Formes n-linéaires antisymétriques sur un espace de dimension n

Vincent Humilière

21 octobre 2016

Soit $n \in \mathbb{N}$,
E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n,
$\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E,
$\alpha : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire antisymétrique.

Rappels

α est n-linéaire :

$$\forall (a, b, c_1, ..., c_{n-1}) \in E^{n+1}, \forall \lambda \in \mathbb{K},$$
$$\alpha(c_1, ..., \lambda a + b, ..., c_{n-1}) = \lambda \alpha(c_1, ..., a, ..., c_{n-1}) + \alpha(c_1, ..., b, ..., c_{n-1})$$

α est antisymétrique :

$$\forall (a_1, ..., a_n) \in E^n, 1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j$$
$$\alpha(a_1, ..., a_j, ..., a_i, ..., a_n) = -\alpha(a_1, ..., a_i, ..., a_j, ..., a_n)$$

Soit $(v_1, ..., v_n) \in E^n$,
On note, $\forall i \in [\![1, n]\!], v_i = \sum\limits_{j=1}^{n} v_{ij} e_j$

$$
\begin{aligned}
\alpha(v_1, ..., v_n) &= \alpha(\sum_{j=1}^{n} v_{1j} e_j, v_2, ..., v_n) \\
\text{\tiny (Linéarité pour } v_1\text{)} &= \sum_{j=1}^{n} v_{1j} \alpha(e_j, v_2, ..., v_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} v_{1j} \alpha(e_j, \sum_{k=1}^{n} v_{2k} e_k, v_3, ..., v_n) \\
\text{\tiny (Linéarité pour } v_2\text{)} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} v_{1j} v_{2k} \alpha(e_j, e_k, v_3, ..., v_n)
\end{aligned}
$$

On note$j_1, j_2, j_3, \dots$ au lieu de $j, k, l \dots$

$$
\sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} v_{1j_1} v_{2j_2} \alpha(e_{j_1}, e_{j_2}, v_3, ..., v_n) = \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_n=1}^{n} v_{1j_1} \dots v_{nj_n} \alpha(e_{j_1}, ..., e_{j_n})
$$

Or α est antisymétrique, donc $\alpha(e_{j_1}, ..., e_{j_n}) = 0$ s'il existe deux j_k et j_l égaux.
Donc $\alpha(e_{j_1}, \dots)$ ne peut être non nul que si tous les j_k sont distincts,
i.e. si $\begin{array}{ccc} \{1, ..., n\} & \to & \{1, ..., n\} \\ i & \mapsto & j_i \end{array}$ est une bijection.

$$
\begin{aligned}
\text{Donc } \alpha(v_1, ..., v_n) &= \sum_{\substack{j_1, ..., j_n = 1 \\ \text{où } i \mapsto j_i \text{ est} \\ \text{une bijection}}}^{n} v_{1j_1} \dots v_{nj_n} \alpha(e_{j_1}, ..., e_{j_n}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} v_{1\sigma(1)} \dots v_{n\sigma(n)} \alpha(e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(n)})
\end{aligned}
$$

Ainsi, puisque α est antisymétrique,

$$
\boxed{\alpha(v_1, ..., v_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) v_{1\sigma(1)} \dots v_{n\sigma(n)} \right) \alpha(e_1, ..., e_n)} \tag{1}
$$

Définition 1. On appelle déterminant des vecteurs $v_1, ..., v_n$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ le scalaire

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, ..., v_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) v_{1\sigma(1)} \dots v_{n\sigma(n)}$$

Proposition 1. Pour toute forme n-linéaire α sur E (où $\dim(E) = n$) il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha = \lambda \det_{\mathcal{B}}$.
De plus $\lambda = \alpha(\mathcal{B})$.

Démonstration. En effet

$$\alpha(v_1, ..., v_n) = \underbrace{\alpha(e_1, ..., e_n)}_{\alpha(\mathcal{B})} \det_{\mathcal{B}}(v_1, ..., v_n)$$

d'après l'équation (**??**). □

Proposition 2. $\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire antisymétrique.

Démonstration. Sera faite la fois prochaine. □

Proposition 3. Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E
Pour tous vecteurs $v_1, ..., v_n$ dans E,

$$\det_{\mathcal{B}'}(v_1, ..., v_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(v_1, ..., v_n)$$

Interprétation géométrique

Dans $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ base canonique,
$u, v, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$,
$\mathscr{A}(u, v)$ l'aire orientée du parallèlogramme engendré par u et v.

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(v, u) &= -\mathscr{A}(u, v) \\ \mathscr{A}(u_1 + u_2) &= \mathscr{A}(u_1, v) + \mathscr{A}(u_2, v) \\ \mathscr{A}(\lambda u, v) &= \lambda \mathscr{A}(u, v) \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{A}$ est une forme bilinéaire antisymétrique,
donc $\mathscr{A}$ est un multiple du déterminant.

$$\mathscr{A}(u, v) = \mathscr{A}(e_1, e_2) \det_{\mathcal{B}_0}(u, v)$$

Or $\mathscr{A}(e_1, e_2) = 1$, d'où :

$$\boxed{\mathscr{A}(u, v) = \det_{\mathcal{B}_0}(u, v)}$$

De même dans $\mathbb{R}^3$