ***a*** hasta ***b***, es posible que la puedas resolver: ¿Partiéndola en dos en el punto ***c***, una desde ***a*** hasta ***c*** y otra desde ***c*** hasta ***b***? ¿Y luego sumando los resultados? ¿Es necesario que ***c*** esté entre ***a*** y ***b***?

d) Si has calculado la integral para ***f(x)*** entre ***a*** y ***b***. Y ahora es necesario calcular la integral de ***5f(x)*** ¿Será suficiente multiplicar por ***5*** la integral previamente obtenida? ¿Es correcto este resultado para cualquier valor constante ***k*** sin importar su signo?

e) Si has calculado previamente las integrales de ***f(x)*** y de ***g(x)*** en el intervalo ***[a,b]*** y decides sumarlas después. ¿Será lo mismo haber calculado la integral de ***[f(x) + g(x)]*** en el mismo intervalo? ¿Es válido también si decides restarlas en lugar de sumarlas?

Relaciona la expresión que identifica cada afirmación previa

$$a)\ldots\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$b)\ldots\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$c)\ldots\int_a^a f(x) = 0$$

$$d)\ldots\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$e)\ldots\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

1.4 Función primitiva.

Resuelva los siguientes ejercicios:

19. Encuentre la antiderivada de $\left(\frac{1-x}{x}\right)^2$.

20. Encuentre la antiderivada de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

21. Resuelva la integral indefinida $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$.

22. Resolver $\int \sqrt{5x-1}dx$.

23. Resolver $\int 2xsen(3x^2+1)dx$.

24. Resolver $\int \frac{senx}{1-3\cos x}dx$.

25. Resuelva $\int 3x^2 \sec^2(4x^3-5)dx$.

27. Resuelva: $\int 2x^3 e^{x^4+1} dx$

28. Resuelva: $\int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx$

29. Resuelva: $\int \frac{xdx}{3x^2 - 1}$

30. Resuelva: $\int x(x^2 - 1)^2 dx$

31. Resuelva: $\int 5x^2 \cos(x^3 + 2) dx$.

32. Resuelva: $\int \frac{\cos x}{2 - 5senx} dx$.

<u>1.5 Teorema fundamental del cálculo.</u>

Si *f(x)* es continua en *[a,b]*, entonces existe *c* en *[a,b]* tal que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.

Teorema del Valor Medio para Integrales

En tus estudios previos se te asignó siempre un promedio, dicho promedio se calculó sumando las calificaciones y finalmente dividiendo entre el número de ellas.

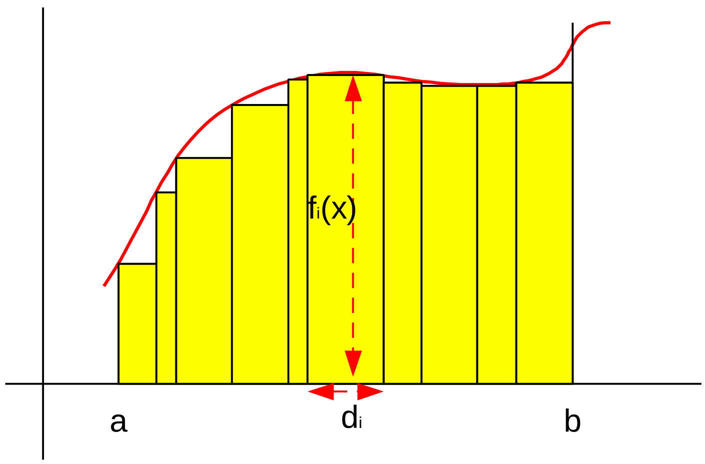
En general cuando los datos estás repetidos puedes modificar el cálculo y ahora hacerlo así:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i c_i}{\sum_{i=1}^{N} n_i},$$

en donde c_i corresponde con cada una de las calificaciones y n_i el número de veces que se repite cada calificación. Entonces N es el número de calificaciones diferentes que se presentan y obviamente p será el promedio. La suma del denominador no será otra cosa que el número de materias ¿o no?

Esta expresión comúnmente se denomina promedio ponderado y la diferencia será ahora que los n_i son ahora números reales y no enteros de manera obligatoria.

33. Veamos ahora una figura conocida y reescribamos la expresión previa tomando en cuenta la notación de la figura:



$$p = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i f_i(x)}{\sum_{i=1}^{N} d_i}$$

a) ¿Qué significado le darías ahora a esta expresión? Claro que también es un promedio

b) ¿Pero que encuentras como resultado?

Observa que la suma del denominador no es otra cosa que la distancia entre b y a

c) ¿Por qué?, por lo que ahora la expresión se puede simplificar así:

$$p = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{N} d_i f_i(x)$$

d) Pero ¿Qué pasará ahora si el número de rectángulos crece mientras el tamaño de sus bases disminuye?

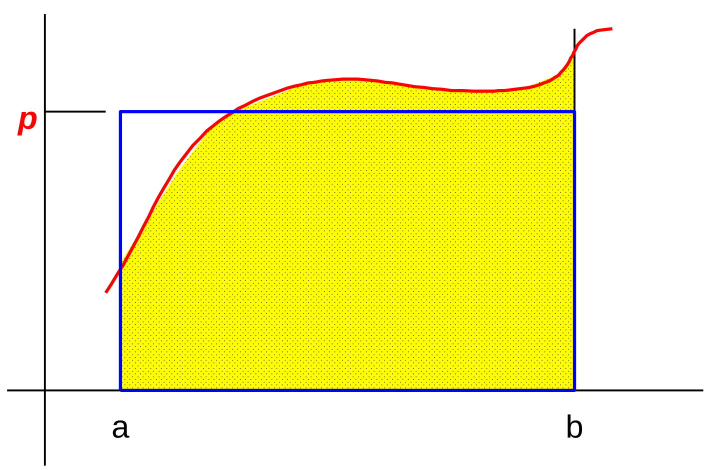
Claro ¡no le hagamos al cuento! Aunque se escribió de otro modo si ***N*** crece sin límite, la sumatoria no es otra cosa que el área bajo la curva... o sea que:

$$p = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Donde ***p*** sigue siendo un promedio... ve así la expresión:

$$p(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

¿Te ayuda más?



e) ¿Qué área es obtenida por la integral?

f) ¿Qué área tiene el rectángulo que se trazó?

g) ¿Qué identifica la igualdad de la expresión entre el rectángulo y la integral?

h) ¿Por qué ***p*** sigue identificando un promedio?

i) ¿Existe algún valor de ***f(x) = p***? ¿De manera general es único o pueden existir varios?

j) ¿Cómo debe de ser el área que no tomó en cuenta el rectángulo, respecto de la que tomó y no estaba bajo la curva?

El razonamiento seguido arroja el teorema conocido como "Teorema del valor medio para integrales":

Recuerda un viaje que hayas realizado en autobús o automóvil, en cada instante y cada punto del recorrido el velocímetro indicaba la velocidad instantánea. ¿Cuál fue el velocidad promedio del recorrido, si sabes que se recorrieron 80 Km. en un tiempo de 1.2 h?

En este caso sabes que la distancia recorrida (***s***) está en función de la velocidad y el tiempo empleados $s = v\,t$ o de manera diferencial $ds = s'(t)dt$ de donde:

$$s = \int_0^T s'(t)dt$$

Como el automóvil ya se encargó de integrar por ti... ¿Por qué? Tienes que ***s = 80 Km*** y por el teorema del valor medio:

$$v = \frac{1}{T}\int_0^T s'(t)dt = \frac{80}{1.2} = 66.66\frac{Km}{h}$$

No se buscó complicar las cosas, en realidad es algo que ya sabias, pero sirvió para mostrar que las integrales se ocultan a nuestra vista y ¡que no tienes que resolverlas muchas veces! Sino saber que están ahí y que la naturaleza se encargó de hacerlo por ti. (Lo malo es que no siempre lo hace... por ejemplo en el siguiente caso).

Se define por el SIMA, http://sima.com.mx/t1msn_valle_de_mexico/imeca_frames/frames_zce.htm para el Ozono: un promedio horario máximo de 216 µg/m^3 (0.11 PPM), equivalentes a 100 puntos IMECA**.**

- ¿Qué se puede decir del comportamiento promedio de la concentración de Ozono el día de ayer en la zona centro de la ciudad de México?

O también:

- ¿Cuál fue la temperatura promedio el día de ayer en tu ciudad? ....puedes generar lo datos para hoy y calcularlo mañana ....

Resuelva los siguientes ejercicios:

34. Resuelva: $\int_0^5 (5+3x)^{-1}dx$

35. Aproximar la integral $\int_0^1 e^x dx$ mediante sumas.

36. Calcular el valor medio de la función ***f(x)= e***^{x} en el intervalo ***[0,2].***

37. Aproximar la integral $\int_1^2 e^{x^2} dx$ mediante sumas.

38. Aproximar la integral mediante sumas. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+sen^2 x)dx$

39. Calcular el valor medio de la función ***y = ax***^{2} en el intervalo ***[a,b].***

40. Resuelve $\int_{1/2}^{5/2} \frac{xdx}{1+x^2}$

41. Mediante sumas aproximar la integral $\int_1^3 \sqrt{1+e^{x^2}}\,dx$ **.**

42. Aproximar la integral $\int_0^1 \frac{x^5}{7} - \frac{x^6}{6} dx$ mediante sumas.

43. Calcular el valor medio de la función $f(x) = \frac{e^x}{1+2e^x}$ en el intervalo ***[2,4].***

44. Aproximar la integral $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ mediante sumas.

45. Calcular el valor medio de ***f(x) = tanx*** en el intervalo ***[0,π/4].***

46. Una partícula se mueve en línea recta y tiene la aceleración dada por: $a_{(t)} = 6t+4$, su desplazamiento inicial es: $s_0 = 9$ ***cm***, su velocidad inicial $v_0 = -6$ ***cm/ seg*** determinar su posición a los **5** segundos.

47. Aproximar la integral $\int_1^2 \frac{\ln x dx}{x}$ mediante sumas.

48. Calcular el valor medio de la función $y = x^3$, en el intervalo ***[-1,1].***

49. Resuelve $\int_1^2 xe^{x^2}dx$

50. Calcular el valor medio de ***f(x) = xcosx*** en el intervalo ***[0, π].***

51. Calcular el valor medio de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ en el intervalo ***[2,5].***

Teorema fundamental del Cálculo

Parte 1:

Si *f* es continua en *[a,b]*, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ tiene una derivada en cada punto de *[a,b]* y $F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$.

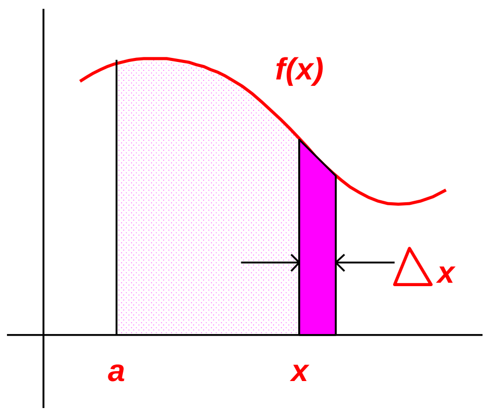
Parte 2:

Si *f* es una función continua en *[a,b]*, y *F(x)* es una antiderivada cualquiera de *f(x)*, entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Antes de que el propio Newton inventara el Cálculo como tal, ya muchos otros pensadores habían desarrollado muchas de las tareas básicas del Cálculo. Desde tiempo de los griegos el problema de cálculo de áreas de figuras de formas irregulares acaparó la atención para los agrimensores y desde luego para los propios matemáticos de su tiempo. Así el concepto de Integral es realmente antiguo, al igual que el de derivada como razón de cambio; por lo que la importancia en la historia respecto del Cálculo radica en la conexión de dos procesos disímbolos en apariencia como son la derivación y la integración y probar que estos son procesos mutuamente inversos.

Al definir la antiderivada y emplear el mismo símbolo para la integral definida ya se orienta la dirección hacia el mismo rumbo, pero falta el elemento formal que permita comprobarlo, a esto se le llama **Teorema Fundamental del Cálculo**, veámoslo en acción:

52. Considera la figura siguiente:



En la figura se observa un área delimitada por la función ***f(x)***, el eje ***x*** y las rectas verticales ***a*** y ***x***, por la definición de la integral esta área depende de donde se coloque la recta ***x***, y por tanto si se llama ***F(x)*** a esa área bajo la curva se tendrá:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Además si se considera un pequeño incremento también se tendrá:

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$$

La diferencia entre estas dos áreas es el pequeño rectángulo:

$$f(x)\Delta x \approx F(x+\Delta x) - F(x) \Rightarrow f(x) \approx \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Y

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \Rightarrow f(x) = F'(x)$$

La última expresión corresponde con el ***Teorema Fundamental del Cálculo***:

a) Exprésalo con tus propias palabras.

Este teorema tiene una segunda parte muy importante, considera:

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + ... + f(x_n^*)\Delta x_n$$

Para alguna $\boldsymbol{x^*}$ en la base de cada rectángulo considerado para aproximar la integral. Pero precisamente de la discusión previa se tiene que:

$$f(x) \approx \frac{F(x+\Delta x) - F(}{\Delta x} \qquad \text{y} \qquad f(x)\Delta x = F(x+\Delta x) - F$$

Por lo que considerando los extremos de cada pequeño intervalo como $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$ sustituyendo resulta:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + ... + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_n) - F(x$$

$$\int_a^b f(x)dx = -F(x_0) + F(x_n) = F(b) - F(a)$$

Como ***F(x)*** es una antiderivada de ***f(x)***... el proceso de integrar de manera definida se convierte en un proceso de antiderivación y evaluación.

b) Enuncia este teorema como lo has entendido.

c) ¿Para que crees que sea útil?

d) ¿Por qué crees que a pesar de que la integral es un límite en la última expresión ya no se indicó éste?

Los procesos del límite son esenciales para poder conformar interpretaciones adecuadas de fenómenos acumulativos o simplemente de variación, por lo que descubrir en un proceso como se dan los incrementos y después llevar al límite esas propuestas, son una fuente inagotable de interpretaciones de la integral y por tanto de su aplicación.

Cuando estás resolviendo una integral definida, de acuerdo al Teorema Fundamental resulta:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Esta sustitución señalada en el Teorema debe de atenderse con cuidado en el proceso de cambios de variables, ya que los límites superior e inferior de la integral son *x = a* y *x = b*. Por eso debes de tener cuidado de que la expresión de la antiderivada encontrada ¡sea una función de ***x***!

Por ejemplo esta integral tiene el siguiente resultado:

$$\int \frac{3x\cos x^2 dx}{(5+senx^2)^2} = -\frac{3}{2(5+senx^2)} + c$$

Si se desea evaluarla desde $x = 0$ hasta $x = \sqrt{\pi}$, se tendrá:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{3x\cos x^2 dx}{(5+senx^2)^2} = -\frac{3}{2(5+senx^2)}\Bigg|_0^{\sqrt{\pi}} = -\frac{3}{2(5)} + \frac{3}{2(5)} = 0$$

Sin embargo en cierto momento del proceso se llegó a esta situación con $u = 5 + senx^2$:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{3x\cos x^2 dx}{(5+senx^2)^2} = -\frac{3}{2u}\Bigg|_0^{\sqrt{\pi}}$$

e) ¿Es esto correcto? ¿Aquí ya se puede evaluar la antiderivada?

En efecto la expresión es incorrecta ya que los límites de evaluación está definidos para x y en la expresión de la derecha ¡la variable es u!,

f) ¿que se debe de hacer para que esto sea correcto?

En lo general si al resolver una ecuación originalmente planteada en x se tiene que cambiar de variable ocurre esto:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\frac{du}{dx}dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

En donde $\boldsymbol{u = g(x)}$ es el cambio de variable efectuado. –A esto se le llama teorema del cambio de variable– De donde verificando la integral ejemplo se tendrá que:

$$u = g(x) = 5 + senx^2 \Rightarrow g(a) = g(0) = 5 + sen(0) = 5, g(b) = g(\sqrt{\pi}) = 5 + sen\pi = 5$$

Por lo que la integral en este caso queda de manera correcta así (para algún valor de $\boldsymbol{n}$):

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{3x\cos x^2 dx}{(5+senx^2)^2} = \frac{3}{2}\int_5^5 u^n du = 0$$

Sin necesidad de resolverla por que sabemos que cuando los límites de la integral son idénticos...

g) ¿Qué ocurre?
h) En ocasiones $g(a)$ o $g(b)$ no existe, por lo que se podrían sustituir por sus limites laterales correspondientes ¿En que situaciones crees que pueda ocurrir esto? Traza un diagrama que ejemplifique tu afirmación.
i) A veces no vale la pena encontrar $g(a)$ y $g(b)$ si vuelves a la variable original y luego evalúas, pero anota esto adecuadamente en tus expresiones.
j) ¿Qué haces si te encuentras situaciones que den lugar a integrales “impropias”, es decir uno o ambos límites crecen indefinidamente escrito así: $\int_a^{\infty} f(x)dx$

Sin problema resuelve así:

$$\lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\left[F(x)\right]_a^M$$

¡Es lo mismo! Nada más cuida los límites laterales necesarios.

k) Como ejemplo, que pasará si tienes:

$$\int_0^5 \frac{dx}{(x-2)^5}$$

¡El infinito anda oculto! Revuélvela.

1.6 Integrales Impropias.

53. ¿Problemas en los límites de la integral? A veces las integrales nos imponen situaciones en las que los límites de integración no están muy claros, observa por ejemplo la siguiente gráfica:

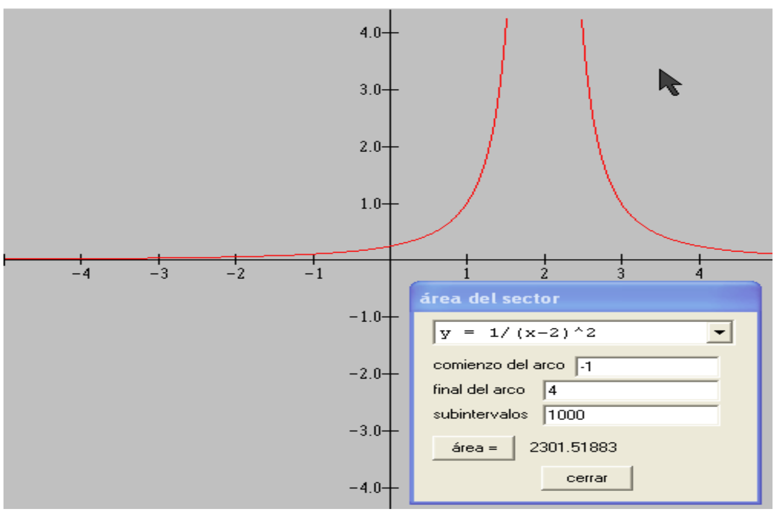


Fig. 1: Área calculada por Winplot equivalente a la integral $\int_{-1}^{4} \frac{dx}{(x-2)^2}$

a) ¿Está calculada el área bajo la curva de manera correcta?

b) ¿Es esa, el área limitada por las rectas $\boldsymbol{x = -1}$, $\boldsymbol{x = 4}$, $\boldsymbol{y = 0}$ y la función?

c) ¿Qué está ocurriendo en $\boldsymbol{x = 2}$?

54. ¿Cuánto vale el área bajo un solo punto? $\int_a^a f(x)dx = 0$

55. Sea la función $f(x) = \frac{x-3}{x-3}$, traza su gráfica y calcula $\int_0^5 \frac{x-3}{x-3}dx$. ¿Qué tiene que ver esta integral con la pregunta anterior?

56. Sea ahora $f(x) = \frac{1}{|x-3|}$, traza su gráfica y calcula $\int_0^5 \frac{1}{|x-3|}dx$. ¿Se puede aplicar el mismo criterio que en el caso previo, es decir se aplica la propiedad $\int_a^a f(x)dx = 0$? ¿Por qué sí o por qué no?

En los siguientes ejercicios calcula y afirma si las integrales planteadas convergen o divergen:

57. Si $f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \le -1 \\ |x| & ; -1 < x < 1 \\ 0 & ; x \ge 1 \end{cases}$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

58. $\int_{-\infty}^{1} e^x dx$

59. Partiendo del hecho que $e^{|x|}$ es una función par: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{|x|}dx$

60. $\int_4^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

61. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x}dx$

Unidad 2: Integral indefinida y métodos de integración.

2.1 Definición de integral indefinida.

Encontrar una antiderivada es un proceso ordenado en el cual lo más importante es verificar que todos los elementos de la estructura estén presentes e identificar cual será la elección más adecuada de ***u***, para eso se te sugiere el siguiente esquema:

a) Detecta si existen simplificaciones algebraicas que generen un integrando más simple.

b) Si existen sumas o restas como expresión central separa el integrando en varias integrales. Recuerda sólo sumas y restas. Si hay alguna constante multiplicando **a todo** el integrando "escríbela fuera de la integral".

c) Analiza la estructura del integrando y busca en los teoremas aquel que más se le parezca. Si tiene cocientes busca cocientes, si tiene radicales buscas radicales, etc.

d) No te dejes apantallar por la aparente complejidad, seleccionado una ***u*** adecuada, pueden ocurrir simplificaciones importantes. Selecciona la parte del integrando que consideras es "***u***, ***n***, ***a***" o cualquier otra componente que la estructura requiera.

e) El paso más delicado es probar que "***du***" está completo, puedes adivinarlo en muchos casos, pero se cuidadoso aquí es donde la mayoría se resbala... Si seleccionaste una expresión ***g(x)*** como ***u***, como normalmente la integral por resolver tiene ***dx***, derívala y tendrás $\frac{du}{dx} = g'(x) \therefore dx = \frac{du}{g'(x)}$.

f) Sustituye la ***g(x)*** elegida por ***u***, y ***dx*** por la expresión obtenida, simplifica lo que resulte necesario y escribe fuera de la integral las constantes que multipliquen a todo el integrando... la integral obtenida en este punto debe ser exactamente igual a la de tu "tabla de integrales" excepto por las constantes que están fuera. Si no es así no elegiste adecuadamente a ***u***, o la "fórmula" no es la adecuada y tendrás que seleccionar nuevamente. A veces el proceso es de prueba y error mientras se adquiere experiencia.

g) Si las estructuras fueron iguales en el paso previo, la integral está resuelta así que simplemente escribe el resultado.

h) Ahora regresa el resultado a las variables originales, sustituyendo las ***u*** que encuentres por la ***g(x)*** seleccionada, simplifica si es necesario y no olvides colocar la “constante de integración”.

Verifica la secuencia con el siguiente ejemplo:

Resolver: $$\int \frac{3x\cos x^2 dx}{(5+senx^2)^2}$$

a) Aparentemente no hay simplificaciones.

b) Hay una constante que multiplica a todo el integrando, se saca: $3\int \frac{x\cos x^2 dx}{(5+senx^2)^2}$

c) Es un cociente pero el cuadrado del denominador invita a rescribir así: $3\int (5+senx^2)^{-2} x\cos x^2 dx$ y aquí se podrá considerar una forma ***u***^{n}... vayamos por ese rumbo.

d) Si ***u***^{n} es la estructura elegida *n*=*-2*, y $u = 5 + senx^2$.

e) Derivando $\frac{du}{dx} = 2x\cos x^2 \therefore dx = \frac{du}{2x\cos x^2}$

f) Sustituyendo todo lo encontrado se tiene:

$$3\int (5+senx^2)^{-2} x\cos x^2 dx = 3\int u^n x\cos x^2 \frac{du}{2x\cos x^2} = \frac{3}{2}\int u^n du$$

, la expresión es idéntica –salvo las constantes–.

g) Así que el resultado es $\frac{3}{2}\frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{3}{2}\frac{u^{-2+1}}{(-2+1)} = \frac{3u^{-1}}{-2} = -\frac{3}{2u}$

h) Finalmente $-\frac{3}{2u} = -\frac{3}{2(5+senx^2)}$ y $\int \frac{3x\cos x^2 dx}{(5+senx^2)^2} = -\frac{3}{2(5+senx^2)} + c$, que es el resultado encontrado con éxito.

i)

2.2 Propiedades de integrales indefinidas y cálculo de integrales indefinidas.

Resuelva los siguientes ejercicios:

62. Resuelva: $\int \frac{x+1}{x^2+4x+3}dx$

63. Resuelva: $\int \frac{2x-3}{(x-1)^2}dx$

64. Resuelva: $\int \frac{x-1}{x^2(x+1)}dx$

65. Resuelva: $\int x3^x dx$

66. Resuelva: $\int \sqrt{1+\cos^2 x}sen 2x \cos 2x dx$

67. Resuelva: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}}$

68. Resuelva: $\int sen \sqrt[3]{x} dx$

69. Resuelva: $\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$

70. Resuelva: $\int \frac{dx}{(senx+\cos x)^2}$

2.3.2 Con cambio de variable.

Resuelva los siguientes ejercicios:

71. Encontrando una sustitución adecuada resolver

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$$

72. Mediante la sustitución adecuada resolver

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx.$$

73. Resolver . $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$

74. Resuelva: $\int x^2\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

75. Resuelva: $\int 2x^3 e^{x^4+1}dx$

76. Resuelva: $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$

77. Resuelva: $\int \frac{\ln xdx}{x^3}$

78. Resuelva: $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$

79. Resuelva: $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-9)^3}}$

80. Resuelva: $\int \frac{arcsenxdx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

81. Resuelva: $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$

82. Resuelva: $\int \frac{dx}{\tan x\cos 2x}$

83. Resuelva: $\int 7x^3 e^{x^4+4}dx$

84. Resuelva: $\int\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$

85. Resuelva: $\int \frac{xdx}{3x^2-1}$

86. Resuelva: $\int \frac{arcsenxdx}{\sqrt{1-x}}$

87. Resuelva: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

88. Resuelva: $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx$

89. Resuelva: $\int \frac{x^2 \arctan x dx}{1+x^2}$

90. Resuelva: $\int \frac{x^9 dx}{(x^4-1)^2}$

91. Resuelva: $\int \frac{dx}{1-sen^4 x}$

2.3.3 Trigonométricas.

Una integral se denomina trigonométrica cuando el integrando de la misma está compuesto de funciones trigonométricas y constantes. Para su resolución –desde luego que son válidos los teoremas de integración–, pero sobre todo se deben tener siempre presentes los i. a vi.

i. T5.11 *(senu)'=cosu u'*

ii. T5.12 *(cosu)'= –senu u'*

iii. T5.13 *(tanu)'=* $sec^2u\ u'$

iv. T5.14 *(ctgu)'=* $-csc^2u\ u'$

v. T5.15 *(secu)'= secu tanu u'*

vi. T5.16 *(cscu)'= -cscu ctgu u'*

En lo general después de aplicar las diferentes sugerencias dadas en la teoría, pero muy en especial:

- Usar una identidad trigonométrica y simplificar, es útil cuando se presentan funciones trigonométricas.
- Eliminar una raíz cuadrada, se presenta normalmente después de completar un cuadrado o una sustitución trigonométrica.
- Reducir una fracción impropia.
- Separar los elementos del numerador de una fracción entre el denominador de la fracción.

- Multiplicar por una forma unitaria ***g(x)/g(x)*** que al multiplicar por el integrando ***f(x)*** permita modificar adecuadamente ***[f(x)g(x)]/g(x)***.

- Probar sustituir ***f(x)*** por ***1/(1/f(x))***.

Es necesario tener siempre a la mano una tabla de "identidades trigonométricas y sustituyendo adecuadamente, llegarás a las "fórmulas básicas". En especial cuando además de los términos trigonométricos existen factores polinómicos o exponenciales, lo más seguro es que la integral propuesta deba ser resuelta por partes.

Algunas de las identidades trigonométricas que te pueden ser útiles son:

Tabla: Identidades trigonométricas útiles		
Identidades fundamentales	***Del teorema de pitágoras***	***Translaciones***
1. $cscx=1/senx$	7. $sen^2x+cos^2x=1$	10. $sen(-x)=-senx$
2 . $secx=1/cosx$	8. $1+tan^2x=sec^2x$	11. $cos(-x)=cosx$
3. $tanx=senx/cosx$	9 . $1+ctg^2x=csc^2x$	12. $tan(-x)=-tan(x)$
4. $ctgx=cosx/senx$	***Sumas y restas de ángulos***	13. $sen\ (\pi/2-x)=cosx$
5. $tanx=1/ctgx$	18. $sen(x+y)=senxcosy+cosxseny$	14. $cos(\pi/2-x)=senx$ 15. $tan(\pi/2-x)=ctgx$
6. $ctgx=1/tanx$	19. $sen(x-y)=senxcosy-cosxseny$	***Múltiplos de ángulos***
Ley de senos	20. $cos(x+y)=cosxcosy-senxseny$	24. $sen2x=2senxcosx$
16. $senA/a=senB/b=senC/c$	21. $cos(x-y)=cosxcosy+senxseny$	25. $cos2x=cos^2x-sen^2x$ 26. $cos2x=2cos^2x-1$ 27. $cos2x=1-2sen^2x$
Ley del coseno	22. $tan(x+y)=(tanx+tany)/(1-$	28. $tan2x=stanx/(1-tan^2x)$

	tanxtany)	
17. $c^2=a^2+b^2-2abcosC$	23. *tan(x–y)=(tanx–tany)/(1+tanxtany)*	29. $sen^2x=(1-cos2x)/2$ 30. $cos^2x=(1+cos2x)/2$

Las integrales trigonométricas tienen en su integrando funciones trascendentes de este tipo y para su resolución se deben considerar sustituciones basadas en identidades trigonométricas. Las identidades o funciones que se emplean de manera más común son:

- Funciones recíprocas como ***cosx = 1/secx.***
- Funciones que de acuerdo al teorema de Pitágoras suman una constante, como ***$sen^2x+cos^2x = 1$***.
- Identidades del ángulo doble y otros múltiplos, como ***$sen^2(x/2) = (1-cosx)/2$.***
- Identidades de adiciones de argumentos como: ***senu cosv = 1/2 (sen(u+v)+sen(u-v))***
- Funciones que están relacionadas mediante derivadas como ***(senx)' = cosx.***

Cada integral exige de tu creatividad por ejemplo:

- $\int 5sen^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx$ emplea el ángulo doble y tienes las sustituciones que te permiten resolverla... ¿cuál es su solución?
- $\int \tan^3 7xdx$ como ***$tan^27x = sec^27x-1$*** queda una tangente libre, realiza los productos y tendrás dos integrales de solución directa. ¿cuál es la solución?
- $\int \tan^3 5x\sec^4 5xdx$, como hay una potencia impar de la tangente, elige los términos ***tan5xsec5xdx*** como diferencial, y luego convierte todo a términos de ***sec5x***, tendrás dos integrales muy simples de la forma ***u^n***.

Resuelva los siguientes ejercicios:

92. Resolver $\int sen^3 2x \cos^2 2x dx$.

93. Resolver $\int \frac{senxdx}{(1-\cos x)^2}$.

94. Resolver $\int ctg^4 x dx$.

95. Resolver $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{senx \cos x} dx$.

96. Resolver $\int \sqrt{1+\csc x} dx$.

<u>2.3.4 Por partes.</u>

Resolver una integral no siempre es posible empleando los teoremas básicos o el teorema de sustitución $\int f'(g(x))g'(x)dx = \int f'(u)du = F(u)+c = F(g(x))+c$. Cuando esto ocurre se dispone de diferentes técnicas para resolver integrales cuya aplicación depende específicamente de la estructura de la integral por resolver:

Del teorema ***(uv)' = vu' + uv'*** se puede obtener ***uv' = (uv)' + vu'*** que se puede escribir ***udv = d(uv) + vdu*** e integrando en ambos extremos de la igualdad se obtiene:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Que se denomina integración por partes. Este tipo de integrales se identifica cuando no es posible localizar una sustitución adecuada ***u*** para el cual ***du*** corresponda con la estructura supuesta. Bajo estas condiciones es necesario identificar entre los diferentes factores que componen el integrando un conjunto que se identificará como ***u***, mientras el resto de los factores incluyendo al diferencial se denomina como ***dv***. Con las partes identificadas se resuelve $\int dv$ que en lo general deberá ser una estructura mucho más simple que la de la integral original. De igual manera, con ***u*** seleccionada se calcula ***du*** y se estructura el término derecho de la igualdad del teorema. Ahora la integral $\int v du$ debe ser una integral más simple que la integral original, desde luego que puede ocurrir que esta integral también sea por partes. Una integral por partes se denomina así porque la metodología empleada "parte a la integral en dos nuevas integrales" que deben de cubrir ciertas características.

Si se recuerda el teorema de derivación de un producto es: ***(uv)' = uv' + vu'***, de donde al multiplicar todo por ***dx*** se obtiene ***d(uv) = udv + vdu***. Integrando en ambos lados de la igualdad resulta:

$$uv = \int udv + \int vdu \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu$$

Que es el teorema de la **integración por partes**, veamos que dice:

- Cuando derivas el producto de dos funciones, debido a la manipulación algebraica que algún problema requiera, puedes perder alguno de los dos términos de la suma que generó su derivada, ¿de todos modos se puede recuperar el producto original?
- El teorema dice que sí y que aún más ¡te permite resolver la integral incompleta si eliges adecuadamente las partes "***u***" y "***dv***"!.

Básicamente se trabaja así:

a) Supongamos que debes de resolver una integral y al intentar los teoremas básicos no se pudo resolver. Pero, si la observas con cuidado está compuesta de productos, digamos... $\int f(x)g(x)h(x)dx$, bueno se ve medio feo pero lo que dice es que elijas simplemente algunos factores dentro de la integral, incluso algunos podrían ser 1.

b) Deberás elegir una combinación adecuada de factores a los cuales llamarás "***u***" y otra que incluya a ***dx***, que llamarás "***dv***". En este caso se tienen 4 posibilidades que podrían ser ***{u = f(x), dv = g(x)h(x)dx}, {u = f(x)g(x), dv = h(x)dx}, {u = f(x)g(x)h(x), dv = dx}***.

c) Se elige la que se vea con más posibilidades; si ocurre lo siguiente:

- Normalmente $\int dv = v$ debe de ser fácilmente integrable.
- Al calcular ***du*** se estructura la nueva integral $\int vdu$, y ésta debe ser más simple que la integral original y preferentemente poderse resolver de forma inmediata. – Se dice que debe de ser más simple porque posiblemente también se deba de resolver "por partes" pero se ve que es más sencilla, por ejemplo han disminuido los exponentes o desaparecido algunas expresiones que la hacían ver complicada.

d) Se resuelve $\int dv = v$. En caso de que esta integral se complique más que la original, la elección fue incorrecta y debes intentar con otra selección de las posibles.

e) Se estructura $\int vdu$ y se resuelve.

f) Finalmente se da estructura a la solución con $uv - \int vdu$.

Por ejemplo considera $\int \ln xdx$:

a) No existe antiderivada directa que permita resolverla y se observa que está compuesta por factores que son 2: ***{ lnx , dx }***.

b) Las combinaciones son únicas ***u = lnx, dv = dx***

c) Al ser única se calcula ***du = dx/x***.

d) Resuelve la $\int dv = v$ luego ***v = x***.

e) Estructura $\int vdu = \int x\frac{dx}{x} = \int dx = x$.

f) Sí llegaste a la solución que es: ***xlnx – x+c***.

- ¿estás de acuerdo?

Ahora considera otro ejemplo $\int x^2 e^{3x} dx$:

a) No existe antiderivada directa que permita resolverla y se observa que está compuesta por factores que son 4: ***{ x, x, e^{3x}, dx }***.

b) Las combinaciones podrán ser: ¿***{ u , dv } =*** ...?

c) Cual consideras las más prudente para su elección ...

d) Resuelve la $\int dv = v$ elegida, debe de ser más simple que la original... ¿qué te resultó?

e) Estructura $\int v du$ y resuelve, lo más probable para este ejercicio es que esta integral también es por partes, pero es más simple –de hecho parece que es algo así $\int x e^{3x} dx$ y sí es más simple, aunque nuevamente resultó ser por partes, así que tendrás que resolverla por este mismo método. Deja pendiente tu resolución previa y reinicia el proceso con esta nueva integral... al concluirla vuelve a este punto con ese resultado intermedio.

f) Sí llegaste a la solución que es: ...

En ciertos casos la integración por partes se vuelve "***cíclica***" y en lo general indica una mala selección de ***u*** y ***dv*** en integración por partes sucesiva. Se dirá que es cíclica si después de diferentes pasos ¡vuelves a llegar a la expresión original!, o sea que **NO** resolviste nada y tendrás que volver a intentarlo con otras selecciones.

Pero, en otras situaciones se llega a una integración "***aparentemente cíclica***" y no te preocupes porque en este caso la solución ya está ahí. Esto ocurre si después de uno o varios pasos resulta que tu integral original vuelve a parecer pero con un coeficiente ***k*** diferente de 1, esto es:

$$\int u dv = g(x) - k\int u dv \Rightarrow (1+k)\int u dv = g(x) \therefore \int u dv = \frac{g(x)}{1+k}$$

a) ¿Por qué ***k*** debe de ser diferente de cero?

b) Considera el siguiente ejercicio y observa que es "*aparentemente cíclica*" ya que después de aplicar la técnica de integración por partes regresas a la integral original, pero su coeficiente **NO ES UNO**:

$$\int e^{3x} sen(2x) dx$$

c) Un caso adicional será $\int \sec^3 x dx$ que por ahora esperará.

Resuelva los siguientes ejercicios:

97. Resuelva: $\int t\ln(t+1)dt$

98. Resuelva: $\int \frac{\ln(2x)dx}{x^2}$

99. Resuelva: $\int \frac{xe^{2x}dx}{(2x+1)^2}$

100. Resuelva: $\int xsen(2x)dx$

101. Resuelva: $\int \frac{\ln(\tan x)dx}{senx\cos x}$

102. Resuelva: $\int \frac{dx}{\cos x + sen^3 x}$

103. Resuelva: $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

104. Resuelva: $\int e^{\sqrt{x}}dx$

105. Resuelva: $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$

106. Resuelva como ciclicas

$$\int e^{3x}sen(2x)dx \qquad \frac{1}{3}\int e^{-4x}\cos(3x)dx$$

107. Resolver $\int x\tan^{-1}xdx$.

108. Resolver $\int x\tan^2 xdx$.

109. Resolver $\int x^2e^{-x}dx$.

110. Resolver $\int \ln(x^2+1)dx$.

111. Resolver $\int e^{ax}\cos nxdx$.

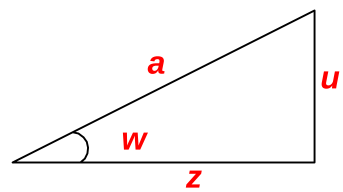
2.3.5 Por sustitución trigonométrica.

En muchas de las tablas de integración se puede encontrar el teorema:

$$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}du = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2} - arcsen\frac{u}{a} + c$$

¿Cómo se pudo encontrar esa antiderivada?

El razonamiento que se sigue en expresiones que contienen radicales y sumas de cuadrados es comúnmente fundamentado en el teorema de Pitágoras, así que para observar esa relación se traza un triangulo rectángulo y se ubican las componentes, así en este caso haciendo $z = \sqrt{a^2-u^2}$ resulta:



- En la figura se puede ver que se satisface el teorema de Pitágoras con esta selección y que a su vez coincide con el radical en el integrando, luego ***senw = u/a***. ¿Estás de acuerdo?
- De donde ***u = asenw*** y ***du = acoswdw***. ¿cierto?

Sustituyendo en la integral por resolver se tiene una integral trigonométrica:

$$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}du = \int \frac{z}{u^2}du = \int \frac{a\cos w}{(asenw)^2}a\cos wdw = \int \frac{\cos^2 w}{sen^2 w}dw = \int \cot^2 wdw = \int (\csc^2 w - 1)dw$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}du = -\cot w - w$$

Pero observando el triángulo previamente trazado se observa que las razones trigonométricas siguientes se cumplen: ***tanw = u/z*** luego ***cotw = z/u*** según la figura y por otro lado desde ***senw = u/a*** se tiene que al despejar ***w = arcsen(u/a)*** o bien ***w = sen***$^{-1}$ ***(u/a)***, así que sustituyendo:

$$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}du = -\frac{z}{u} - arcsen\frac{u}{a} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - arcsen\frac{u}{a} + c$$

Que es lo que se quería probar.

a) Si encontraras términos de $a^2 + u^2$, ¿cómo será tu triángulo?

b) Si localizas expresiones con $u^2 - a^2$, ¿qué sustitución a variable trigonométrica sugieres?

c) En una tabla de integrales se localizó el siguiente teorema:

$$\int \frac{u^2du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + c$$

Demuestra que es verdadero.

d) Si se encuentran expresiones con $a^2 - b^2u^2$ ¿qué sustitución trigonométrica sugieres?

Resuelva los siguientes ejercicios:

112. Resolver mediante sustitución trigonométrica $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$.

113. Resuelva: $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$

114. Resuelva: $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$

115. Resuelva: $\int x^2\sqrt{4-9x^2}dx$

116. Resolver mediante sustitución trigonométrica $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

2.3.6 Por fracciones parciales.

Cuando se encuentra un integrando de la forma ***p(x)/q(x)*** donde ambos ***p*** y ***q*** son polinomios y el grado de ***p*** es menor que el de ***q*** (si no fuera así haz la división previamente), estás ante un posible caso de fracciones parciales. Las fracciones parciales son aquellas que debieron generar a ***p(x)/q(x)*** al sumarse y tienen la cualidad de que sus denominadores o son lineales o cuadrático irreductibles. Así generalmente las fracciones simples resultantes se integran más fácilmente usando las siguientes formulas:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c; n \neq -1$$, n racional.

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + c$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + c$$

Para encontrar las fracciones parciales revisa con cuidado lo siguiente:

Cuando realizas una suma entre fracciones, la fracción resultante posee en su denominador el "rastro" de las fracciones que intervinieron, ya que corresponde con el mcm –mínimo común múltiplo– de los denominadores de las fracciones participantes.

Así por ejemplo si se desea recobrar que coeficientes tenían originalmente estas fracciones para generar el resultado se tendrá:

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5} = \frac{101}{3 \cdot 4 \cdot 5},$$

–en donde no se han desarrollado las multiplicaciones a propósito–, luego resolviendo nuevamente se encuentra que a(4)5+b(3)5+c(3)4 = 101 que como ecuación lineal tiene infinitas soluciones, entonces conocer los valores "exactos" que tenía originalmente no se podrán obtener, ya que cómo se puede asegurar que eran *a =0*,*b = 0* y *c = 101/12*, o bien *a = 1*, *b = 3* y *c = 3*, entre otras.

Sin embargo si te pregunto cual es la cifra representante de las centésimas en el número 0.123 si podrás responder que "2" y esta también es una suma de fracciones ¿cierto? ...

En efecto:

$$\frac{a}{10} + \frac{b}{100} + \frac{c}{1000} = \frac{a(100) + b(10) + c}{1000} = 0.123$$

¿Por qué si la igualdad es esencialmente la misma ahora sí se puede responder?

Claro porque en realidad 0.123 es un polinomio de la forma 1/10+2/100+3/1000 = [1(100)+2(10)+3]/1000 y se sigue directo cuales son los valores de a, b y c. Además sabes que todas las fracciones son "propias", –su numerador nunca es mayor que el denominador–, que los valores de ***a***, ***b*** y ***c*** no son mayores que nueve y son enteros positivos, pero lo más importante es que el valor que le des a ***a*** no afecta ni a ***b*** ni a ***c***, etc.

Así, en los polinomios, si tienes ax^2+bx+c, y se te pregunta cuales son los valores de las variables para que el polinomio resultante sea x^2+2x+3, no tiene ningún grado de dificultad porque los coeficientes de un término no afectan a los otros... ¿cierto? Esta propiedad conjuntamente con la cualidad de las fracciones propias y los factores primos son la esencia de la recuperación de los coeficientes de las fracciones que intervienen en una suma, si solamente se conoce su resultado.

- ¿Qué es una fracción propia?
- ¿Qué son los factores primos?

Iniciemos nuevamente nuestro cuestionamiento: ¿cuáles serán los valores de los coeficientes para que la siguiente igualdad sea verdadera:

$$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x-1}=\frac{x^2+2x+3}{x(x+1)(x-1)}$$

- Resuelve nuevamente la suma planteada ¿qué resulta?
- Desde luego los denominadores son idénticos ¿qué puedes decir de los numeradores? ¿Resultó un polinomio cuadrático cuyos coeficientes depende de a, b y c?
- ¿Cómo deben de ser los coeficientes de ambos polinomios? ¿Esas 3 igualdades que implican?
- Resuelve el sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que te resultó. ¿Qué obtuviste?
- ¿Lo que encontraste quiere decir esto?

$$\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x}+\frac{3}{x-1}=\frac{x^2+2x+3}{x(x+1)(x-1)}$$

- Entonces si se te hubiera pedido resolver:

$$\int \frac{x^2+2x+3}{x(x+1)(x-1)}dx$$

¿Será lo mismo que resuelvas $\int\left[\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x}+\frac{3}{x-1}\right]dx$?

¡En eso consiste el método de fracciones parciales!

¿Cuáles serán los valores de los coeficientes para que la siguiente igualdad sea verdadera?

$$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x-1}=\frac{x^2+2x+3}{x(x+1)(x-1)}$$

Al seguir el razonamiento y realizar la suma de fracciones se llegó a la siguiente igualdad: $\boldsymbol{ax(x-1)+b(x+1)(x-1)+cx(x+1) = x^2+2x+3}$; después realizaste los productos y la igualación de coeficientes te llevó a un sistema lineal que satisfactoriamente resolviste para encontrar $a = 1$, $b = 3$ y $c = 3$. ¿Estamos de acuerdo en todo?

Pero ¡un momento!; lo que se tiene es una igualdad entre polinomios y los polinomios son funciones ¿cierto?, entonces si son iguales los polinomios sus gráficas también lo son iguales y si los evaluamos en algún punto en particular ¿deben de valer lo mismo?

- Observa con atención la igualdad toma un valor de $\boldsymbol{x}$ y evalúa –desde luego que el valor que elijas es indistinto–, obtendrás sin duda una ecuación con tres incógnitas, simplemente evalúa 3 veces y te ahorras todas las multiplicaciones de polinomios.

- Pero existen valores de x, que simplifican extremadamente el trabajo... en efecto para el ejemplo mostrado son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$. ¿Por qué?

- Evalúa $\boldsymbol{ax(x-1)+b(x+1)(x-1)+cx(x+1) = x^2+2x+3}$ en $x = 0$, luego $b = -3$; haz lo mismo con $x = 1$ y con $x = -1$, obtendrás directamente $c = 3$ y $a = 1$.

- ¿Qué puedes concluir de este procedimiento?

- No en todos los casos se pueden obtener valores de $\boldsymbol{x}$ que den solución directa a algún coeficiente, pero por este método encuentra los más posibles y luego evalúa en otros valores y sustituye los coeficientes que ya conozcas ¡resultan excelentes simplificaciones!

La localización de las fracciones parciales que pueden sustituir adecuadamente al argumento de una integral planteada depende prácticamente de una adecuada factorización del denominador de la expresión.

En lo general, únicamente existen 4 casos básicos que se pueden presentar y para los cuales se sugiere actuar de la siguiente forma:

1. Factorización que genera "factores lineales únicos":

   Como los factores son de la forma ***(x – r)***, se plantean tantas fracciones como factores diferentes haya.

   Por ejemplo si la factorización arrojó *(x-4)(x+2)(x-1)* las fracciones propuestas serán:

$$\frac{a}{x-4}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x-1}$$

2. Factores que "factores lineales repetidos":

   Esto quiere decir que se encontró un factor repetido de la forma $(x - r)^n$, se plantean tantas fracciones como sea el valor de ***n***, pero con potencias crecientes hasta el valor de ***n***. Por ejemplo si se encontró $(2x-1)(x+3)^3$, las fracciones propuestas serán:

$$\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{x+3}+\frac{c}{(x+3)^2}+\frac{d}{(x+3)^3}$$

3. Factores "cuadráticos irreductibles únicos":

   Para este caso, los factores son de la forma $a_1x2+b_1x+c_1$ irreductibles, es decir que no tienen raíces reales. Para esto se plantea una fracción para cada factor y en particular sus **numeradores** son de la forma ***ax +b***, donde ***a*** y ***b*** son las incógnitas por localizar. Por ejemplo si se encuentran los factores $(x+5)(x^2+4)(x^2+x+1)$, las fracciones propuestas serán:

$$\frac{a}{x+5}+\frac{bx+c}{x^2+4}+\frac{dx+e}{x^2+x+1}$$

4. Si los factores cuadráticos son repetidos, al igual que con los factores lineales múltiples, se plantean tantas fracciones como repetición del factor haya, pero con potencias crecientes hasta el valor de ***n***. Por ejemplo si se encuentra el factor repetido $(x^2+1)^4$ se proponen las siguientes fracciones:

$$\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{cx+d}{(x^2+1)^2}+\frac{ex+f}{(x^2+1)^3}+\frac{gx+h}{(x^2+1)^4}$$

Desde luego que todos los casos pueden coexistir simultáneamente.

Tal y como se comentó previamente, el método de fracciones parciales se aplica en integrales de la forma $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ en las que ***p(x)*** y ***q(x)*** son polinomios y en particular el grado de *p(x)* es menor que el grado de *q(x)*; si éste no es el caso se tendrá que realizar previamente la división de polinomios con lo que se obtendrá $\int \left[c(x)+\frac{r(x)}{q(x)}\right]dx$, en donde *c(x)* es el cociente de la división y *r(x)* su residuo. Una vez que la fracción se ha llevado a esta forma se está seguro que ***r(x)/q(x)*** es una fracción propia, a la cual se puede aplicar la descomposición estudiada.

Resuelva los siguientes ejercicios:

117. Resolver $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$.

118. Resolver $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

119. Resolver $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$.

120. Resolver $\int \frac{xdx}{x^3-1}$.

121. Resolver $\int \frac{x^2dx}{1-x^4}$.

122. Resolver $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$.

123. Resolver $\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$.

2.3.6 Otros ejercicios

124. Resuelva: $\int x(x^2-1)^2 dx$

125. Resuelva: $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}$

126. Resuelva: $\int \cos(\ln x) dx$

127. Resuelva: $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$

128. Resuelva: $\int x^2 \sqrt{4-9x^2} dx$

129. Resuelva: $\int \frac{\arctan x dx}{x^2(1+x^2)}$

130. Resuelva: $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^2} dx$

131. Resuelva: $\int \frac{\sqrt{sen^3 2x}}{sen^5 x} dx$

132. Resolver mediante tablas $\int \frac{r^2 dr}{\sqrt{4-r^2}}$.

133. Resolver mediante tablas $\int \frac{dt}{5+4sen2t}$.

134. Resolver mediante tablas $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx$.

135. Resolver mediante tablas $\int sen2xcox3xdx$.

136. Resolver mediante tablas $\int p^2 \sqrt{25-p^2} dp$.

Unidad 3: Aplicaciones de la integral.

3.1 Áreas.

3.1.1 Área bajo la gráfica de una función.

Definición: Sea una función continua tal que ***f(x)≥0*** en ***[a,b],*** el área bajo la curva es:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Si en el intervalo ***[c,d], f(x)≤0***, el área entre el eje ***x*** y la curva será :

$$A = -\int_c^d f(x)dx$$

Integral no es lo mismo que área, ya que el concepto de integral es realmente un concepto mucho más amplio y que se puede aplicar a infinidad de situaciones novedosas. Por otro lado, realizando las correcciones necesarias respecto de los valores negativos que pueda tomar una función en un intervalo la integral calcula perfectamente el área entre el eje x y una curva dada.

Pero el concepto de área se puede ampliar a espacios delimitados entre diversas curvas en el plano. Calcular el área bajo la curva o más bien entre la curva y el eje, es el problema que motivó el desarrollo del concepto de integral definida.

Al calcular el área se debe de tener siempre presente dos cosas importantes:

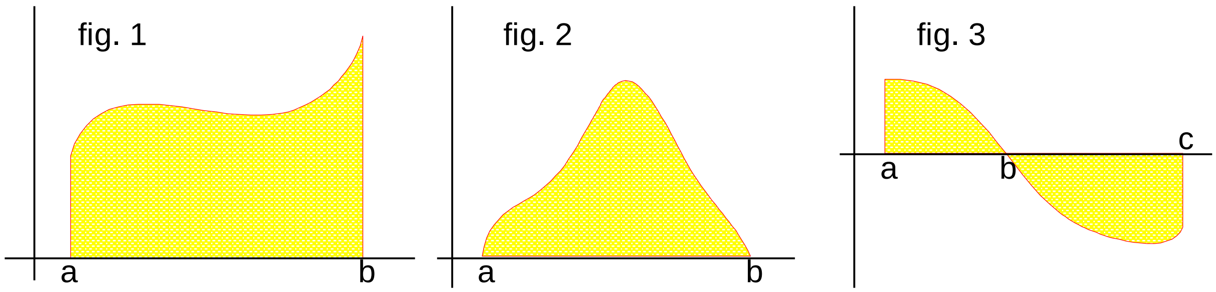
a) Que las curvas delimitantes del área realmente sean funciones de la variable de integración y que por otro lado;

b) Que integral y área no son lo mismo, por lo que se debe de recordar que una integral realmente es un "área con signo".

Con esto como motivación se puede considerar que las superficies planas que delimitan un área conjuntamente con un eje se pueden presentar de tres formas posibles:

- La función propiamente dicha y dos rectas.
- La función que intercepta directamente al eje.
- La función que cruza el eje.

137. En las figuras siguientes identifica cada caso:



Con relación a su forma de cálculo la figura 1 y 2 son idénticas, ya que su área se calcula mediante:.

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

a) ¿Cómo se tendría que calcular el área si ***f(x)<0*** en ***(a,b)***?

b) El área delimitada en la figura 3, posee un sector en el que la integral genera un signo negativo en su resultado: ¿En qué intervalo ocurre eso?

c) ¿Cómo se tendrá que calcular el área en la figura 3?

d) ¿Cómo se replantearían los tres casos si en lugar de calcular el área "*bajo la curva*" se solicitara el área "sobre la curva"? Se llama *área sobre la curva* a la delimitada por la función ***f(y)***, el eje ***y*** y dos rectas horizontales, ***y = c*** y ***y = d***. Dibuja las figuras correspondientes.

3.1.2 Área entre las gráficas de funciones.

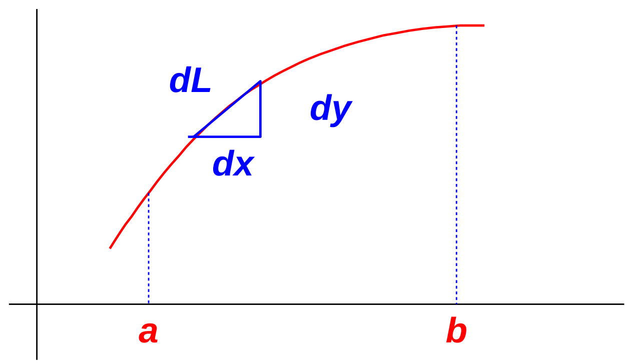
Sea el intervalo ***[a,b]*** para el cual ***f(x)*** y ***g(x)*** son continuas y ***f(x)≥g(x)***, sea ***K*** la región limitada por las rectas ***x = a***, ***x = b***, ***f(x)*** y ***g(x)***. Luego el área de ***K*** es:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

3.2 Longitud de curvas.

La longitud de una curva plana se puede aproximar al sumar pequeños segmentos de recta que se ajusten a la curva, esta aproximación será más ajustada entre más segmentos sean y a la vez sean lo más pequeño posible.

Definición: Si la primera derivada de una función es continua en ***[a,b]*** se dice que es suave y su gráfica es una *curva suave*.



Cuando la curva es suave, la longitud de cada pequeño segmentos de recta se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras y $(dL)^2=(dx)^2+(dy)^2$, de tal forma que sumando todos los diferenciales resulta:

Definición: Si *f* es suave en ***[a,b]***, la longitud de la curva de ***f(x)*** desde *a* hasta ***b*** es:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

La integral como concepto nace alrededor del cálculo numérico, por lo que muchas de las integrales que se nos presentan en la vida cotidiana ni tan siquiera son planteadas analíticamente; sin embargo, eso no las hace inútiles; ¡por el contrario! El potencial analítico de la integral se logra ante la simplicidad del concepto ¡no deja de ser una suma!!!!!

Pero ahora con las computadoras, esas sumas las podemos hacer de manera muy eficiente.

Una curva por sí sola no tiene área, tiene longitud y ésta también se puede calcular como una integral, con el presente razonamiento:

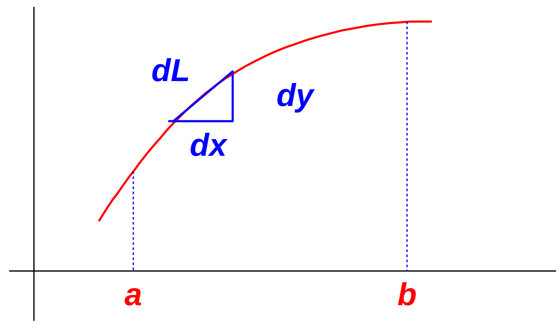
a) Traza una curva sobre el papel, por simplicidad debes inicialmente considerar una curva que corresponda a una función de ***x***.

b) Delimita mediante rectas verticales el intervalo en el que te interesa conocer la "longitud de la curva" o "longitud del arco" (como también es llamada).

c) Dibuja una secante entre dos puntos cercanos que estén dentro del intervalo de interés.

d) Esa secante ente los dos puntos de intersección: ¿Es una aproximación a la longitud del arco? ¿Qué tienes que hacer para que la aproximación mejore?

e) ¡Muy bien! La situación límite que acabas de plantear te lleva al siguiente diagrama aproximado ¿estás de acuerdo?



f) Luego ***dL*** es la hipotenusa del triángulo infinitesimal ¿a que es igual ***dL*** en términos de ***dx*** y ***dy***?

En efecto del teorema de Pitágoras se tiene que $(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ entonces dividiendo todo entre:

$$dx \Rightarrow \left(\frac{dL}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \therefore dL = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Finalmente la suma de todos esos diferenciales es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Sustituyendo las expresiones adecuadas en la estructura que se acaba de obtener y resolviendo la integral construida podrás obtener la longitud del arco deseado.

a) Si el arco bajo análisis no es una función de ***x*** sino de ***y*** ¿cómo resuelves ese caso?

b) ¿Afecta a la expresión obtenida el hecho de que la curva corte a los ejes?

c) ¿Puede ser que la integral resultante sea negativa? ¿Por qué?

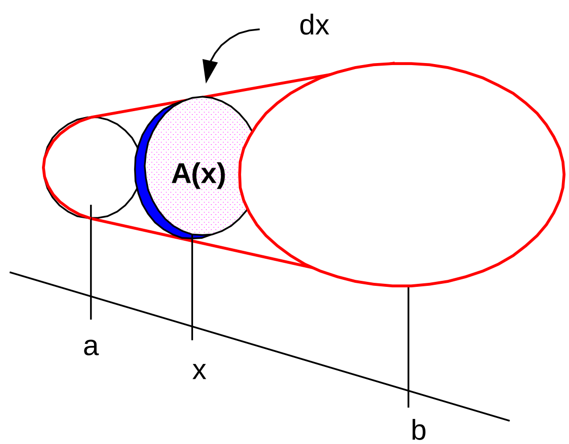
d) ¿En qué situaciones o para qué crees que se pueda aplicar el cálculo de la longitud del arco?

3.3 Cálculo de volúmenes de sólidos de sólidos de revolución.

Definición: El volumen de un sólido con área transversal conocida e integrable ***A(x)*** desde ***x = a*** hasta ***x = b***, es:

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Comúnmente a esta integración se le denomina "método de las rebanadas".

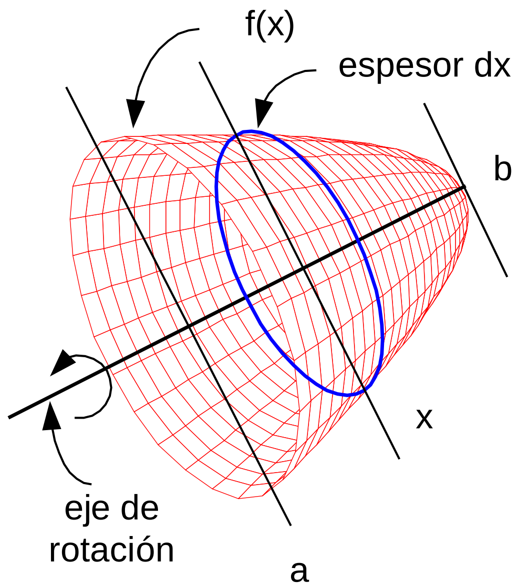


Definición informal: Si una gráfica de una función continua ***f(x)*** en el intervalo ***[a,b]*** se hace girar sobre el eje ***x***, a la superficie bajo la curva se le denomina "área generatriz", a la superficie delimitada por ***f(x)*** al girar se le llama "superficie de revolución" y al volumen delimitado por la superficie de revolución se le llama "sólido de revolución". La rotación no necesariamente se debe de efectuar sobre el eje **x**, pero sin pérdida de generalidad el eje siempre se puede ubicar en esa posición.

Volumen de un sólido de revolución (método de los discos):

El volumen de un sólido generado alrededor del eje x la región bajo la curva de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ en que $f(x)$ es continua es:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



El “disco” señalado en azul en la figura tiene radio ***f(x)*** de ahí empleando el área del círculo se obtiene la expresión previa.

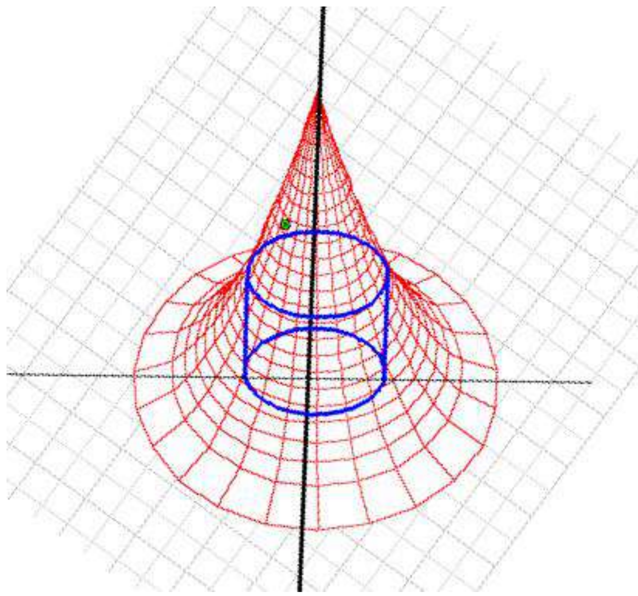
Si el volumen se genera por una superficie entre curvas, se generaliza el método de los discos y se le denomina método de las arandelas , en este caso si ***f(x)≥g(x)*** en ***[a,b]*** limitan la superficie, se tiene:

$$V = \pi\int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx$$

Volumen de un sólido de revolución (método de lo tubos o casquillos cilíndricos):

El sólido de revolución generado por una función ***f(x)*** que gira alrededor del eje ***y***, limitado por las rectas ***x = a*** y ***x = b***, el eje ***x*** y la gráfica de ***f(x)***, tiene un volumen:

$$V = \int_a^b 2\pi(radio \quad del \quad tubo)(altura)dx = 2\pi\int_a^b xf(x)dx.$$

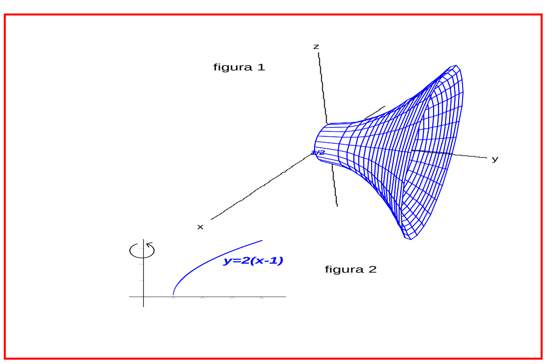


En la figura se observa –en azul– un tubo típico de radio ***x***, espesor ***dx*** y altura ***f(x)***, que puede ser convertido en una lámina rectangular de superficie ***2πxf(x)*** y espesor ***dx***.

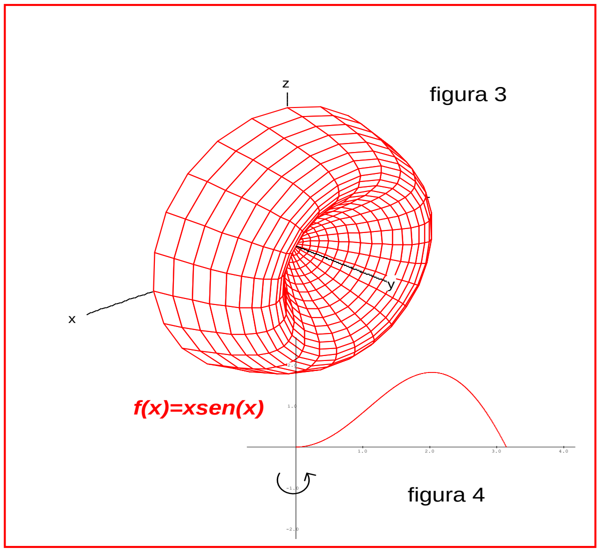
Superficies y sólidos de Revolución

En los cuerpos físicos ocurren muchos fenómenos asociados a su geometría, dentro de esos fenómenos se presenta la ocurrencia de la masa, el peso y por tanto los efectos de la atracción gravitatoria, observemos ahora dos conceptos físicos necesarios para el estudio de cantidades físicas como las mencionadas.

Una ***superficie de revolución*** se genera cuando una curva se hace girar alrededor de un eje. En las dos figuras que se anexan se observa la curva que se ha hecho girar y las superficie que se genera, en este caso girando sobre el eje ***y***. Si esa curva delimita un área bajo o sobre ella –dependiendo de cómo se haga girar– entonces al girar esa superficie se obtiene un ***sólido o volumen de revolución***.



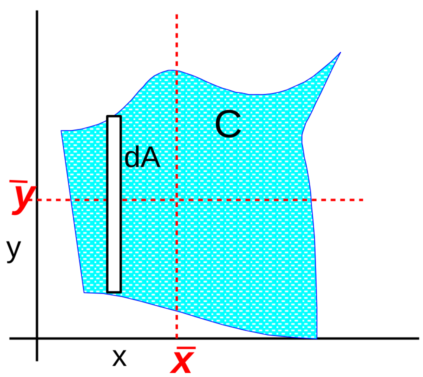
En las figuras 1 y 3 se observan las superficies de revolución generadas, mientras que en las 2 y 4 que acompañan a las superficies, se ven las curvas y el área considerada para la generación de los sólidos de revolución.



Una esfera, una copa, una dona, algunas lámparas, muchas piezas mecánicas hechas en “torno”, entre otros, son sólidos de revolución.

<u>3.4 Cálculo de centroides.</u>

Cuando una placa sólida es de espesor constante y homogénea, su masa es directamente proporcional a su área, en donde la proporcionalidad depende del espesor de la placa y la densidad del material.



Definición: Las coordenadas del centro de masa de una placa plana delimitada por la superficie *A*, se definen como:

$$x = \frac{\int_A y_m dA}{\int_A dA}; y = \frac{\int_A x_m dA}{\int_A dA}$$

En donde la ***A*** bajo las integrales implica que éstas se realizan para toda la superficie, y_m y x_m corresponde con el punto medio del elemento ***dA***.

Cuando ***A*** está delimitada por ***f(x)*** y ***g(x)***, y ***f(x)>g(x)*** en ***[a,b]***:

$$A = \int_A dA$$

$$\int_A y_m dA = \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)+g(x)]\underbrace{[f(x)-g(x)]dx}_{dA} = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2 dx$$

y

$$\int_A x_m dA = \int_a^b x[f(x)-g(x)]dx$$

Debido al principio físico de la palanca, se define el momento o torque ***t*** de una fuerza respecto de un punto, como el producto de la magnitud de la fuerza y la distancia de la fuerza al punto, ***t = Fs***. Por otro lado, si consideras una placa plana de cualquier material y la cortaras en pequeños rectángulos de masa ***dm***, cada uno de ellos respecto de un eje elegido provocará un pequeño momento ***dt = sdm***, de donde el momento total será $t = \int_A sdm$, en donde se indica que la integral se realiza sobre toda el área. En particular si los ejes seleccionados son el ***x*** o el ***y***, y además el material de la placa es homogéneo, la masa es proporcional al área y los momentos se puedes expresar en función de las coordenadas ***y*** y ***x*** respectivamente. Así el momento total sobre el eje ***x*** e ***y*** son respectivamente:

$$t_x = \int_A y dA; \qquad t_y = \int_A x dA$$

¿Existirá algún valor de ***x*** en el que se pueda concentrar toda la masa de la placa y provoque el mismo momento total? ¿Se podrá dar una condición similar en ***y***?

Supóngase que esos valores existen y son:

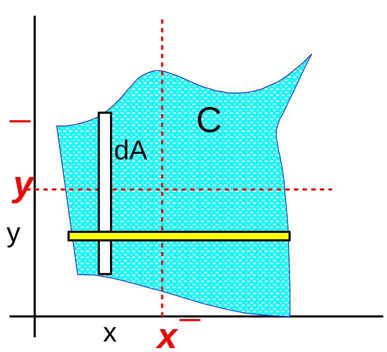
$$x, y \Rightarrow \quad xA = \int_A y dA, \quad yA = \int_A x dA$$

O finalmente:

$$x = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA}; \qquad y = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}$$

Estas coordenadas encontradas definen el ***centroide*** de la superficie o centro de gravedad de la placa.

- ¿Son estas definiciones, aplicaciones especiales del valor medio para integrales? ¿Por qué?



- ¿Quieres ver físicamente el centroide o centro de gravedad de una figura plana?

Realiza el siguiente proceso:

a) Recorta la figura deseada en un cartón suficientemente grueso para que no se doble.

b) Con una aguja pasa un hilo cerca de la orilla de la figura y amárralo.

c) Sostén el hilo y deja que la figura cuelgue libremente del hilo. Con una regla prolonga la recta "definida por el hilo" y trázala sobre el cartón.

d) Repite el mismo proceso con otro punto que no esté sobre la recta trazada.

e) Las rectas trazadas se cortan en un punto... ese punto es el centroide, para probarlo sostén la figura con la punta de un lápiz ubicada en ese punto, si lo hiciste correctamente el cartón se mantendrá en equilibrio horizontalmente. ¿Por qué?

f) ¿Por qué se puede encontrar el centroide de la forma descrita? ¿En dónde quedaron las integrales?

¿En dónde está el centro de gravedad de una escoba de tal forma que apoyada en ese punto se equilibre horizontalmente? Ponla encima de un dedo de cada mano apoyada en los extremos del palo de la escoba, muévelos rápidamente hacia el centro del palo ¡no se va a caer! Cuando juntes tus manos ¡ahí está el centro de gravedad! ¿Por qué funciona esto? ¿En donde están las integrales?

3.5 Otras aplicaciones

Área de una superficie de revolución

Partiendo de la longitud del arco y el método de tubos de altura diferencial ***dL*** se tiene:

Definición: Si la función ***f(x)≥0*** es suave en ***[a,b]***, el área de la superficie generada al girar la curva de ***f(x)*** alrededor del eje ***x*** es:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Definición: Si la función ***g(y)≥0*** es suave en ***[c,d]***, el área de la superficie generada al girar la curva de ***g(y)*** alrededor del eje ***y*** es:

$$S = 2\pi \int_{c}^{d} g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy$$

Momentos de Inercia

En el contexto de la Dinámica de los cuerpos rígidos, la inercia es una medida de la resistencia que opone un cuerpo a que se produzca un cambio en su estado de reposo o de movimiento. A mayor inercia mayor es la resistencia al cambio, de tal forma que si se aplica la misma fuerza a dos cuerpos, el de mayor inercia sufrirá el menor cambio en su estado de movimiento, o “reaccionará en forma más lenta”. Para el movimiento de translación la inercia es equivalente a la masa, pero para el movimiento de rotación depende de “momentos de inercia”.

En el caso de un sólido “plano”, el momento de inercia se mide respecto del punto en que se coloca el eje de rotación –cualquiera que se quiera– y se define para un punto de materia como $\boldsymbol{I = r^2 m}$, donde $\boldsymbol{r}$ es la distancia del punto materia hasta el eje de rotación.

Para poder considerar un cuerpo completo se tendrá que $\boldsymbol{dI = r^2 dm}$ o finalmente:

$$I_{z/p} = \int_{M} r^2 dM$$

En donde nuevamente $\boldsymbol{r}$ es la distancia entre cada elemento diferencial de masa y el punto $\boldsymbol{p}$ (el eje de rotación), la integral se hace sobre todo el cuerpo de masa $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{z}$ identifica que el cuerpo se pretende hacer girar sobre un eje perpendicular a la superficie y que pasa por $\boldsymbol{p}$. Si el cuerpo es homogéneo el peso se distribuye igualitariamente a lo largo del cuerpo y la masa dependerá del volumen y su densidad específica, a su vez si el cuerpo es de espesor constante $\boldsymbol{t}$**,** el volumen depender de $\boldsymbol{t}$ y del área, por lo que finalmente se puede escribir:

$$I_{z/p} = t\rho \int_{A} (x^2 + y^2)\,dA$$

En donde $\boldsymbol{r}$ se sustituyó con respecto al teorema de Pitágoras. Resolviendo las integrales adecuadamente podrás comparar en donde conviene colocar el eje sobre un cuerpo que va a girar.

Analizando la expresión del momento de inercia:

138. ¿Qué llanta tendrá un momento de inercia mayor una de un VW o la de un camión? Explica por qué.

139. ¿Por qué se pone el eje en el centro del círculo y no en otro lugar? Explica tu conjetura.

140. La mayoría de los objetos que se hacen gira sobre un eje son circulares –excepción de las "levas"– ¿por qué crees que sea así?

141. ¿Por qué crees que balancean dinámicamente las llantas de los autos?

142. ¿Afectará a su momento de inercia conjunto los hoyos de los "rines" de las llantas de los autos?

Resuelva los siguientes ejercicios:

143. Calcule el área entre $f(x) = x^3$ y el eje x en el intervalo $[-3,3]$.

144. Calcule el área bajo la curva $f(x) = e^x$, en $[1,2]$.

145. Encuentre el área entre la curva $f(x) = 3sen2x\sqrt{2-\cos 2x}$ y el eje x en $[-\pi/2,0]$.

146. Encuentre el área de la región limitada por las curvas $4x^2+y = 4$ y $x^4-y = 1$.

147. Encuentre el área limitada por el eje y las curvas $x = (y-1)^2$,

i. $y = 3-x$, & $x = 2\sqrt{y}$.

148. Sobre la parábola $x = y^2$, se construye un sólido cuya sección es un rectángulo con base sobre la parábola y su altura es igual la mitad de su ancho. ¿Cuál será el volumen del sólido? Si se limita por el plano $x = 5$.

149. La base de un sólido es la región entre la curva $y = 2\sqrt{senx}$ en el intervalo $[0,\pi]$ en el eje x. Si la sección perpendicular al plano xy son triángulos equiláteros cuya base va del eje x a la curva, ¿cuál es el volumen del sólido?

150. Un sólido se forma al hacer girar alrededor del eje y la hipérbola $x = 2/y$ limitada por las rectas $y = 2$ e $y = 5$. Calcula el volumen del sólido.

151. Si la parábola $f(x) = x^2+1$, se hace girar sobre el eje x, limitada por las rectas $x = -1$ y $x = 1$. ¿Cuál será el volumen del sólido?

152. La región limitada por la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$. Se hace girar sobre el eje x. ¿Cuál es el volumen limitado por el sólido?

153. La región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = -x^4$ y la recta $x = 1$, se hace girar sobre el eje y. ¿Cuál es el volumen del sólido generado?

154. Calcule la longitud de la curva $y = (x^2+2)^{3/2}/3$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

155. Se hace girar la curva $f(x) = \sqrt{2x - x^2}, 1 \leq x \leq 3$ sobre el eje x. Calcular el área de la superficie generada.

156. Calcula el centro de masa del área entre la curva de $f(x) = 9 - x^2$ y el eje x.

157. Calcule el centroide de la región limitada por un cuarto de círculo.

158. Determine el área entre las curvas $y = x^2+5$, $y = x^3$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

159. Calcular la longitud del arco de la parábola $y^2 = 2x$ desde el origen hasta el punto en que $x = a$.

160. Determine el área entre las curvas $y = -x^2$ y $y = x^2-8$.

161. Calcular la longitud del arco de la curva $y = \ln x$ desde $x = \sqrt{3}$ a $x = \sqrt{8}$.

162. Dos cilindros rectos de igual radio se intersecan de tal forma que sus ejes se cruzan formando un ángulo recto. Calcular el volumen de la intersección.

163. Determine el área del segmento de la parábola $y = x^2$ cortado por la recta $y = 2x+3$.

164. Una figura limitada por los arcos $y = x^2$ y $y^2 = x$, gira alrededor del eje y. Calcule el volumen del cuerpo generado.

165. Calcular el área bajo la parábola cúbica $y = x^3-4x+5$, limitada por las rectas $x = 3$ y $x = 5$.

166. Encontrar $y = f(x)$, si $f''(x) = x^{-3/2}$, $f'(4) = 2$, $f(0) = 0$.

167. Calcular el área limitada por las funciones $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}; g(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

168. El área limitada en el primer cuadrante para $y = xe^x$; $x = 1$ y $y = 0$, gira sobre el eje x. Calcular el volumen del sólido generado

169. ¿Con que velocidad inicial debe ser lanzado un objeto desde el suelo hacia arriba verticalmente, para alcanzar una altura máxima de ***550 m***?

170. Calcular el área limitada por las dos ramas de $(y-x)^2 = x^5$ y la recta $x = 4$.

171. Calcular el área limitada por el eje y y las curvas $y = \tan(x)$; $y = (2/3)\cos x$.

172. Calcular la longitud del arco de la curva $y = \ln(1 - x^2)$ en $[0,1/2]$.

173. Calcular el área por $y = 2x^2e^x$, y $y = -x^3e^x$.

174. Calcular el área de la figura limitada por $y = \ln x/(4x)$, $y = x\ln x$.

175. Sobre el eje x se hace girar la superficie limitada por $x = 0$, $x = 1$ y $y = \mathrm{sen}^{-1}x$. Calcular el volumen generado.

176. Calcule el área de la superficie de revolución formada al girar la parábola $y^2 = 8x$, desde su vértice hasta $x = 6$, alrededor del eje x.

177. Una función $y = f(x)$, tiene una segunda derivada $f''(x) = 6(x - 1)$. Encuentre la función si su gráfica pasa por el punto $(2,1)$ y en ese punto es tangente a la recta $3x - y - 5 = 0$.

Unidad 4: Series.

4.1 Serie de potencias y Radio de convergencia.

Determinar el intervalo de convergencia de las series de potencias de término n-ésimo:

a) $\left(\dfrac{n!}{3\cdot 5\ldots(2n+1)}\right)^2 x^n$	b) $\dbinom{2n}{n}x^n$	c) $n(\sqrt[n]{2}-1)x^n$	d) $n^{(\log n)/n}(\mathrm{sen}\dfrac{1}{\sqrt{n}})x^n$
e) $\dfrac{2^n}{n^2}x^n$	f) $\dfrac{2^n}{n!}x^n$	g) $\dfrac{3^n}{n4^n}x^n$	h) $\dfrac{(-1)^n}{n^2 4^n}x^n$
i) $\sqrt{n}x^n$	j) $x^{n!}$	k) $n^{-\sqrt{n}}x^n$	l) $\dfrac{3^n}{\sqrt{n}}x^{2n+1}$
m) $n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$	n) $\dfrac{\log n}{n}x^n$	ñ) $x^n \operatorname{tg}\dfrac{a}{2^n}, \quad a>0$	

Desarrollar en series de potencias de x las siguientes funciones, indicando en qué intervalos son válidos los desarrollos:

a) $\dfrac{2x^2-3}{(x-1)^2}$	b) $\dfrac{x}{9+x^2}$	c) $\dfrac{1}{4-x^4}$
d) $\log(1+x-2x^2)$	e) $\log\dfrac{1+x}{1-x}$	f) $\log(x+\sqrt{1+x^2})$
g) $\sqrt[3]{8+x}$	h) $(1+e^x)^3$	i) $(1+x)e^{-x}$
j) $\cos^2 x$	k) $\cos x\,\mathrm{sen}^2 x$	l) $\mathrm{sen}^2 2x$
m) $\log\dfrac{a+bx}{a-bx}, \quad a,b>0$	n) $\log(1-2x)$	ñ) $\sqrt{1+x^3}$

4.2 Serie de Taylor.

a) Determine la serie de Taylos en x - a hasta el término $(x - a)^3$.

1 $e^x, a = 1$

2 $\cos x, a = \frac{\pi}{3}$

3. $1 + x^2 + x^3, a = 1$

4 $2 - x + 3x^2 - x^3, a = -1$

5 $\operatorname{sen} x, a = \frac{\pi}{6}$

6 $\tan x, a = \frac{\pi}{4}$

b) En cada caso determine la serie de Maclaurin para f(x) mediante el uso de series conocidas y luego utilícela para calcular $f^{(4)}(0)$

(a) $f(x) = e^{x+x^2}$

(b) $f(x) = e^{\sin x}$

(c) $f(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2} - 1}{t^2}\, dt$

(d) $f(x) = e^{\cos x} = e \cdot e^{\cos x - 1}$

(e) $f(x) = \ln(\cos^2 x)$

Anexo. Ejemplos de ejercicios resueltos y algunas respuestas.

214. Encontrando una sustitución adecuada resolver $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

Resolución: Sea $z^2 = x+1$ luego $2zdz = dx$, $\int \frac{2zdz}{1+z}$ haz la división y adelante:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} - 2\ln(1+\sqrt{x+1}) + c$$

215. Mediante la sustitución adecuada resolver $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$.

Resolución:

Sea $z = \ln x$ luego $dz = dx/x$: $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx = \int \frac{\sqrt{1+z}}{z}dz$ ahora $u^2 = 1+z$ luego $2udu = dz$

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx = \int \frac{\sqrt{1+z}}{z}dz = 2\int \frac{u^2du}{u^2-1} = 2\int (1-\frac{1}{1-u^2})du = 2\left(u - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\right)$$

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx = 2\sqrt{1+z} - \ln\left|\frac{\sqrt{1+z}+1}{\sqrt{1+z}-1}\right| = 2\sqrt{1+\ln x} - \ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}+1}{\sqrt{1+\ln x}-1}\right| + c$$

216. Resolver $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$.

Resolución: Sea $u^4 = e^x+1$, $4u^3du = e^xdx$:

$$\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}} = \int \frac{e^{2x}4u^3du}{e^xu} = \int \frac{e^x4u^3du}{u} = \int \frac{(u^4-1)4u^3du}{u} = 4\int (u^6-u^2)du = 4\frac{u^7}{7} - 4\frac{u^3}{3}$$

$$\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}} = \frac{4}{7}(e^x+1)^{7/4} - \frac{4}{3}(e^x+1)^{3/4} + c$$

217. Resuelva: $\int t\ln(t+1)dt$

Solución: $\int t\ln(t+1)dt = \frac{1}{4}((2-t)t + 2(t^2-1)\ln(t+1)) + c$

218. Resuelva: $\int \frac{\ln(2x)dx}{x^2}$

Solución: $\int \frac{\ln(2x)dx}{x^2} = -\frac{1+\ln(2x)}{x} + c$

219. Resuelva: $\int \frac{xe^{2x}dx}{(2x+1)^2}$

Solución: $\int \frac{xe^{2x}dx}{(2x+1)^2} = \frac{e^{2x}}{4(2x+1)} + c$

220. Resuelva: $\int xsen(2x)dx$

Solución: $\int xsen(2x)dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}sen2x + c$

221. Resuelva: $\int \frac{\ln(\tan x)dx}{senx\cos x}$

Solución: $\int \frac{\ln(\tan x)dx}{senx\cos x} = \frac{1}{2}\ln(\tan x)^2 + c$.

222. Resuelva: $\int \frac{dx}{\cos x + sen^3 x}$

Solución: $\int \frac{dx}{\cos x + sen^3 x} = -\frac{1}{2}\csc^2 x - \ln\cos x + \ln senx + c$

223. Resuelva: $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

Solución: $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx = \frac{x}{4} + \ln x - \frac{7}{16}\ln(2x-1) - \frac{9}{16}\ln(2x+1) + c$

224. Resuelva: $\int e^{\sqrt{x}}dx$

Solución: $\int e^{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + c$

225. Resuelva: $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Solución: $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}arcsen\frac{x}{3} + c$

226. Calcule el área bajo la curva $f(x) = e^x$, en ***[1,2]***.

Resolución: El área corresponde con:

$$\int_1^2 e^x dx = e^x\Big|_1^2 = e^2 - e \approx 4.670774171$$

El área está dada en unidades cuadradas, que no se indicaron desde el inicio.

227. Calcule el área entre $f(x) = x^3$ y el eje x en el intervalo ***[–3,3]***.

Resolución: La función es impar y cruza el eje en el origen, luego el área se compone de dos segmentos uno positivo y uno negativo, lo solicitado es:

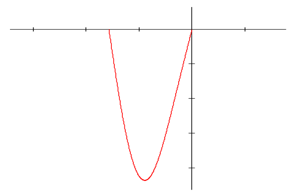
$$A = -\int_{-3}^{0} x^3dx + \int_0^3 x^3dx = 2\int_0^3 x^3dx = 2\frac{x^4}{4}\Big|_0^3 = \frac{81}{2} = 40.5$$

228. Encuentre el área entre la curva $f(x) = 3sen2x\sqrt{2-\cos 2x}$ y el eje x en ***[–π/2,0]***.

Resolución: Obsérvese la gráfica para la que se ve que *f(-π/2)=f(0)* y no hay más ceros, luego el área solicitada es:

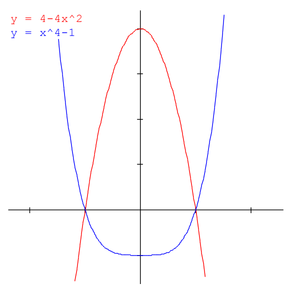
$$A=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\underbrace{3sen2x\sqrt{2-\cos 2x}}_{\substack{u=2-\cos 2x;du=2sen2xdx\\ u_1=2-\cos(-\pi)=3,u_2=2-\cos 0=1}}\,dx=-\frac{3}{2}\int_{3}^{1}\sqrt{u}du=\frac{3}{2}\left.\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right|_{1}^{3}=\sqrt{27}-1\approx 4.196152423$$

(Unidades cuadradas).



229. Encuentre el área de la región limitada por las curvas $4x^2+y=4$ y $x^4-y=1$.

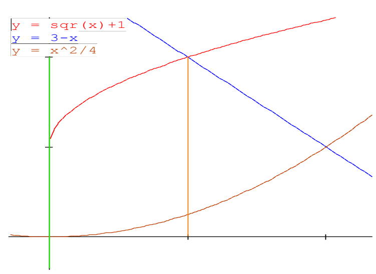
Resolución: Al resolver simultáneamente las ecuaciones presentadas se localizan los puntos de intersección, así si se suman ambas se obtiene $x^4+4x^2-5=0$, que es una bicuadrática con solución en $x^2=-5$ y $x^2=1$, de donde el único caso viable es $x=-1$, $x=1$. Adicionalmente $x^4+1<4-4x^2$ en $(-1,1)$ de donde:



$$A=\int_{-1}^{1}(4-4x^2)-(x^4-1)dx=\int_{-1}^{1}(5-4x^2-x^4)dx=5x-\frac{4}{3}x^3-\left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^{1}=10-\frac{8}{3}-\frac{2}{5}=6.9\overline{3}$$

230. Encuentre el área limitada por el eje y las curvas $x=(y-1)^2$, $y=3-x$, y $x=2\sqrt{y}$.

Resolución: La región se ve limitada de la siguiente forma:



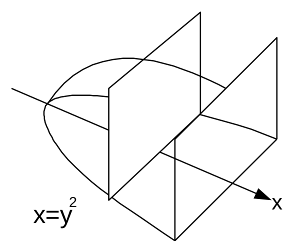
En donde las coordenadas de las intersecciones son: $y=\sqrt{x}+1$ con el eje y ***(0,1)***, ésta con la recta $3-x=\sqrt{x}+1; (2-x)^2=x; 4-5x+x^2=0; x=4, x=1$ o bien ***(1,2)****; **y = x²/4*** con el origen ***(0,0)*** y finalmente entre esta parábola y la recta ***x²/4 = 3–x; x²+4x–12 = (x+6)(x-2) = 0***, en donde es útil ***x = 2***; y el punto de intersección es ***(2,1)***. Por el tipo de superficie generada es necesario trazar la recta auxiliar ***x = 1***, de donde se obtiene:

$$A=\int_0^1 (\sqrt{x}+1)-(\frac{x^2}{4})dx+\int_1^2 (3-x)-(\frac{x^2}{4})dx=\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+x-\frac{x^3}{12}\right]_0^1+\left[3x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}\right]_1^2$$

$$A=\frac{2}{3}+1-\frac{1}{12}+(6-2-\frac{8}{12})-(3-\frac{1}{2}-\frac{1}{12})=2.5$$

231. Sobre la parábola ***x = y²***, se construye un sólido cuya sección es un rectángulo con base sobre la parábola y su altura es igual la mitad de su ancho. ¿Cuál será el volumen del sólido? Si se limita por el plano ***x = 5***.

Resolución:



Aplicando el método de rebanadas se tiene, que una de estas rebanadas tiene el siguiente volumen:

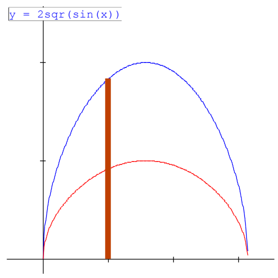
dV = (ancho de rectángulo)(alto del rectángulo)(espesor de la rebanada) = (2y)(y)dx = 2y²dx = 2xdx

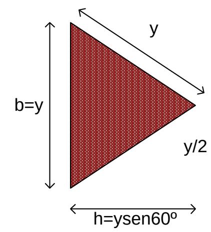
Luego el volumen solicitado es: $V=\int_0^5 2xdx=x^2\Big|_0^5=25$

(unidades cúbicas, aunque no se indicaron desde el enunciado).

232. La base de un sólido es la región entre la curva $y=2\sqrt{senx}$ en el intervalo ***[0,π]*** en el eje ***x***. Si la sección perpendicular al plano ***xy*** son triángulos equiláteros cuya base va del eje ***x*** a la curva, ¿cuál es el volumen del sólido?

Resolución: Visto por arriba el sólido tiene el siguiente aspecto, en donde la línea café es un triangulo equilátero con base $y = 2\sqrt{senx}$ y vértice sobre a línea roja que identifica la arista generada por todos los vértices de los triángulos, un triángulo característico se muestra en la figura.



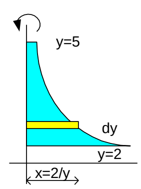


Con los datos previos se tiene ***dV = (área de la rebanada)(espesor de la rebanada) = [y(ysen60º)/2]dx*** e integrando.

$$V = \int_0^\pi \frac{y^2 sen60^o}{2}dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^\pi y^2dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^\pi (2\sqrt{senx})^2dx = \sqrt{3}\int_0^\pi senxdx = -\sqrt{3}\cos x\Big|_0^\pi = 2\sqrt{3}$$

233. Un sólido se forma al hacer girar alrededor del eje ***y*** la hipérbola ***x = 2/y*** limitada por las rectas ***y = 2*** e ***y = 5***. Calcula el volumen del sólido.

Resolución: Al observar la figura, se ve que se puede trazar el rectángulo diferencial indicado, de donde:



dV = (área del disco)(espesor del disco) = (πx²)dy = (4π/y²)dy, y:

$$V = \int_2^5 \frac{4\pi dy}{y^2} = -\frac{4\pi}{y}\Big|_2^5 = -4\pi\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right) = \frac{6\pi}{5}$$

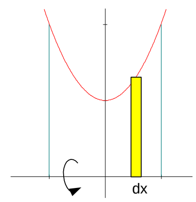
234. Si la parábola ***f(x) = x²+1***, se hace girar sobre el eje ***x***, limitada por las rectas ***x = –1*** y ***x = 1***. ¿Cuál será el volumen del sólido?

Resolución: En la figura se observa como se forma un disco con el rectángulo señalado, para el cual:

dV = (área del disco)(espesor) = (πy²)dx = π(x²+1)²dx

De donde al ser una función par:

$$V=\int_{-1}^{1}\pi(x^2+1)^2dx=2\pi\int_0^1(x^4+2x^2+1)dx=2\pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right)_0^1=2\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right)=\frac{56\pi}{15}$$



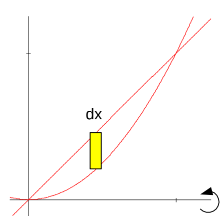
235. La región limitada por la recta ***y = x*** y la parábola ***y = x²***. Se hace girar sobre el eje ***x***. ¿Cuál es el volumen limitado por el sólido?

Resolución: Considere la figura, en la que al girar se forma una arandela, cuyo volumen diferencial será:

dV = (área del disco mayor – área del disco menor)(espesor) = (πx²– πx⁴)dx

Como las curvas se intersecan en el punto *(1,1)*Así:

$$V=\pi\int_0^1(x^2-x^4)dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)_0^1=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2\pi}{15}$$



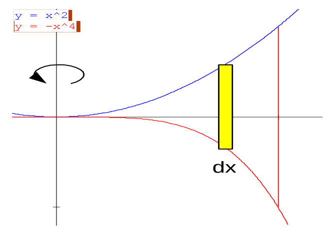
236. La región limitada por las curvas ***y = x²*** y ***y = –x⁴*** y la recta ***x = 1***, se hace girar sobre el eje ***y***. ¿Cuál es el volumen del sólido generado?

Resolución: Al considerar el área diferencial mostrada en la figura y girarla sobre el eje ***y*** se forma un tubo que se puede extender como una lámina, las dimensiones de esta lámina son:

dV = (alto de la lámina)(largo de la lámina) espesor = $(x^2+x^4)(2\pi x)dx$

De donde integrando se obtiene:

$$V = 2\pi\int_0^1 (x^3 + x^5)dx = 2\pi\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6}\right)_0^1 = \frac{5\pi}{6}$$



237. Calcule la longitud de la curva ***$y = (x^2+2)^{3/2}/3$*** desde ***$x = 0$*** hasta ***$x = 4$***.

Resolución: Derivando se tiene $y' = x\sqrt{x^2+2}$, luego se tiene:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx = \int_0^4 \sqrt{1+(x\sqrt{x^2+2})^2}dx = \int_0^4 \sqrt{1+x^2(x^2+2)}dx = \int_0^4 \sqrt{1+x^4+2x^2}dx$$

$$L = \int_0^4 \sqrt{(1+x^2)^2}dx = \int_0^4 1+x^2 dx = \left(x + \frac{x^3}{3}\right)_0^4 = 4 + \frac{64}{3} = \frac{76}{3}$$

238. Se hace girar la curva $f(x) = \sqrt{2x-x^2}, 1 \le x \le 3$ sobre el eje ***x***. Calcular el área de la superficie generada.

Resolución: Se tiene $f'(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, luego:

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx = 2\pi\int_1^3 \sqrt{2x-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}dx =$$

$$S = 2\pi\int_1^3 \sqrt{2x-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{1-2x+x^2}{2x-x^2}\right)}dx = 2\pi\int_1^3 \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{(2x-x^2)+1-2x+x^2}dx =$$

$$S = 2\pi\int_1^3 dx = 4\pi$$

239. Calcula el centro de masa del área entre la curva de ***f(x) = 9-x²*** y el eje ***x***.

Resolución: Para el área infinitesimal indicada se cumple:

$$A=\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx=2\int_{0}^{3}(9-x^2)dx=2\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)_0^3=2(27-9)=36$$

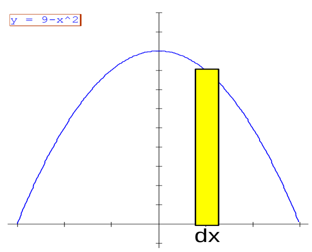
$$\int_A y_m dA=\int_{-3}^{3}\frac{1}{2}[f(x)]\underbrace{[f(x)]dx}_{dA}=\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}\underbrace{[9-x^2]^2}_{función\ \ par}dx=\int_0^3(81-18x^2+x^4)dx=\left(81x-6x^3+\frac{x^5}{5}\right)_0^3=129.6$$

$$\int_A x_m dA=\int_{-3}^{3}x[f(x)]dx=\int_{-3}^{3}\underbrace{x[9-x^2]}_{función\ \ impar}dx=0$$

Finalmente:

$$y=\frac{\int_A y_m dA}{A}=\frac{129.6}{36}=3.6;\ x=\frac{\int_A x_m dA}{A}=0$$

Las coordenadas del centro de gravedad son *(0,3.6).*



240. Calcule el centroide de la región limitada por un cuarto de círculo.

Resolución: Considere el área diferencial mostrada, la cual está limitada a la derecha por el círculo $x^2+y^2 = R^2$. $A = \pi R^2/4$ es:

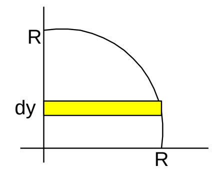
$$\int_A x_m dA=\int_0^R\frac{1}{2}\sqrt{R^2-y^2}\underbrace{(\sqrt{R^2-y^2}dy)}_{dA}=\frac{1}{2}\int_0^R R^2-y^2dy=\frac{1}{2}\left(R^2y-\frac{y^3}{3}\right)_0^R=\frac{R^3}{3}$$

Ahora:

$$x=\frac{\int_A x_m dA}{A}=\frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{R^2\pi}{4}}=\frac{4R}{3\pi}$$

Por simetría de la figura:

$$y=\frac{4R}{3\pi}$$



241. Determine el área entre las curvas ***y = x²+5***, ***y = x³*** y las rectas ***x = 0*** y ***x = 2***.

Solución:

$$\int_0^2 (x^2+5-x^3)dx=\frac{26}{3}$$

242. Calcular la longitud del arco de la parábola ***y² = 2x*** desde el origen hasta el punto en que ***x = a***.

Solución:

$$\int_0^{\sqrt{2a}} \sqrt{1+y^2}\,dy=\frac{1}{2}(\sqrt{2a}\sqrt{1+2a}+arcsen(\sqrt{2a}))$$

En realidad son dos arcos el inferior y el superior, por lo que también se podrá considerar el doble de lo mostrado como una respuesta correcta, ya que el integral resuelta únicamente se consideró el arco superior de la parábola.

243. Determine el área entre las curvas ***y = –x²*** y ***y = x²–8***.

Solución:

$$\int_{-2}^{2} (-x^2-(x^2-8))dx=\frac{64}{3}$$

244. Calcular la longitud del arco de la curva ***y = lnx*** desde ***x =*** $\sqrt{3}$ a ***x =*** $\sqrt{8}$.

Solución:

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=1.202732554$$

245. Dos cilindros rectos de igual radio se intersecan de tal forma que sus ejes se cruzan formando un ángulo recto. Calcular el volumen de la intersección.

Solución:

$$8\int_0^R (R^2 - x^2)dx = \frac{16R^3}{3}$$

246. Determine el área del segmento de la parábola $\boldsymbol{y = x^2}$ cortado por la recta $\boldsymbol{y = 2x+3}$.

Solución: $$\int_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2)dx = \frac{32}{3}$$

247. Una figura limitada por los arcos $\boldsymbol{y = x^2}$ y $\boldsymbol{y^2 = x}$, gira alrededor del eje $\boldsymbol{y}$. Calcule el volumen del cuerpo generado.

Solución:

$$2\pi\int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{3\pi}{10}$$

248. Calcular el área bajo la parábola cúbica $\boldsymbol{y = x^3 - 4x + 5}$, limitada por las rectas $\boldsymbol{x = 3}$ y $\boldsymbol{x = 5}$.

Solución:

$$\int_3^5 (x^3 - 4x + 5)dx = 114$$

249. Encontrar $\boldsymbol{y = f(x)}$, si $\boldsymbol{f''(x) = x^{-3/2}}$, $\boldsymbol{f'(4) = 2}$, $\boldsymbol{f(0) = 0}$.

Solución:

$$f(x) = -4\sqrt{x} + 3x$$

250. Calcular el área limitada por las funciones $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}; g(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

Solución:

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{x^2}{2}\right)dx = 1.2374629934$$

251. El área limitada en el primer cuadrante para ***y = xe^x*** ***; x = 1*** y ***y = 0***, gira sobre el eje ***x***. Calcular el volumen del sólido generado.

Solución:

$$\pi\int_{0}^{1}(xe^x)^2\,dx = 5.0179529259$$

252. ¿Con que velocidad inicial debe ser lanzado un objeto desde el suelo hacia arriba verticalmente, para alcanzar una altura máxima de ***550 m***?

Solución:

$$v_{(0)} = 103.82 \text{ m/seg}$$

253. Calcular el área limitada por las dos ramas de $(y-x)^2 = x^5$ y la recta ***x = 4***.

Solución:

$$\int_0^4\left(\left(x+\sqrt{x^5}\right)-\left(x-\sqrt{x^5}\right)\right)dx = 73.14285714285714$$

254. Calcular el área limitada por el eje ***y*** y las curvas ***y = tan(x)***; ***y = (2/3)cosx***.

Solución:

$$-\int_{0}^{\pi/6}(\tan x - \frac{2}{3}\cos x)dx = 0.8949449$$

255. Calcular la longitud del arco de la curva $y=\ln(1-x^2)$ en ***[0,1/2]***.

Solución:

$$\int_{0}^{1/2}\sqrt{1+\left(D_x \ln(1-x^2)\right)^2}\,dx = 0.598612288$$

256. Calcular el área por $y = 2x^2e^x$, y $y = -x^3e^x$.

Solución:

$$-\int_{-2}^{0}(x^2e^x+x^3e^x)dx=0.2106120693$$

257. Calcular el área de la figura limitada por ***y = lnx/(4x)***, ***y = xlnx.***

Solución:

$$\int_{1/2}^{2}\left(x\ln x-\frac{\ln x}{4x}\right)dx=0.535437758$$

258. Sobre el eje ***x*** se hace girar la superficie limitada por ***x = 0***, ***x = 1*** y ***y = sen^{-1}x***. Calcular el volumen generado.

Solución:

$$2\pi\int_{0}^{\pi/2}y(1-seny)dy=\pi\int_{0}^{1}(arcsenx)^2dx=1.4683838$$

259. Calcule el área de la superficie de revolución formada al girar la parábola ***y^2 = 8x***, desde su vértice hasta ***x = 6***, alrededor del eje ***x***.

Solución:

$$2\pi\int_{0}^{6}\sqrt{8x}\sqrt{1+\left(\frac{4}{\sqrt{8x}}\right)^2}dx=\frac{224\pi}{3}$$

260. Una función ***y = f(x)***, tiene una segunda derivada ***f''(x) = 6 (x – 1)***. Encuentre la función si su gráfica pasa por el punto ***(2,1)*** y en ese punto es tangente a la recta ***3x–y–5 = 0***.

Solución:

$$f(x) = (x-1)^3$$