Informe Tarea 7 - Métodos Numéricos: ”Solución a la ecuación de un fluido compresible por el método de las curvas características”

Ignacio Andrés Sánchez Barraza
Rut: 18933808-2

November 11, 2015

1 Introducción

- En términos de ecuaciones diferenciales parciales existen variados tipos, entre ellos las que incluyen ecuaciones hiperbolicas, siendo ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. En este caso existen distintas maneras de resolución de dichas ecuaciones pero este informe se centrará en la resolución por el método de las curvas cárcteristicas.

- El método de las curvas caracteristicas consiste, a grandes rasgos, en reducir la EDP a una ecuacione diferencial ordinaria (EDO) para poder integrar dicha EDO con datos iniciales dados sobre una curva (que generalmente es una superficie en mas de 3 dimensiones, o hiper-superficie). Para una EDP de primer orden, el método de las caracteristicas utiliza curvas (llamadas curvas caracteristicas) para poder transformar la EDP en una EDO. Cuando esta EDO es encontrada puede ser resuelta y su solución transformada luego en la solución de la EDP original.

- En este informe específicamente se pretende resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} \tag{2}$$

$$P = A\rho^{\gamma} \tag{3}$$

  que corresponde a encontrar las soluciones para la posición y velocidad de cada parte de un fluido compresible en sólo una dimensión, en ausencia de gravedad y sin viscosidad, en función del tiempo, además de encontrar las densidades del mismo en una posición determinada.

- Para resolver este problema entonces se comienza primero por distinguir que $\frac{\partial P}{\partial \rho} = A\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma\frac{P}{\rho}$, entonces se define:

$$c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \gamma \frac{P}{\rho} \tag{4}$$

  entonces la ecuacion (2) queda como:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

  Aquí c no es una constante sino que es la velocidad del sonido que depende de la densidad ρ del fluido, Entonces ahora tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

Con esto se tiene un sistema de ecuaciones, del cual ahora se calculan las curvas características como la variación de v y ρ, con esto se tienen dos ecuaciones:

$$dv = v_x dx - (vv_x + \frac{c^2}{\rho}\rho_x)dt \tag{8}$$

$$d\rho = \rho_x dx - (v\rho_x + \rho v_x)dt \tag{9}$$

De ecuación (9) se despeja ρ_x y se reemplaza en (8) obteniéndose:

$$\rho(dx - vdt)dv = \rho((dx - vdt)^2 - c^2 dt)v_x - c^2 d\rho dt \tag{10}$$

y si se escoge que satisfagan la curva $(dx - vdt)^2 = c^2 dt^2$ entonces se obtienen dos ecuaciones sobre las curvas características que no dependen de v_x (derivada parcial de v con respecto a x):

$$\frac{x}{t} = v + c \quad \text{sobre curva f} \tag{11}$$

$$\frac{x}{t} = v - c \quad \text{sobre curva g} \tag{12}$$

De estas ecuaciones se integran las ecuaciones (6) y (7) sobre dichas curvas y se obtienen dos sistemas de ecuaciones que se deben integrar numéricamente:

$$dx = (v + c)dt \quad \text{con} \quad cd\rho + \rho dv = 0 \tag{13}$$

$$dx = (v - c)dt \quad \text{con} \quad cd\rho - \rho dv = 0 \tag{14}$$

Con este método es posible dar solución al problema que se plantea, solo basta ahora definir un método numérico que resuelva el último sistema de ecuaciones.

2 Procedimiento

- Para poder dar solución al problema anterior debemos definir un método numérico para trabajar con las ecuaciones (13) y (14), para ello se define un método que constará de dos etapas. En la primera etapa (o primera iteración) se discretizarán las ecuaciones con dx y dt y se usarán las siguientes ecuaciones para ello:

$$x_R - x_P = (v_P + c_P)(t_R - t_P) \tag{15}$$

$$x_R - x_Q = (v_Q + c_Q)(t_R - t_Q) \tag{16}$$

de donde se despejan x_R y t_R. Ahora se discretizan las ecuaciones con ρ y v, entonces:

$$c_P(\rho_R - \rho_P) + \rho_P(v_R - v_P) = 0 \tag{17}$$

$$c_Q(\rho_R - \rho_Q) + \rho_Q(v_R - v_Q) = 0 \tag{18}$$

de donde se despejan ρ_R y v_R, obteniéndose ahora entonces una primera aproximación a las soluciones $x_R,\ t_R,\ v_R$ y ρ_R

- Ahora para las siguientes aproximaciones (o siguientes iteraciones) se discretizan las mismas ecuaciones de forma más específica:

$$x_R{}^{n+1} - x_P{}^{n+1} = \frac{1}{2}(v_P + v_R{}^n + c_P + c_R{}^n)(t_R{}^{n+1} - t_P) \tag{19}$$

$$x_R{}^{n+1} - x_Q{}^{n+1} = \frac{1}{2}(v_Q + v_R{}^n + c_Q + c_R{}^n)(t_R{}^{n+1} - t_Q) \tag{20}$$

$$(c_P + c_R{}^n)(\rho_R{}^{n+1} - \rho_P) = -(v_R{}^{n+1} - v_P)(\rho_P + \rho_R{}^n) \tag{21}$$

$$(c_Q + c_R{}^n)(\rho_R{}^{n+1} - \rho_Q) = (v_R{}^{n+1} - v_Q)(\rho_Q + \rho_R{}^n) \tag{22}$$

  Ahora se tienen entonces aproximaciones de segundo orden para las soluciones que pueden ser usadas a partir de la seguna aproimación hasta converger a lo que se pide en el problema.

- Ahora hay que analizar dentro de las iteraciones cuando estas son pares o impares debido a que en este problema, las iteraciones cambian si se realizan un número par de ellas o no. Para esto se definen P y Q (los puntos de la iteración anterior donde las rectas descritas por (13) y (14) que pasan por esos puntos se intersectan en el punto R) para casos pares e impares. Para casos pares x_P será $x_R[i-1]$, igualmente para t_P y para las variables con el mismo sub-índice (siendo todas estas variables arreglos de largo 10001 en el caso de este problema donde se pide discretizar el espacio $0 \leq x \leq 1$ en 10000 intervalor iguales), para Q, x_Q será $x_R[i]$ y lo mismo para las demás variables con sub-índice Q (las variables en las ecuaciones del tipo $\alpha_R{}^n$ serán en un arreglo las componentes $\alpha_R{}^n[i]$ para ambos casos, par o impar). Y ahora para casos impares x_P será $x_R[i]$ y x_Q será $x_R[i+1]$. Con esto se tiene entonces que de despejar de las ecuaciones (19) y (20) $x_R{}^{n+1}$ y $t_R{}^{n+1}$, las componentes de cada arreglo estarán expresadas en función de las componentes de los arreglos de las mismas variables pero en una interación anterior.

- Entonces ahora que ya se tienen estructuradas estas variables, se colocan en una función que las entregue según si la iteración es par o impar, además de discernir si es la primera iteración o más, dado que las ecuaciones (15) a (18) sirven para la primera iteración solamente y las ecs. (19) a (22) para las demás. Con esto se define la función $formulas\_x\_t\_v\_rho$ en el código que cumple ese rol. Luego se define la función que inicialice el problema dadas las condiciones iniciales y de borde:

$$\begin{aligned} v(0,t) &= 0 \\ v(1,t) &= 0 \\ \rho(x > 0.1, 0) &= 1 \\ \rho(x \leq 0.1, 0) &= 1 + 0.0RRR(1 + cos(10\pi x)) \end{aligned}$$

  (donde RRR son los 3 últimos dígitos del R.U.T. antes del dígito verificador) además de usar como función constante A los valores $A(x \leq 1/3) = 4$ y $A(x > 1/3 = 1$, y como el exponente constante $\gamma = 5/3$ (coeficiente de dilatación adiabático) debido a que en este problema se asume una comparación del fluido compresible en una dimensión con el caso de un gas monoatómico con tres grados de libertad, que corresponde a un ejemplo de fluido compresible.

Después de tener estos aspectos del código terminados se define una función que itere la integración de la solución numérica en el espacio y tiempo, dejando más que nada la iteración espacial fija (debido a que se sabe que $0 \leq x \leq 1$) y la temporal libre como argumento (porque no se sabe hasta cuando integrar explícitamente, solo se conoce el dato del problema donde se pide integrar hasta que en el centro del intervalo $0 \leq x \leq 1$ se alcance un tiempo $t = 1/2$)

- Ahora se requiere definir una función que detecte cuando la solución converge a un cierto valor bajo una cierta tolerancia. Entonces se define la función
- Terminado esto se procede a escribir el cuerpo del programa principar y a realizar los gráficos que se piden.

3 Resultados

- Siguiendo el procedimiento anterior se obtuvieron los siguiente gráficos[1]:

4 Conclusiones

- De los gráficos se ve que a medida que pasa el tiempo y debido a la condición inicial de un pulso viajero a los largo del fluido, este experimenta variaciones en su densidad y velocidad en cada posición. Además de ello debido a que se enfrenta a una discontinuidad (ya sea un cambio de medio, densidad, etc) en $x = 1/3$ el pulso se refleja y propaga a la vez en sentidos opuestos, y debido a las condiciones de borde que asemajan paredes, el puslso sobre el fluido vuelve a reflejarse en los bordes hacia el interior del intervalo, y asi sucesivamente, lo que es un comportamiento esperable dentro de la naturaleza, siendo equiparable en este caso a una onda viajando en una cuerda, pero donde la densidad de la cuerda puede cambiar debido a que en un fluido, las partículas que lo constituyen no están restringidas a una sola posición.
- Como conclusión importante también cabe destacar que este problema da rienda a estudiar problemas más complejos como el estudiar pulsos ya no solo en una dimensión, sino en dos, pudiendo estudiar la naturaleza de un pulso viajero en la superficie de un fluido, restringido o no por paredes y ver que sucede con las interferencias constructivas y destructivas en dos dimensiones de dichos pulsos.
- También se debe decir que debido a la cantidad de variables que hay en este problema, el error sistemático puede ser grande si no se le da el tiempo necesario en trabajar el código y confeccionar un buen programa para dar solución al problema.

[1] No alcancé a terminar el código