

Formes n -linéaires antisymétriques sur un espace de dimension n

Vincent Humilière

21 octobre 2016

Soit $n \in \mathbb{N}$,

E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n ,

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ,

$\alpha : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ une forme n -linéaire antisymétrique.

Rappels

α est n -linéaire :

$$\forall (a, b, c_1, \dots, c_{n-1}) \in E^{n+1}, \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

$$\alpha(c_1, \dots, \lambda a + b, \dots, c_{n-1}) = \lambda \alpha(c_1, \dots, a, \dots, c_{n-1}) + \alpha(c_1, \dots, b, \dots, c_{n-1})$$

α est antisymétrique :

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in E^n, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$$

$$\alpha(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n) = -\alpha(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n)$$

Soit $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$,

On note, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, v_i = \sum_{j=1}^n v_{ij} e_j$

$$\alpha(v_1, \dots, v_n) = \alpha\left(\sum_{j=1}^n v_{1j} e_j, v_2, \dots, v_n\right)$$

$$\text{(Linéarité pour } v_1) = \sum_{j=1}^n v_{1j} \alpha(e_j, v_2, \dots, v_n)$$

$$= \sum_{j=1}^n v_{1j} \alpha\left(e_j, \sum_{k=1}^n v_{2k} e_k, v_3, \dots, v_n\right)$$

$$\text{(Linéarité pour } v_2) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n v_{1j} v_{2k} \alpha(e_j, e_k, v_3, \dots, v_n)$$

On note j_1, j_2, j_3, \dots au lieu de $j, k, l \dots$

$$\sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n v_{1j_1} v_{2j_2} \alpha(e_{j_1}, e_{j_2}, v_3, \dots, v_n) = \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n v_{1j_1} \dots v_{nj_n} \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$$

Or α est antisymétrique, donc $\alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = 0$ s'il existe deux j_k et j_l égaux.

Donc $\alpha(e_{j_1}, \dots)$ ne peut être non nul que si tous les j_k sont distincts,

i.e. si $\begin{matrix} \{1, \dots, n\} & \rightarrow & \{1, \dots, n\} \\ i & \mapsto & j_i \end{matrix}$ est une bijection.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \alpha(v_1, \dots, v_n) &= \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=1 \\ \text{où } i \mapsto j_i \text{ est} \\ \text{une bijection}}}^n v_{1j_1} \dots v_{nj_n} \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} v_{1\sigma(1)} \dots v_{n\sigma(n)} \alpha(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

Ainsi, puisque α est antisymétrique,

$$\boxed{\alpha(v_1, \dots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) v_{1\sigma(1)} \dots v_{n\sigma(n)} \right) \alpha(e_1, \dots, e_n)} \quad (1)$$

Définition 1. On appelle déterminant des vecteurs v_1, \dots, v_n dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ le scalaire

$$\text{Det}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) v_{1\sigma(1)} \dots v_{n\sigma(n)}$$

Proposition 1. Pour toute forme n -linéaire α sur E (où $\dim(E) = n$) il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha = \lambda \text{Det}_{\mathcal{B}}$.

De plus $\lambda = \alpha(\mathcal{B})$.

Démonstration. En effet

$$\alpha(v_1, \dots, v_n) = \underbrace{\alpha(e_1, \dots, e_n)}_{\alpha(\mathcal{B})} \text{Det}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$$

d'après l'équation (1). □

Proposition 2. $\text{Det}_{\mathcal{B}}$ est n -linéaire antisymétrique.

Démonstration. Sera faite la fois prochaine. □

Proposition 3. Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E

Pour tous vecteurs v_1, \dots, v_n dans E ,

$$\text{Det}_{\mathcal{B}'}(v_1, \dots, v_n) = \text{Det}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \text{Det}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$$

Interprétation géométrique

Dans \mathbb{R}^2

$\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ base canonique,

$u, v, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$,

$\mathcal{A}(u, v)$ l'aire orientée du parallélogramme engendré par u et v .

On détermine graphiquement que :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(v, u) &= -\mathcal{A}(u, v) \\ \mathcal{A}(u_1 + u_2, v) &= \mathcal{A}(u_1, v) + \mathcal{A}(u_2, v) \\ \mathcal{A}(\lambda u, v) &= \lambda \mathcal{A}(u, v) \end{aligned}$$

Donc \mathcal{A} est une forme bilinéaire antisymétrique, *i.e.* est un multiple du déterminant :

$$\mathcal{A}(u, v) = \mathcal{A}(e_1, e_2) \text{Det}_{\mathcal{B}_0}(u, v)$$

Or $\mathcal{A}(e_1, e_2) = 1$, d'où :

$$\mathcal{A}(u, v) = \text{Det}_{\mathcal{B}_0}(u, v)$$

De même dans \mathbb{R}^3

$\text{Det}_{\mathcal{B}_0}(u, v, w)$ est le volume orienté du parallélépipède engendré par u, v, w .