Tecnológico de Monterrey.

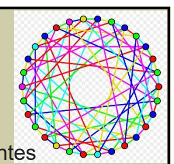
TC2038. Análisis y diseño de Algoritmos A

M.C. Ramona Fuentes Valdéz

rfuentes@tec.mx

106

Grafos



Coloreo de grafos

Introducción

- Cuando se colorea un mapa, habitualmente se asignan colores diferentes a dos regiones con una arista común.
- En este caso, se desean usar la menor cantidad de colores en lugar de simplemente asignar a cada región su propio color.

Aplicaciones

- Programación de horarios

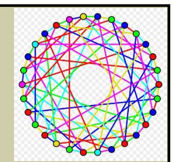
  Supongamos que queremos hacer un horario de exámenes para una universidad. Tenemos el listado de diferentes asignaturas y alumnos matriculados en cada asignatura. Muchas asignaturas tendrían alumnos en común.

  - ¿Cómo programamos el examen para que no se programen dos exámenes con un estudiante común al mismo tiempo?
  - ¿Cuántas franjas horarias mínimas se necesitan para programar todos los exámenes?

  Este problema se puede representar como un grafo donde cada vértice es un tema y una arista entre dos vértices significa que hay un estudiante común. Así que este es un problema de coloración de grafos en el que el número mínimo de intervalos de tiempo es igual al número cromático del grafo.

107

Grafos



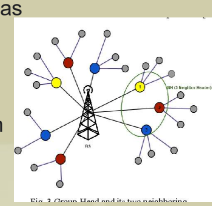
Coloreo de grafos

Aplicaciones

- ❑ Asignación de radiofrecuencia móvil

Cuando se asignan frecuencias a torres, las frecuencias asignadas a todas las torres en la misma ubicación deben ser diferentes.

- ¿Cómo asignar frecuencias con esta restricción?
- ¿Cuál es el número mínimo de frecuencias necesarias?



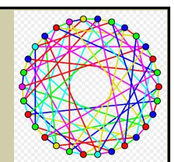
Este problema también es un ejemplo de problema de coloración de grafos en el que cada torre representa un vértice y una arista entre dos torres representa que están dentro del alcance de la otra.

- ❑ Sudoku:

Sudoku es también una variación del problema de coloración de grafos en el que cada celda representa un vértice. Hay una arista entre dos vértices si están en la misma fila o en la misma columna o en el mismo bloque.

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Grafos

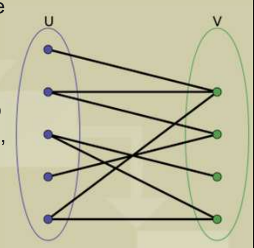


Coloreo de grafos

Aplicaciones

- ❑ Asignación de registros

En la optimización del compilador, la asignación de registros es el proceso de asignar una gran cantidad de variables de programa de destino a una pequeña cantidad de registros de la CPU. Este problema también es un problema de coloración de grafos.



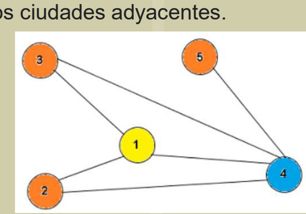
- ❑ Gráficos Bipartitos

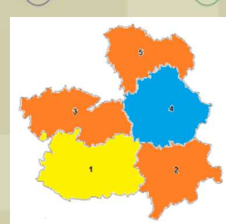
Podemos comprobar si un grafo es Bipartito o no coloreando el grafo con dos colores. Si una gráfica dada es 2-coloreable, entonces es Bipartita, de lo contrario no.

- ❑ Coloración del mapa

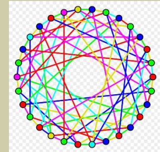
Mapas geográficos de países o estados donde no se puede asignar el mismo color a dos ciudades adyacentes.

Cuatro colores son suficientes para colorear cualquier mapa.





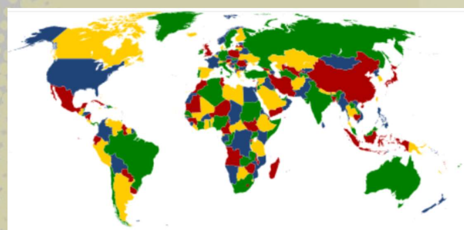
Grafos



Coloreo de grafos

Teorema de los cuatro colores

Se puede demostrar que cualquier mapa bidimensional se puede pintar usando cuatro colores de tal manera que las regiones adyacentes (*es decir, aquellas que comparten un segmento de límite común, y no solo un punto*) tienen colores diferentes.



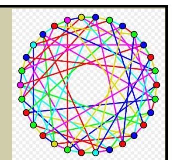
Coloreo de mapas

El problema del mapa de 4 colores se remonta a 1852, cuando Francis Guthrie, un estudiante de la University College London, observó que cualquier mapa dibujado en papel podía rellenarse con solo ese número de colores sin que quedaran dos regiones vecinas con el mismo tono.

¿Por qué los mapas sólo necesitan cuatro colores para que funcionen? ¿Es cierto que 4 colores son su

110

Grafos

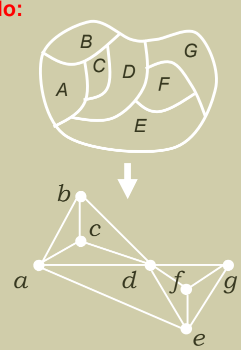


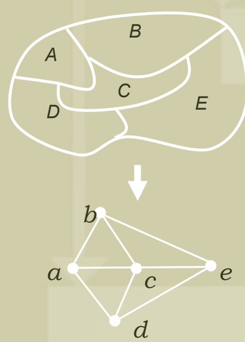
Coloreo de grafos

Grafo dual

- Cada mapa en un plano se puede representar mediante un grafo.
  - Cada región está representada por un vértice.
  - Las aristas se conectan a los vértices si las regiones representadas por estos vértices tienen una arista común.
  - Dos regiones que se tocan en un solo punto no se consideran adyacentes.
- El grafo resultante se llama grafo dual del mapa.

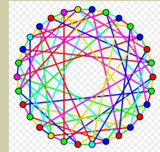
Ejemplo:





111

Grafos



Coloreo de grafos

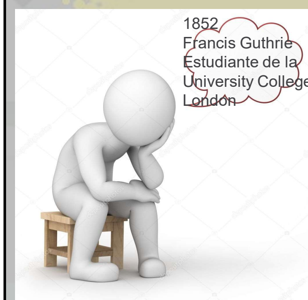
Una coloración de un grafo simple es la asignación de un color a cada vértice del gráfico para que no se asigne el mismo color a dos vértices adyacentes.

El número cromático de un grafo es el menor número de colores necesarios para colorear el grafo.

→ ¿Cuál es el número cromático de un grafo bipartito? 2

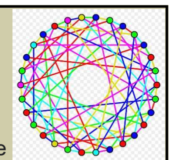
Teorema de los cuatro colores

- El número cromático de un **grafo plano** no es mayor de cuatro.



- Originalmente se planteó como una conjetura en la década de 1850.
- Finalmente fue probado por dos matemáticos estadounidenses: Kenneth Apple y Wolfgang Haken en 1976.
- Este es el primer teorema matemático que se ha probado con la ayuda de computadoras.
- Demostraron que si el teorema es falso, debe haber un contraejemplo de uno de aproximadamente 2000 tipos.
- Usaron computadoras para demostrar que ninguno de estos contraejemplos existe.

Grafos



Coloreo de grafos

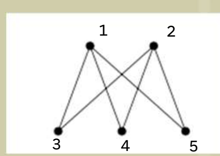
Grafos planos

- Cuando *se puede* dibujar un grafo conectado sin que ninguna arista se cruce, se denomina **plano**.
- Cuando un grafo plano se dibuja de esta manera, divide el plano en regiones llamadas **caras**.

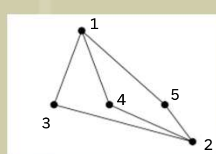
- Considera que la definición de plano incluye la frase "*se puede*".
- Significa que incluso si un grafo no parece plano, aún podría serlo.
- Quizás pueda volver a dibujarse de manera que no se crucen las aristas.

Ejemplo:

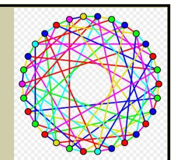
¿Este es un grafo plano?



Si, porque se puede volver a dibujar como:



Grafos

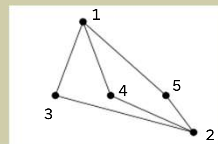


Coloreo de grafos

Grafos planos

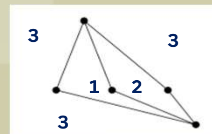
Caras (*faces*)

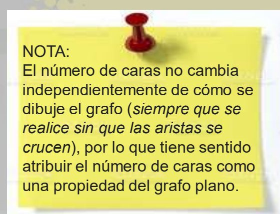
- Cuando se dibuja un grafo plano sin que las aristas se crucen, las aristas y los vértices del grafo dividen el plano en regiones.
- A cada región se le conoce como **cara**.



Ejemplo:

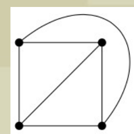
- ¿Cuántas caras tiene el grafo? ➡ El grafo tiene 3 caras.
  - En todo **grafo** conexo y plano que esté apropiadamente representado se verifica que el **número de caras** más el de vértices menos el de aristas vale 2.
    - Es decir C + V – A = 2 (*cuando se cuenta la **cara** exterior*)
      Si no se cuenta la **cara** exterior: C + V – A = 1.



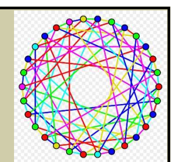


Ejemplo:

Considera estas dos representaciones del mismo grafo:



Grafos



Coloreo de grafos

Grafos planos

Euler para grafos planos

Existe una conexión entre el número de vértices (*v*), el número de aristas (*a*) y el número de caras (*c*) en cualquier grafo plano conectado.

→ Esta relación se conoce como fórmula de Euler.

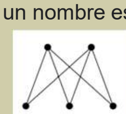
Euler's Formula for Planar Graphs.

For any connected planar graph with v vertices, e edges and f faces, we have

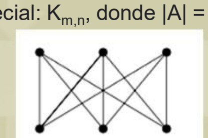
$$v - e + f = 2.$$

Grafos bipartitas

- Un grafo es bipartita si los vértices se pueden dividir en dos conjuntos, A y B, sin dos vértices adyacentes en A y sin dos vértices adyacentes en B.
- Los vértices de A pueden ser adyacentes a algunos o todos los vértices de B. Si cada vértice de A es adyacente a todos los vértices de B, entonces el gráfico es un gráfico bipartito completo y recibe un nombre especial: $K_{m,n}$, donde |A| = m y |B| = n.

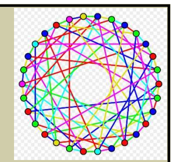


$K_{2,3}$



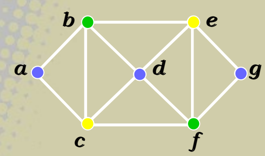
$K_{3,3}$

Grafos



Coloreo de grafos
Ejemplo

¿Cuál es el número cromático del siguiente grafo?

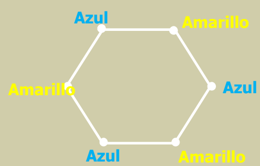


El número cromático debe ser al menos 3 ya que a, b y c deben asignarse con colores diferentes.

- Probemos primero con 3 colores.
  - ✓ 3 colores funcionan, por lo que el número cromático de este grafo es 3.

Ejemplo:

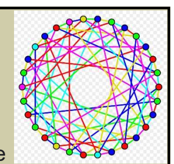
¿Cuál es el número cromático de cada uno de los grafos siguientes?



Número cromático: 2

Número cromático: 3

Grafos



Coloreo de grafos
Complejidad

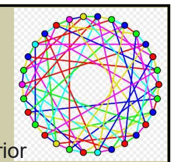
Los mejores algoritmos conocidos para encontrar el número cromático de un grafo tienen una complejidad de tiempo exponencial en el peor de los casos (*en el número de vértices del grafo*).

Incluso el problema de encontrar una aproximación al número cromático de un grafo es difícil.

Esto explica por qué la programación de exámenes finales es tan difícil, es decir:

- ¿cómo se pueden programar los exámenes finales en una universidad para que ningún estudiante tenga dos exámenes al mismo tiempo?

Grafos



Coloreo de grafos

Algoritmos voraces

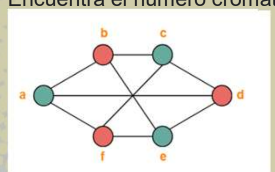
- No garantiza el uso de colores mínimos, pero garantiza un límite superior en el número de colores.
- El algoritmo básico nunca usa más de $d + 1$ colores donde d es el grado máximo de un vértice en el grafo dado.

Pasos

1) Colorea el primer vértice con el primer color.
2) Ahora, considera uno por uno los vértices restantes (V-1) y realiza lo siguiente:
   - Colorea el vértice actual seleccionado con el color que tenga el número más bajo si no se ha utilizado para colorear ninguno de sus vértices adyacentes.
   - Si se ha utilizado, elije el siguiente color con menor numeración.
   - Si se han utilizado todos los colores utilizados anteriormente, asigna un nuevo color al vértice actual seleccionado.

Ejemplo:

Encuentra el número cromático:

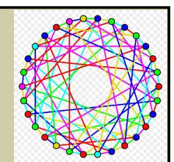


Vértice	a	b	c	d	e	f
Color	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2

El número mínimo de colores utilizados para colorear el grafo es 2.
→ Por lo tanto, el número cromático del grafo = 2.

En Teoría de grafos, el grado (valencia) de un vértice es el número de aristas incidentes al vértice.

Grafos



Coloreo de grafos

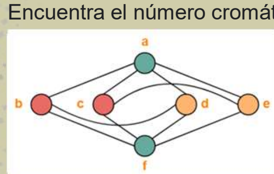
Algoritmos voraces

Pasos

1) Colorea el primer vértice con el primer color.
2) Ahora, considera uno por uno los vértices restantes (V-1) y realiza lo siguiente:
   - Colorea el vértice actual seleccionado con el color que tenga el número más bajo si no se ha utilizado para colorear ninguno de sus vértices adyacentes.
   - Si se ha utilizado, elije el siguiente color con menor numeración.
   - Si se han utilizado todos los colores utilizados anteriormente, asigna un nuevo color al vértice actual seleccionado.

Ejemplo:

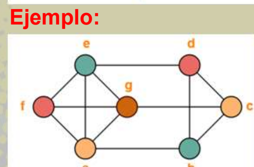
Encuentra el número cromático:



Vértice	a	b	c	d	e	f
Color	C_1	C_2	C_2	C_3	C_3	C_1

El número mínimo de colores utilizados para colorear el grafo es 3.
→ Por lo tanto, el número cromático del grafo = 3.

Ejemplo:



Vértice	a	b	c	d	e	f	g
Color	C_1	C_2	C_1	C_3	C_2	C_3	C_4

El número mínimo de colores utilizados para colorear el grafo es 4.
→ Por lo tanto, el número cromático del grafo = 4.

Grafos

Coloreo de grafos

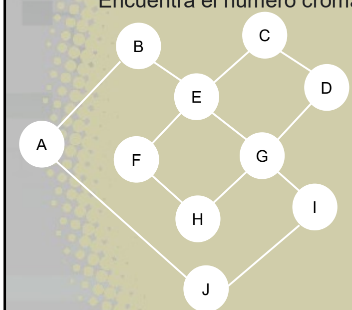
Algoritmos voraces

Pasos

1) Colorea el primer vértice con el primer color.
2) Ahora, considera uno por uno los vértices restantes (*V-1*) y realiza lo siguiente:
   - Colorea el vértice actual seleccionado con el color que tenga el número más bajo si no se ha utilizado para colorear ninguno de sus vértices adyacentes.
   - Si se ha utilizado, elije el siguiente color con menor numeración.
   - Si se han utilizado todos los colores utilizados anteriormente, asigna un nuevo color al vértice actual seleccionado.

Ejemplo:

Encuentra el número cromático:



Vértice	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Color										

Grafos

Coloreo de grafos

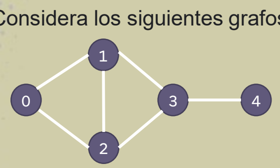
Algoritmos voraces

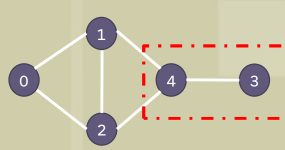
Análisis

- Complejidad temporal: O(V^2 + A) en el peor de los casos.
- El algoritmo básico no siempre usa un número mínimo de colores. Además, la cantidad de colores utilizados a veces depende del orden en el que se procesan los vértices.

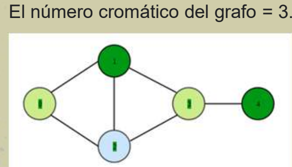
Ejemplo:

Considera los siguientes grafos:

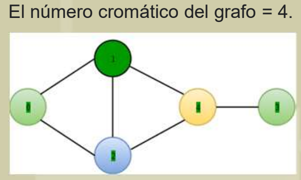




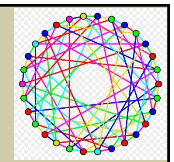
El número cromático del grafo = 3.



El número cromático del grafo = 4.



Grafos

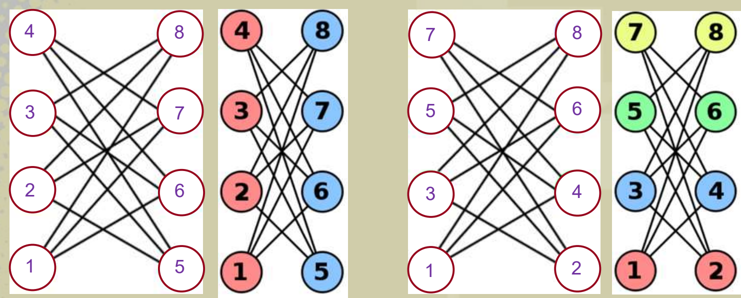


Coloreo de grafos

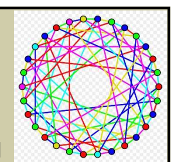
Algoritmos voraces

Ejemplo:

¿Cuál sería el número cromático de los siguientes grafos?



Grafos



Coloreo de grafos

Algoritmo Welsh-Powell

- En 1967, el algoritmo de Welsh y Powell incorporo un límite superior al número cromático de un grafo.
- Proporciona un algoritmo codicioso que se ejecuta en un grafo estático.
- Los vértices están ordenados según sus grados, la coloración codiciosa resultante utiliza cuando mucho $\max_i \min \{d(x_i) + 1, i\}$ colores, cuando mucho uno más que el grado máximo del grafo.
- Esta heurística se denomina algoritmo Welsh-Powell.

Pseudocódigo

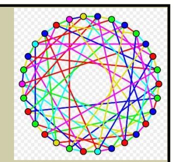
1. Encuentra el grado de cada vértice.
2. Enumera los vértices en orden descendente.
3. Colorea el primer vértice con el color 1.
4. Desplázate hacia abajo en la lista y colorea con el mismo color, todos los vértices que no estén conectados al vértice coloreado.
5. Repite el paso 4 en todos los vértices sin colorear con un nuevo color, en orden descendente de grado hasta que todos los vértices estén coloreados.

Complejidad

- La complejidad del algoritmo es $O(N^2)$

En Teoría de grafos, el **grado** (valencia) de un vértice es el número de aristas incidentes al vértice.

Grafos



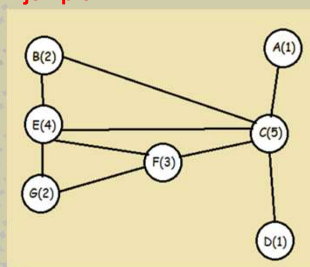
Coloreo de grafos

Algoritmo Welsh-Powell

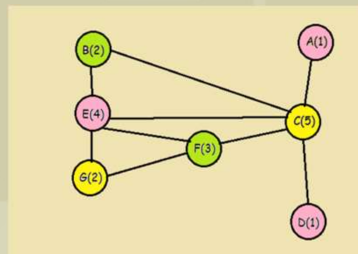
Pseudocódigo

1. Encuentra el grado de cada vértice.
2. Enumera los vértices en orden descendente.
3. Colorea el primer vértice con el color 1.
4. Desplázate hacia abajo en la lista y colorea con el mismo color, todos los vértices que no estén conectados al vértice coloreado.
5. Repite el paso 4 en todos los vértices sin colorear con un nuevo color, en orden descendente de grado hasta que todos los vértices estén coloreados.

Ejemplo:

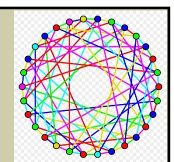


Vértice
C(5)
E(4)
F(3)
B(2)
G(2)
A(1)
D(1)



124

Grafos



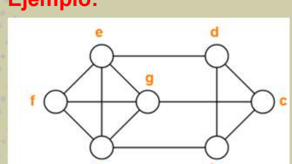
Coloreo de grafos

Algoritmo Welsh-Powell

Pseudocódigo

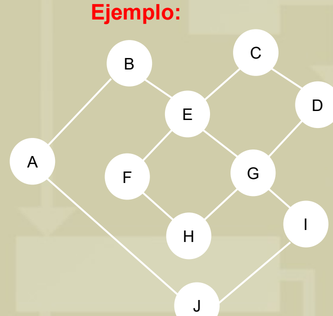
1. Encuentra el grado de cada vértice.
2. Enumera los vértices en orden descendente.
3. Colorea el primer vértice con el color 1.
4. Desplázate hacia abajo en la lista y colorea con el mismo color, todos los vértices que no estén conectados al vértice coloreado.
5. Repite el paso 4 en todos los vértices sin colorear con un nuevo color, en orden descendente de grado hasta que todos los vértices estén coloreados.

Ejemplo:



Vértice

Ejemplo:



Vértice

125