TRANSFORMADAS DE LAPLACE Y DE FOURIER

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Derivación e integración de funciones de una variable.
- Dibujo de curvas y programación básica con Matlab.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Los objetivos específicos de este tema son:

1. Saber comprobar si una función verifica las condiciones suficientes para que exista su transformada de Laplace.
2. Obtener la transformada de Laplace para funciones continuas a trozos y de orden exponencial, aplicando la definición.
3. Calcular transformadas de Laplace utilizando propiedades y tablas.
4. Utilizar las funciones de Heaviside para definir analíticamente funciones continuas a trozos y hallar su transformada de Laplace.
5. Hallar la transformada de Laplace de funciones periódicas.
6. Calcular transformadas inversas de Laplace, utilizando la descomposición en fracciones simples y propiedades.
7. Resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales, de coeficientes constantes, utilizando la transformación de Laplace.

TRANSFORMADA DE LAPLACE

1 Definiciones

La transformada de Laplace es una herramienta útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes con valores iniciales. Con esta herramienta se transforman las ecuaciones lineales no homogéneas en ecuaciones algebraicas que pueden resolverse por medios algebraicos.

Se utiliza también en sistemas de control para obtener la función de transferencia y predecir o analizar el funcionamiento del sistema.

Definición (Transformada de Laplace).- Sea $f\left(t\right)$ una función definida para $t \geq 0$ y tal que $f\left(t\right) = 0$ para $t < 0$. Se llama transformada de Laplace de la función $f\left(t\right)$ a la función:

$$\mathcal{L}\left[f\right]\left(s\right) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

siempre que la integral anterior sea convergente. Es decir, $F(s)$ está definica para los valores $s \in \mathbb{R}$ donde la integral sea convergente.

El proceso inverso de hallar $f(t)$ a partir de la transformada de Laplace $F(s)$, se denomina transformación inversa de Laplace. La integral que resuelve este problema es la siguiente:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s)e^{st}dt$$

La resolución de esta integral requiere la aplicación de técnicas de variable compleja por lo que en la práctica en el cálculo de transformadas inversas se utilizarán únicamente las propiedades y la tabla de transformadas elementales.

Ejemplo: Si $f(t) = c$ siendo c una constante real, su transformada de La place es

$$\mathcal{L}\left[f\right](s) = F(s) = \int_0^\infty ce^{-st}dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R ce^{-st}dt = \lim_{R\to\infty} c\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{t=R} =$$

$$= \lim_{R\to\infty} c\left[\frac{e^{-sR}}{-s} + \frac{1}{s}\right] = 0 + \frac{c}{s} = \frac{c}{s} \qquad si \;\; s > 0$$

Nota: Observa que $\lim_{R\to\infty} e^{-sR}$ es finito si s es mayor o igual a 0 pero como dividimos por s la integral será finita si s>0.

Ejemplo: Si $f(t) = e^{at}$ siendo a una constante real, su transformada de La place es

$$\mathcal{L}\left[f\right](s) = F(s) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{(a-s)t}dt = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_{t=0}^{t=R} =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{(a-s)R}}{a-s} - \frac{1}{a-s}\right] = \frac{1}{s-a} \qquad a - s < 0$$

Nota: Observa que $\lim_{R\to\infty} e^{(a-s)R}$ es finito si a-s es menor o igual a 0 pero como dividimos por esta expresión la integral será finita si $s > a$.

Ejemplo: Si $f(t) = t$ siendo c una constante real, su transformada de La place es

$$\mathcal{L}\left[f\right](s) = F(s) = \int_0^\infty te^{-st}dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R te^{-st}dt = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{te^{-st}}{s} + \frac{1}{s}\int_0^R e^{-st}dt\right]_{t=0}^{t=R} =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_{t=0}^{t=R} = \frac{1}{s^2} \qquad s > 0$$

Nota: Observa que $\lim_{R\to\infty} e^{-sR}$ es finito si s es mayor o igual a 0 pero como dividimos por esta expresión la integral será finita si s>0.

2 Condiciones suficientes de existencia de la transformada de Laplace

Definición (Seccionalmente continua). Una función $f(t)$ es

- seccionalmente continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ si es continua en todos los puntos de dicho intervalo salvo en un número fintito de puntos donde la desigualdad es de salto finito (existen límites laterales finitos pero no coinciden)
- seccionalmente continua para $t \geq 0$ si es seccionalmente continua en cada intervalo de la forma $[0,A]$ con A>0.

Ejemplo: La función $f(t) = tg(t)$ no es seccionalmente continua. Las funciones trigonométricas, seno, coseno, los polinomios, ... son funciones continuas, luego son seccionalmente continuas.

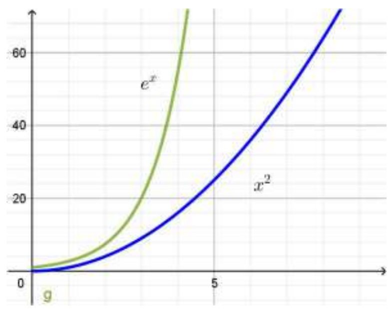
Definición (Tipo exponencial). Una función $f(t)$ es de tipo exponencial de orden α si existen valores K, M constantes tales que: $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M$ (1)

Importante: Si una función es de orden exponencial α, con otro $\alpha_1 > \alpha$ también se verificará la condición (1), por lo tanto, el conjunto de todos los valores que verifican (1) está acotado inferiormente y la menor de sus cotas inferiores (valor ínfimo) se denomina abscisa de convergencia de la función $f(t)$.

Nota: El orden exponencial que se exige a la función solo se requiere a partir de un cierto valor de t

Nota: Las funciones más habituales, tales como los polinomios, las funciones racionales, las funciones trigonométricas, las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas, son todas ellas de orden exponencial.

Ejemplo: Por ejemplo, $f(t) = t^2$

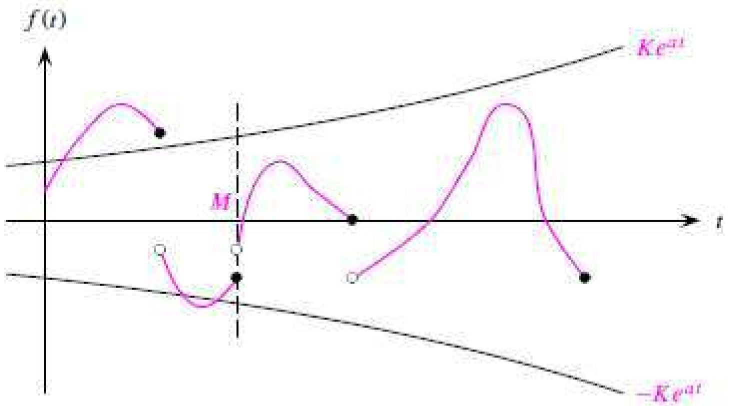


TEOREMA (Existencia de la transformada de Laplace).- Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$ y tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$. Si $f(t)$

- es seccionalmente continua
- es de tipo exponencial de orden α

entonces existe la transformada de Laplace $\mathcal{L}[f](s) = F(s)$ para valores $s > \alpha$.

Ejemplo: La siguiente imagen representa una función que verifica las dos condiciones que impone el teorema anterior.



Observa que $\left|f(t)\right| \leq Ke^{at} \quad \Leftrightarrow \quad -Ke^{at} \leq f(t) \leq Ke^{at}$

Ejemplo: Demostrar que la función $f(t) = e^{2t}\cos(3t)$ cumple las condiciones de existencia de transformada de Laplace. Esta función es continua en toda la recta real y además es de tipo exponencial ya que

$$\left|e^{2t}\cos(3t)\right| \leq e^{2t} \qquad k = 1,\ M = 0,\ a = 2$$

TEOREMA.- Si $f(t)$ verifica las condiciones del teorema de existencia anterior, entonces la función transformada $F(s)$ tiende a cero a medida que s tiende a infinito, es decir $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

TEOREMA DE UNICIDAD.- Si dos funciones continuas, $f(t)$ y $g(t)$, tienen una misma transformada de Laplace, $F(s)$ para $s > \alpha$ entonces estas funciones son idénticamente iguales, salvo quizá en puntos de discontinuidad.

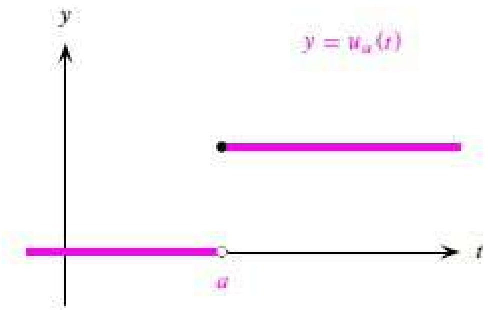
Como consecuencia de este teorema, se deduce que si $f(t)$ es una función continua queda determinada de forma única mediante la transformada inversa de Laplace.

3 Funciones definidas a trozos

Definición (Función escalón o de Heaviside). Se define la función escalón para $a > 0$ o función de Heaviside de la forma siguiente

$$U(t-a) = \begin{cases} 0 & si\ t < a \\ 1 & si\ t \geq a \end{cases}$$

Nota: También se puede denotar $U(t-a) = U_a(t)$



Esta función nos permite escribir funciones que se activa o desactivan a partir de un cierto instante t. Por ejemplo, para considerar la función f(t) activa a partir del instante t=a, basta considerar

$$f(t)U(t-a) = \begin{cases} 0 & si\ t < a \\ f(t) & si\ t \geq a \end{cases}$$

Si se quiere que la función esté activa entre a y b, basta considerar

$$f(t)U(t-a) - f(t)U(t-b) = \begin{cases} f(t) & si\ a \leq t < b \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

ya que

$$f(t)U(t-a) = \begin{cases} 0 & si\ t < a \\ f(t) & si\ t \geq a \end{cases} \qquad f(t)U(t-b) = \begin{cases} 0 & si\ t < b \\ f(t) & si\ t \geq b \end{cases}$$

Ejemplo: Consideremos la función

$$f(t) = \begin{cases} 2t & si\ 1 \leq t < 2 \\ 2 & si\ 2 \leq t < 3 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Podemos escribir esta función de la forma

$$f(t) = g(t) + h(t) \qquad g(t) = \begin{cases} 2t & 1 \leq t < 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} 2 & 2 \leq t < 3 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Como

$$g(t) = 2t\left[U(t-1) - U(t-2)\right]$$

$$g(t) = 2\left[U(t-2) - U(t-3)\right]$$

$$f(t) = g(t) + h(t) = 2t\left[U(t-1) - U(t-2)\right] + 2\left[U(t-2) - U(t-3)\right] =$$

$$= 2tU(t-1) + (2-2t)U(t-2) - 2U(t-3)$$

4 Cálculo de transformadas de Laplace con Matlab

laplace(funcion)

Devuelve la transformada de Laplace de la función simbólica[1]

```
syms t positive
f=t^2;F=laplace(f)
```

ilaplace(función)

Devuelve la transformada inversa de Laplace de la función simbólica.

```
syms s
Y=1/(s+1);y=ilaplace(Y)
```

heaviside(variable)

Función escalón

```
syms t
fplot(heaviside(t-2),[-2,2])
```

Ejemplo: Comprobar con Matlab las siguientes transformadas

$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[F(s)\right]$	$F(s) = \mathfrak{L}\left[f(t)\right]$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0, \quad n \geq 0$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot s^{-3/2}, \quad s > 0$

[1] Recuerda que para utilizar cálculo simbólico en Octave debes cargar el paquete symbolic-win-py-bundle-2.2.2 y cargarlo tecleando
>> pkg load symbolic

$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[F(s)\right]$	$F(s) = \mathfrak{L}\left[f(t)\right]$
$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi} \cdot s^{-1/2}, \quad s > 0$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\operatorname{sen} a t$	$\dfrac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\cos a t$	$\dfrac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$t \operatorname{sen} a t$	$\dfrac{2as}{(s^2 + a^2)^2}, \quad s > 0$
$t \cos\left(a t\right)$	$\dfrac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}, \quad s > 0$
$e^{bt} \cos\left(a t\right)$	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}, \quad s > b$

A modo de ejemplo se comprueba la fila 1 y la fila 2

```
syms t
disp('fila 1')
F=laplace(heaviside(t))
%heaviside(t) es la función escalón unidad
disp('fila 2 para n=2')
F=laplace(t^2)
disp('fila 3')
F=laplace(sqrt(t))
```

5 Propiedades

Propiedad 1 (Linealidad).- Sean $f\left(t\right)$ y $g\left(t\right)$ tales que $\mathcal{L}\left[f(t)\right]$ existe para $s > \alpha_1$ y $\mathcal{L}\left[g(t)\right]$ existe para $s > \alpha_2$, y sean α y β constantes reales cualesquiera, entonces

$$\mathfrak{L}\left[\lambda f(t) + \mu g\left(t\right)\right] = \lambda \mathfrak{L}\left[f(t)\right] + \mu \mathfrak{L}\left[g\left(t\right)\right], \qquad \forall s > \alpha_0$$

siendo $\alpha_0 = máx\left\{\alpha_1, \alpha_2\right\}$

Ejemplo. Calcular la transformada de La place de la función $f\left(t\right) = Ch\left(at\right) = \dfrac{e^{at} + e^{-at}}{2}$ (coseno hiperbólico) sabiendo que $\boxed{\mathfrak{L}\left[e^{at}\right] = \dfrac{1}{s-a} \quad s > a}$. Aplicando la linealidad

$$\mathfrak{L}\left[Ch\left(at\right)\right]=\frac{1}{2}\mathfrak{L}\left[e^{at}\right]+\frac{1}{2}\mathfrak{L}\left[e^{-at}\right]=\frac{1}{2}\frac{1}{s-a}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+a}=\frac{s}{s^2-a^2}\quad s>a$$

Es decir,

$$\boxed{\mathfrak{L}\left[Ch\left(at\right)\right]=\frac{s}{s^2-a^2}\quad s>a}\qquad\qquad \boxed{\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-a^2}\right]=Ch\left(at\right)}$$

Ejemplo. Calcular la transformada de La place de la función $f\left(t\right)=Sh\left(at\right)=\dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2}$ (seno hiperbólico) sabiendo que $\mathfrak{L}\left[e^{at}\right]=\dfrac{1}{s-a}\quad s>a$. Aplicando la linealidad

$$\mathfrak{L}\left[Sh\left(at\right)\right]=\frac{1}{2}\mathfrak{L}\left[e^{at}\right]-\frac{1}{2}\mathfrak{L}\left[e^{-at}\right]=\frac{1}{2}\frac{1}{s-a}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+a}=\frac{a}{s^2-a^2}\quad s>a$$

Es decir,

$$\boxed{\mathfrak{L}\left[Sh\left(at\right)\right]=\frac{a}{s^2-a^2}\quad s>a}\qquad\qquad \boxed{\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right]=Sh\left(at\right)}$$

Ejemplo. Calcular la transformada de Laplace de la función $f\left(t\right)=\cos^2\left(t\right)=\dfrac{1+\cos\left(2t\right)}{2}$ *sabiendo que* $\mathfrak{L}\left[\cos\left(at\right)\right]=\dfrac{s}{s^2+a^2}\quad s>0$. Aplicando la linealidad

$$\mathfrak{L}\left[\cos^2\left(t\right)\right]=\frac{1}{2}\mathfrak{L}\left[1\right]+\frac{1}{2}\mathfrak{L}\left[\cos\left(2t\right)\right]=\frac{1}{2}\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4}=\frac{s^2+2}{s\left(s^2+4\right)}\quad s>0$$

Propiedad 2 (Multiplicación por la exponencial).- Si a es un número real cualquiera,

$$\mathfrak{L}\left[e^{at}f(t)\right]\left(s\right)=\mathfrak{L}\left[f(t)\right]\left(s-a\right)=F\left(s-a\right),\quad \forall s>a+\alpha$$

siendo α la abscisa de convergencia de $f\left(t\right)$.

Ejemplo. Calculamos $\mathfrak{L}\left[e^{bt}\cos\left(at\right)\right]$ y $\mathfrak{L}\left[e^{bt}sen\left(at\right)\right]$ sabiendo que

$$\mathfrak{L}\left[\cos\left(at\right)\right]=F\left(s\right)=\frac{s}{s^2+a^2}\quad s>0\qquad\qquad \mathfrak{L}\left[sen\left(at\right)\right]=G\left(s\right)=\frac{a}{s^2+a^2}\quad s>0$$

Aplicando la propiedad anterior

$$\mathfrak{L}\left[e^{bt}\cos\left(at\right)\right]=F\left(s-b\right)\qquad\qquad \boxed{\mathfrak{L}\left[e^{bt}\cos\left(at\right)\right]=\frac{s-b}{\left(s-b\right)^2+a^2}\quad s>b}$$

$$\mathfrak{L}\left[e^{bt}sen\left(at\right)\right]=G\left(s-b\right)\qquad\qquad \boxed{\mathfrak{L}\left[e^{bt}sen\left(at\right)\right]=\frac{a}{\left(s-b\right)^2+a^2}\quad s>b}$$

Importante. Observar que del ejemplo anterior se deduce que

$$\boxed{\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}\right]=e^{bt}\cos(at)} \qquad \boxed{\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{a}{(s-b)^2+a^2}\right]=e^{bt}sen(at)}$$

Ejemplo. Calculamos $\mathfrak{L}\left[e^{bt}Ch(at)\right]$ y $\mathfrak{L}\left[e^{bt}Sh(at)\right]$ sabiendo que

$$\mathfrak{L}\left[Ch(at)\right]=F(s)=\frac{s}{s^2-a^2} \quad s>a \qquad \mathfrak{L}\left[Sh(at)\right]=G(s)=\frac{a}{s^2-a^2} \quad s>a$$

Aplicando la propiedad anterior

$$\mathfrak{L}\left[e^{bt}Ch(at)\right]=F(s-b) \qquad \boxed{\mathfrak{L}\left[e^{bt}Ch(at)\right]=\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}}$$

$$\mathfrak{L}\left[e^{bt}Sh(at)\right]=G(s-b) \qquad \boxed{\mathfrak{L}\left[e^{bt}Sh(at)\right]=\frac{a}{(s-b)^2-a^2}}$$

Importante. Observar que del ejemplo anterior se deduce que

$$\boxed{\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}\right]=e^{bt}Ch(at)} \qquad \boxed{\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{a}{(s-b)^2-a^2}\right]=e^{bt}Sh(at)}$$

Propiedad 3 (Traslación en el tiempo).- Si c es cualquier número real positivo, se verifica

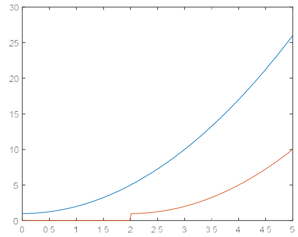
$$\mathfrak{L}\left[U(t-c)f(t-c)\right]=e^{-cs}\mathfrak{L}\left[f(t)\right]=e^{-cs}F(s), \quad \forall s>\alpha$$

siendo α la abscisa de convergencia de $f(t)$.

Es importante darse cuenta que la función $g(t)=U(t-c)f(t-c)$ consiste en la traslación de la función f hacia la derecha anulando la función a la izquierda de t=c.

Ejemplo: Considerando la función $f(t)=t^2+1$, se dibuja en azul la gráfica de la función y en rojo la función $g(t)=U(t-2)f(t-2)$.

```
t=0:0.01:5;
f=inline('t.^2+1')
plot(t,f(t),t,heaviside(t-2).*f(t-2))
```



Ejemplo. Aplicando esta propiedad, teniendo en cuenta que se calculó como ejemplo en la sesión anterior $\boxed{\mathfrak{L}\left[1\right]=\dfrac{1}{s} \qquad s>0}$ se obtiene que: $\boxed{\mathfrak{L}\left[U\left(t-a\right)\right]=\dfrac{e^{-as}}{s} \qquad s>a}$.

Ejemplo. Calcular la transformada de Laplace de la función definida a trozos siguiente:

$$f\left(t\right)=\begin{cases}2t-2 & 1<t<2\\ 0 & en \;\; otro \;\; caso\end{cases}$$

Escribiendo la función a partir de la función escalón se tiene:

$$f\left(t\right)=\left(2t-2\right)U\left(t-1\right)-\left(2t-2\right)U\left(t-2\right)$$

Para aplicar la propiedad consideramos la función escrita de la siguiente manera:

$$f\left(t\right)=2\left(t-1\right)U\left(t-1\right)-2\left(t-2+1\right)U\left(t-2\right)=$$

$$=2\left(t-1\right)U\left(t-1\right)-2\left(t-2\right)U\left(t-2\right)-2U\left(t-2\right)$$

Por lo tanto,

$$\mathfrak{L}\left[f\left(t\right)\right]=\mathfrak{L}\left[2\left(t-1\right)U\left(t-1\right)-2\left(t-2\right)U\left(t-2\right)-2U\left(t-2\right)\right]=$$

$$=2\mathfrak{L}\left[\left(t-1\right)U\left(t-1\right)\right]-2\;\mathfrak{L}\left[\left(t-2\right)U\left(t-2\right)\right]-2\mathfrak{L}\left[U\left(t-2\right)\right]=$$

$$=2\,e^{-2s}\;\mathfrak{L}\left[t\right]+2e^{-2s}\;\mathfrak{L}\left[1\right]-2e^{-s}\mathfrak{L}\left[t\right]=\frac{2\,e^{-2s}}{s^2}+\frac{2e^{-2s}}{s}-\frac{2e^{-s}}{s^2}$$

Propiedad 4 (Derivación de la transformada de Laplace).- Si $F\left(s\right)=\mathfrak{L}\left[f(t)\right]$ entonces,

$$\mathfrak{L}\left[t\,f(t)\right]=-F'\left(s\right)$$

y, en general, $\mathfrak{L}\left[t^n f(t)\right]=\left(-1\right)^n F^{(n}(s)$

Propiedad 5 (Integración de la transformada de Laplace).- Si $F\left(s\right)=\mathfrak{L}\left[f(t)\right]$ y existe $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)}{t}$ entonces, $\mathfrak{L}\left[\dfrac{f(t)}{t}\right]=\displaystyle\int_s^{\infty}F(x)dx$ siempre que esta integral sea convergente.

Propiedad 6 (Trasformada de la derivada).- Si la función $f\left(t\right)$ y $f'(t)$ son continuas y de tipo exponencial para $t \geq 0$, entonces

$$\mathfrak{L}\left[f'(t)\right] = sF\left(s\right) - f\left(0\right), \quad s > \alpha$$

donde $F\left(s\right) = \mathfrak{L}\left[f\left(t\right)\right]$. Si f no es continua, pero existe $f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ se verifica

$$\mathfrak{L}\left[f'(t)\right] = sF\left(s\right) - f\left(0^+\right), \quad s > \alpha$$

Ejemplo. Vamos a calcular la transformada del coseno a partir de la transformada del seno

$$\mathfrak{L}\left[sen\left(at\right)\right] = G\left(s\right) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad s > 0$$

Se tiene:

$$\mathfrak{L}\left[\cos\left(t\right)\right] = \mathfrak{L}\left[\left(sen\left(t\right)\right)'\right] = s\mathfrak{L}\left[sen\left(t\right)\right] - sen\left(0\right) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Importante: Esta propiedad se puede generalizar si las derivadas sucesivas son continuas y de tipo exponencial. Así, por ejemplo,

$$\mathfrak{L}\left[f''(t)\right] = s\mathfrak{L}\left[f'(t)\right] - f'\left(0\right) = s\left(s\mathfrak{L}\left[f(t)\right] - f\left(0\right)\right) - f'\left(0\right)$$

$$\boxed{\mathfrak{L}\left[f''(t)\right] = s^2\mathfrak{L}\left[f(t)\right] - sf\left(0\right) - f'\left(0\right)}$$

$$\mathfrak{L}\left[f'''(t)\right] = s\mathfrak{L}\left[f''(t)\right] - f''\left(0\right) = s\left(s^2\mathfrak{L}\left[f(t)\right] - sf\left(0\right) - f'\left(0\right)\right) - f''\left(0\right) =$$

$$\boxed{\mathfrak{L}\left[f'''(t)\right] = s^3\mathfrak{L}\left[f(t)\right] - s^2 f\left(0\right) - sf'\left(0\right) - f''\left(0\right)}$$

y así sucesivamente dando lugar a la siguiente propiedad.

Propiedad 6 generalizada.- Si $y(t)$ y sus n primeras derivadas son continuas y de tipo exponencial para $t \geq 0$, entonces

$$\mathfrak{L}\left[y^{(n}\right] = s^n Y\left(s\right) - s^{n-1}y\left(0\right) - s^{n-2}y'\left(0\right) - s^{n-3}y''\left(0\right) - \ldots - s\,y^{(n-2}\left(0\right) - y^{(n-1}\left(0\right)$$

Donde se ha utilizado la notación, $Y\left(s\right) = \mathfrak{L}\left[y\left(t\right)\right]$

Propiedad 7 (Trasformada de la integral).- Si existe $\mathfrak{L}\left[f(t)\right]$ para $s > \alpha \geq 0$, entonces

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \frac{1}{s}F\left(s\right), \quad s > \alpha$$

Propiedad 8 (Escala).- Si $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)]$ para $s > \alpha$, entonces para cualquier constante real $a > 0$, se verifica

$$\mathfrak{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \forall s > \alpha$$

Demostración:

$$\mathfrak{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(at)\, dt \underset{\left[\begin{array}{l} u=at \to du=adt \\ t=\frac{u}{a} \end{array}\right]}{=} \int_0^{\infty} e^{-s\frac{u}{a}} f(u) \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}u} f(u)\, du = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \forall s > \alpha$$

Propiedad 9 (Transformada de funciones periódicas).- Si $f(t)$ tiene período T, se cumple

$$\mathfrak{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt, \quad \forall s > \alpha$$

Definición (Convolución).- Se define la convolución de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, como la función $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t-u)\, du$.

Propiedad 10 (Convolución).- La convolución de dos funciones verifica

$$\mathfrak{L}[f * g] = \mathfrak{L}[f(t)] \cdot \mathfrak{L}[g(t)] = F(s) \cdot G(s)$$

6 Teoremas

A continuación, se enuncian dos teoremas que, junto con las propiedades anteriores, son de uso frecuente en el cálculo de transformadas de Laplace.

TEOREMA DEL VALOR INICIAL.- Si $f(t)$ y $f'(t)$, admiten transformada de Laplace, entonces se podrá obtener el valor de $f(t)$ en el origen a partir de $F(s)$ como,

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

siempre que exista $\lim_{s \to \infty} sF(s)$.

TEOREMA DEL VALOR FINAL.- Si $f(t)$ y $f'(t)$, admiten transformada de Laplace es posible obtener el valor de $f(t)$ en el infinito a partir de $F(s)$, como

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

siempre que exista $\lim_{t\to\infty} f(t)$.

7 Aplicación: Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

Las ecuaciones diferenciales ordinarias que vamos a resolver mediante transformadas de Laplace son ecuaciones lineales con coeficientes constantes y con condiciones iniciales (*problemas de valor inicial*). Es decir, que, en general, se tendrá una ecuación diferencial del tipo

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)\,, \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

y se buscará la solución $y(t)$ de la ecuación para $t \geq 0$, que satisfaga las "n" condiciones iniciales

$$y(0) = c_0\ , \quad y'(0) = c_1\ , \quad y''(0) = c_2\ , \ldots\ldots , \quad y^{(n-1}(0) = c_{n-1}$$

La importancia de la transformada de Laplace en la resolución de este tipo de ecuaciones se basa en que, mediante su aplicación, una ecuación diferencial se transforma en una ecuación algebraica.

La generalización de la propiedad 6, enunciada anteriormente, marca el camino para esta transformación.

El método consiste en:

1. Aplicar la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación diferencial.
2. Utilizar la propiedad 6 generalizada.
3. Despejar la transformada $Y(s)$.
4. Finalmente calcular la transformada inversa de $Y(s)$, para obtener la función solución $y(t)$.

Este mismo método se puede aplicar a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Al aplicar transformada de Laplace, estos sistemas quedan convertidos en sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, cuya resolución proporciona las transformadas de Laplace de las funciones incógnitas.

Ejemplo. Resolver utilizando transformadas de Laplace, el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + y = U(t-1) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Siguiendo el procedimiento anterior, se seguirían los siguientes pasos:

1. Se aplica la transformada de Laplace a la ecuación diferencial

$$\mathfrak{L}(y'') + \mathfrak{L}(y) = \mathfrak{L}(U(t-1))$$

2. Llamando $\mathrm{Y}(s)=\mathfrak{L}(y)$, y teniendo en cuenta que

$$\mathfrak{L}\left[y''(t)\right]=s^2\mathfrak{L}\left[y(t)\right]-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s) \qquad \mathfrak{L}\left(U(t-1)\right)=\frac{e^{-s}}{s}$$

Se tiene

$$s^2\mathrm{Y}(s)+\mathrm{Y}(s)=\frac{e^{-s}}{s}$$

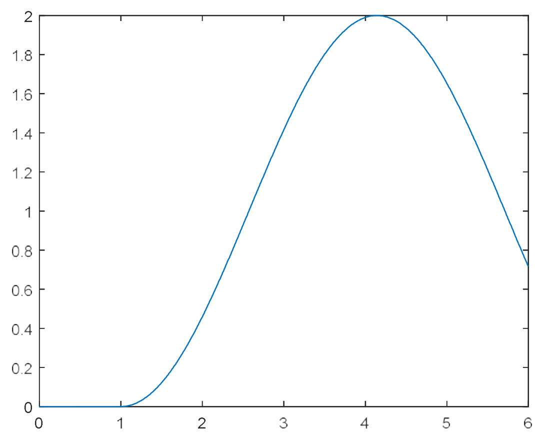
3. Despejando Y(s)

$$\mathrm{Y}(s)=\frac{e^{-s}}{s\left(s^2+1\right)}$$

4. Finalmente, calculando la transformada de Laplace inversa se tendrá la solución de la ecuación diferencial

$$y(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left(\mathrm{Y}(s)\right)=\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s\left(s^2+1\right)}\right)=\mathfrak{L}^{-1}\left(e^{-s}\frac{1}{s}-e^{-s}\frac{s}{s^2+1}\right)$$

$$\boxed{y(t)=U(t-1)-U(t-1)\cos(t-1)}$$



La importancia de la transformada de Laplace en la resolución de este tipo de ecuaciones se basa en que, mediante su aplicación, una ecuación diferencial se transforma en una ecuación algebraica.

La generalización de la propiedad 6, enunciada anteriormente, marca el camino para esta transformación.

Propiedad 6 generalizada.- Si $y(t)$ y sus n primeras derivadas son continuas y de tipo exponencial para $t \geq 0$, entonces

$$\mathfrak{L}\left[y^{(n}\right]=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-s^{n-3}y''(0)-\ldots-s\,y^{(n-2}(0)-y^{(n-1}(0)$$

Donde se ha utilizado la notación, $Y(s)=\mathfrak{L}\left[y(t)\right]$

El método consiste en:

- Aplicar la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación diferencial.
- Utilizar la propiedad 6 generalizada.
- Despejar la transformada $Y(s)$.
- Finalmente calcular la transformada inversa de $Y(s)$, para obtener la función solución $y(t)$.

Este mismo método se puede aplicar a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Al aplicar transformada de Laplace, estos sistemas quedan convertidos en sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, cuya resolución proporciona las transformadas de Laplace de las funciones incógnitas.

8 Aplicación: Resolución de ecuaciones integrales

Una ecuación integral es aquella en la que la función incógnita $f\left(t\right)$ se halla bajo el signo integral. Consideraremos, entre otras, ecuaciones integrales de la forma siguiente

$$f\left(t\right) = g\left(t\right) + \int_0^t f\left(u\right)N\left(t - u\right)du$$

donde $f\left(t\right)$ es la función buscada, mientras que $g\left(t\right)$ y $N\left(t\right)$ son funciones conocidas.

El método de resolución consiste en aplicar transformadas de Laplace a ambos lados de la igualdad anterior y utilizar la propiedad de la convolución. De esta forma se despeja la transformada de la solución, para finalmente obtener $f\left(t\right)$, aplicando la transformada inversa de Laplace.

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE FUNCIONES GENERALIZADAS

9 Función delta de Dirac

Definición (Función Delta de Dirac).- La función impulso unidad o delta de Dirac $\delta(t-c)$ se define como aquella que verifica las dos propiedades siguientes:

a) $$\delta(t-c) = \begin{cases} 0 & si \;\; t \neq c \\ \infty & si \;\; t = c \end{cases}$$

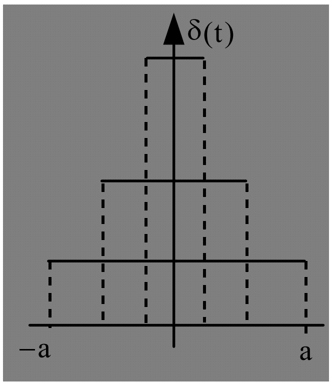
b) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-c)dt = 1$$

Modelización de la función Delta de Dirac:

$$\delta(t) = \lim_{a\to 0} f(t,a)$$

donde

$$f(t,a) = \begin{cases} 1/2a & si \ \ |t| < a \\ 0 & si \ \ |t| \geq a \end{cases}$$



PROPIEDAD 1.- Si se denota por $U(t-c)$ a la función escalón unidad se tiene
$\delta(t-c) = U'(t-c)$

PROPIEDAD 2.- Las funciones generalizadas (en particular la función delta de Dirac y sus derivadas) pueden sumarse, restarse y multiplicarse por constantes.
También es posible el producto de una función ordinaria por una generalizada:

$$\delta(t-c)f(t) = f(t)\delta(t-c) = f(c)\delta(t-c)$$

siempre que f sea continua en $t=c$.

PROPIEDAD 2 generalizada.- El producto de una función ordinaria por la derivada de orden n de la función delta, es de la forma

$$f(t)\delta^{(n}(t-c) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f^{(k}(c)\delta^{(n-k}(t-c) \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

siempre que $f, f', f'', \ldots, f^{(n}$ sean continuas en $t=c$.

PROPIEDAD 3.-

i) Si $a<b$, $a \neq c$ y $b \neq c$, entonces

$$\int_a^b \delta(t-c)dt = \begin{cases} 1 & si \ \ a<c<b \\ 0 & si \ \ no \end{cases} \qquad \int_a^b \delta^{(n}(t-c)dt = 0 \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

ii) Si $a<c<b$ y $f^{(n}(t)$ es continua en $t=c$, entonces

$$\int_a^b f(t)\delta^{(n}(t-c)dt = (-1)^n f^{(n}(c) \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

PROPIEDAD 4 (Filtro).- Si f es continua en un intervalo que contiene a $t=c$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-c)dt = f(c)$$

PROPIEDAD 5 (Convolución).- Si f es una función ordinaria,

$$\delta^{(n}(t-c) * f(t) = f(t) * \delta^{(n}(t-c) = f^{(n}(t-c) \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Además

$$\delta^{(n_1}(t-c_1) * \delta^{(n_2}(t-c_2) = \delta^{(n_1+n_2}(t-c_1-c_2) \qquad n_1,\ n_2 = 0,1,2,\ldots$$

PROPIEDAD 6.- Si $a \neq 0$, $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

10 Transformada de Laplace de funciones generalizadas

Resulta interesante conocer la transformada de Laplace de las funciones generalizadas para aplicar los resultados al método de resolución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias.

En el apartado anterior se han visto la definición y propiedades de la función delta de Dirac. Aplicando la propiedad de filtro y suponiendo que $c > 0$, se deduce

$$\mathfrak{L}\left(\delta\left(t-c\right)\right) = \int_0^{\infty} \delta\left(t-c\right)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-sc}\delta\left(t-c\right)dt = e^{-sc}$$

Si $c = 0$, se obtiene

$$\mathfrak{L}\left(\delta\left(t\right)\right) = \int_0^{\infty} \delta\left(t\right)e^{-st}dt = e^{-s0} = 1$$

y, en general

$$\mathfrak{L}\left(\delta^{(n}(t-c)\right) = \int_0^{\infty} \delta^{(n}(t-c)e^{-st}dt = (-1)^n(-s)^n e^{-sc} = s^n e^{-sc}, \quad c \geq 0, \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

Cabe señalar que en el contexto de las transformadas de Laplace, las funciones se toman definidas para $t \geq 0$, por lo cual la constante de traslación *c* debe ser no negativa, como hemos indicado arriba. Con frecuencia consideraremos las funciones definidas en toda la recta real, multiplicándolas por la función escalón unitario $U(t)$ para que se anulen en $t < 0$.

Contando con estas nuevas transformadas y utilizando las propiedades de la transformada de Laplace podremos encontrar transformadas inversas de polinomios y de polinomios multiplicados por el factor e^{-sc}, como puede verse en la tabla de transformadas.

11 Función de transferencia de un sistema

Supongamos que la siguiente ecuación diferencial sirve de modelo de funcionamiento de un sistema de ingeniería sencillo

$$\frac{d\,y(t)}{dt} + y(t) = f(t) \quad , \quad y(0) = y_0$$

en esta ecuación diferencial $f(t)$ representa la señal de entrada del sistema e $y(t)$ es la señal de salida, o respuesta del sistema. Por razones de mayor simplicidad vamos a considerar que las condiciones iniciales asociadas con la ecuación diferencial son nulas, es decir que $y(0) = 0$. Tomando transformadas de Laplace en la ecuación anterior obtenemos

$$sY(s) - y_0 + Y(s) = F(s) \quad \Rightarrow \quad (1+s)Y(s) = F(s) \;\text{ con }\; y(0) = 0$$

luego

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{1+s}$$

Definición (Función de transferencia de un sistema).- La función $G(s)$ se denomina función de transferencia del sistema. Se trata de la transformada de Laplace de la señal de salida dividida por la transformada de Laplace de la señal de entrada

INTRODUCCIÓN A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

12 De las series de Fourier a la Transformada de Fourier

El objetivo de esta parte del tema es conseguir una representación en senos y cosenos de una función NO PERIÓDICA $f(x)$, definida en $\mathbb{R}$ .Para ello nos apoyaremos en la serie de Fourier de una función periódica, estudiada en Cálculo I.

Se busca una representación de Fourier de la función **no periódica**, $f(x)$, definida en $\mathbb{R}$. Para ello, se considera una función **periódica**, $f_p(x)$, de periodo $T = 2p$, que admite desarrollo en serie de Fourier y tal que:

a) $f_p(x) = f(x)$ para $x \in [-p, p]$ b) $\lim_{p\to\infty} f_p(x) = f(x)$

La condición b) es la clave para la solución del problema, ya que partiendo del desarrollo de Fourier de $f_p(x)$ y haciendo tender *p* a infinito, la serie de Fourier se convertirá en "*una aproximación*" de en términos de senos y cosenos.

Ejemplo: Se busca una representación de Fourier para la función **no periódica**:

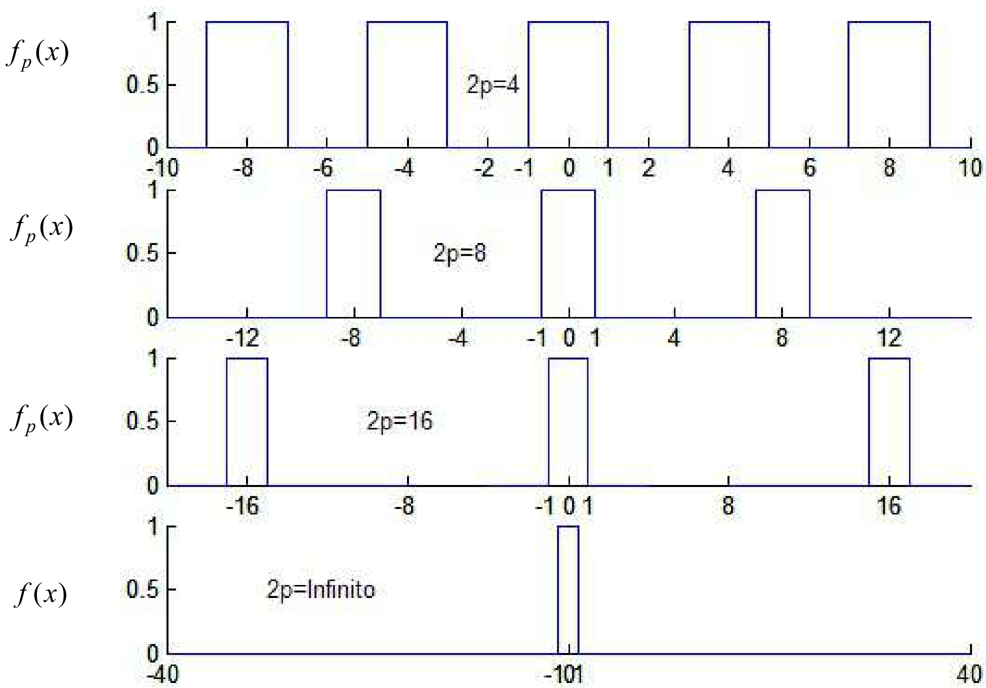
$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad -1<x<1 \\ 0 & \text{si} \quad |x|\geq 1\end{cases}$$

Se parte de la función **periódica** siguiente, de periodo $T=2p$:

$$f_p(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad -p<x<-1 \\ 1 & \text{si} \quad -1<x<1 \\ 0 & \text{si} \quad 1<x<p\end{cases}$$

cuya serie de Fourier es:

$$f_p(x)=\frac{1}{p}+\frac{2}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\omega}{n\omega}\cos n\omega x, \qquad \omega=\frac{\pi}{p}$$



Comparando las gráficas de $f(x)$ y de $f_p(x)$ para valores crecientes de *p*, se observa que cuando *p* aumenta, la gráfica de f_p se aproxima más y más a la gráfica de f, cumpliéndose que cuando $p\to\infty$, $f_p\to f$.

Según esto, parece lícito intentar obtener una representación de Fourier de f, partiendo de la serie de Fourier de $f_p(x)$ y haciendo tender *p* a infinito.

Calculando el límite en este ejemplo, se obtiene

$$\lim_{p\to\infty} f_p(x) = \lim_{p\to\infty}\left[\frac{1}{p} + \frac{2}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\, n\omega}{n\omega}\cos n\omega x\right] \underset{\substack{n\omega=\omega_n \\ \Delta\omega=\frac{\pi}{p}}}{=}$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left[\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\,\omega_n}{\omega_n}\cos\omega_n x\ \Delta\omega\right] \underset{Ver\ observación}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\text{sen}\,\omega}{\omega}\cos\omega x\, d\omega = f(x)$$

OBSERVACIÓN: El hecho de que cuando *p* crece, las frecuencias de los términos de la serie de Fourier se agrupen más y más, mientras que los coeficientes se hacen más pequeños, indica que cuando $p\to\infty$, esta serie considerada como función de *p,* es en realidad una suma de infinitésimos cuyo límite es una integral.

Esta integral es la representación de Fourier de la función **no periódica** $f(x)$, y recibe el nombre de Integral de Fourier de $f(x)$.

En el siguiente teorema se recogen las condiciones bajo las cuales se verifica que

$$f(x) = \lim_{p\to\infty} f_p(x) = \lim_{p\to\infty}\left[serie\ \ de\ \ Fourier\ \ de\ \ f_p(x)\right]$$

y se expresa el valor del límite.

TEOREMA (Integral de Fourier).- Si $f(x)$ es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ y cumple el criterio de Dirichlet en cualquier intervalo finito $[a,b]$ del eje OX, entonces $f(x)$ se puede representar mediante la integral de Fourier, verificándose

$$f(x) = \int_0^{\infty}\left[a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\,\text{sen}\,\omega x\right]d\omega$$

siendo,

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx \qquad\qquad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\text{sen}\,\omega x\, dx$$

Además, la integral de Fourier obtenida converge a $f(x)$ donde la función es continua , y converge a $\dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$ en los puntos de discontinuidad.

La expresión de la integral de Fourier escrita en el teorema anterior se conoce como *"forma trigonométrica"* o *"forma real"* y tiene un gran parecido formal con la serie de Fourier para una función periódica de periodo 2π.

Resulta inmediato comprobar que si $f(x)$ es par, entonces $b(\omega)=0$ y si $f(x)$ es impar, entonces $a(\omega)=0$.

Sin embargo, la forma habitual de expresar la integral de Fourier es la forma compleja que se escribe a continuación:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega$$

siendo,

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$$

Resulta sencillo demostrar que se verifica la siguiente relación entre el coeficiente complejo $C(\omega)$, y los coeficientes reales de la integral,

$$C(\omega) = \frac{a(\omega) - ib(\omega)}{2}$$

13 Transformada de Fourier

Supongamos que una función $f(x)$ es regular a trozos en un segmento finito cualquiera del eje OX y absolutamente integrable en todo el eje.

Definición (Transformada de Fourier).- Se llama transformada de Fourier de la función $f(x)$ a la función:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\left[f(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

OBSERVACIÓN: El coeficiente complejo de la integral de Fourier y su Transformada de Fourier están relacionados por una constante:

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega)$$

Definición (Transformada inversa de Fourier).- Se llama transformada inversa de Fourier de la función $F(\omega)$ a la función:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

OBSERVACIÓN: La transformada inversa de Fourier de $F(\omega)$ es la integral de Fourier de $f(x)$.

14 Espectros de amplitud y de fase

Definición (Espectro de amplitud).- El espectro de amplitud de $f(x)$, es la gráfica del módulo de su transformada de Fourier, $|F(\omega)|$, frente a la frecuencia ω.

Este espectro es una curva continua, cuyo valor en cada frecuencia ω, mide la contribución de esa frecuencia al valor de la función. Así como la serie de Fourier descompone una función periódica en un conjunto discreto de ciertas frecuencias (múltiplos de la fundamental), la transformada de Fourier proporciona una resolución en frecuencias continuas de una función no periódica.

IMPORTANTE: El espectro de amplitud de una función real es siempre una función par y tiende a cero con ω.

Definición (Espectro de fase).- El espectro de fase de $f(x)$, es la gráfica del argumento de su transformada de Fourier, "$\arg F(\omega)$", frente a la frecuencia ω.

Recordemos que, siendo $F(\omega)$ una función compleja (de variable real), es posible expresar su ecuación en forma exponencial:

$$F(\omega) = \left|F(\omega)\right| e^{i \arg F(\omega)}$$

Los espectros de amplitud y de fase caracterizan a $f(x)$ en el dominio de la frecuencia.

Hemos visto que el estudio de una función en el dominio de las frecuencias requiere el cálculo de su transformada de Fourier. Sin embargo, el cálculo, tanto de transformadas como de transformadas inversas, a partir de la definición, conduce en la mayoría de los casos a integrales inviables.

Por ello, se dan a continuación las propiedades básicas de la Transformación de Fourier, que junto con las tablas, permiten calcular de forma sencilla, las transformadas de un buen número de funciones, sin tener que recurrir a la definición. Las tablas de transformadas están al final del resumen teórico.

15 Propiedades de la Transformada de Fourier

Propiedad 1 (Linealidad).- La transformación de Fourier ($\mathfrak{F}$), es un operador lineal, es decir, $\mathfrak{F}\left[\alpha f(x) + \beta g\left(x\right)\right] = \alpha \mathfrak{F}\left[f(x)\right] + \beta \mathfrak{F}\left[g(x)\right]$ con $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

Propiedad 2 (Acotación).- Si $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de una función $f(x)$, integrable absolutamente en todo el eje real, entonces $F(\omega)$ es una función acotada.

Propiedad 3 (Traslación en el tiempo).- Sea $f(x)$ una función que admite la transformación de Fourier y h un número real. Entonces la transformada de la función desplazamiento de $f(x)$, definida por la ecuación $f_h(x) = f(x-h)$, es: $\mathfrak{F}(f_h) = e^{-i\omega h}\mathfrak{F}(f)$

Propiedad 4 (Traslación en la frecuencia).- Sea $f(x)$ una función que tiene como transformada de Fourier $F(\omega)$ y h un número real. Entonces:

$$\mathfrak{F}\left[e^{ihx} f(x)\right] = F(\omega - h)$$

Propiedad 5.- (Transformación de la derivada).- Supongamos que $f(x)$ tiene derivada $f'(x)$ también absolutamente integrable en todo el eje OX de tal forma que $f(x)$ tiende a cero cuando | x | tiende a ∞. Entonces

$$\mathfrak{F}\left[f'(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx = i\omega\mathfrak{F}\left[f(x)\right]$$

Propiedad 6 (Derivada de la transformación).- Supongamos que $f(x)$ y $xf(x)$ son funciones absolutamente integrables en todo el eje OX. Entonces la transformada de Fourier de la función $f(x)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

es derivable y además

$$F'(\omega) = -i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\omega x}dx = -i\mathfrak{F}\left[xf(x)\right]$$

Propiedad 7 (Simetría).- Sea $f(x)$ una función que tiene como transformada de Fourier $F(\omega)$, entonces: $\mathfrak{F}\left[F(x)\right] = 2\pi f(-\omega)$

Propiedad 8 (Escalado).- Sea $f(x)$ una función que tiene como transformada de Fourier $F(\omega)$, entonces: $\mathfrak{F}\left[f(ax)\right] = \dfrac{1}{|a|} F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$

Propiedad 9.- (Convolución).- Sean $F(\omega)$ y $G(\omega)$ las transformadas de Fourier de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente. Entonces $\mathfrak{F}\left(f * g\right) = \mathfrak{F}\left(f\right) \cdot \mathfrak{F}\left(g\right)$

Es decir, la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones es igual al producto de las transformadas de Fourier de las funciones que se someten a la convolución.

Definición (Convolución).- Se define la convolución de las funciones $f(t)$ y $g(t)$, como la función $\left(f * g\right)\left(t\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f\left(u\right) g\left(t-u\right) du$

Ejercicios propuestos

1 Estudiar si las siguientes funciones $f\left(t\right)$ verifican las condiciones suficientes de existencia de la transformada de Laplace. Obtener, siempre que sea posible, la abscisa de convergencia de $f\left(t\right)$.

a) $f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ 1 & si \quad t \geq 0 \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ sen\,(at) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ t^2 e^{-3t} & si \quad t > 0 \end{cases}$

d) $f(t) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & t < 0 \\ t^m & si & t \geq 0 \end{array} \right\}, \quad m \in Z^+$

Solución

En los cuatro casos, las funciones verifican las condiciones suficientes de existencia de la transformada de Laplace. La abscisa de convergencia toma los valores siguientes:

a) $\alpha = 0$ b) $\alpha = 0$ c) $\alpha = -3$ d) $\alpha = 0$

2 Calcular las transformadas de Laplace de las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}^+$ y comprobar los resultados con Matlab:

a) $f(x) = 1$ b) $f(x) = U(x-a)$

c) $f(x) = e^{ax}$ d) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = \cos ax$ f) $f(x) = \operatorname{sen} ax$

Comandos de Octave/Matlab para el cálculo de transformadas y transformadas inversas de Laplace:

Ejemplo de cálculo de transformada de Laplace

```
f=sym('x^3'); F=laplace(f)
```

o también

```
syms x; F=laplace(x^3)
```

Ejemplo de cálculo de transformada inversa:

```
syms s; f=ilaplace(1/(s^2+1)/(s+1))
```

Solución:

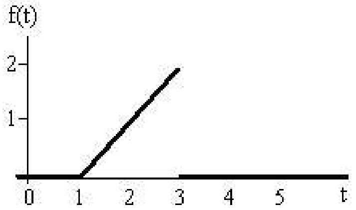
a) $F\left(s\right) = \dfrac{1}{s}$ b) $F\left(s\right) = \dfrac{e^{-as}}{s}$

c) $F\left(s\right) = \dfrac{1}{s-a}$ d) $F\left(s\right) = \dfrac{2}{s^3}$;

e) $F(s)=\dfrac{s}{s^2+a^2}$ f) $F(s)=\dfrac{a}{s^2+a^2}$

3

Sea $f(t)$ la función cuya gráfica muestra la figura. Definir dicha función utilizando las funciones salto o funciones de Heaviside $U(t-c)$. Hallar la transformada de Laplace de $f(t)$ aplicando la definición de transformada. Comprobar el resultado con Matlab.



Solución

$$f(t)=(t-1)\cdot U(t-1)+(1-t)\cdot U(t-3)$$

$$F(s)=\frac{e^{-s}}{s^2}-e^{-3s}\cdot\left(\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}\right)$$

4

Aplicando las propiedades de las transformadas de Laplace junto con la tabla de transformadas, hallar la transformada de Laplace de las siguientes funciones $f(t)$:

a) $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$ b) $Sh\,(3t)=\dfrac{e^{3t}-e^{-3t}}{2}$

c) $Ch\,(5t)$ d) $e^{-t}\cdot sen\,(2t)$

e) $sen\left(\dfrac{2t}{3}\right)$ f) $\dfrac{\cos(7t)}{e^{5t}}$

Solución:

a) $F(s)=\dfrac{4s}{4s^2+1}$ b) $F(s)=\dfrac{3}{s^2-9}$

c) $F(s)=\dfrac{s}{s^2-25}$ d) $F(s)=\dfrac{2}{(s+1)^2+4}$

e) $F(s)=\dfrac{6}{9s^2+4}$ f) $F(s)=\dfrac{s+5}{(s+5)^2+49}$

4

Calcula la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

(a) $U(t)$ (b) $U(t-a)$

(c) $f(t)=\begin{cases}0 & t<3\\ 2 & 3\le t\end{cases}$

(d) $f(t)=\begin{cases}3 & 0<t<2\\ 0 & 2\le t\end{cases}$

(e) $f(t)=\begin{cases}1 & 2<t\le 3\\ 0 & en\ otro\ caso\end{cases}$

(g) $U(t-1)-U(t-2)$

(h) $tU(t-1)$

(i) $e^tU(t-2)-e^t(t-3)$

(j) $f(t)=\begin{cases}sen t & 0<t<2\pi\\ 0 & 2\pi\le t\end{cases}$

Solución:

(a) $\dfrac{1}{s}$ (b) $\dfrac{e^{-as}}{s}$ (c) $\dfrac{2e^{-3s}}{s}$

(d) $3\dfrac{1-e^{-2s}}{s}$ (j) $\dfrac{1-e^{-2\pi s}}{s^2+1}$

5

Calcular las transformadas inversas de Laplace de las siguientes funciones $F(s)$ y comprobar los resultados con Matlab:

(a) $\dfrac{1}{s-3}$ (b) $\dfrac{2}{3s+5}$ (c) $\dfrac{3}{s(s+3)}$

(d) $\dfrac{1}{s^2+64}$ (e) $\dfrac{-2s+6}{s^2+64}$

(f) $\dfrac{1}{s(s^2+4)}$ (g) $\dfrac{e^{2s}}{s-3}$

(h) $\dfrac{e^{-3s}}{(s-1)(s-2)}$ (i) $\dfrac{e^{-s}}{s^2+s}$

Solución

(a) e^{3t} (b) $\dfrac{2}{3}e^{-5t/3}$ (c) $1-e^{3t}$

(d) $\dfrac{1}{8}sen8t$ (e) $-2\cos 2t+\dfrac{6}{8}sen8t$

(f) $\dfrac{1}{4}(1-\cos 2t)$ (g) $U(t-2)e^{3(t-2)}$

(i) $U(t-1)-U(t-1)e^{-(t-1)}$

6

Calcular las transformadas inversas de Laplace de las siguientes funciones $F(s)$ y comprobar los resultados con Matlab:

a) $\dfrac{s+3}{(s-2)(s+1)}$ b) $\dfrac{1}{s^2-2s+9}$

c) $\dfrac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}$ d) $\dfrac{e^{-3s}}{s^2}$ e) $\dfrac{10}{(s+2)^4}$

f) $\dfrac{2s+3}{s^2+6s+13}$ g) $\dfrac{3}{s(s^2+4)}$

h) $\dfrac{(s+3)}{s(s^2+1)}$ i) $\dfrac{(s+3)e^{-s\pi}}{s(s^2+1)}$

j) $\dfrac{(s+3)e^{-2s}}{s(s^2+1)}$

Solución

a) $f(t)=-\dfrac{2}{3}e^{-t}+\dfrac{5}{3}e^{2t}$

b) $f(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}e^{t}sen\left(2\sqrt{2}\,t\right)$ c) $f(t)=t\cdot\operatorname{sen}t$

d) $f(t)=(t-3)\cdot U(t-3)$

e) $f(t)=\dfrac{5}{3}t^3e^{-2t}$

f) $f(t)=e^{-3t}\left(2\cos 2t-\dfrac{3}{2}\operatorname{sen}2t\right)$

g) $f(t)=\dfrac{3}{4}(1-\cos 2t)$

h) $f(t)=(3-3\cos t+\operatorname{sen}t)$

i) $f(t)=U(t-\pi)(3+3\cos t-\operatorname{sen}t)$

j)
$f(t)=U(t-2)\big(3-3\cos(t-2)+\operatorname{sen}(t-2)\big)$

7 Resolver las siguientes ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales:

a) $x''+2x'+5x=1$, siendo las condiciones iniciales $x(0)=x'(0)=0$

b) $x'''-2x''+3x'-6x=4t$, con las condiciones iniciales
$x(0)=x'(0)=0\,;\quad x''(0)=1/6$

c) $x''+4x=f(t)$, con las condiciones iniciales $x(0)=x'(0)=0$ siendo

$$f(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<5\\ \dfrac{t-5}{5} & 5\le t<10\\ 1 & t\ge 10\end{cases}$$

d) $x''+x=f(t)$, con las condiciones iniciales $x(0)=0,\ x'(0)=1$ siendo

$$f(t)=\begin{cases}t/2 & 0\le t<6\\ 2 & t\ge 6\end{cases}$$

e) $\begin{cases}x'(t)=2x-5y\\ y'(t)=x-2y\end{cases}$, con las condiciones iniciales $x(0)=1\,;\quad y(0)=0$

Solución

a) $x(t)=\dfrac{1}{5}\left\{1-e^{-t}\left(\cos 2t+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}2t\right)\right\};$

b) $x(t)=\dfrac{1}{6}e^{2t}+\dfrac{1}{6}\cos\sqrt{3}t+$
$+\dfrac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{sen}\sqrt{3}t-\dfrac{2}{3}t-\dfrac{1}{3};$

c)
$x(t)=\dfrac{1}{40}\left[2(t-5)-sen\left(2(t-5)\right)\right]U(t-5)-$
$-\dfrac{1}{40}\left[2(t-10)-sen\left(2(t-10)\right)\right]U(t-10)-$

d) $x(t)=\dfrac{1}{2}\big[t+sent-$
$-\left(t-6-sen(t-6)\right)U(t-6)\big]$

e) $x(t)=\cos t+2\operatorname{sen}t\quad;\quad y(t)=\operatorname{sen}t$

8 Una masa que pesa 32 g. se encuentra sujeta al extremo de un resorte ligero que se estira 1 m. cuando se le aplica una fuerza de 4 kg. Si la masa se encuentra en reposo en su posición de equilibrio cuando t=0 y si, en ese instante, se aplica una fuerza de excitación $f(t)=\cos t$ que cesa abruptamente en $t=2\pi$ s, determinar la función de posición de la masa en cualquier instante, si se permite a la masa continuar su movimiento sin impedimentos.

Teniendo en cuenta la ley de Hooke, la ecuación que modela la posición de la masa m es

$$x''+4x=\begin{cases}\cos t & 0\le t\le 2\pi\\ 0 & t>2\pi\end{cases}$$

Solución:

$$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}\operatorname{sen}2t & 0\le t<2\pi\\ \frac{1}{4}t\operatorname{sen}t-\frac{1}{16}\operatorname{sen}2t+ & t\ge 2\pi\\ +\frac{1}{16}t\cos 2t-\frac{3\pi}{8}\cos 2t & \end{cases}$$

9 Un circuito RLC, con $R=110\Omega$, L=1H y C=0.002F tiene conectada una batería de 90V. Supongamos que en t=0 no hay corriente en el circuito ni carga en el condesador y que, en el mismo instante, se cierra el interruptor por 1 seg. Si al tiempo t=1 se abre el interruptor, y así se conserva, encontrar la corriente resultante en el circuito.

Nota: Aplicando las leyes de Kirchhoff, la ecuación que modela el circuito es

$I'+110I+\frac{1}{0.001}\int_o^t Idt=E$ siendo

$E=90\left(u(t)-u(t-1)\right)$

Solución:

$$I(t)=\begin{cases}e^{-10t}-e^{-100t} & 0\le t<1\\ \left(1-e^{10}\right)e^{-10t}-\left(1-e^{100}\right)e^{-100t} & t\ge 1\end{cases}$$

10 Una droga entra y sale de un órgano de volumen $v_o\ cm^3$ a una tasa de $\alpha\, cm^3/seg$, donde v_o y α son constantes. Supongamos que, en el tiempo t=0, la concentración de la droga es 0 y tras administrarla, dicha concentración aumenta linealmente hasta un máximo de K en el tiempo $t=t_o$ en el cual el proceso se detiene. Determinar la concentración de la droga en el órgano en todo instante y su máximo valor.

Solución: Para $t<t_o$ se tendrá

$x(t)=\frac{kt}{t_o}-\frac{v_o k}{\alpha t_o}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{v_o}t}\right)$. Si $t>t_o$,

$$x(t)=\frac{v_o k}{\alpha t_o}e^{-\frac{\alpha}{v_o}t}+\left(k-\frac{v_o k}{\alpha t_o}\right)e^{-\frac{\alpha}{v_o}(t-t_o)}$$

Test de autoevaluación

1 Estudiar si la función $f(t)=U(t)e^{3t}$ verifica las condiciones suficientes para que exista su transformada de Laplace y, si existe, elegir la abscisa de convergencia correcta para $f(t)$:

A) La abscisa de convergencia de $f(t)$ es $\alpha=-3$.

B) La abscisa de convergencia de $f(t)$ es $\alpha=0$.

C) La abscisa de convergencia de $f(t)$ es $\alpha=3$.

D) Ninguna de las anteriores.

2 Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t)=\left\{\begin{matrix}2 & si & 0\le t\le 5\\ 6 & si & t>5\end{matrix}\right\}$, utilizando las funciones de Heaviside para definir $f(t)$ y, posteriormente, la tabla de transformadas:

A) $F(s)=\frac{2}{s}+\frac{6e^{-5s}}{s}$

B) $F(s)=\frac{2}{s}+\frac{4e^{5s}}{s}$

C) $F(s)=\frac{2}{s}+\frac{4e^{-5s}}{s}$

D) Ninguna de las anteriores.

3 Elegir la respuesta correcta para definir el carácter convergente o divergente de cada una de las siguientes integrales:

$$I=\int_0^\infty e^t\operatorname{sen}2tdt\quad ;\quad J=\int_0^\infty te^{-t}\cos 3tdt$$

A) Las dos integrales divergen.

B) I es divergente y J converge a $\frac{-8}{100}$

C) I es divergente y J converge a $\frac{-1}{100}$

D) Ninguna de las anteriores.

4 Sabiendo que la transformada de Laplace de la función $f(t)$ es

$F(s)=\frac{5}{s^2+4}+\frac{20s}{s^2+9}$, hallar la función $f(t)$
:

A) $f(t)=5\cos 2t+20\operatorname{sen}3t$

B) $f(t)=5\operatorname{sen}2t+20\cos 3t$

C) $f(t)=\frac{5}{2}\operatorname{sen}2t+20\cos 3t$

D) Ninguna de las anteriores

5 Sabiendo que la transformada de Laplace de la función $f(t)$ es $F(s)=\frac{2}{(s+1)^3}$, señalar cuál de las siguientes funciones es la transformada de Laplace de la función $U(t-2)f(t-2)$:

A) $G(s)=F(s-2)=\frac{2}{(s-1)^3}$

B) $G(s)=\frac{2}{(s+1)^3}e^{-2s}$

C) $G(s)=\frac{2}{(s+1)^3}e^{2s}$

D) Ninguna de las anteriores.

6 La transformada de Laplace de la función $\int_0^t (x^3+\operatorname{sen}2x)dx$ es:

A) $F(s)=\frac{6}{s^5}+\frac{2}{s\left(s^2+4\right)}, \quad s>0$

B) $F(s)=\frac{6}{s^4}+\frac{2}{s^2+4}, \quad s>0$

C) $F(s)=\frac{3}{s^5}+\frac{2}{s\left(s^2+4\right)}, \quad s>0$

D) Ninguna de las anteriores.

7 Sin calcular $f(t)$, determinar $f(0^+)$ y $f(\infty)$, sabiendo que la transformada de Laplace de dicha función es

$F(s)=\frac{s^3+7s^2+5}{s(s^3+3s^2+4s+2)}$:

A) $f(0)^+=\frac{5}{2}$ y $f(\infty)=1$

B) $f(0)^+=1$ y $f(\infty)=1$

C) $f(0)^+=1$ y $f(\infty)=\frac{5}{2}$

D) Ninguna de las anteriores

8 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, aplicando transformadas de Laplace, para las condiciones iniciales $x(0)=0,\ y(0)=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} y'=-x \\ x'=y+2x \end{array}\right\}$$

A) $x(t)=te^t$; $y(t)=\left(1-t\right)e^t$

B) $x(t)=-\operatorname{sen}t+2\cos t$; $y(t)=\cos t$

C) $x(t)=-te^t$; $y(t)=\left(1-t\right)e^t$

D) Ninguna de las anteriores.

9 Utilizar la convolución para hallar la transformada inversa de Laplace

$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{s-2}\right]$, sabiendo que

$\mathfrak{L}\left[e^t\right]=\frac{1}{s-1}$; $\quad \mathfrak{L}\left[e^{2t}\right]=\frac{1}{s-2}$:

A) $f(t)=e^{2t}-e^t$

B) $f(t)=e^{-2t}-e^{-t}$

C) $f(t)=-e^{2t}+e^t$

D) Ninguna de las anteriores.

10 La función de transferencia de un circuito eléctrico dado es

$G(s)=\frac{V_0(s)}{V_i(s)}=\frac{1}{s+2}$, donde $V_i(s)$ y $V_o(s)$ son las transformadas de Laplace de los voltajes de entrada y salida, respectivamente. Hallar $v_o(t)$, aplicando convolución, sabiendo que

$v_i(t)=\left\{\, e^{-t}\ ,\ \ t\geq 0 \ \ ; \ \ 0\ ,\ \ t<0 \,\right\}$

A) $v_o(t) = e^{-2t} + e^{-t}$

B) $v_o(t) = -e^{-2t} - e^{-t}$

C) $v_o(t) = -e^{-2t} + e^{t}$

D) Ninguna de las anteriores.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	C	B	C	B	A	C	A	A	D

Ejercicios resueltos

DEFINICIÓN. EXISTENCIA

1 Dada la función $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ t & 2 < t < 3 \\ 5 & t > 3 \end{cases}$, se pide calcular la transformada de Laplace de la función utilizando la definición indicando la abscisa de convergencia.

Solución

Para calcular la transformada de Laplace aplicando la defininción

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_2^3 te^{-st}dt + \int_3^\infty 5e^{-st}dt =$$

$$= -\left.\frac{e^{-st}(st+1)}{s^2}\right|_2^3 + \left.\frac{5e^{-st}}{-s}\right|_3^\infty = -\frac{e^{-3s}(3s+1)}{s^2} + \frac{e^{-2s}(2s+1)}{s^2} + \frac{5e^{-3s}}{s} =$$

$$= e^{-3s}\left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2}\right) + e^{-2s}\left(\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right) \qquad s > 0$$

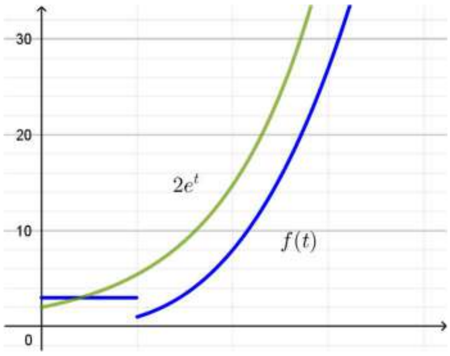
2 Determinar si existe la transformada de Laplace de la función.

$$f(t) = \begin{cases} 3 & 0 < t < 1 \\ t^3 & t \geq 1 \end{cases}$$

y escribir la función utilizando la función escalón.

Solución

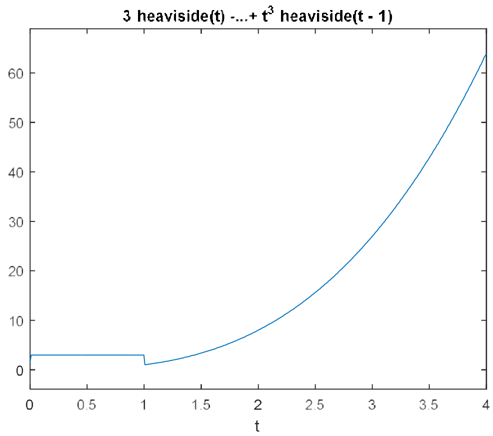
La función es seccionalmente continua, solo se discontinua en el punto 1 y la discontinuidad es de salto finito. Además, es de tipo exponencial



Para escribir la función por medio de la función escalón se debe considerar

$$f(t) = 3\left[U(t) - U(t-1)\right] + t^3\,U(t-1)$$

```
syms t
ezplot(3*heaviside(t)-3*heaviside(t-1)+t^3*heaviside(t-1),[0,4])
```



3

Dada la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le 3 \\ 1 & 3 < t \le 5 \\ t^2 & t > 5 \end{cases}$$

Calcular su transformada de Laplace utilizando la definición de transformada y escribir por medio de la función escalón.

Solución

Utilizando la definición,

$$\mathfrak{L}\left(f(t)\right) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_3^5 e^{-st}dt + \int_5^\infty t^2e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=3}^{t=5} - \left.\frac{e^{-st}\left(s^2t^2 + 2st + 2\right)}{s^3}\right|_{t=5}^{t=\infty}$$

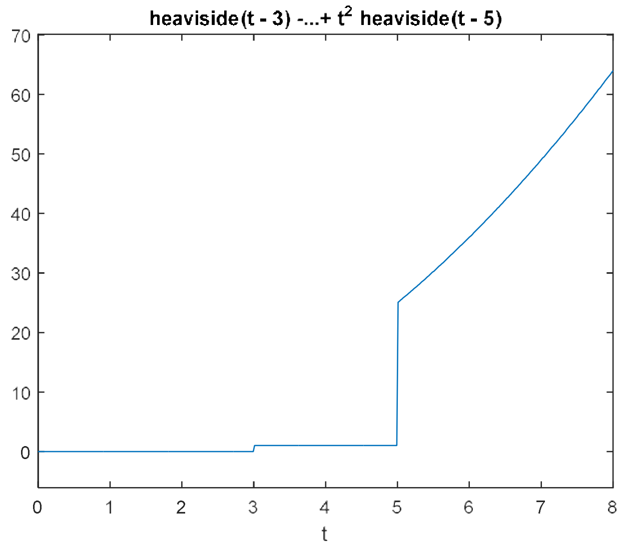
$$\mathfrak{L}\left(f\left(t\right)\right)=-\frac{e^{-5t}}{s}+\frac{e^{-3t}}{s}+\frac{e^{-5t}\left(25s^2+10s+2\right)}{s^3}=\frac{e^{-3t}}{s}+e^{-5t}\left(\frac{24}{s}+\frac{10}{s^2}-\frac{2}{s^3}\right) \qquad s>0$$

Para escribir la función por medio de la función escalón se debe considerar

$$f\left(t\right)=U\left(t-3\right)-U\left(t-5\right)+t^2\,U\left(t-5\right)$$

Para representar con Matlab esta función

```
syms t
fplot(heaviside(t-3)-heaviside(t-5)+t^2*heaviside(t-5),[0,8])
```



4

Determinar la transformada de Laplace de la siguiente función: $g\left(t\right)=\begin{cases}3 & 0\le t<1\\ e^{2t} & t\ge 1\end{cases}$.

Solución

Puede utilizarse la definición o considerar que

$$g\left(t\right)=3\left(U\left(t\right)-U\left(t-1\right)\right)+U\left(t-1\right)e^{2t}$$

y utilizar las transformadas del apartado anterior

$$L\left(U\left(t\right)\right)=\frac{1}{s} \quad s>0 \qquad\qquad L\left(U\left(t-1\right)\right)=\frac{e^{-s}}{s} \quad s>0$$

$$L\left(e^{2t}\right)=\frac{1}{s-2} \qquad s>2$$

y el segundo teorema de traslación

$$L\left(U\left(t-a\right)f\left(t-a\right)\right)=e^{-as}F\left(s\right) \qquad F=L\left(f\right)$$

para calcular

$$L\left(U\left(t-1\right)e^{2t}\right)=L\left(U\left(t-1\right)e^{2\left(t-1\right)}e^{2}\right)=e^{-s}e^{2}L\left(e^{2t}\right)=\frac{e^{-s}e^{2}}{s-2}$$

Se tiene que la transformada de Laplace es

$$L\left(g\right)=3\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}\right)+\frac{e^{-s}e^{2}}{s-2}$$

5 Calcular la transformada de Laplace de la función $E\left(t\right)=\begin{cases}2-t & si & 0<t\leq 3\\ t^{2} & si & 3<t\end{cases}$

Solución

$$E\left(t\right)=\left(2-t\right)\left(U\left(t\right)-U\left(t-3\right)\right)+t^{2}U\left(t-3\right)=\left(2-t\right)U\left(t\right)+\left(t^{2}+t-2\right)U\left(t-3\right)$$

$$\mathcal{L}\left(E\left(t\right)\right)=2\mathcal{L}\left(U\left(t\right)\right)-\mathcal{L}\left(tU\left(t\right)\right)+\mathcal{L}\left(\left[\left(t-3\right)^{2}+7\left(t-3\right)+10\right]U\left(t-3\right)\right)$$

$$=2\mathcal{L}\left(U\left(t\right)\right)-\mathcal{L}\left(tU\left(t\right)\right)+\mathcal{L}\left(\left(t-3\right)^{2}U\left(t-3\right)\right)+7\mathcal{L}\left(\left(t-3\right)U\left(t-3\right)\right)+10\mathcal{L}\left(U\left(t-3\right)\right)$$

$$=\frac{2}{s}-\frac{1}{s^{2}}+\frac{2e^{-3s}}{s^{3}}+\frac{7e^{-3s}}{s^{2}}+\frac{10e^{-3s}}{s}$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

6 Expresar en términos de la función salto unidad la función $f(t)$, calculando posteriormente su transformada de Laplace: $f(t)=\begin{Bmatrix}0\,, & t<0\\ 2t^{2}, & 0\leq t<3\\ 9\,, & t\geq 3\end{Bmatrix}$

Datos: $\mathfrak{L}\left[t^{n}\right]=\dfrac{n!}{s^{\,n+1}}$; $\mathfrak{L}\left[U\left(t-c\right)\right]=\dfrac{e^{-sc}}{s}$

Solución

Expresión de $f(t)$ utilizando la función escalón:

$$f\left(t\right)=2t^{2}U\left(t\right)+\left(9-2t^{2}\right)U\left(t-3\right)$$

Para hallar la transformada de Laplace utilizando la propiedad de traslación en el tiempo, es necesario expresar el polinomio $\left(9-2t^{2}\right)$ en potencias de $\left(t-3\right)$. Para ello efectuamos un cambio de variable

$$\left(t-3\right)=z\quad\rightarrow\quad t=z+3\quad\rightarrow\quad 9-2t^{2}=9-2\left(z+3\right)^{2}=-9-12z-2z^{2}$$

Deshaciendo ahora el cambio de variable, queda la expresión buscada del polinomio

$$9-2t^2=-9-12z-2z^2=-9-12\left(t-3\right)-2\left(t-3\right)^2,$$

sustituimos y calculamos la transformada de Laplace,

$$\mathfrak{L}\left[f\left(t\right)\right]=\mathfrak{L}\left[2t^2U\left(t\right)\right]+\mathfrak{L}\left[\left(-9-12\left(t-3\right)-2\left(t-3\right)^2\right)U\left(t-3\right)\right],$$

aplicando también la propiedad de linealidad, queda

$$\mathfrak{L}\left[f\left(t\right)\right]=2\mathfrak{L}\left[t^2U\left(t\right)\right]-9\mathfrak{L}\left[U\left(t-3\right)\right]-12\mathfrak{L}\left[\left(t-3\right)U\left(t-3\right)\right]-2\mathfrak{L}\left[\left(t-3\right)^2U\left(t-3\right)\right]$$

$$\mathfrak{L}\left[f\left(t\right)\right]=\frac{4}{s^3}-e^{-3s}\left\{\frac{9}{s}+\frac{12}{s^2}+\frac{4}{s^3}\right\}$$

7

Estudiar el carácter convergente o divergente de cada una de las siguientes integrales, utilizando únicamente la definición de transformada de Laplace y la tabla de transformadas. En el caso de que la integral sea convergente, hallar su valor:

$$I=\int_0^\infty e^t\cos 2t dt \quad ; \qquad J=\int_0^\infty te^{-t}\operatorname{sen} 3t dt$$

Solución

$$I=\int_0^\infty e^t\cos 2t dt=J=\mathcal{L}\left[\cos 2t\right]_{s=-1}$$

esta integral es divergente porque la transformada de la función $\cos 2t$ solo converge para valores de $s>0$.

$$J=\int_0^\infty te^{-t}\operatorname{sen} 3t dt=\mathfrak{L}\left[t\operatorname{sen} 3t\right]_{s=1}$$

esta integral es convergente porque la transformada de la función $t\operatorname{sen} 3t$ es la función $F\left(s\right)=\dfrac{6s}{\left(s^2+3^2\right)^2}$, que converge para $s>0$. Sustituyendo en $s=1$, queda $J=F\left(1\right)=\dfrac{6}{100}=\dfrac{3}{50}$.

8

Hallar la transformada de las siguientes funciones, utilizando la tabla y las propiedades de las transformadas de Laplace:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} \qquad\qquad \text{b) } \int_0^x\frac{e^t-\cos 2t}{t}dt$$

Solución

Se aplica la propiedad: $\mathcal{L}\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]=\displaystyle\int_s^{\infty}\mathcal{L}\big(f(x)\big)(u)du$ comprobando la condición de existencia del límite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}3x}{x}=3$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right]\underset{propiedad}{=}\int_s^{\infty}\left[\mathcal{L}\big(\operatorname{sen}3x\big)\right](u)du\underset{\substack{tabla\\(u>0)}}{=}\int_s^{\infty}\frac{3}{u^2+9}du\underset{(s>0)}{=}\lim_{R\to\infty}\int_s^{R}\frac{1/3}{\left(u/3\right)^2+1}du=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left[\operatorname{arctg}\frac{u}{3}\right]_s^R=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{s}{3},\quad s>0$$

b) Aplicando la propiedad: $\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right]=\dfrac{1}{s}\mathcal{L}\big(f(x)\big)$, se obtiene

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right]=\frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{e^t-\cos 2t}{t}\right]$$

Ahora se aplica la propiedad utilizada en el apartado a), comprobando previamente

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-\cos 2t}{t}=1$$

$$\frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{e^t-\cos 2t}{t}\right]=\frac{1}{s}\int_s^{\infty}\left[\mathcal{L}(e^x-\cos 2x)\right]du\underset{\substack{tabla\\(u>1)}}{=}\frac{1}{s}\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{u}{u^2+4}\right)du\underset{(s>1)}{=}$$

$$=\frac{1}{s}\lim_{R\to\infty}\left[\log\frac{u-1}{\sqrt{u^2+4}}\right]_s^R=-\frac{1}{s}\log\frac{s-1}{\sqrt{s^2+4}},\qquad s>1$$

9 Calcular la transformada de Laplace de la función

$$E(t)=\begin{cases}2-t & si & 0\le t<3\\ t^2 & si & 3\le t<4\\ 1 & si & t\ge 4\end{cases}$$

Solución

En primer lugar, escribimos la función mediante la función escalón

$$E(t)=(2-t)\left[U(t)-U(t-3)\right]+t^2\left[U(t-3)-U(t-4)\right]+U(t-4)$$

es decir,

$$E(t)=(2-t)U(t)+\left[t^2+t-2\right]U(t-3)-\left[t^2-1\right]U(t-4)$$

Aplicando transformadas

$$\mathcal{L}(E)=2\mathcal{L}(U(t))-\mathcal{L}(tU(t))+\mathcal{L}\left(\underbrace{\left[(t-3)^2+7(t-3)+10\right]}_{f(t-3)}U(t-3)\right)-$$

$$-\mathcal{L}\left(\underbrace{\left[(t-4)^2+8(t-4)+15\right]}_{g(t-4)}U(t-4)\right)$$

$$=2\mathcal{L}(U(t))-\mathcal{L}(tU(t))+\mathcal{L}\left((t-3)^2U(t-3)\right)+7\mathcal{L}((t-3)U(t-3))+10\mathcal{L}(U(t-3))+$$

$$-\mathcal{L}\left((t-4)^2U(t-4)\right)-8\mathcal{L}((t-4)U(t-4))-15\mathcal{L}(U(t-4))$$

$$=\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{2!e^{-3s}}{s^3}+\frac{7e^{-3s}}{s^2}+\frac{10e^{-3s}}{s}-\frac{2!e^{-4s}}{s^3}-\frac{8e^{-4s}}{s^2}-\frac{15e^{-4s}}{s}$$

10 Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t)=\begin{cases} t^2 & 1\le t<2 \\ e^t & 2\le t\end{cases}$

Solución

En primer lugar, escribimos la función mediante la función escalón

$$f(t)=t^2\left[U(t-1)-U(t-2)\right]+e^tU(t-2)=t^2U(t-1)+\left(e^t-t^2\right)U(t-2)$$

Aplicando transformadas

$$\mathcal{L}f(t)=\mathcal{L}\left[t^2U(t-1)\right]+\mathcal{L}\left[e^2e^{t-2}U(t-2)\right]-\mathcal{L}\left[t^2U(t-1)\right]=$$

$$=\mathcal{L}\left[\underbrace{h(t-1)}_{=t^2\quad h(t)=(t+1)^2}U(t-1)\right]+e^2\mathcal{L}\left[e^{t-2}U(t-2)\right]-\mathcal{L}\left[\underbrace{g(t-2)}_{=t^2\quad g(t)=(t+2)^2}U(t-2)\right]=$$

$$=e^{-s}\mathcal{L}\left[h(t)\right]+e^2\mathcal{L}\left[e^t\right]-e^{-2s}\mathcal{L}\left[g(t)\right]=e^{-s}\mathcal{L}\left[t^2+2t+1\right]+e^2e^{-2s}\mathcal{L}\left[e^t\right]-e^{-2s}\mathcal{L}\left[t^2+4t+4\right]$$

$$=e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right)+e^2\frac{e^{-2s}}{s-1}-e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}+\frac{4}{s}\right)$$

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

11 Calcula la transformada inversa de Laplace de $F(s)=\dfrac{1}{s\left(s^2+4\right)}$.

Solución

Para calcular la transformada inversa se descompone en fracciones simples

$$\frac{1}{s\left(s^2+4\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+4} \qquad \Rightarrow A=1/4 \quad B=-1/4 \quad C=0$$

$$F\left(s\right)=\frac{1}{s\left(s^2+4\right)}=\frac{1}{4}\frac{1}{s}-\frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}$$

Utilizando la tabla de transformadas de Laplace elementales

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right)=\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t$$

12 Calcular la transformada inversa de Laplace de la función: $F(s)=\dfrac{1}{\left(s^2+1\right)^2}$.

Solución

A modo ilustrativo, abordaremos este cálculo mediante dos procedimientos distintos.

Método 1: Haciendo uso de la propiedad de convolución,

$$F(s)=\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}=\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}=\mathcal{L}\left(\operatorname{sen} x\right)\mathcal{L}\left(\operatorname{sen} x\right)\underset{convolución}{=}\mathcal{L}\left(\operatorname{sen} x * \operatorname{sen} x\right)$$

luego sólo resta calcular esa convolución

$$\operatorname{sen} x * \operatorname{sen} x=\int_0^x \operatorname{sen} u \operatorname{sen}(x-u)du=\frac{1}{2}\int_0^x\left[\cos(2u-x)-\cos x\right]du=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} x - x\cos x\right)$$

para saber que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} x - x\cos x\right)$$

Método 2: Para hacer uso de otras propiedades, comenzamos escribiendo la función como producto de dos funciones,

$$F(s)=\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}=\frac{1}{s}\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}=\frac{1}{s}G(s)$$

la segunda de las cuales, $G(s)$, es la derivada de una función cuya transformada inversa es conocida:

$$G(s)=\frac{d}{ds}\left(\frac{-1/2}{s^2+1}\right) \qquad \underset{propiedad}{\Rightarrow} \qquad G(s)=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left[x\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(x\operatorname{sen} x\right)$$

Ahora, debido a la propiedad $\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right]=\frac{1}{s}\mathcal{L}\left(f(x)\right)$

$$F(s)=\frac{1}{s}G(s)=\mathcal{L}\left[\int_0^x \mathcal{L}^{-1}\left(G(s)\right)dt\right]=\mathcal{L}\left[\int_0^x \frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}\,t dt\right]=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\mathrm{sen}\,x-x\cos x\right)$$

de donde se deduce el mismo resultado que el alcanzado con el primer método.

13 Calcula la transformada inversa de Laplace de $F\left(s\right)=\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2\left(s+1\right)}-\dfrac{e^{-2\pi s}}{s^2\left(s+1\right)}$.

Solución

$$y\left(t\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{s^2\left(s+1\right)}-\frac{e^{-2\pi s}}{s^2\left(s+1\right)}\right)=U\left(t-\pi\right)g\left(t-\pi\right)-U\left(t-2\pi\right)g\left(t-2\pi\right)$$

Siendo $g\left(t\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2\left(s+1\right)}\right)$

Teniedo en cuenta que

$$\frac{1}{s^2\left(s+1\right)}=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s+1}\Rightarrow A\left(s+1\right)+Bs\left(s+1\right)+Cs^2=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=1,\ C=1,\ B=-C=-1$$

$$g\left(t\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)=t-1+e^{-t}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}y\left(t\right)&=U\left(t-\pi\right)g\left(t-\pi\right)-U\left(t-2\pi\right)g\left(t-2\pi\right)\\&=U\left(t-\pi\right)\left(t-\pi-1+e^{-(t-\pi)}\right)-U\left(t-2\pi\right)\left(t-2\pi-1+e^{-(t-2\pi)}\right)\end{aligned}$$

14 Hallar la transformada inversa de las siguientes funciones, utilizando la tabla y las propiedades de las transformadas de Laplace:

a) $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s^2+2s+5)}$ b) $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s-3}+\dfrac{2e^{-4s}}{s+1}$

Solución

En primer lugar, se escriben los factores del denominador en función de $s+1$, para utilizar la propiedad de traslación en la variable "s"

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)\left[\left(s+1\right)^2+2^2\right]}\underset{propiedad}{=}\mathcal{L}\left[e^{-x}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+2^2)}\right)\right]$$

Además

$$\frac{1}{s(s^2+2^2)}=\frac{1}{2s}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)=\frac{1}{s}\mathcal{L}\left(\frac{\operatorname{sen}2x}{2}\right)\underset{propiedad}{=}\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\int_0^x \operatorname{sen}2t dt\right]=\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\right]$$

Con lo que,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)=e^{-x}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+2^2)}\right)=\frac{1}{2}e^{-x}\operatorname{sen}^2 x$$

Haciendo uso de la propiedad de traslación en el tiempo, se tiene

$$\mathcal{L}\left[U(x-c)f(x-c)\right]=e^{-cs}\mathcal{L}\left(f(x)\right)\quad\overset{(c>0)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-cs}\mathcal{L}\left(f(x)\right)\right]=\begin{cases}0, & si\quad x\le c\\ f(x-c), & si\quad x>c\end{cases}$$

Aplicando esto a cada sumando de la función, y debido a que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)=e^{3x}\qquad \text{y}\qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)=e^{-x}$$

Resulta

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s-3}\right]=\begin{cases}0, & si\quad x\le 1\\ e^{3(x-1)}, & si\quad x>1\end{cases}\qquad \text{y}\qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s+1}\right]=\begin{cases}0, & si\quad x\le 4\\ e^{-(x-4)}, & si\quad x>4\end{cases}$$

de donde

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)=\begin{cases}0, & si\quad x\le 1\\ e^{3(x-1)}, & si\ 1<x\le 4\\ e^{3(x-1)}+2e^{-(x-4)}, & si\quad x>4\end{cases}$$

15 Calcula la transformada inversa de Laplace de $F(s)=\dfrac{2\left(1-e^{-4s}\right)}{3s\left(s^2+16\right)}$.

Solución

Como

$$\frac{2}{3s\left(s^2+16\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+16}\to A=\frac{1}{24},B=-\frac{1}{24},C=0$$

se tiene que

$$y(t)=\frac{1}{24}\mathcal{L}^{-1}\left(\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+16}\right)-e^{-4s}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+16}\right)\right)=$$

$$y(t)=\frac{1}{24}\left(U(t)-\cos(4t)+U(t-4)-U(t-4)\cos\left(4(t-4)\right)\right)$$

16 Calcula la transformada inversa de Laplace de

$$F(s)=\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} \qquad G(s)=-\frac{se^{-2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)}\ .$$

Solución

Como

$$\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+4}=\frac{1}{3}\left(\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}\right)$$

se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}(F)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{3}\frac{s}{s^2+1}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{3}\frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$x(t)=\frac{1}{3}\cos t-\frac{1}{3}\cos 2t$$

Para calcular la transformada inversa de G basta tener en cuenta que

$$\mathcal{L}^{-1}(G)=-\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2\pi s}\frac{1}{3}\frac{s}{s^2+1}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2\pi s}\frac{1}{3}\frac{s}{s^2+4}\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}U(t-2\pi)\cos t+\frac{1}{3}U(t-2\pi)\cos 2t$$

17 Calcular la transformada inversa de Laplace de la función $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s^2-s}$.

Solución

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2-s}\right)=f(t-2)U(t-2) \qquad f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-s}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}\right)=1-e^t$$

inv

18 Sin calcular $f(t)$, determinar $f(0)^+$ y $f(\infty)$, en los dos casos siguientes, sabiendo que la función $F(s)$ dada es la transformada de Laplace de $f(t)$, a saber:

a) $F(s)=\dfrac{2s+6}{s^2+8s+20}$ b) $F(s)=\dfrac{(2s+1)^2+4}{\left[(s+3)^2+16\right]\cdot(s+5)}$

Solución

En ambos casos vamos a aplicar los teoremas del valor inicial y del valor final. Según el Teorema del valor inicial, se verifica

$$f(0^+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Además, el teorema del valor final permite conocer $f(\infty)$, a partir de su transformada $F(s)$, así $f(\infty)=\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$

a) $f\left(0^+\right)=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{2s^2+6s}{s^2+8s+20}=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{2s^2}{s^2}=2$

$f\left(\infty\right)=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{2s^2+6s}{s^2+8s+20}=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{6s}{20}=0$

b) $f\left(0^+\right)=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{\left[s\left(2s+1\right)^2+4s\right]}{\left[\left(s+3\right)^2+16\right]\left(s+5\right)}=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{4s^3}{s^3}=4\,;$

$$f\left(\infty\right)=\lim_{s\to 0}\frac{\left[s\left(2s+1\right)^2+4s\right]}{\left[\left(s+3\right)^2+16\right]\cdot\left(s+5\right)}=\lim_{s\to 0}\frac{4s^3+4s^2+5s}{s^3+11s^2+55s+125}=\lim_{s\to 0}\frac{5s}{125}=0$$

APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

19 Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''+4y'+5y=U(t)-U(t-1) \\ y(0)=1,\quad y'(0)=0\end{cases}$$

Solución

En primer lugar aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación utilizando la propiedad:

$$\mathcal{L}\left(y'\right)=s\mathcal{L}\left(y\right)-y(0)\quad\Rightarrow\quad\mathcal{L}\left(y''\right)=s\mathcal{L}\left(y'\right)-y'(0)$$

$$\mathcal{L}\left(y''+4y'+5y\right)=\left[s^2\mathcal{L}\left(y\right)-sy(0)-y'(0)\right]+4\left[s\mathcal{L}\left(y\right)-y(0)\right]+5\mathcal{L}\left(y\right)$$

$$\mathcal{L}\left[U(t)-U(t-1)\right]\underset{tabla}{=}\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}$$

Igualando y llamando

$$Y(s)=\mathcal{L}\left(y\right)$$

Resulta

$$Y(s)\left(s^2+4s+5\right)-y(0)\left(s+4\right)-y'(0)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}$$

Despejamos ahora $Y(s)$ y sustituimos los valores iniciales,

$$Y(s)=\frac{\dfrac{1}{s}-\dfrac{e^{-s}}{s}+s+4}{s^2+4s+5}$$

Sólo resta calcular la transformada inversa para obtener $y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}+s+4}{s^2+4s+5}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s\left(s^2+4s+5\right)}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s\left(s^2+4s+5\right)}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{s^2+4s+5}\right)=$$
$$=\mathcal{L}^{-1}\left(F_1(s)\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(F_2(s)\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(F_3(s)\right)$$

Factorizamos el denominador de estas fracciones para descomponer en fracciones simples,

$$\frac{1}{s\left(s^2+4s+5\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+4s+5} \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{5},\ B=-\frac{1}{5},\ C=-\frac{4}{5}$$

$$f_1(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(F_1(s)\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s\left(s^2+4s+5\right)}\right)=\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{s^2+4s+5}\right)$$

Calculamos aparte

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{s^2+4s+5}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(s+2)+2}{(s+2)^2+1}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+2)^2+1}\right)\underset{tabla}{=}$$
$$=e^{-2t}\cos t+2e^{-2t}\operatorname{sen} t$$

Por tanto,

$$f_1(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(F_1(s)\right)=\frac{1}{5}U(t)-\frac{e^{-2t}}{5}\left(\cos t+2\operatorname{sen} t\right)$$

$$f_2(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(F_2(s)\right)=U(t-1)\mathcal{L}^{-1}\left[F_1(s)\right]_{(t-1)}=\frac{U(t-1)}{5}\left[1-e^{-2(t-1)}\left(\cos(t-1)+2\operatorname{sen}(t-1)\right)\right]$$

$$f_3(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(F_3(s)\right)=e^{-2t}\left(\cos t+2\operatorname{sen} t\right)$$

Finalmente,

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right)=f_1(t)-f_2(t)+f_3(t)=$$
$$=\frac{1}{5}U(t)+\frac{4}{5}e^{-2t}\left(\cos t+2\operatorname{sen} t\right)-\frac{U(t-1)}{5}\left[1-e^{-2(t-1)}\left(\cos(t-1)+2\operatorname{sen}(t-1)\right)\right]=$$

$$y\left(t\right)=\frac{1}{5}\left[U(t)-U(t-1)\right]+\frac{1}{5}U(t-1)e^{-2(t-1)}\left[\cos(t-1)+2\operatorname{sen}(t-1)\right]+\frac{4}{5}e^{-2t}\left(\cos t+2\operatorname{sen} t\right)$$

20 Resolver el problema $\begin{cases} y''+y'=f\left(t\right) & ,\ t>0 \\ y\left(0\right)=0,\ y'\left(0\right)=0 \end{cases}$ donde $f\left(t\right)=1$ en $\left[\pi,2\pi\right)$ y $f\left(t\right)=0$ fuera de ese intervalo.

Solución

La ecuación diferencial puede escribirse de la forma siguiente:

$$\begin{cases} y''+y'=U\left(t-\pi\right)-U\left(t-2\pi\right) \\ y\left(0\right)=0,\ y'\left(0\right)=0 \end{cases}$$

Aplicando transformadas de laplace, llamando $Y(s)=\mathcal{L}(y)(s)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y')(s)&=sY(s)-0\\ \mathcal{L}(y'')(s)&=s\mathcal{L}(y')-y'(0)=s^2Y(s)\end{aligned}$$

se tendrá

$$s^2Y(s)+sY(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s}-\frac{e^{-2\pi s}}{s}\Rightarrow Y(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s^2(s+1)}-\frac{e^{-2\pi s}}{s^2(s+1)}$$

Para resolver la ecuación diferencial se calcula la transformada inversa

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{s^2(s+1)}-\frac{e^{-2\pi s}}{s^2(s+1)}\right)=U(t-\pi)g(t-\pi)-U(t-2\pi)g(t-2\pi)$$

Siendo $g(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+1)}\right)$

Teniedo en cuenta que

$$\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s+1}\Rightarrow A(s+1)+Bs(s+1)+Cs^2=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=1,\ C=1,\ B=-C=-1$$

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)=t-1+e^{-t}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}y(t)&=U(t-\pi)g(t-\pi)-U(t-2\pi)g(t-2\pi)\\ &=U(t-\pi)\left(t-\pi-1+e^{-(t-\pi)}\right)-U(t-2\pi)\left(t-2\pi-1+e^{-(t-2\pi)}\right)\end{aligned}$$

21 Resolver el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} y'+z=x\\ z'+4y=0\end{array}\right\}\quad con\quad y(0)=-z(0)=1$

Solución

Aplicando transformadas de Laplace a ambas ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ll}\mathcal{L}(y)+\mathcal{L}(z)=\mathcal{L}(x) & \Rightarrow\ \left(sY(s)-1\right)+Z(s)=\dfrac{1}{s^2}\\ \mathcal{L}(z')+4\mathcal{L}(y)=0 & \Rightarrow\ \left(sZ(s)+1\right)+4Y(s)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}sY(s)+Z(s)=\dfrac{s^2+1}{s^2}\\ 4Y(s)+sZ(s)=-1\end{array}\right.$$

se ha transformado el sistema inicial en un sistema algebraico, cuya resolución proporciona las transformadas $Y(s)$ y $Z(s)$ siguientes:

$$Y(s)=\frac{s^2+s+1}{s(s^2-4)}\qquad\qquad Z(s)=\frac{-s^3-4s^2-4}{s^2(s^2-4)}$$

Finalmente, se calculan las transformadas inversas

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+s+1}{s(s^2-4)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{4s}+\frac{7}{8}\frac{1}{s-2}+\frac{3}{8}\frac{1}{s+2}\right)=\frac{-1}{4}+\frac{7}{8}e^{2x}+\frac{3}{8}e^{-2x}$$

$$z(x)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-s^3-4s^2-4}{s^2(s^2-4)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{7}{4}\frac{1}{s-2}+\frac{3}{4}\frac{1}{s+2}\right)=x-\frac{7}{4}e^{2x}+\frac{3}{4}e^{-2x}$$

22 Resolver el problema $\begin{cases} y''+y'=f(t) & ,\ t>0 \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{cases}$ donde $f(t)=\begin{cases} t & 0\le t<1 \\ 0 & t\ge 1 \end{cases}$.

Solución

Llamamos $Y(s)=\mathcal{L}(y)$. Se tiene que

$$\mathcal{L}(y')=s\mathcal{L}(y)=sY(s) \qquad \mathcal{L}(y'')=s\mathcal{L}(y')=s^2Y(s)$$

$$f(t)=t\big(U(t)-U(t-1)\big)$$
$$\mathcal{L}(f)=\mathcal{L}\big(tU(t)\big)-\mathcal{L}\big([(t-1)+1]U(t-1)\big)=\mathcal{L}\big(tU(t)\big)-\mathcal{L}\big((t-1)U(t-1)\big)-\mathcal{L}\big(U(t-1)\big)$$

$$\mathcal{L}(f)=\frac{1}{s^2}-e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$$

Aplicando transformadas a la ecuación diferencial se tendrá

$$s^2Y(s)+sY(s)=\frac{1}{s^2}-e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$$

Despejando

$$Y(s)=\frac{1}{s^3(s+1)}-e^{-s}\left(\frac{1+s}{s^2(s^2+s)}\right)$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^3(s+1)}-\frac{e^{-2s}}{s^3}=\left(\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)-\frac{e^{-s}}{s^3} \qquad \text{(ver nota)}$$

Calculando la transformada inversa

$$y(t)=A\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right)+B\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)+C\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)+D\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s^3}\right)=$$

$$y(t)=\frac{t^2}{2}-t+1-e^{-t}-U(t-1)\frac{(t-1)^2}{2}$$

Nota: Para calcular la descomposición en fracciones simples

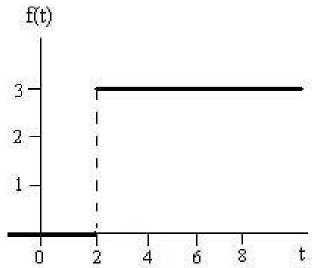
$$\frac{1}{s^3(s+1)} = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{D}{s+1} \Rightarrow 1 = A(s+1) + Bs(s+1) + Cs^2(s+1) + Ds^3$$

$$\begin{array}{ll} s=-1 & 1=-D \Rightarrow D=-1 \\ s=0 & 1=A \\ coef\ s^3 & 0=C+D \Rightarrow C=1 \\ coef\ s^2 & 0=B+C \Rightarrow B=-1 \end{array}$$

Luego $$\frac{1}{s^3(s+1)} = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

23 Sea la función $f(t)$ cuya gráfica se muestra en la figura:

a) Expresar $f(t)$ utilizando la función de Heaviside o función salto y hallar su transformada de Laplace.



b) Aplicando transformadas de Laplace, hallar la función $y(t)$ que cumple la ecuación siguiente, siendo $f(t)$ la función del apartado a)

$$y'(t) + 2y(t) + 2\int_0^t y(x)dx = f(t)$$

teniendo en cuenta la condición inicial $y(0)=1$.

Solución a)

$f(t) = 3U(t-2)$, ahora buscamos su transformada de Laplace en la tabla,

$$\mathfrak{L}[f(t)] = \frac{3}{s}e^{-2s}$$

Solución b)

Aplicando transformadas de Laplace en ambos lados de la igualdad, y teniendo en cuenta la propiedad de linealidad, resulta

$$\mathfrak{L}[y'(t)] + 2\mathfrak{L}[y(t)] + 2\mathfrak{L}\left[\int_0^t y(x)dx\right] = \mathfrak{L}[f(t)]$$

Sea $Y\left(s\right) = \mathfrak{L}\left[y(t)\right]$, aplicamos las propiedades de transformada de la derivada y transformada de la integral de $y(t)$, resultando

$$sY(s) - y(0+) + 2Y(s) + \frac{2}{s}Y(s) = \frac{3}{s}e^{-2s}$$

resolvemos esta ecuación algebraica despejando $Y\left(s\right)$,

$$Y(s) = \frac{s + 3e^{-2s}}{s^2 + 2s + 2}$$

Ahora se obtiene $y(t)$ hallando la transformada inversa de $Y(s)$. Para ello, separamos la función $Y\left(s\right)$ en dos partes, ya que se tratan de diferente forma por el hecho de que en una de ellas aparece multiplicando una función exponencial de la variable s.

$$Y\left(s\right) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2} + \frac{3e^{-2s}}{s^2 + 2s + 2} \quad \to \quad y\left(t\right) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 2s + 2}\right] + \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2 + 2s + 2}\right];$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 2s + 2}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s}{\left(s+1\right)^2 + 1}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\left(s+1\right) - 1}{\left(s+1\right)^2 + 1}\right] =$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\left(s+1\right)}{\left(s+1\right)^2 + 1}\right] - \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s+1\right)^2 + 1}\right] == e^{-t}\left(\cos t - \operatorname{sen} t\right)$$

aplicando al resultado anterior la propiedad de traslación en el tiempo, podemos obtener la transformada inversa

$$3\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2 + 2s + 2}\right] = 3\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{\left(s+1\right)^2 + 1}\right] = 3U\left(t-2\right)e^{-\left(t-2\right)}\operatorname{sen}\left(t-2\right)$$

La solución de la ecuación integral será

$$y\left(t\right) = e^{-t}\left[\cos t - \operatorname{sen} t + 3e^2 U\left(t-2\right)\operatorname{sen}\left(t-2\right)\right]$$

24 Los voltajes de entrada y salida, $v_i(t)$, $v_o\left(t\right)$, de un circuito RC en serie están relacionados por la ecuación diferencial

$$CR \cdot \frac{d\,v_o}{dt} + v_o\left(t\right) = v_i(t)$$

Las constantes del circuito verifican $C \cdot R = 10^{-2}$. Se pide:

a) Hallar la función de transferencia del sistema, considerando $v_o\left(0\right) = 0$.

b) Obtener $v_o\left(t\right)$, cuando $v_i(t) = \begin{Bmatrix} 5 & si & t \geq 0 \\ 0 & si & t < 0 \end{Bmatrix}$

Solución

La ecuación diferencial del circuito es la siguiente:

$$10^{-2}\frac{d\,v_o}{dt}+v_o\left(t\right)=v_i(t).$$

Sean $V_o\left(s\right)=\mathfrak{L}\left[v_o\left(t\right)\right]$ y $V_i\left(s\right)=\mathfrak{L}\left[v_i\left(t\right)\right]$

La función de transferencia del sistema será

$$G\left(s\right)=\frac{V_o\left(s\right)}{V_i\left(s\right)}$$

Tomando transformadas en la ecuación diferencial tenemos

$$10^{-2}\mathfrak{L}\left[\frac{d\,v_o}{dt}\right]+\mathfrak{L}\left[v_o\left(t\right)\right]=\mathfrak{L}\left[v_i(t)\right]\quad\rightarrow\quad 10^{-2}\left[V_o\left(s\right)-v_o\left(0\right)\right]+V_o\left(s\right)=V_i\left(s\right)$$

Sustituyendo la condición inicial, $v_o\left(0\right)=0$, queda

$$V_o\left(s\right)\left[10^{-2}s+1\right]=V_i\left(s\right)\quad\rightarrow\quad G\left(s\right)=\frac{1}{10^{-2}s+1}$$

25

Resolver con **ayuda de Matlab** el siguiente problema de valor inicial

$$y''+y=\begin{cases}t & 0\le t<\pi\\ \cos\left(2t\right) & t\ge\pi\end{cases}$$
$$y(0)=0\qquad y'(0)=1$$

Escribe los cálculos realizados a mano como los comandos Matlab que consideres para resolver el problema.

Solución

Se tiene que $f\left(t\right)=\begin{cases}t & 0\le t<\pi\\ \cos\left(2t\right) & t\ge\pi\end{cases}$ se puede escribit mediante la función escalón de la forma siguiente

$$f\left(t\right)=t\left[U\left(t\right)-U\left(t-\pi\right)\right]+\cos\left(2t\right)U\left(t-\pi\right)=tU\left(t\right)+\left(\cos\left(2t\right)-t\right)U\left(t-\pi\right)$$

Aplicando transformadas de La place al problema de valor inicial se tiene que

$$\mathcal{L}\left(y''\right)+\mathcal{L}\left(y\right)=\mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)$$
$$s^2\mathcal{L}\left(y\right)-sy\left(0\right)-y'\left(0\right)+\mathcal{L}\left(y\right)=\mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)$$
$$\mathcal{L}\left(y\right)=\frac{\mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)+1}{s^2+1}\quad\Rightarrow\quad y=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)+1}{s^2+1}\right)$$

Haciendo los cálculos con Matlab se puede encontrar la solución.

```
syms t s
f=t*heaviside(t)+(cos(2*t)-t)*heaviside(t-pi);
valor=laplace(f);
sol=ilaplace((valor+1)/(s^2+1))
```

E_01

Dada la ecuación diferencial $x''(t)-4x'(t)+3x(t)=\begin{cases} e^t & 1\le t<2 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$

con las condiciones iniciales: $x(0)=x'(0)=1$, se pide,

a) Encontrar la solución del problema sin utilizar transformadas de Laplace y representa la solución encontrada en el intervalo [0, 3].

b) Resolver el problema utilizando transformadas de Laplace.

Solución a)

```
syms x(t)
dx=diff(x);dx2=diff(dx);
f(t)=(heaviside(t-1)-heaviside(t-2))*exp(x)
ecuacion=dy2-4*dy+3*y
%Apartado a
sol1(t)=dsolve(ecuacion==f(t),x(0)==1,dx(0)==1)
fplot(sol1(t),[0,2])
```

Solución b)

La ecuación es

$$x''(t)-4x'(t)+3x(t)=\begin{cases} e^t & 1\le t<2 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases} \qquad\qquad x(0)=x'(0)=1$$

Consideramos

$$f(t)=\begin{cases} e^t & 1\le t<2 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}=e^t\left[U(t-1)-U(t-2)\right]$$

Teniendo en cuenta que

$$X(s)=\mathcal{L}(x) \qquad\qquad \mathcal{L}(x')=s\mathcal{L}(x)-x(0)=sX(s)-1$$

$$\mathcal{L}(x'')=s\mathcal{L}(x')-x'(0)=s(sX(s)-1)-1=s^2X(s)-s-1$$

Aplicando transformadas

$$s^2X(s)-s-1-4(sX(s)-1)+3X(s)=\mathcal{L}(f(t))$$

$$X(s)\left[s^2-4s+3\right]-s+3=\mathcal{L}(f(t))$$

```
syms x(t) s positive
%Escribiemos la función f(t) como función escalón
f(t)=(heaviside(t-1)-heaviside(t-2))*exp(t)
%Calculamos la transformada de Laplace de f(t)
valor1=laplace(f(t))
%A mano despeja la transformada de Laplace y llamala Y(S)
valor2=(valor1+s-3)/(s^2-4*s+3);
%Calculamos su transformada inversa
sol(t)=ilaplace(valor2)
```

E_02

Dada la función $f(t)=\begin{cases} t & 0<t<2 \\ 4 & 2<t<4 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$.

Se pide

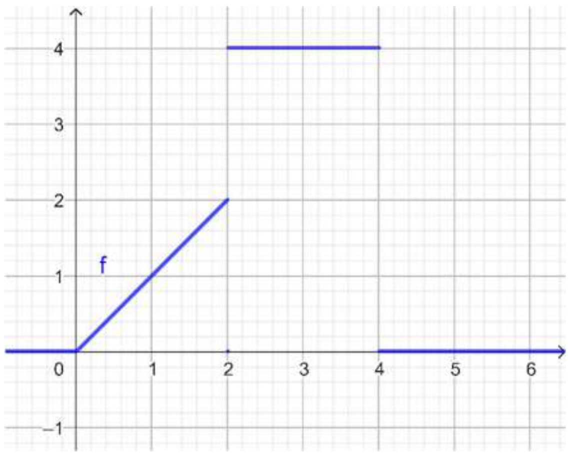
a) Representar la función.

b) Determinar si la función cumple las condiciones necesarias para que exista su transformada de Laplace.

c) Calcular la transformada de Laplace utilizando la definición y también utilizando propiedades y transformadas de funciones elementales.

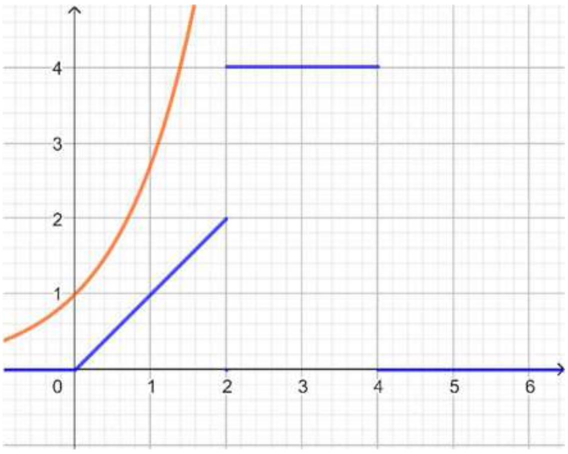
Solución a)

La gráfica de la función es



La función cumple las condiciones necesarias al ser una función continua con dos discontinuidades de salto finito, en el punto 2 y en el punto 4. Por lo tanto, es seccionalmente continua para t>0. Además, es de tipo exponencial ya que

$$\left|f\left(t\right)\right|\leq e^{t}\quad para\quad t\geq 0$$



Solución b)

$$\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right]=\int_{0}^{\infty}e^{-st}f\left(t\right)dt=\underbrace{\int_{0}^{2}e^{-st}tdt}_{\text{integral por partes}}+\int_{2}^{4}4e^{-st}dt=\left[-\frac{e^{-st}\left(st+1\right)}{s^{2}}\right]_{t=0}^{t=2}+\left[\frac{4e^{-st}}{-s}\right]_{t=2}^{t=4}=$$

$$=\left[-\frac{e^{-2s}\left(2s+1\right)}{s^{2}}+\frac{1}{s^{2}}\right]+\left[-\frac{4e^{-4s}}{s}+\frac{4e^{-2s}}{s}\right]=\frac{1}{s^{2}}+e^{-2s}\frac{-2s-1+4s}{s^{2}}+\frac{4e^{-4s}}{s}=$$

$$=\frac{1}{s^{2}}+e^{-2s}\frac{2s-1}{s^{2}}+\frac{4e^{-4s}}{s}$$

Solución c)

Se escribe la función a partir de la función de Heaviside

$$f\left(t\right)=t\left(U\left(t\right)-U\left(t-2\right)\right)+4\left(U\left(t-2\right)-U\left(t-4\right)\right)=tU\left(t\right)+\left(-t+4\right)U\left(t-2\right)-4U\left(t-4\right)$$

$$=\mathcal{L}\left[tU\left(t\right)\right]-\mathcal{L}\left[\underbrace{\left(t-4\right)}_{t-2-2}U\left(t-2\right)\right]-\mathcal{L}\left[4U\left(t-4\right)\right]=$$

$$=\mathcal{L}\left[tU\left(t\right)\right]-\mathcal{L}\left[\left(t-2\right)U\left(t-2\right)\right]+2\mathcal{L}\left[U\left(t-2\right)\right]-4\mathcal{L}\left[U\left(t-4\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{s^{2}}-\frac{e^{-2s}}{s^{2}}+2\frac{e^{-2s}}{s}-4\frac{e^{-4s}}{s}=\frac{1}{s^{2}}+e^{-2s}\frac{2s-1}{s^{2}}-4e^{-4s}\frac{1}{s}$$

Puedes ver más ejercicios resueltos sobre transformadas de Laplace en la página de Giematic UC
http://www.giematic.unican.es/index.php/transformada-laplace/material-interactivo

Anexo1.

TRANSFORMADAS DE LAPLACE			
	Función		Transformada
	$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left[F(s)\right]$		$F(s)=\mathfrak{L}\left[f(t)\right]$
1	1		$\frac{1}{s}, \quad s>0$
2	t^n		$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s>0, \quad n\geq 0$
3	$\sqrt{t}$		$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot s^{-3/2}, \quad s>0$
4	$\frac{1}{\sqrt{t}}$		$\sqrt{\pi}\cdot s^{-1/2}, \quad s>0$
5	e^{at}		$\frac{1}{s-a}, \quad s>a$
6	$t^n\cdot e^{at}$		$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s>a, \quad n\geq 0$
7	$\text{sen}\ at$		$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s>0$
8	$\cos\ at$		$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s>0$
9	$t\cdot\text{sen}\ at$		$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}, \quad s>0$
10	$t\cdot\cos\ at$		$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}, \quad s>0$
11	$e^{bt}\cdot\text{sen}\ at$		$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}, \quad s>b$
12	$e^{bt}\cdot\cos\ at$		$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}, \quad s>b$
13	$U\left(t-a\right)$		$\frac{e^{-as}}{s}, \quad s>a$

Anexo2.

Propiedades de la Transformada de Laplace			
	Función		Transformada
Linealidad	$a\ f(t)+bg(t)$		$a\ F(s)+bG(s)$ $s>\max(\alpha,\beta)$
Cambio de escala	$f(a\,t)$		$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\quad, s>\alpha$
Primera propiedad de traslación	$e^{at}f(t)$		$F(s-a),\quad s>a+\alpha$
Segunda propiedad de traslación	$U(t-c)\,f(t-c)$		$e^{-c\,s}F(s),\quad \forall s>\alpha$
Transformada de una derivada	$f'(t)$		$sF(s)-f(0^+),\quad s>\alpha$
	$f''(t)$		$s^2F(s)-sf(0)-f'(0),\quad s>\alpha$
	$f^{(n}(t)$		$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\ldots-f^{(n-1}(0)$
Derivada de una transformada	$t\,f(t)$		$-F'(s)$
	$t^n\ f(t)$		$(-1)^n\ F^{(n}(s)$
Transformada de una integral	$\int_0^t f(x)dx$		$\frac{1}{s}F(s),\quad s>\alpha$
Integral de una transformada	$\frac{f(t)}{t}$		$\int_1^\infty F(u)du$
$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)\quad(s>\alpha)$			$\mathcal{L}[g(t)]=G(s)\quad(s>\beta)$