

Informe Tarea 9 - Métodos Numéricos: "Cálculo de la constante de Hubble y relación entre flujos en bandas i y z "

Ignacio Andrés Sánchez Barraza
Rut: 18933808-2

November 24, 2015

1 Introducción

- La búsqueda de modelos que se ajusten a la realidad del universo, tanto micro como macroscópicamente, y que den explicación a lo que sucede en él es uno de los temas principales en cuanto a investigación científica concierne. Una de estas búsquedas en cosmología, siendo quizás una de las más importantes y que sirve como argumento para sus principios bases (principio cosmológico) es la ley de Hubble. La que da cuenta de que la velocidad y la distancia a la que se mueve un cuerpo u objeto cosmológico en el universo están relacionadas linealmente. Esta ley dice que el redshift¹ con que se ve a un objeto es proporcional a la distancia a ese objeto. Edwin Hubble fue uno de los primeros en obtener esta relación, obteniendo la constante que relacionaba ambos parámetros que hoy en día se conoce como la constante de Hubble H_0 . Dicha relación es la siguiente:

$$V = cz = H_0 D \quad (1)$$

con c la velocidad de la luz en el vacío, z el redshift, D la distancia al objeto cosmológico y H_0 la constante de Hubble.

- Esta constante además de definir la relación anterior también se usa en el ámbito cosmológico para obtener la distancia máxima que han podido viajar los fotones desde el inicio del universo (Big Bang) hasta el día de hoy ($t=t_0$), denominada distancia de Hubble que corresponde a $d_{Hubble} = c/H_0$. También define el tiempo de Hubble $t_{Hubble} = 1/H_0$ que define el tiempo que los fotones han estado viajando desde el inicio del universo. Con esto se puede ver la utilidad e importancia de la constante de Hubble en el ámbito de la cosmología.
- Esta constante sin embargo al comienzo no fue deducida sin errores, Edwin Hubble no obtuvo un valor correcto de la constante. Es más, su modelo se alejaba mucho del orden lineal que había propuesto.
- En este informe se verá el proceder de Hubble para obtener su constante y su valor además de investigadores posteriores que la corrigieron y de los cuales se han refinado los valores de la constante hasta el día de hoy.

2 Procedimiento

2.1 Pregunta 1

- A partir del archivo *data/hubble_original.dat* se pide obtener la constante de Hubble deducida por él originalmente. Para ello se usará la suposición de que H_0 es la constante que relaciona velocidad y distancia linealmente de la forma $y = a + bx$ con $a = 0$ debido a que un objeto cosmológico a distancia nula no puede tener velocidad de recesión no nula. Con ello entonces se le llamara a dicha constante H_0 constante de Hubble y se procederá a obtener el valor de H_0 que minimiza la función $\chi^2(a, b) = \sum_i^n (y_i - (bx_i))^2$ para el caso en que se toma $V = H_0 D$, y $\chi^2(a, b) = \sum_i^n (x_i - y_i/b)^2$

¹Corrimiento al rojo del espectro electromagnético de una fuente

para el caso $D = V/H_0$ dado que para ambos casos se obtienen valores de H_0 distintos. Entonces para poder obtener un valor de H_0 que minimice ambas expresiones, se minimizarán cada una por separada, y se usará como $H_0 = H_{0_{promedio}}$ el valor promedio de ambos valores de H_0 obtenidos de minimizar ambas expresiones. Ahora para poder minimizar la primera expresión se debe imponer que la derivada con respecto a b sea cero con lo que queda que:

$$\begin{aligned}\frac{d\chi^2}{db} = 0 &\Rightarrow \sum_i^n -2(y_i - bx_i)x_i = 0 \\ &\Rightarrow \sum_i^n (y_i x_i - bx_i^2) = 0 \\ &\Rightarrow b = \frac{\sum_i^n x_i y_i}{\sum_i^n x_i^2}\end{aligned}$$

Entonces ahora tomando x_i e y_i como distancias y velocidades respectivamente, entonces se obtiene:

$$H_0 = \frac{\sum_i^n D_i V_i}{\sum_i^n D_i^2}$$

- Ahora para obtener la otra relación se procede de la misma manera pero con:

$$\begin{aligned}\frac{d\chi^2}{db} = 0 &\Rightarrow \sum_i^n -2(x_i - y_i/b)y_i = 0 \\ &\Rightarrow \sum_i^n (x_i y_i - y_i^2/b) = 0 \\ &\Rightarrow b = \frac{\sum_i^n y_i^2}{\sum_i^n x_i y_i}\end{aligned}$$

y con esto se obtienen dos relaciones para H_0 en función de las velocidad y distancias. Estas relaciones se usarán como H_{0_1} y H_{0_2} para definir entonces un $H_{0_{promedio}}$ y así con este valor obtener una recta $V = H_{0_{promedio}} D$ con V y D los valores del archivo anterior.

- Luego de haber realizado, esto que básicamente es para poder graficar la relación lineal que dedujo Hubble, se procede a obtener el intervalo de confianza de este valor de la constante de Hubble por el método de Bootstrap. Este método consiste en un método estadístico para determinar el intervalo de confianza de un parámetro de una muestra aleatoria, en este caso H_0 de la muestra de datos del archivo *data/hubbleoriginal.dat*. Con este método se obtienen los límites superiores e inferiores del intervalo de confianza para H_0 y en este problema se usará un intervalo de confianza al 95% que dará cuenta del error asociado a dicha constante.

2.2 Pregunta 2

- En esta pregunta se pide obtener el valor que dedujo Friedman a partir de la corrección que hizo para el método de Hubble. Para esto se seguirá el mismo procedimiento anterior pero ahora con el archivo *data/SNIa.dat* que contiene las mediciones hechas por Friedman en su método de utilizar Supernovas tipo I para estimar distancias para una muestra de galaxias.
- Con esto usando el mismo proceder para obtener la relación lineal se obtiene la constante de Hubble corregida y también el intervalo de confianza al 95% para dicha constante.

2.3 Pregunta 3

- Para esta pregunta se pide algo un poco diferente, encontrar la relación lineal entre dos flujos obtenido de la banda i y banda z de un extracto del *Data Release 9 del Sloan Digital Sky Survey (SDSS)* mediante un polyfit. Para esto se usará el módulo *numpy.polyfit* de la librería *numpy* de python, que permite obtener un polyfit entre dos arreglos de datos de una dimensión, para distintos órdenes. En este caso interesa sólo el orden 1, es decir una relación del tipo $Ax + B$. Además se debe hacer una conversión de unidades de *nmaggies* a *Jansky* a través de la conversión $1 [nmaggie] \approx 3.631e - 6 [Jy]$ y piden usar los datos en unidades de $1e - 6 [Jy]$ por lo que sólo se deben multiplicar los elementos del archivo anteriormente mencionado para esta pregunta por un factor 3.631.
- También se pide encontrar los intervalos de confianza para los parámetros A y B anteriores, los que se obtendrán a través de una simulación de Monte Carlo.

- La simulación de Monte Carlo se hará para un número de ejecuciones de $N = 10000$ veces para reducir el error del mismo.
- Hecho esto, se procederá ahora a obtener los valores requeridos y gráficos que puedan ayudar a la interpretación de dichos resultados.

3 Resultados

- A raíz del proceder anterior se obtuvieron para las distintas preguntas los siguientes resultados:
 1. Para la constante de Hubble obtenida originalmente por él mismo, se obtuvo el valor de $H_0 = 472.140[km/(sMpc)]$ con un intervalo de confianza al 95%: $175.935 [km/(sMpc)] \leq H_0 \leq 1318.721 [km/(sMpc)]$. Además se obtuvo un gráfico a modo de interpretación:

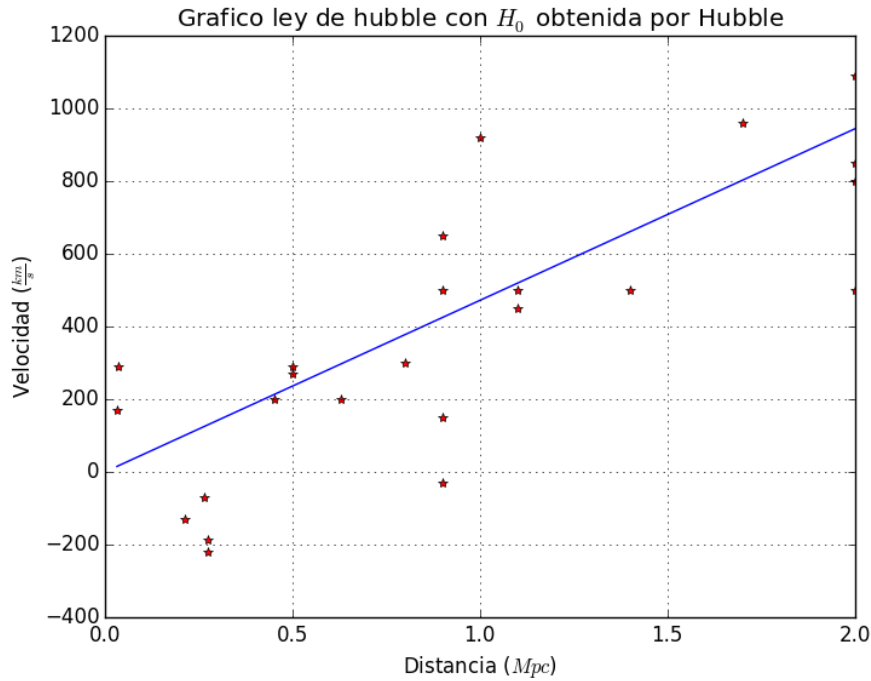


Figure 1: Gráfico de la ley de Hubble con H_0 original obtenida por Edwin Hubble. En rojo se observan los puntos que corresponden a las mediciones hechas por Hubble mediante el método de las Cefeidas y en azul la aproximación lineal de la relación entre velocidad y distancia de las mismas.

2. Para la constante de Hubble corregida por Friedman, se obtuvo el valor de $H_0 = 70.841[km/(sMpc)]$ con un intervalo de confianza al 95%: $71.004 [km/(sMpc)] \leq H_0 \leq 73.915 [km/(sMpc)]$. Además se obtuvo un gráfico a modo de interpretación:

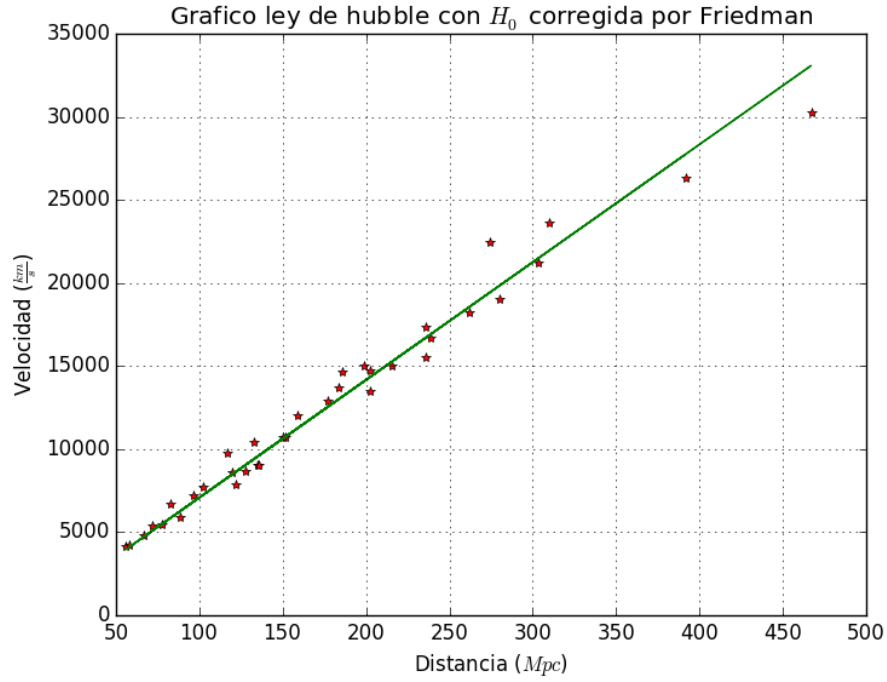


Figure 2: Gráfico de la ley de Hubble con H_0 corregida por el método de las supernovas tipo I de Friedman. En rojo se observan los puntos que corresponden a las galaxias medidas por Friedman y en verde la aproximación lineal de la relación entre velocidad y distancia de las mismas.

- Para la pregunta 3 se obtuvieron que los parámetros de la relación lineal con el polyfit eran: $A = 1.102$ y $B = 3.149$ y los intervalos de confianza al 95% para el parametro A fue: $0.981 \leq A \leq 1.131$ y para el parametro B fue $2.523 \leq B \leq 6.757$. Además se obtuvo un gráfico a modo de interpretación como el siguiente:

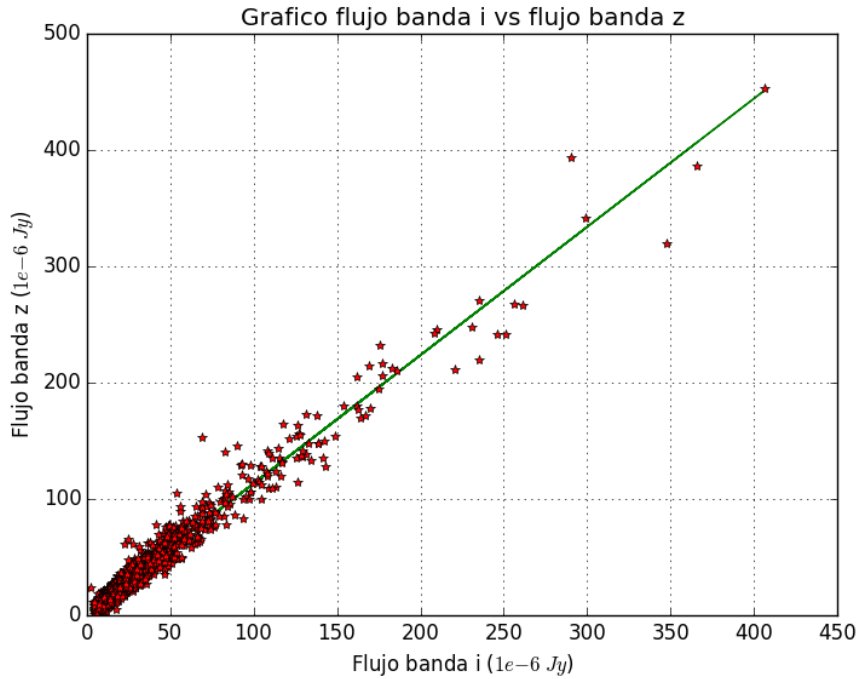


Figure 3: Gráfico de la relación lineal entre flujos de la banda i y banda z , correspondientes al eje x e y respectivamente. En rojo se observan los valores para cada flujo en la banda z con respecto a los flujos de la banda i y en verde la recta de aproximación lineal entre ambos valores.

4 Conclusiones

- Como primera conclusion se puede destacar el hecho de que Hubble aunque incurrió en un error al obtener los datos tuvo una buena aproximación al decir que velocidad y distancia estaban relacionadas linealmente dando paso a investigaciones y correcciones posteriores como la de Friedman, que es bastante cercana a los valores de la constante de Hubble aceptada hoy en día.
- El trabajo de Hubble logró también cementar las bases de la cosmología actual y también encontrar nuevas formas de medir distancias a objetos cosmológicos en su tiempo.
- Ahora yendo de lleno a los resultados obtenidos en este informe, se puede ver claramente que en la corrección de Friedman se ve que las posiciones en el gráfico de los distintos valores de las mediciones y la recta de relación lineal son bastantes similares, apoyando aún más la ley de Hubble que podría haber sido desestimada por el error aparente que cometía Hubble debido a el gran error entre los datos medidos y la aproximación lineal que él proponía.
El intervalo de confianza muestra una gran certeza en el valor de H_0 obtenido a pesar de que el valor queda fuera del intervalo, esto puede deberse a un error aleatorio debido a la naturaleza de los métodos usado (por el número de iteraciones usadas) pero aún así el error sigue siendo pequeño dadas las magnitudes de las cantidades físicas utilizadas (distancias y velocidades).
- En cuanto a la relación entre flujos de la banda i y banda z se puede apreciar que la relación lineal esta bastante cerca de la realidad, sobre todo a flujos relativamente pequeños, aumentando aparentemente su dispersión a medida que los flujos aumentan. Aún así se ve claramente la buena aproximación de la recta obtenida del polyfit y que da muestra de que a medida que el flujo en la banda i aumenta también lo hace en la banda z .