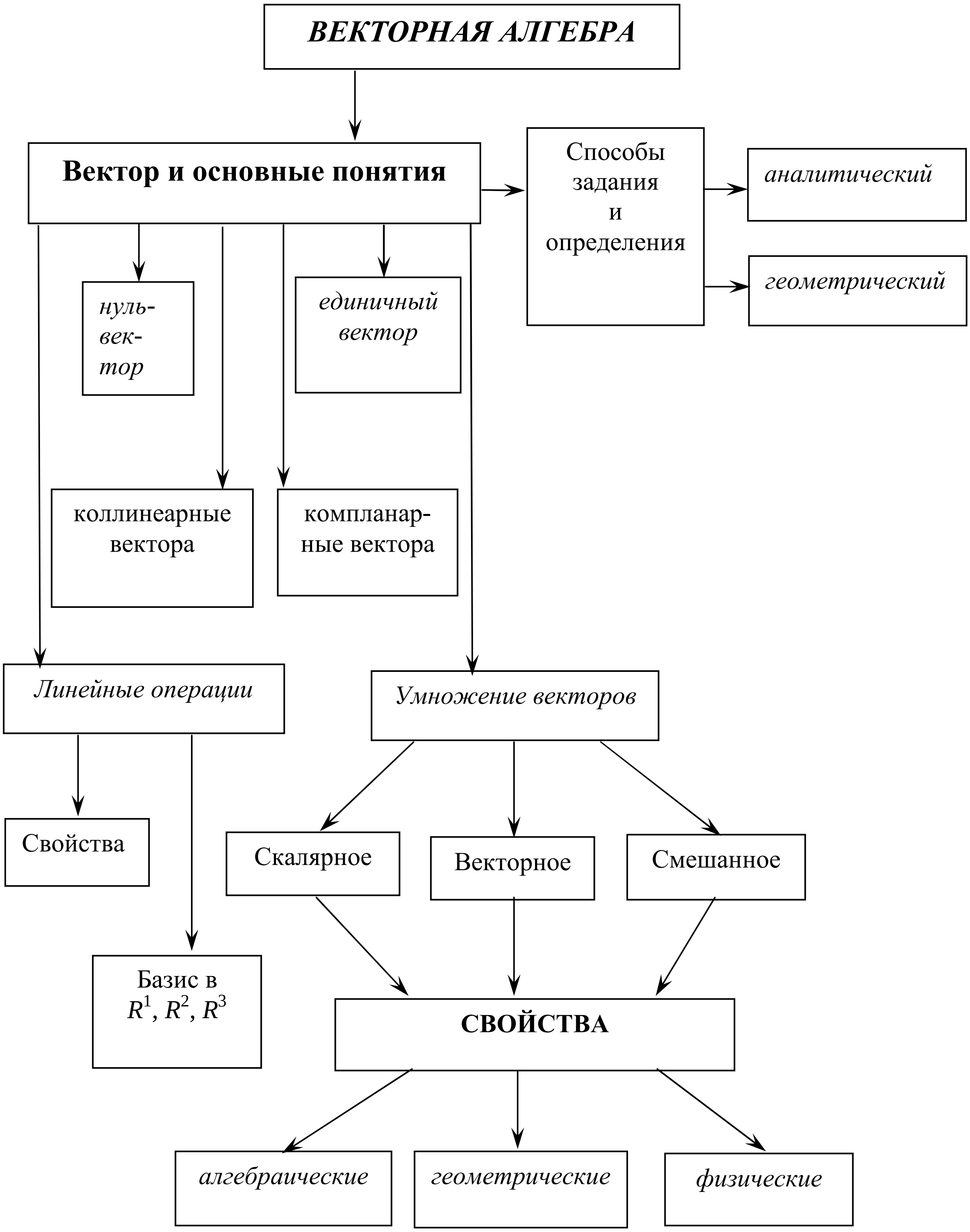
ГРАФИЧЕСКАЯ СХЕМА МОДУЛЯ



ИНФОРМАЦИОННАЯ ТАБЛИЦА *«ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА»*

Направленный отрезок прямой называют ***связным*** (геометрическим) ***вектором***. Обозначается: $\bar{a}$; $\bar{b}$; $\overline{AB}$; $\overline{M_1M_2}$.

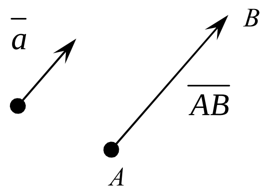
Векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых: $\bar{a} \,||\, \bar{b}$.

Векторы называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

1. Упорядоченная тройка ***некомпланарных*** векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ образует ***базис в R^3.***
2. Упорядоченная пара ***неколлинеарных*** векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ образует ***базис в R^2.***
3. Любой вектор $\bar{e}_1 \neq 0$ образует ***базис в R^1***: $\{\bar{e}_1\}$. $\boxed{\bar{a} = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2 + \gamma\bar{e}_3}$;

$\boxed{\bar{a} = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2}$; $\boxed{\bar{a} = \alpha\bar{e}_1}$.

Геометрический способ задания



Аналитический способ задания

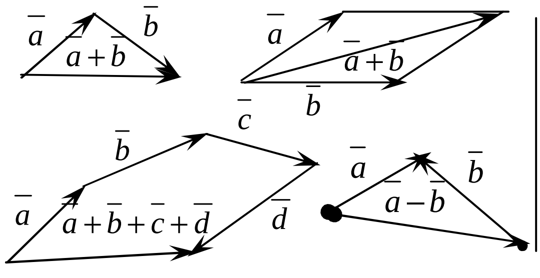
$\bar{a}\left(a_x; a_y; a_z\right)$; $\overline{AB}\,(x_B - x_A;\, y_B - y_A;\, z_B - z_A)$;

$\bar{a}_0\,(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$ – орт-вектор,

$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\bar{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\bar{a}|}$;

$\bar{a}_0 = \dfrac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}$; $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Линейные операции



Ортонормированный базис:

$\boxed{\{\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}\},\ \{\bar{i},\ \bar{j}\},\ \{\bar{i}\}.\ \bar{a} \,||\, \bar{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z} = \lambda.}$

$\bar{a} \pm \bar{b} = \left(a_x \pm b_x;\ a_y \pm b_y;\ a_z \pm b_z;\right)$

$k\bar{a} = \left(ka_x;\ ka_y;\ ka_z;\right)$

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\left(\bar{a},\hat{}\ \bar{b}\right) = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$. $\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z.}$

Алгебраические свойства скалярного произведения:

1. $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$;
2. $\bar{a}\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right) = \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}$;
3. $\bar{a}\cdot\left(\lambda\bar{b}\right) = \left(\lambda\bar{a}\right)\cdot\bar{b} = \lambda\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)$.

Геометрические свойства скалярного произведения:

1. $\bar{a}\cdot\bar{a} = \overline{a^2}$;
2. $\bar{a}\perp\bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}\cdot\bar{b} = 0$;
3. $\bar{a}\cdot\bar{b} > 0 \Leftrightarrow 0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, $\bar{a}\cdot\bar{b} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$.

В координатной форме: $\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}$.

Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$ такой, что:

1) Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен к плоскости, определяемой векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;

2) Тройка векторов ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$) - правая.

3) Модуль вектора $\bar{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$|\bar{c}| = |\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\left(\bar{a},\hat{}\ \bar{b}\right);$$

Алгебраические свойства векторного произведения:

1. $\bar{a}\times\bar{b} = -(\bar{b}\times\bar{a})$;
2. $(\lambda\bar{a})\times\bar{b} = \bar{a}\times(\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a}\times\bar{b})$;
3. $(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c} = \bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$.

Геометрические свойства векторного произведения:

1. $|\,\bar{a}\times\bar{b}\,| = S_{парал.}$, $\qquad \dfrac{1}{2}\,|\,\bar{a}\times\bar{b}\,| = S_{\Delta}$;
2. $\bar{a}\,||\,\bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}\times\bar{b} = \bar{0}$;
3. $\bar{a}\times\bar{a} = \bar{0}$.

В координатной форме: $$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; \ -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \ \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right).$$

Векторно-скалярным или ***смешанным произведением*** упорядоченной тройки векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ **в** $\boldsymbol{R}^3$ называется число $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$, которое получается скалярным умножением векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на третий вектор $\bar{c}$ и обозначается $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$ или ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$).

***Алгебраические свойства смешанного произведения*:**

1. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$;
2. $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c} = \bar{b}\ \bar{c}\ \bar{a} = \bar{c}\ \bar{a}\ \bar{b} = -\bar{b}\ \bar{a}\ \bar{c} = -\bar{a}\ \bar{c}\ \bar{b} = -\bar{c}\ \bar{b}\ \bar{a}$;
3. $(\overline{a_1}+\overline{a_2})\ \bar{b}\ \bar{c} = \overline{a_1}\ \bar{b}\ \bar{c} + \overline{a_2}\ \bar{b}\ \bar{c}$;
4. $(\lambda\bar{a})\bar{b}\ \bar{c} = \lambda(\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c})$, $\qquad \forall\lambda \in$ R.

***Геометрические свойства смешанного произведения*:**

1. $V_{парал.} = |\,\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\,|$, $\quad V_{пир.} = \dfrac{1}{6}V_{парал.}$;
2. $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c} > 0 \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ - правая;
3. $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c} < 0 \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ - левая;
4. $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c} = 0 \Rightarrow \bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ - компланарны.;
5. $\bar{a}\ \bar{a}\ \bar{b} = \bar{a}\ \bar{b}\ \bar{b} = \bar{a}\ \bar{c}\ \bar{c} = \ldots = 0$.

В координатной форме: $$\boxed{\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}.$$

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

4.1. Основные понятия

Рассматривая различные физические процессы и явления, мы встречаемся с объектами и физическими величинами различной природы.

Определение 4.1.1. Величины, для задания которых достаточно указать только их численное значение, называются ***скалярными*** величинами.

Примеры скалярных величин: длина, угол, площадь, объем, время, плотность, электроемкость, работа, температура, давление и др.

Определение 4.1.2. Величины, для задания которых необходимо указать не только числовое значение, но и направление, называются ***векторными величинами***.

Всякая векторная величина может быть изображена с помощью прямолинейного отрезка, у которого различают начало и конец.

Определение 4.1.3. ***Связным*** (геометрическим) ***вектором*** называют направленный отрезок прямой.

Примеры векторных величин: перемещение, скорость, ускорение, напряженность электрического и магнитного поля, сила, момент силы и т.п.

Векторы обозначаются: $\overline{a}$, $\overline{b}$; $\overline{AB}$ (A – начало вектора, B – конец вектора), $\overline{M_1M_2}$.

Термин «вектор» ввел Гамильтон (около 1845 г.).

Определение 4.1.4. ***Длиной вектора*** называют расстояние между его началом и концом. Длина вектора называется ***модулем***.

Связный вектор полностью определяется:

– точкой приложения,

– направлением,

– длиной.

Однако для целого ряда вопросов точка приложения безразлична, имеют значение только длина вектора и направление.

Определение 4.1.5. Направленный отрезок, рассматриваемый с точностью до выбора его начала, называют ***свободным вектором***.

Поскольку точка приложения безразлична, то свободный вектор можно переносить, сохраняя его длину и направление, в любую точку пространства, в частности, можно приводить к общему началу. В дальнейшем мы будем рассматривать в основном свободные векторы, и называть их просто векторами.

Определение 4.1.6. Вектор называется ***нулевым*** или ***нуль-вектором***, если его длина равна нулю. Нулевой вектор не имеет определенного направления.

Определение 4.1.7. Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным***.

Определение 4.1.8. Векторы, лежащие на одной или на параллельных прямых называют ***коллинеарными***.

Определение 4.1.9. Коллинеарные векторы, которые имеют одно и то же направление, называются ***сонаправленными*** и обозначаются: $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$. Коллинеарные векторы, имеющие противоположное направление, называются ***противонаправленными*** и обозначаются: $\overline{a}\downarrow\uparrow\overline{b}$.

Определение 4.1.10. Единичный вектор, сонаправленный с вектором $\overline{a}$, называют его ***ортом*** $\overline{a_0}$.

Определение 4.1.11. Векторы называются ***равными***, если они имеют одинаковую длину и направление.

Определение 4.1.12. Вектор $-\overline{a}$ противоположен вектору $\overline{a}$, если он имеет длину вектора $\overline{a}$, но противоположное направление.

Замечание: 1) $\overline{a}\downarrow\downarrow\overline{b} \Leftrightarrow \overline{a_0}=\overline{b_0}$;

2) $\overline{a}\downarrow\uparrow\overline{b} \Leftrightarrow \overline{a_0}=-\overline{b_0}$.

Определение 4.1.13. Векторы, лежащие в одной или параллельных плоскостях, называются ***компланарными***.

4.2. Линейные операции над векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

Определение 4.2.1. ***Произведением вектора*** $\overline{a}$ ***на число*** k называют вектор $\overline{c}=k\cdot\overline{a}$, коллинеарный $\overline{a}$, такой, что:

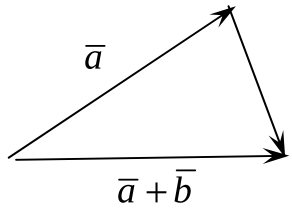
1. $|\overline{c}|=|k|\cdot|\overline{a}|$;
2. $\overline{c}\downarrow\downarrow\overline{a}$, if $k>0$;
3. $\overline{c}\uparrow\downarrow\overline{a}$, if $k<0$.

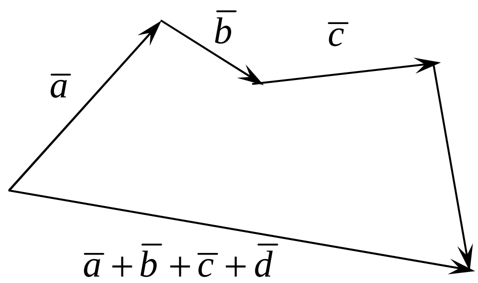
Из определения произведения вектора на число следуют свойства этого произведения.

Свойства:

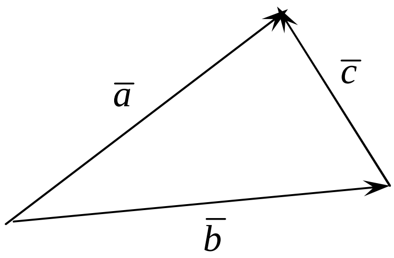
1. $k\cdot\overline{a}=\overline{a}\cdot k$;
2. $(k_1+k_2)\cdot\overline{a}=\overline{a}\cdot k_1+\overline{a}\cdot k_2$;
3. $k\cdot(\overline{a}+\overline{b})=k\cdot\overline{a}+k\cdot\overline{b}$.

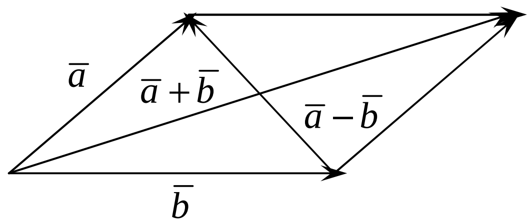
Определение 4.2.2. ***Суммой векторов*** называется вектор $\overline{c}$, начало которого совпадает с началом первого, а конец – с концом последнего, при условии, что точка приложения каждого последующего вектора совпадает с концом предыдущего.





Определение 4.2.3. ***Разностью векторов*** $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют такой вектор, $\overline{c}$ равный $\overline{a}-\overline{b}$, который нужно сложить с вектором $\overline{b}$, чтобы получить вектор $\overline{a}$: $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$; $\overline{c}+\overline{b}=\overline{a}$.





Свойства сложения векторов:

1. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;
2. $\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}$;
3. $k\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=k\cdot\overline{a}+k\cdot\overline{b}$.

Замечание: $\overline{a_0}=\overline{a}\cdot\dfrac{1}{|\overline{a}|}$.

Упражнение. Доказать, что, если точка О – точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=0$.

ТЕОРЕМА 4.2.1. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, если $\exists\, k\neq 0$, $k\in R$, что

$$\overline{a}=k\cdot\overline{b}.$$

$$\boxed{\overline{a}\parallel\overline{b}\iff,\exists\, k\in R,\ \overline{a}=k\cdot\overline{b}}.$$

Доказательство.

$\Rightarrow$) Пусть $\overline{a}\parallel\overline{b}$:

1) если $\overline{a}\downarrow\downarrow\overline{b}$, рассмотрим вектор

$k\cdot\overline{b}=\dfrac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot\overline{b_0}=|\overline{a}|\cdot\overline{a_0}=\overline{a}$, т.к. ($\overline{a}\downarrow\downarrow\overline{b}\ \Rightarrow\ \overline{a_0}=\overline{b_0}$).

2) если $\overline{a} \downarrow\uparrow \overline{b}$, рассмотрим вектор

$$k \cdot \overline{b} = -\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|} \cdot \overline{b} = -|\overline{a}| \cdot \overline{b_0} = |\overline{a}| \cdot \overline{a_0} = \overline{a}, \text{ т.к. } (\overline{a} \downarrow\uparrow \overline{b} \;\Rightarrow\; \overline{a_0} = -\overline{b_0}).$$

$\Leftarrow$) Пусть $\exists k \neq 0$, $k \in R$, $\overline{a} = k \cdot \overline{b}$. Тогда, по определению произведения вектора на число, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны.

4.3. Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана **ось** l**,** т.е. направленная прямая.

Определение 4.3.1. ***Проекцией точки*** M на ось l называется основание M_1 перпендикуляра MM_1, опущенного из точки на ось.

Точка M_1 есть точка пересечения оси с плоскостью, проходящей через току M перпендикулярно оси (рис. 1).

Если точка M лежит на оси l, то проекция точки M на ось совпадает с M.

Пусть $\overline{AB}$ – произвольный вектор ($\overline{AB} \neq \overline{0}$). Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось l, соответственно, начала A и конца B вектора $\overline{AB}$ и рассмотрим вектор $\overline{A_1B_1}$ (рис. 2).

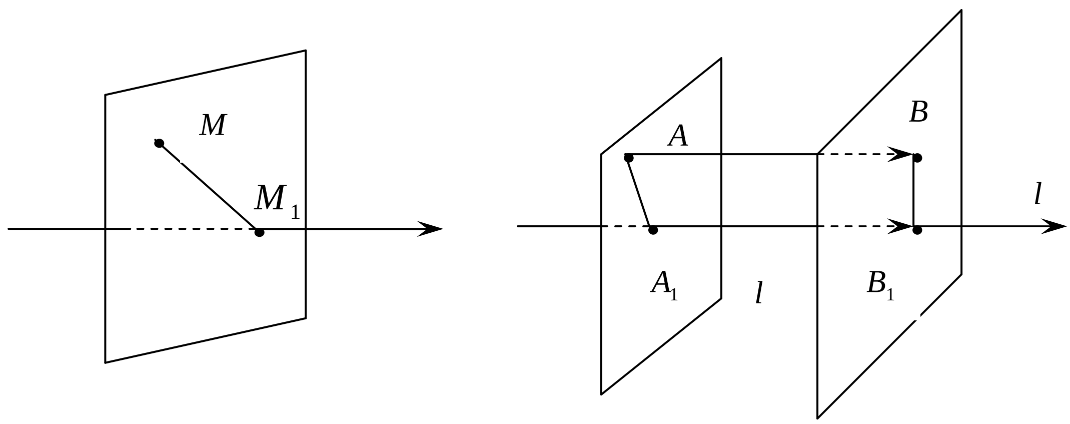


Рис. 1 Рис. 2

Определение 4.3.2. ***Проекцией вектора*** $\overline{AB}$ на ось l называется положительное число $|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены, и отрицательное число $-|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены.

Если точки A_1 и B_1 совпадают ($\overline{A_1B_1} = \overline{0}$), то проекция вектора $\overline{AB}$ равна 0.

Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l обозначается так: $np_l\overline{AB}$. Если вектор $\overline{AB} = \overline{0}$ или $\overline{AB} \perp l$, то $np_l\overline{AB} = 0$.

Угол φ между вектором $\overline{a}$ и осью l (или угол между двумя векторами) изображён на рис. 3. Очевидно $0 \le \varphi \le \pi$.

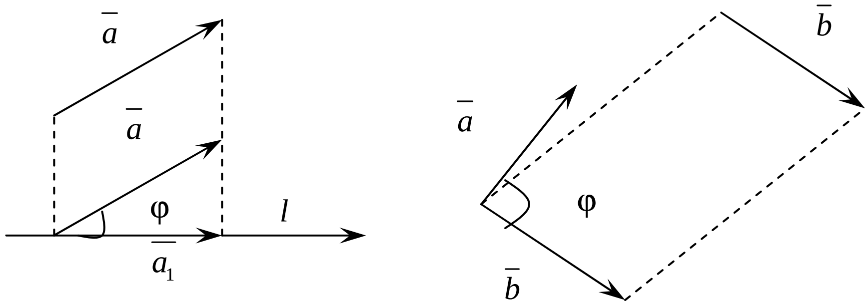


Рис. 3

Рассмотрим некоторые основные свойства проекций.

Свойство 1. Проекция вектора $\overline{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\overline{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, т.е. $np_l\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi$.

Докозательство: Если $\varphi = \left(\widehat{\overline{a}, l}\right) < \dfrac{\pi}{2}$, то $np_l\overline{a} = +|\overline{a_1}| = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi$. Если $\varphi = \left(\widehat{\overline{a}, l}\right) > \dfrac{\pi}{2} (\varphi \le \pi)$, то $np_l\overline{a} == -|\overline{a_1}| = -|\overline{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = |\overline{a}|\cos\varphi$ (рис. 4).

Если $\varphi = \left(\widehat{\overline{a}, l}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, то $np_l\overline{a} = 0 = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi$.

***Следствие* 1.** Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол – прямой.

***Следствие* 2.** Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

Свойство 2. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось.

Доказательство: Пусть, например, $\overline{d} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$. Имеем $np_l\overline{d} = +|\overline{d_1}| = +|\overline{a_1}| + |\overline{b_1}| + |\overline{c_1}|$, т.е. $np_l(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}) = np_l\overline{a} + np_l\overline{b} + np_l\overline{c}$ (рис. 5).

Свойство 3. При умножении вектора $\overline{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число, т.е.

$$np_l(\lambda \cdot \overline{a}) = \lambda \cdot np_l\overline{a}.$$

Доказательство:

При $\lambda>0$ имеем

$$np_l\left(\lambda\cdot\overline{a}\right)=\left|\lambda\overline{a}\right|\cdot\cos\varphi=\lambda\cdot\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\varphi=\lambda\cdot np_l\overline{a}.$$

При $\lambda<0$ имеем

$$np_l\left(\lambda\cdot\overline{a}\right)=\left|\lambda\overline{a}\right|\cdot\cos\left(\pi-\varphi\right)=-\lambda\cdot\left|\overline{a}\right|\cdot\left(-\cos\varphi\right)=\lambda\cdot np_l\overline{a}.$$

Свойство справедливо, очевидно, и при $\lambda = 0$.

Вывод: Таким образом, линейные операции над векторами приводят к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов.

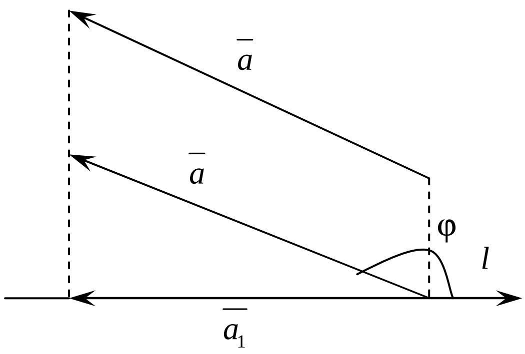


Рис. 4

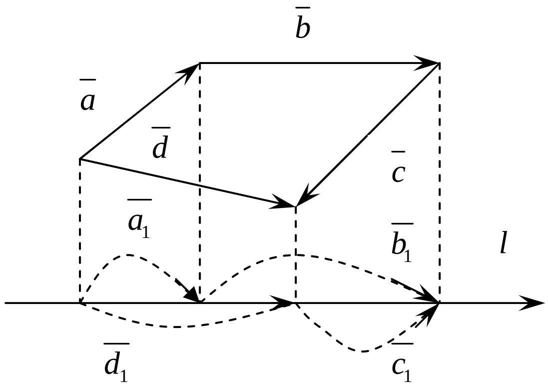


Рис. 5

4.4. Линейная зависимость и независимость векторов

Определение 4.4.1. ***Линейной комбинацией системы векторов*** $\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ ...,\overline{a_n}$ называется вектор $\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+...+\lambda_n\overline{a_n}$, где λ_i – числа, $i=1,2,...,n$.

Определение 4.4.2. Система векторов $\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ ...,\overline{a_n}\}$ – ***линейно зависима***, если существуют числа $\lambda_i\in R$, одновременно не равные нулю, такие, что справедливо равенство $\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+...+\lambda_n\overline{a_n}=\overline{0}$.

Определение 4.4.3. Система векторов $\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ ...,\overline{a_n}\}$ называется ***линейно независимой***, если их линейная комбинация равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты в этой линейной комбинации равны нулю.

Иными словами, для линейно независимой системы векторов выполняется равносильность:

$$\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+\ldots+\lambda_n\overline{a_n}=\overline{0}\iff\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0.$$

ТЕОРЕМА 4.4.1. Любые два вектора, лежащие на прямой, линейно зависимы.

Доказательство. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ лежат на одной прямой $\Rightarrow$ $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны по определению. Тогда по Т.4.2.1 существует $k \neq 0$ такое, что

$$\bar{a} = k \cdot \bar{b} \;\Rightarrow\; \bar{a} + (-k)\cdot \bar{b} = 0 \Rightarrow \exists\; \lambda_1 = 1 \;\text{ и }\; \lambda_2 = -k\,;\, \lambda_2 \neq 0\,,$$

что выполняет условие определения 4.2.1 $\Rightarrow$ {$\bar{a}$ и $\bar{b}$} — линейно зависимы.

Вывод: на прямой может быть только один линейно независимый вектор.

ТЕОРЕМА 4.4.2. Любые два неколлинеарных вектора на плоскости линейно независимы.

Доказательство. Предположим противное: пусть $\bar{a}$ не является коллинеарным $\bar{b}$, но {$\bar{a}$; $\bar{b}$} линейно зависима $\Rightarrow$ по определению 4.4.1. $\exists\; \lambda_1, \lambda_2$, одновременно $\neq 0$, такие, что $\lambda_1 \cdot \bar{a} + \lambda_2 \bar{b} = 0$.

Пусть $\lambda_2 \neq 0$, тогда $\lambda_2 \bar{b} = -\lambda_1 \bar{a}$. Тогда $\bar{b} = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \bar{a}$, $\Rightarrow$ $\bar{b} = k \cdot \bar{a} \Rightarrow$

по Т.4.2.1. $\bar{a} \,||\, \bar{b}$, что противоречит условию. Значит, наше предположение не верно. Отсюда заключаем, что $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно независимы, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 4.4.3. Любой вектор на плоскости может быть представлен в виде линейной комбинации двух неколлинеарных векторов.

Доказательство. Пусть $\bar{a} \neq 0$, $\bar{b} \neq 0$, $\bar{a}$ не является коллинеарным $\bar{b}$.

Покажем, что $\forall \bar{c} \in R^2$, который лежит в той же плоскости, что вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

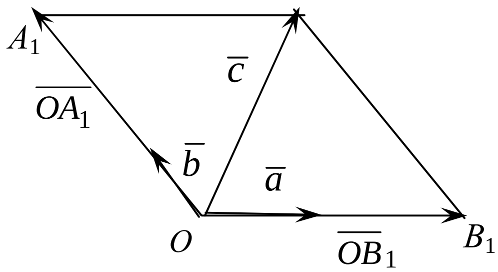


Рис. 6

Приведем три вектора к общему началу O и достроим $\bar{a}$ и $\bar{b}$ так, чтобы вектор $\bar{c}$ был диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 6). По правилу параллелограмма $\bar{c} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1}$. Так как $\bar{b} \,||\, \overline{OA_1}$, то по Т.4.2.1 $\exists\; \lambda_1 \neq 0$, что $\overline{OA_1} = \lambda_1 \bar{b}$; $\bar{a} \,||\, \overline{OB_1}$ $\Rightarrow$ по Т.4.2.1 $\exists\; \lambda_2 \neq 0$, $\overline{OB_1} = \lambda_2 \bar{a}$.

Тогда
$$\boxed{\bar{c} = \lambda_1 \bar{b} + \lambda_2 \bar{a}}, \qquad (4.4.1)$$
что и требовалось доказать.

Следствие. Любые три компланарных вектора линейно зависимы.

Вывод: На плоскости может быть максимально два линейно независимых вектора.

Замечание 4.4.1. Равенство 4.4.1 называют разложением вектора $\bar{c}$ по системе линейно независимых векторов.

Замечание 4.4.2. Аналогично Т.4.4.2. можно доказать, что три некомпланарных вектора линейно независимы в трехмерном пространстве.

ТЕОРЕМА 4.4.4. В трехмерном пространстве любой вектор можно представить в виде линейной комбинации трех некомпланарных векторов. (Доказать самостоятельно).

Замечание 4.4.3. Из Т.4.4.4 следует, что четыре вектора линейно зависимы в трехмерном линейном пространстве.

Вывод: В трехмерном пространстве может быть максимально три линейно независимых вектора.

4.5. Базис. Разложение вектора по базису

Определение 4.5.1. ***Базисом*** пространства называется совокупность максимального числа линейно независимых векторов данного пространства.

Замечание 4.5.1. Очевидно, базисов в пространстве бесконечно много.

Определение 4.5.2. Система векторов образует базис некоторого пространства, если:

1) система ***линейно независима***;

2) любой вектор данного пространства можно представить в виде ***линейной комбинации*** векторов данной системы.

Замечание 4.5.2. Тот факт, что векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$ образуют базис записывают следующим образом: $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}\}$.

Определение 4.5.3. ***Упорядоченный набор коэффициентов*** $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ в разложении вектора по базису (в линейной комбинации) $\bar{a} = \lambda_1\overline{e_1} + \lambda_2\overline{e_2} + ... + \lambda_n\overline{e_n}$ называют ***координатами*** данного вектора $\bar{a}$ в данном базисе $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}\}$.

Замечание 4.5.3. В R^1 базис образует любой вектор $\{\bar{e}_1\} \in R^1$. Значит, любой вектор $\boxed{\bar{a} = \lambda_1 \cdot \bar{e}_1}$.

Замечание 4.5.4. В R^2 базис образует любая пара двух неколлинеарных векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} \in R^2$. Значит, любой вектор $\boxed{\bar{a} = \lambda_1 \cdot \bar{e}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{e}_2}$.

В R^3 базис образует любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} \in R^3$. Значит, любой вектор $\boxed{\bar{a} = \lambda_1 \cdot \bar{e}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{e}_2 + \lambda_3 \cdot \bar{e}_3}$.

Определение 4.5.4. Пусть в некотором пространстве задана точка О. Совокупность точки и некоторого базиса называют ***системой координат***. Точку О называют ***началом координат***.

Определение 4.5.5. Если длины базисных векторов равны единице, то базис называется ***нормированным***.

Определение 4.5.6. Если все векторы базиса взаимно перпендикулярны, то базис называют ***ортогональным***.

Определение 4.5.7. Базис, у которого базисные векторы нормированы и ортогональны, называют ***ортонормированным***.

Определение 4.5.8. Система координат с ортонормированным базисом называется ***декартовой прямоугольной системой координат***. Сокращенно – ***ДПСК***.

В ДПСК базисные векторы принято обозначать:

$$\text{для } R^1 - \{\bar{i}\},$$

$$\text{для } R^2 - \{\bar{i}, \bar{j}\},$$

$$\text{для } R^3 - \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}.$$

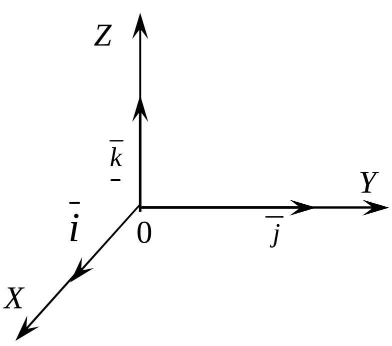
В ДПСК оси, исходящие из начала координат (рис. 7):

- в направлении вектора $\bar{i}$ – ось абсцисс *OX*,
- в направлении вектора $\bar{j}$ – ось ординат *OY*,
- в направлении вектора $\bar{k}$ – ось аппликат *OZ*.

По Т.4.4.4 любой вектор трехмерного пространства можно представить в виде линейной комбинации векторов из базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, т.е. для любого вектора $\bar{a}$,

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k},$$

где упорядоченная тройка чисел (a_x, a_y, a_z) является координатами вектора $\bar{a}$ в базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.



З а м е ч а н и е 4.5.5. Координаты вектора $\bar{a}$ могут быть получены, как его проекции на соответствующие базисные оси:

a_x – проекция $\bar{a}$ на ось *OX*;

a_y – проекция $\bar{a}$ на ось *OY*;

a_z – проекция $\bar{a}$ на ось *OZ*.

4.6. Выражение длины вектора через его координаты

Пусть $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Из геометрических соображений, в нашем случае, вектор является диагональю прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах базиса $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, значит, его длина в квадрате равна сумме квадратов линейных размеров (рис. 8).

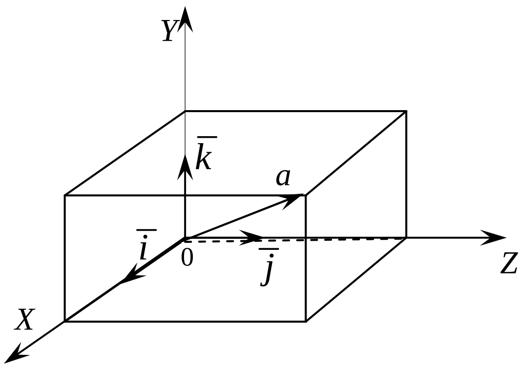


Рис. 8

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (4.6.2)$$

Пример. Вычислить длину вектора $\overline{a} = (5, -3, -15)$.

Решение. Воспользуемся формулой (4.6.2). Будем иметь

$$|\overline{a}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-15)^2} = \sqrt{25 + 9 + 225} = \sqrt{259}.$$

4.7. Направляющие косинусы вектора. Орт-вектор в координатной форме

Пусть в ДПСК угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{i}$ равен α, $\overline{b}$ и $\overline{j}$ равен β, $\overline{c}$ и $\overline{k}$ равен γ $\Leftrightarrow$ $(\overline{a},\hat{}\ \overline{i}) = \alpha$, $(\overline{a},\hat{}\ \overline{j}) = \beta$, $(\overline{a},\hat{}\ \overline{k}) = \gamma$.

Так как координаты вектора – это проекции его на соответствующие базисные вектора, то:

$$\begin{aligned} a_x &= np_{\overline{i}}\,\overline{a} = |\overline{a}|\cos\alpha, \\ a_y &= np_{\overline{j}}\,\overline{a} = |\overline{a}|\cos\beta, \\ a_z &= np_{\overline{k}}\,\overline{a} = |\overline{a}|\cos\gamma. \end{aligned} \qquad (4.7.1)$$

Определение 4.7.1. Косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ в выражении (4.7.1) называют ***направляющими косинусами вектора*** $\overline{a}$.

Если известны координаты вектора $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то из формул (4.7.1) следуют формулы для вычисления направляющих косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}, \ \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}, \ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}. \qquad (4.7.2)$$

Так как $|\overline{a}_0| = 1$ и $\overline{a}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$,

то $\Rightarrow$ $$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}. \qquad (4.7.3)$$

З а м е ч а н и е. Формула (4.7.3) выражает связь между направляющими косинусами вектора.

4.8. Линейные операции над векторами в координатной форме

Введение базиса и понятие координат вектора в некотором базисе позволяет перейти от геометрического задания вектора к заданию его числами (координатами) – ***аналитическому способу*** задания вектора.

Аналитический способ задания вектора дает возможность решать задачи по геометрии, физике, механике и т.д. средствами алгебры.

По определению, координаты – коэффициенты в разложении вектора по базису $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, тогда : $\bar{a}=\lambda_1\cdot\bar{e}_1+\lambda_2\cdot\bar{e}_2+\lambda_3\cdot\bar{e}_3$.

Будем записывать: $\bar{a}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$.

Координаты однозначно определяют положение вектора в пространстве. Чаще всего мы будем рассматривать координаты вектора в ДПСК.

ТЕОРЕМА 4.8.1. Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

ТЕОРЕМА 4.8.2. Пусть вектор $\bar{a}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ задан координатами в некотором базисе $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$. Тогда $k\bar{a}=(k\lambda_1,k\lambda_2,k\lambda_3)$, где $k\in R$.

При умножении вектора на скаляр каждая координата умножается на этот скаляр.

Доказательство. По условию $\bar{a}=\lambda_1\cdot\bar{e}_1+\lambda_2\cdot\bar{e}_2+\lambda_3\cdot\bar{e}_3$. Воспользуемся свойствами линейных операций над векторами. Будем иметь: $k\bar{a}=k(\lambda_1\cdot\bar{e}_1+\lambda_2\cdot\bar{e}_2+\lambda_3\cdot\bar{e})=k\lambda_1\cdot\bar{e}_1+k\lambda_2\cdot\bar{e}_2+k\lambda_3\cdot\bar{e}_3$. Тогда по определению координат, как коэффициентов в разложении по базису, упорядоченный набор чисел $(k\lambda_1,k\lambda_2,k\lambda_3)$ является координатами вектора $k\bar{a}$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 4.8.3. Пусть векторы $\bar{a}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ и $\bar{b}=(\lambda'_1,\lambda'_2,\lambda'_3)$ заданы координатами в некотором базисе $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$. Тогда $\bar{a}+\bar{b}=(\lambda_1+\lambda'_1,\lambda_2+\lambda'_2,\lambda_3+\lambda'_3)$.

При сложении двух векторов их соответствующие координаты складываются.

Доказательство. По условию

$$\bar{a} = \lambda_1 \cdot \bar{e}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{e}_2 + \lambda_3 \cdot \bar{e}_3 \qquad \text{и} \qquad \bar{b} = \lambda'_1 \cdot \bar{e}_1 + \lambda'_2 \cdot \bar{e}_2 + \lambda'_3 \cdot \bar{e}_3.$$

Воспользуемся свойствами линейных операций над векторами. Будем иметь:

$$\bar{a} + \bar{b} = \lambda_1 \cdot \bar{e}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{e}_2 + \lambda_3 \cdot \bar{e}_3 + \lambda'_1 \cdot \bar{e}_1 + \lambda'_2 \cdot \bar{e}_2 + \lambda'_3 \cdot \bar{e}_3 =$$
$$= (\lambda_1 + \lambda') \cdot \bar{e}_1 + (\lambda_2 + \lambda'_2) \cdot \bar{e}_2 + (\lambda_3 + \lambda'_3) \cdot \bar{e}_3.$$

Тогда по определению координат, как коэффициентов в разложении по базису, упорядоченный набор чисел $(\lambda_1 + \lambda'_1, \lambda_2 + \lambda'_2, \lambda_3 + \lambda'_3)$ является координатами вектора $\bar{a} + \bar{b}$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 4.8.4. Пусть $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то
$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (4.8.1)$$

У коллинеарных векторов координаты пропорциональны.

Доказательство. По условию $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ и $\bar{a} \parallel \bar{b}$ $\Rightarrow$ по Т.4.2.1 $\exists$ $k \neq 0$, такое, что $\bar{a} = k \cdot \bar{b}$, т.е. $(a_x, a_y, a_z) = k(b_x, b_y, b_z)$ или по Т.4.9.2 $(a_x, a_y, a_z) = (kb_x, kb_y, kb_z)$. Отсюда по Т.4.9.1

$$a_x = kb_x,\ a_x = kb_y,\ a_x = kb_z, \Rightarrow \frac{a_x}{b_x} = k,\ \frac{a_y}{b_y} = k,\ \frac{a_z}{b_z} = k \ \Rightarrow\ \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k,$$

что и требовалось доказать.

Примеры.

1⁰. Определить коллинеарные векторы среди векторов $\bar{a}$=(1, 2, –3), $\bar{b}$=(2, 4, 6) и $\bar{c}$=(3, 6,–9).

Решение. Для координат векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеем: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{-3}{6}. \Rightarrow \bar{a} \nparallel \bar{b}$.

Для координат векторов $\bar{a}$ и $\bar{c}$ имеем: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{-3}{-9}. \Rightarrow \bar{a} \parallel \bar{c}$.

2⁰. Найти вектор $\bar{x} \uparrow\downarrow \bar{a}$ такой, что $|\bar{x}| = \sqrt{21}$, где $\bar{a} = (2, 4, -8)$.

Решение. По условию $\bar{x} \uparrow\downarrow \bar{a}$ (k<0) $\Rightarrow \bar{x} = k\bar{a} \Rightarrow \bar{x} = (2k, 4k, -8k)$.

Тогда $|x| = \sqrt{4k^2 + 16k^2 + 64k^2}$ или $|\bar{x}| = \sqrt{84k^2}$. Поскольку $|\bar{x}| = \sqrt{21}$, то $\Rightarrow 2\sqrt{21}|k| = \sqrt{21}$ и $\Rightarrow |k| = \frac{1}{2}$. Из условия имеем $k < 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow \bar{x}$=(–1, –2, 4).

Упражнение. Для вектора $\overline{a}=(2,-3,6)$ найти вектор $\overline{x}\,||\,\overline{a}$ такой, что $0<(\overline{a},^\wedge Oy)<\dfrac{\pi}{2}$, $|\overline{x}|=21$.

4.9. Переход от одного базиса к другому

ТЕОРЕМА 4.9.1. Пусть заданы векторы: $\overline{a}\,(x_1,\,y_1,\,z_1)$; $\overline{b}\,(x_2,\,y_2,\,z_2)$; $\overline{c}\,(x_3,\,y_3,\,z_3)$ в некотором базисе. Система векторов $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ образует базис тогда и только тогда, когда $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\neq 0$.

Задача. Пусть заданы векторы: $\overline{a}\,(x_1, y_1, z_1)$; $\overline{b}\,(x_2, y_2, z_2)$; $\overline{c}\,(x_3, y_3, z_3)$; $\overline{d}\,(m,\,n,\,p)$ и система векторов $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ образует базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе.

Решение. Чтобы определить координаты вектора $\overline{d}$ в базисе $\{\overline{a},\,\overline{b},\,\overline{c}\}$ необходимо найти коэффициенты в разложении вектора $\overline{d}$ по этому базису:

$$\overline{d}=\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}+\lambda_3\overline{c}\,. \qquad (4.9.1)$$

Используя теоремы об умножении вектора на число, сложения векторов, равенстве векторов перейдем от векторного равенства (4.10.1) к координатным равенствам: $(m,\ n,\ p)$ = $(\lambda_1x_1+\ \lambda_2x_2+\lambda_3x_3;\ \ \lambda_1y_1+\ \lambda_2y_2+\lambda_3y_3;\ \lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3)$.

$$\begin{cases} m=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3, \\ n=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3, \\ p=\lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3; \end{cases}$$

$\Rightarrow$ получилась система трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Так как, по условию, система векторов $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ образует базис, то

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\neq 0,$$

$\Rightarrow$ система имеет единственное решение $(\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3)$ $\Rightarrow$ координаты вектора $\overline{d}$ в новом базисе $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ можно определить.

4.10. Задание вектора двумя точками

Определение 4.10.1. ***Радиус-вектором*** точки данного пространства называют вектор, соединяющий начало системы координат и данную точку.

$\overline{OM_1}$ – радиус-вектор точки M_1 (рис. 9).

За координаты точки данного пространства принимают координаты ее радиус-вектора.

Задача. Пусть $\overline{M_1M_2}$ задан через точки M_1 (x_1, y_1, z_1) и M_2 (x_2, y_2, z_2). Определить координаты вектора $\overline{M_1M_2}$.

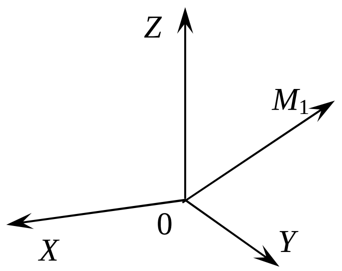


Рис. 9

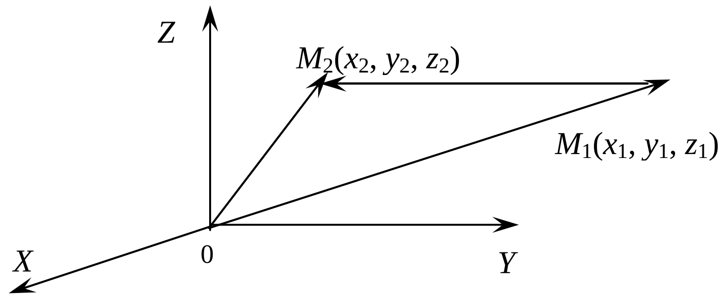


Рис. 10

Так как M_1 и M_2 заданы своими координатами, то известны $\overline{OM_1}$ (x_1, y_1, z_1) и $\overline{OM_2}$ (x_2, y_2, z_2). По правилу вычитания векторов имеем – $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1}$, тогда по теореме сложения векторов в координатной форме и умножения их на число $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ (рис. 10).

Замечание. Длина вектора

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

4.11. Скалярное произведение двух векторов

Определение 4.11.1. ***Скалярным*** произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \overline{a}\ \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\left(\overline{a}, \wedge\, \overline{b}\right). \qquad (4.11.1)$$

Замечание 4.11.1. Так как проекция вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ по определению равна $|\overline{a}|\ \cos\left(\overline{a}, \wedge\, \overline{b}\right)$, проекция вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{a}$ по определению равна $|\overline{b}| \cos\left(a, \wedge\, b\right)$, то

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot np_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}| \cdot np_{\overline{b}}\overline{a}. \qquad (4.11.2)$$

Алгебраические свойства скалярного произведения

ТЕОРЕМА 4.11.1. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$.

Доказательство. Имеем $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\left(\bar{a},\wedge\bar{b}\right)$,

$$\bar{b}\cdot\bar{a}=|\bar{b}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos\left(a,\wedge b\right)\ \Rightarrow \bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}\,.$$

ТЕОРЕМА 4.11.2. $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot(\lambda\bar{b})=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$.

Доказательство. На основании формулы (4.12.2) и свойств проекции вектора на вектор получим:

$(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=|\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\left(\lambda\bar{a}\right)=\lambda|\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\bar{a}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$. Аналогично,

$|\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\left(\lambda\bar{b}\right)=\lambda|\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\bar{b}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})\ \Rightarrow\ (\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot(\lambda\bar{b})=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$.

ТЕОРЕМА 4.11.3. $\bar{a}\cdot(\ \bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$.

Упражнение. Доказать самостоятельно.

Вывод. Из Т.4.11.1 – Т.4.11.3 следует, что **при раскрытии скобок в скалярном произведении поступают, как при умножении многочленов**.

Геометрические свойства скалярного произведения

ТЕОРЕМА 4.11.4. (*Условие перпендикулярности двух векторов*).

$$\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0\,.$$

Доказательство. $\Rightarrow$) Пусть $\bar{a}\perp\bar{b}\Rightarrow\cos\left(\bar{a},\wedge\bar{b}\right)=\cos 90^0=0\ \Rightarrow$ $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\left(\bar{a},\wedge\bar{b}\right)=0$.

$\Leftarrow$) Пусть $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$, т.е. $|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\left(\bar{a},\wedge\bar{b}\right)=0$. Тогда

1) если $|\bar{a}|=0, mo\Rightarrow\bar{a}=\bar{0}\Rightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0\Rightarrow\bar{a}\perp\bar{b}$.

2) если $|\bar{b}|=0\ , mo\Rightarrow\ \bar{b}=\bar{0}\ \Rightarrow\ \bar{a}\cdot\bar{b}=0\ \Rightarrow\ \bar{a}\perp\bar{b}$.

3) если $\cos\left(\bar{a},\wedge\bar{b}\right)=0\ , mo\Rightarrow\left(\bar{a},\wedge\bar{b}\right)=90^0\ \Rightarrow\ \bar{a}\perp\bar{b}$.

ТЕОРЕМА 4.11.5. Скалярный квадрат вектора $\bar{a}^2$, скалярное произведение вектора на себя, равен квадрату своего модуля.

Доказательство. Очевидно $\bar{a}^2=|\bar{a}||\bar{a}|\cos 0^0=|\bar{a}|^2$:

$$\bar{a}^2=|\bar{a}|^2. \qquad (4.11.3)$$

Из формулы (4.11.3) следует еще один способ вычисления длины вектора:

$$\boxed{\left|\overline{a}\right| = \sqrt{\overline{a}^{\,2}}}. \qquad (4.11.4)$$

З а м е ч а н и е 4.11.2. Формула (4.11.4) применяется в случае геометрического способа задания вектора.

4.12. Скалярное произведение в координатах

ТЕОРЕМА 4.12.1. Пусть в ДПСК $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Тогда $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Доказательство. По условию $\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}$; $\overline{b} = b_x \overline{i} + b_y \overline{j} + b_z \overline{k}$. Вычислим $\overline{a} \cdot \overline{b} = (a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}) \cdot (b_x \overline{i} + b_y \overline{j} + b_z \overline{k})$.

Воспользуемся алгебраическими и геометрическими свойствами скалярного произведения, при этом будем иметь

$$a_x b_x(\overline{i} \cdot \overline{i}) + a_x b_y(\overline{i} \cdot \overline{j}) + a_x b_z(\overline{i} \cdot \overline{k}) + a_y b_x(\overline{j} \cdot \overline{i}) + a_y b_y(\overline{j} \cdot \overline{j}) +$$
$$+ a_y b_z(\overline{j} \cdot \overline{k}) + a_z b_x(\overline{k} \cdot \overline{i}) + a_z b_y(\overline{k} \cdot \overline{j}) + a_z b_z(\overline{k} \cdot \overline{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е . Условие перпендикулярности в координатной форме

$$\boxed{\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.}$$

4.13. Приложения скалярного произведения

Г е о м е т р и ч е с к и е п р и л о ж е н и я

Проверка перпендикулярности векторов:

$$\overline{a} \perp \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \text{ или } \overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow \boxed{a_x b + a_y b_y + a_z b_z = 0.}$$

Вычисление угла между векторами:

Так как $\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a} \cdot \overline{b}\right| \cdot \cos\left(\overline{a}, ^\wedge \overline{b}\right)$, то

$$\cos\left(\overline{a}, ^\wedge \overline{b}\right) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|} \quad \Rightarrow \boxed{\cos\left(\overline{a}, ^\wedge \overline{b}\right) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}}.$$

Нахождение проекции вектора на вектор:

Так как $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot np_{\overline{a}}\overline{b}\quad\Rightarrow\; np_{\left|\overline{a}\right|}\overline{b}=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|}\Rightarrow$ в координатах

$$\boxed{np_{\overline{a}}\overline{b}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}}.$$

Неравенство Коши:

Так как $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\left(\overline{a},\wedge\,\overline{b}\right)$ и $\left|\cos\left(\overline{a},\wedge\,\overline{b}\right)\right|\le 1$, то

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\le\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\Rightarrow\; a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\le\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}\;.$$

Физические приложения

Вычисление работы силы, действующей при прямолинейном перемещении:

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из точки O в точку A под действием силы $\overline{F}$. Тогда, если вектор $\overline{S}=\overline{OA}$ – перемещение материальной точки, а угол между векторами $\overline{F}$ и $\overline{S}$ равен α, то работа A, которую совершает эта сила, находится по формуле:

$$A=\left|\overline{F}\right|\cdot\left|\overline{S}\right|\cdot\cos\alpha=\overline{F}\cdot\overline{S}\,,$$

т.е. работа A равна скалярному произведению силы на вектор перемещения.

Вычисление работы равнодействующей силы:

$$A=\left(\overline{F_1}+\overline{F_2}+\ldots+\overline{F_n}\right)\cdot\overline{S}\,.$$

4.14. Векторное произведение векторов

Определение 4.14.1. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется ***правой***, если при наблюдении с конца третьего вектора на плоскость, определяемую первыми двумя векторами, кратчайший поворот от первого вектора ко второму совершается против часовой стрелки (в положительном направлении) и ***левой***, если этот поворот совершается по часовой стрелке (в отрицательном направлении) (рис. 11).

Определение 4.14.2. ***Векторным произведением*** векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий следующим условиям (рис. 12):

1) $\overline{c}\perp\overline{a}$ и $\overline{c}\perp\overline{b}$, т.е. $\overline{c}\perp$ плоскости векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

2) упорядоченная тройка векторов $\left(\overline{a},\,\overline{b},\,\overline{c}\right)$ – правая;

3) $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \sin\left(\overline{a},^\wedge \overline{b}\right)$.

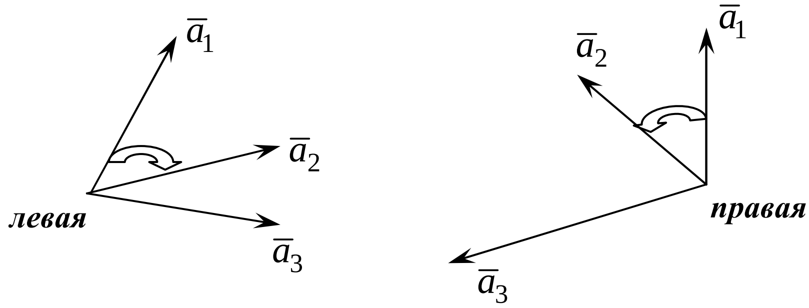


Рис. 11

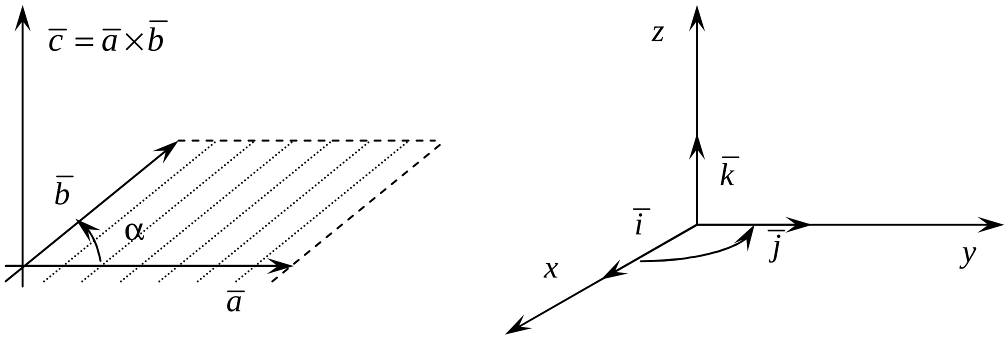


Рис. 12

Замечание 4.14.1. Первые два условия определяют *направление* вектора векторного произведения, третье условие – *длину* вектора векторного произведения. Обозначают векторное произведение следующим образом: $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ или $\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \overline{c}$.

Алгебраические свойства векторного произведения

ТЕОРЕМА 4.14.1. Векторное произведение ***антикоммутативно***, т.е.

$$\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}. \qquad (4.14.1)$$

Доказательство. Так как векторы $\overline{a} \times \overline{b}$ и $-\left(\overline{b} \times \overline{a}\right)$ перпендикулярны плоскости, проходящей через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то оба эти вектора лежат на одной прямой, т.е. являются коллинеарными. Кроме того, $\overline{a} \times \overline{b}$ и $-\left(\overline{b} \times \overline{a}\right)$ имеют по определению одинаковые модули (площадь параллелограмма остается неизменной).

Тройка векторов ($\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{a}\times\overline{b}$) является правой, тройка векторов ($\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{b}\times\overline{a}$) – левой. Следовательно, векторы $\overline{a}\times\overline{b}$ и $-\left(\overline{b}\times\overline{a}\right)$ направлены противоположно. Тогда $\overline{a}\times\overline{b}=-\left(\overline{b}\times\overline{a}\right)$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 4.14.2. Для любого $\lambda\in R$ и для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ справедливы равенства

$$(\lambda\overline{a})\times\overline{b}=\overline{b}\times(\lambda\overline{a})=\lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right). \tag{4.14.2}$$

Другими словами, векторное произведение ***ассоциативно*** относительно скалярного множителя.

ТЕОРЕМА 4.14.3. Векторное произведение обладает ***распределительным свойством***:

$$1)\ \overline{a}\times\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c};$$

$$2)\ \left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}.$$

Упражнение. Теоремы 4.14.2 и 4.14.3 доказать самостоятельно.

Замечание 4.14.1. Из алгебраических свойств векторного произведения следует, что с векторным произведением можно поступать как с умножением многочленов, ***учитывая при этом свойство антикоммутативности.***

Геометрические свойства векторного произведения

ТЕОРЕМА 4.14.4. $\overline{a}\parallel\overline{b}\ \Leftrightarrow\ \overline{a}\times\overline{b}=\overline{0}$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть векторы $\overline{a}\neq\overline{0}$ и $\overline{b}\neq\overline{0}$ являются коллинеарными. Покажем, что векторное произведение равно нуль-вектору. Действительно, т.к. векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ являются коллинеарными, то угол α между этими векторами равен нулю либо 180^0. В этом случае $\sin\alpha=0$, а, следовательно, $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=0\Rightarrow\overline{a}\times\overline{b}=\overline{0}$.

Достаточность. Пусть $\overline{a}\times\overline{b}=0$. Покажем, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ являются коллинеарными. Если какой-либо из векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – нулевой, то он являются коллинеарным любому вектору. Если $\overline{a}\neq0$ и $\overline{b}\neq0$, тогда из $\overline{a}\times\overline{b}=0$ следует, что $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\sin\alpha=0$, но тогда равенство возможно только при условии, что $\sin\alpha=0$, что и означает коллинеарность векторов $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$.

Следствие. Из Т.14.4 следует, что $\bar{a}\times\bar{a}=\bar{0}$ (***векторный квадрат вектора равен нуль-вектору***).

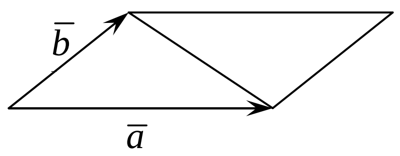


Рис. 13

ТЕОРЕМА 4.14.5. $S_{\text{параллелограмма}} = \left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$.

Модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ (рис. 13).

ТЕОРЕМА 4.14.6. $S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$.

П р и м е р. Найти векторное произведение векторов ортонормированного базиса (рис. 14).

По свойству коллинеарности векторов имеем:

$$\bar{i}\times\bar{i}=\bar{0},\ \bar{j}\times\bar{j}=\bar{0},\ \bar{k}\times\bar{k}=\bar{0}.$$

Рассмотрим векторные произведения $\bar{i}\times\bar{j}$, $\bar{j}\times\bar{k}$, $\bar{k}\times\bar{i}$. Для векторного произведения $\bar{i}\times\bar{j}$ имеем, что параллелограмм, построенный на векторах $\bar{i}$ и $\bar{j}$ – квадрат со стороной, равной единице. Значит, площадь квадрата равна единице. Вектор $\bar{i}\times\bar{j}$ перпендикулярен векторам $\bar{i}$ и $\bar{j}$, образует с ними правую тройку, и, следовательно, векторное произведение $\bar{i}\times\bar{j}$ есть единичный вектор, направленный по оси Oz вверх, т.е. $\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}$.

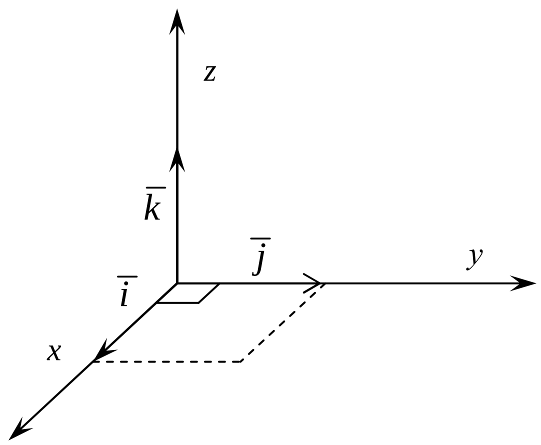


Рис. 14

Аналогичным образом находим, что $\bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}$, $\bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}$.

По Т.4.14.1 (свойства антикоммутативности векторного произведения) имеем: $\bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k}$, $\bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i}$, $\bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j}$.

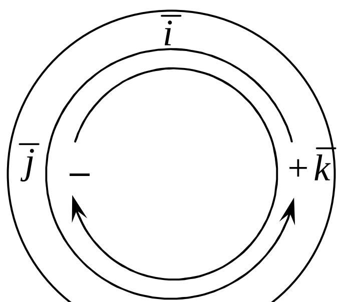


Рис. 15

З а м е ч а н и е 4.14.2. Векторное произведение векторов $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ можно определить и по следующей схеме (рис. 15).

Векторное произведение двух любых смежных векторов на окружности есть следующий вектор со знаком «+», если направление движения совпадает с положительным направлением (против хода часовой стрелки), и «–», если движение совпадает с отрицательным направлением (по ходу часовой стрелки).

4.15. Векторное произведение в координатах

ТЕОРЕМА 4.15.1. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы в ортонормированном базисе, то координаты их векторного произведения в том же базисе можно получить, раскрыв символический определитель:

$$\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (4.15.1)$$

Доказательство. Пусть $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$; $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$. Умножим векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторным образом, раскрывая скобки по алгебраическим свойствам (Т.4.14.1, Т.4.14.2), а также, используя результаты векторного умножения векторов ортонормированного базиса. Будем иметь:

$$\overline{a}\times\overline{b} = (a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k})\times(b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}) = a_xb_x\overline{i}\times\overline{i} + a_xb_y\overline{i}\times\overline{j} +$$
$$+ a_xb_z\overline{i}\times\overline{k} + a_yb_x\overline{j}\times\overline{i} + a_yb_y\overline{j}\times\overline{j} + a_yb_z\overline{j}\times\overline{k} + a_zb_x\overline{k}\times\overline{i} +$$
$$+ a_zb_y\overline{k}\times\overline{j} + a_zb_z\overline{k}\times\overline{k} = \overline{i}\left(a_yb_z - a_zb_y\right) - \overline{j}\left(a_xb_z - a_zb_x\right) +$$
$$+ \overline{k}\left(a_xb_y - a_yb_x\right).$$

Полученную формулу векторного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в координатной форме можно записать в символической формуле:

$$\overline{a}\times\overline{b} = \overline{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

4.16. Приложения векторного произведения

Геометрические приложения

1. ***Проверка коллинеарности двух векторов***:

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \iff \overline{a}\times\overline{b} = \overline{0}.$$

2. ***Определение площади параллелограмма***:

$$S_{параллелограмма} = \left|\overline{a}\times\overline{b}\right|,$$

модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

3. ***Определение площади треугольника***:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|,$$

площадь треугольника составляет половину площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Физические приложения

1. ***Момент силы***

Определение 4.16.1. Пусть тело закреплено в точке A. В некоторой точке B этого тела пусть приложена сила $\bar{F}$. ***Моментом силы*** $\bar{F}$ ***относительно точки*** A называют вектор равный: $\overline{AB}\times\bar{F}$.

Приняты обозначения: $\overline{mom_A \bar{F}} = \overline{AB}\times\bar{F}$, $\overline{M_A \bar{F}} = \overline{AB}\times\bar{F}$.

Задача. Даны точки $A(2;1;3)$; $B(0;1;3)$ и сила $\bar{F}(0;4;3)$. Вычислить $\overline{mom_B \bar{F}}$.

Решение. Вычислим $\overline{BA}$ = (2, 0, 0). Воспользуемся определением момента силы и вычислим его по формуле 4.15.1:

$\overline{mom_B \bar{F}} = \overline{BA}\times\bar{F} =$

Способ 1.$=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}(0\cdot 3-0\cdot 4)-\bar{j}(2\cdot 3-0\cdot 0)+\bar{k}(2\cdot 4-0\cdot 0) =$

$=\bar{i}\cdot 0-\bar{j}\cdot 6+\bar{k}\,8=-6\bar{j}+8\bar{k}$.

Способ 2. $=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{k} \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -6\bar{j}+8\bar{k}$.

Таким образом, координаты вектора $\overline{mom_B \bar{F}}$ = (0, –6, 8).

2. ***Линейная скорость вращения***

Пусть M точка твердого тела вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг неподвижной оси, тогда скорость $\bar{\upsilon}$ точки M определяется формулой $\bar{\upsilon}=\bar{\omega}\times\bar{r}$, где $\bar{r}=\overline{OM}$, O – некоторая неподвижная точка оси l.

4.17. Смешанное произведение векторов

Три вектора можно перемножить – 1) $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$ – вектор,

2) $\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c}$ – число,

3) $\overline{a}\times\overline{b}\times\overline{c}$ – вектор.

Определение 4.17.1. ***Смешанным или векторно-скалярным*** произведением упорядоченной тройки векторов называется скалярное произведение одного из этих векторов на векторное произведение двух других. $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{b}\times\overline{c}$..

З а м е ч а н и е 4.17.1. **С**мешанное произведение представляет собой некоторое число.

Геометрические свойства смешанного произведения

ТЕОРЕМА 4.17.1. **С**мешанное произведение трех некомпланарных векторов равно ***объему параллелепипеда***, построенного на этих векторах, взятому со знаком «+», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «–», если они образуют левую тройку.

Упражнение. Теорему 4.17.1 доказать самостоятельно.

ТЕОРЕМА 4.17.2. **С**мешанное произведение трех ненулевых векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство. $\Rightarrow$) Предположим противное: пусть $\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c}=0$ и векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ не являются компланарными. Тогда на них можно построить параллелепипед с объемом $V\neq 0$. Но по Т. 4.17.1 $\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c}=\pm V$, откуда имеем $\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c}\neq 0$, что противоречит предположению. Значит, $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ компланарны.

$\Leftarrow$) Пусть векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ компланарны. Тогда вектор $\overline{a}\times\overline{b}$ будет перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ и, следовательно, вектор $\overline{a}\times\overline{b}$ перпендикулярен вектору $\overline{c}$. Значит, из свойств скалярного произведения, будем иметь $\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c}=0$, что и требовалось доказать.

Алгебраические свойства смешанного произведения

ТЕОРЕМА 4.17.3. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей:

$$\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c}=\overline{b}\times\overline{c}\cdot\overline{a}=\overline{c}\times\overline{a}\cdot\overline{b}.$$

Доказательство. Верность равенства следует из того, что в этом случае не изменяется ни объем параллелепипеда, ни ориентация, соответствующих ребрам, векторов.

ТЕОРЕМА 4.17.4. **С**мешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения:

$$\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{b}\times\overline{c}\,.$$

Доказательство. Из геометрического смысла **с**мешанного произведения следует, что $\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c}=\pm V$ и $\overline{a}\cdot\overline{b}\times\overline{c}=\overline{b}\times\overline{c}\cdot\overline{a}=\pm V$. Знаки в правых частях равенств совпадают, т.к. тройки векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ и $\overline{b},\overline{c},\overline{a}$ имеют одинаковую ориентацию. Значит, $\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{b}\times\overline{c}$.

Замечание 4.17.2. Результат, полученный в Т.4.17.4, позволяет записывать **с**мешанное произведение упорядоченной тройки векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ в виде $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ (без знаков скалярного и векторного произведения).

ТЕОРЕМА 4.17.5. **С**мешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=-\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b},\overline{a}\overline{b}\overline{c}=-\overline{b}\overline{a}\,\overline{c},\overline{a}\overline{b}\overline{c}=-\overline{c}\,\overline{b}\overline{a}\,.$$

Упражнение. Доказать Т.4.17.5 самостоятельно.

4.18. Смешанное произведение в координатах

ТЕОРЕМА 1.18.1. Пусть упорядоченная тройка векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ задана в ортонормированном базисе. Тогда смешанное произведение этих векторов может быть определено по формуле:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Вычислим

$$\overline{a}\times\overline{b}=\overline{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Тогда по определению $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ будем иметь:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c}=c_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \quad (4.18.1)$$

Разложим далее определитель $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ по элементам третьей строки:

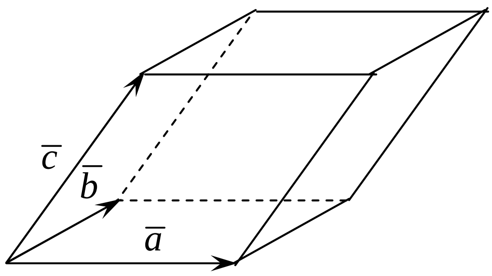
$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \qquad (4.18.2)$$

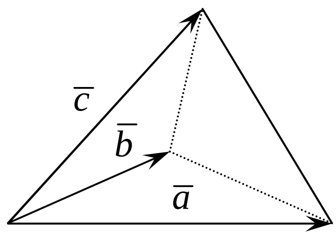
Сравнивая полученные равенства (4.18.1) и (4.18.2), придем к формуле

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$ **,** что и требовалось доказать**.**

4.19. Приложения смешанного произведения

1. *Вычисление объемов параллелепипеда и пирамиды*





$V_{пар.} = \left|\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}\right|$ $\qquad$ $V_{пирам} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\,\bar{b}\bar{c}\right|$

2. *Изучение возможного расположения трех векторов*

1) $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = 0 \Leftrightarrow$ компланарны (линейно зависимы);

2) $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} > 0 \Leftrightarrow$ не компланарны (линейно независимы), образуют правую тройку;

3) $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} < 0 \Leftrightarrow$ не компланарны (линейно независимы), образуют левую тройку.

3. *Изучение принадлежности четырех точек плоскости*

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$; $B\,(x_2, y_2, z_2)$; $C\,(x_3, y_3, z_3)$; $D\,(x_4, y_4, z_4)$.

Точки будут принадлежать плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ будут компланарны $\Rightarrow$ $\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = 0$. Из последнего равенства имеем условие принадлежности четырех точек одной плоскости (рис. 16):

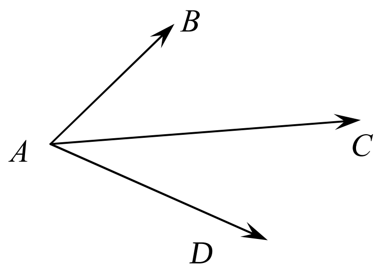


Рис. 16

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0 .$$

4.20. Собственные значения и собственные векторы матриц

Определение 4.20.1. Ненулевой вектор $\bar{x}$ называют ***собственным вектором*** матрицы A, если существует такое число λ, что $A\cdot\bar{x}=\lambda\cdot\bar{x}$, при этом λ – называется ***собственным значением*** матрицы A.

Равенство $A\cdot\bar{x}=\lambda\cdot\bar{x}$ или $(A-\lambda E)\bar{x}=0$, где E – единичная матрица той же размерности, что и матрица A, запишем системой уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=\lambda x_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=\lambda x_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=\lambda x_3. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0, \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+a_{23}x_3=0, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}-\lambda)x_3=0. \end{cases} \quad (4.20.1)$$

Однородная система имеет ненулевые решения, когда её определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$$ – ***характеристическое уравнение.***

Из характеристического уравнения определяются собственные значения λ матрицы A.

Подставляя каждое собственное значение в систему (4.20.1), получим соответствующий ему собственный вектор.

Пример 1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение матрицы A:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

или $$(1-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda)+3+3-9(5-\lambda)-(1-\lambda)-(1-\lambda) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим кубическое уравнение $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$.

Чтобы решить это уравнение, поступим следующим образом. Методом подбора найдем один из корней уравнения λ_1, разделив потом левую часть уравнения на $\lambda-\lambda_1$ и приравняв нулю результат, получим квадратное уравнение. Корень λ_1 ищем среди делителей свободного члена уравнения ($\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm9; \pm12; \pm36$).

$\lambda_1 = 3$ есть корень уравнения.

Делим левую часть уравнения $\lambda^3-7\lambda^2+36 = 0$ на $\lambda-3$.

$$\begin{array}{l|l}
\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 & \lambda - 3 \\ \cline{2-2}
\underline{\lambda^3 - 3\lambda^2} & \lambda^2-4\lambda-12 \\
\quad -4\lambda^2 + 36 & \\
\quad \underline{-4\lambda^2 + 12\lambda} & \\
\qquad\quad -12\lambda + 36 & \\
\qquad\quad \underline{-12\lambda + 36} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = (\lambda - 3)\,(\lambda^2 - 4\lambda - 12)$.

Для определения двух других корней решим квадратное уравнение $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$, откуда $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$.

Собственные значения матрицы A равны $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$.

Чтобы найти собственные векторы, решаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{rrrcl}
(1-\lambda)x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0; \\
x_1 & +(5-\lambda)x_2 & +x_3 & = & 0; \\
3x_1 & +x_2 & +(1-\lambda)x_3 & = & 0.
\end{array}\right\}$$

Найдем собственный вектор $\overline{p}_1$, соответствующий собственному значению λ_1=3. Система уравнений примет вид

$$\left.\begin{array}{rrrcl}
(1-3)x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0, \\
x_1 & +(5-3)x_2 & +x_3 & = & 0, \\
3x_1 & +x_2 & +(1-3)x_3 & = & 0.
\end{array}\right\} \text{ или}$$

$$\left.\begin{array}{rrrcl}
-2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0, \\
x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0, \\
3x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 0.
\end{array}\right\}$$

Решим систему данных уравнений методом Гаусса:

$$\left.\begin{array}{rrrcl}
x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0, \\
 & x_2 & +x_3 & = & 0.
\end{array}\right\}; \qquad \left.\begin{array}{rrcl}
x_1 & +2x_2 & = & -x_3, \\
 & x_2 & = & -x_3
\end{array}\right\}.$$

Пусть $x_3 = a$, тогда $x_2 = -a$, $x_1 = a$, $\overline{p} = a(1;-1;1)$, $a \neq 0$, $a \in R$. Для $\lambda_2 = 6$ получаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{ccccc}(1-6)x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0;\\ x_1 & +(5-6)x_2 & +x_3 & = & 0;\\ 3x_1 & +x_2 & +(1-6)x_3 & = & 0.\end{array}\right\}\text{ или}$$

$$\left.\begin{array}{ccccc}-5x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0;\\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0;\\ 3x_1 & +x_2 & -5x_3 & = & 0;\end{array}\right\}$$

откуда имеем
$$\left.\begin{array}{cccc}x_1 & -x_2 & = & -x_3;\\ & x_2 & = & 2x_3.\end{array}\right\}$$

Пусть $x_3=a$, тогда $x_2=2a$, $x_1=1a$, $\overline{p}_2=(1;2;1)\cdot a$, $a\neq 0$, $a\in R$.

Для $\lambda_3=-2$ имеем

$$\left.\begin{array}{ccccc}(1+2)x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0;\\ x_1 & +(5+2)x_2 & +x_3 & = & 0;\\ 3x_1 & +x_2 & +(1+2)x_3 & = & 0.\end{array}\right\}\text{ или}$$

$$\left.\begin{array}{ccccc}3x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0;\\ x_1 & +7x_2 & +x_3 & = & 0;\\ 3x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0.\end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{ccccc}x_1 & +7x_2 & +x_3 & = & 0;\\ & -20x_2 & & = & 0.\end{array}\right\}$$

$x_2=0$, $x_1=-x_3$. Пусть $x_3=a$, тогда $x_1=-a$, $\overline{p}_3=(-1;0;1)a$, $a\neq 0$, $a\in R$.

Итак, собственные векторы заданной матрицы:

$\overline{p}_1=(1;-1;1)a$; $\overline{p}_2=(1;2;1)a$; $\overline{p}_3=(-1;0;1)a$, $a\neq 0$, $a\in R$.

Ответ: $\overline{p}_1=(1;-1;1)a$; $\overline{p}_2=(1;2;1)a$; $\overline{p}_3=(-1;0;1)a$, $a\neq 0$, $a\in R$.

Пример 2. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение матрицы A:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

или $$(2-\lambda)(-3-\lambda)(-2-\lambda)+3+0+2(-3-\lambda)-0+5(-2-\lambda)=0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим кубическое уравнение $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$.

По формулам тождественного преобразования приведем уравнение к виду $(\lambda+1)^3=0$.

Отсюда $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$ есть корень уравнения.

Собственное значение матрицы A равно $\lambda=-1$.

Чтобы найти собственные векторы, решаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{llll} (2+1)x_1 & -x_2 & +2x_3 & = 0; \\ 5x_1 & +(-3+1)x_2 & +3x_3 & = 0; \\ -x_1 & & +(-2+1)x_3 & = 0. \end{array}\right\} \text{ или}$$

$$\left.\begin{array}{llll} 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & = 0; \\ 5x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 0; \\ -x_1 & & -x_3 & = 0. \end{array}\right\}$$

Откуда имеем $\left.\begin{array}{lll} -x_1 & = & x_3; \\ x_2 & = & -x_3. \end{array}\right\}$

Пусть $x_3=a$, тогда $x_2=-a, x_1=-a$

$$\overline{p}_1=(-1;-1;1)a,\ a\neq 0,\quad a\in R.$$

Собственному значению $\lambda=-1$ соответствует бесчисленное множество неколлинеарных собственных векторов, перпендикулярных к вектору $\overline{p}_1=(-1;-1;1)a$. Из этих векторов можно произвольным образом выбрать два ортогональных вектора. Например, в качестве вектора $\overline{p}_2$ возьмем вектор $\overline{p}_2=(1;0;1)a,\quad a\neq 0,\quad a\in R$, а $\overline{p}_3=(-1;2;1)a,\ a\neq 0,\quad a\in R$.

Легко видеть, что

$\overline{p}_1\perp\overline{p}_2$, так как $\overline{p}_1\cdot\overline{p}_2=-a\cdot a-a\cdot 0+a\cdot a=0$.

$\overline{p}_1\perp\overline{p}_3$, так как $\overline{p}_1\cdot\overline{p}_3=-a\cdot(-a)-a\cdot 2a+a\cdot a=0$.

$\overline{p}_2\perp\overline{p}_3$, так как $\overline{p}_2\cdot\overline{p}_3=a\cdot(-a)+0\cdot 2a+a\cdot a=0$.

Итак, получено три взаимно перпендикулярных собственных вектора:

$\overline{p}_1=(-1;-1;1)a,\quad \overline{p}_2=(1;0;1)a,\quad \overline{p}_3=(-1;2;1)a,\ a\neq 0,\quad a\in R$.

Ответ: $\overline{p}_1=(-1;-1;1)a$, $\overline{p}_2=(1;0;1)a$, $\overline{p}_3=(-1;2;1)a$, $a\neq 0$, $a\in R$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Учебно-информационный блок для проведения практических занятий

Тема занятия	Тип занятия	Кол-во час
I. Линейные операции над векторами и их свойства. Условие коллинеарности векторов. Базис, разложение векторов по базису. Проекция на ось, координаты векторов. Линейные операции над векторами в координатной форме. Модуль и направляющие косинусы вектора; их выражение через координаты	Повторение и обобщение имеющихся знаний. Усвоение и закрепление изученного на лекции нового материала	2
II. Скалярное произведение векторов, его свойства и выражение через координаты. Условие ортогональности векторов	Углубление и расширение полученных знаний. Усвоение нового материала. Текущий контроль	2
III. Векторное произведение векторов, его свойства и выражение через координаты. Смешанное произведение трех векторов, его свойства и выражение через координаты. Условие компланарности	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний Текущий контроль	2
IV. Итоговое повторение, решение ключевых задач. Собственные значения и собственные векторы матрицы	Повторение Углубление и расширение полученных знаний. Обобщение, систематизация и применение полученных знаний. Текущий контроль	2
V. Контрольная работа	Итоговый контроль	2

Основная и дополнительная литература

1. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1980.

2. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак. – Мн.: Навука и тэхника, 1991.

3. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1973.

4. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986.

5. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981.

6. Вакульчик, В.С. Методическое пособие с трехуровневыми заданиями для организации самостоятельной работы студентов всех специальностей по теме «Векторная алгебра» / В.С. Вакульчик. – НПИ, 1993.

МОДЕЛИ ОРГАНИЗАЦИИ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ

Основная методическая схема I проведения практических занятий

Схема построения занятия достаточно проста. Начинаем традиционно: краткое обсуждение и разбор наиболее сложных моментов в домашнем задании; сжатое повторение теоретического материала по новой теме, выделяются главные, существенные положения, по необходимости, основные формулы фиксируются на доске (проводится в диалоговом режиме со всей аудиторией). Затем, ставятся задачи по освоению новой темы, выписываются номера заданий на все занятие в целом. Работа с аудиторией ведется одновременно по нескольким направлениям. Во-первых, ставится условие, кто заканчивает работу раньше, чем это будет сделано на доске – получает оценку «8» – «9». Иногда номера заданий приходится разбивать на несколько групп – не более трех, тогда для обучающихся имеется реальный шанс получить несколько «8» – «9». Таким образом, в аудиторное время организуется активная самостоятельная работа для наиболее способных и целеустремленных студентов. В ходе такой познавательной деятельности разрешается использовать любые источники для помощи: конспекты лекций, справочники, графические схемы, информационные таблицы и т.п.; помощь преподавателя, другого студента.

Во-вторых, работа у доски осуществляется, в большинстве случаев, со слабыми и средними студентами. Причем, выполняют они сразу по два задания, что позволяет студенту преодолеть «первичный страх» перед доской, овладев определенным методом решения, сразу же на высоком уровне познавательной активности закрепить его. При этом экономится время на перемещениях студентов в аудитории, в большей степени удается удержать концентрацию внимания к работе у доски более слабых студентов.

В-третьих, у преподавателя появляется время для индивидуальной работы со студентами разного уровня познавательной самостоятельности. Если имеются студенты, выполнившие все задания, им выдаются задания на «10».

Отметим, что существенно значимо в процессе всей организуемой работы создать благоприятную, доброжелательную атмосферу, позволяющую каждому студенту реализовать себя в аудитории на максимально возможном уровне активности и самостоятельности.

Методическая схема II (работа по пособию)

Применение методических пособий позволяет одновременно использовать воспроизводящие (уровень I), частично-поисковые (уровень II), творческие (уровень III) самостоятельные работы студентов (СРС). Пособие позволяет построить модель организации самостоятельной познавательной деятельности студентов в виде цикла:

– первоначальное знакомство с новым понятием на лекции;

– самостоятельная проработка материала лекций и учебников с использованием дополнительной литературы и методического пособия с трехуровневыми заданиями, результатом которой является овладение изучаемой математической информации на базовом уровне (в качестве самоконтроля служит уровень I);

– углубление изучаемого материала на практическом занятии, овладение знаниями на уровне II или III;

– закрепление изученного во внеаудиторной СР через завершение невыполненных заданий выбранного уровня или освоение уровня III, изучение дополнительной литературы);

– обобщение освоенного материала в виде граф-схем и сжатого справочного материала по теме;

– повторение и систематизация перед контрольной работой, коллоквиумом или экзаменом.

Методика контрольно-корректирующей деятельности преподавателя может быть построена следующим образом. Он готовит граф-схему всей темы, раздает ее каждому студенту, чтобы обучающийся на протяжении изучения темы имел наглядное представление о теме в целом, видел связи между частями и в процессе самостоятельной работы, усваивал не только изучаемую информацию, но и ее графическую схему. Каждому студенту предлагается составить граф-схему теоретического материала параграфов пособия.

Практическое занятие строится в виде СРС и состоит из трех основных этапов. В начале занятия идет активное обсуждение необходимого теоретического материала. Поскольку студенты уже изучали эту тему во внеаудиторной СР и отрабатывали ее применение на базовом уровне, то имеются все условия для углубления и расширения полученных знаний. Преподаватель акцентирует внимание на наиболее важных фактах, трудных моментах.

Второй этап занятия – активная СР над своим вариантом по пособию на уровне II или III. Здесь разрешается использование любых источников информации. В случае затруднений, преподаватель консультирует по возникшему вопросу. По ходу занятия оценивается выполнение каждого упражнения (это отмечается «+»). На третьем этапе подводятся итоги занятия. Оцениваются лишь те студенты, которые полностью завершили задание. Кто не справился с заданием, но согласен по данной теме на оценку «4», показывает выполнение домашнего задания на уровне I.

Таким образом, студент ставится в условия, когда ему нужно **самому** принять решение: согласиться с низкой оценкой, и остаться на базовом уровне или закончить работу дома, и, следовательно, увеличить нагрузку на внеаудиторную СР.

Работа с пособием осуществляется отдельно каждым студентом (или двумя) в аудиторное или внеаудиторное время. Преподаватель в аудиторных СРС направляет работу студентов, которые испытывают затруднения, оценивает результаты самостоятельной деятельности каждого из них. На работу с пособием выделяется несколько занятий, студенты сами корректируют время работы с каждым параграфом, отдельные студенты могут закончить эту СРС и ранее, студенты, пропустившие занятия, прорабатывают его во внеаудиторное время. Исчезает принудительный темп познавательной деятельности. Темп, глубина, качество усвоения определяются, регулируются самим студентом. С помощью учебно-методического пособия обучающийся осознает цели и задачи своей работы, учится распределять время, студент может сдать тему досрочно или, наоборот, наверстать упущенное. Обучающийся практически ставится в условия, когда обязательно необходимо овладеть ею хотя бы на базовом уровне.

Методическая схема III

Вся аудитория работает на выбранном уроне сложности. Два студента выполняют свои задания у доски (уровень II и уровень III). В конце выполнения работы идет обсуждение заданий, выполненных на доске. Такой подход позволяет открыть решение заданий повышенных уровней сложности всей аудитории. Предлагаемая модель «подтягивает» студентов до прикладного и творческого уровней обучения. Работая на протяжении занятия с заданиями I уровня, слабые студенты приобретают базовые знания и умения. Тем самым, создаются предпосылки для освоения методики решения более сложных заданий студентам, желающим перейти на другой уровень обучения; для развития, в конечном счете, потенциала всей аудитории.

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

(для самостоятельного изучения)

Система координат на плоскости – это способ характеризовать положение точки на плоскости с помощью двух числовых параметров (координат).

На плоскости можно построить большое число систем координат. Каждая из этих систем употребляется там, где удобнее. Однако наиболее часто используемыми являются две системы координат: прямоугольная и полярная.

Положение точки на плоскости определяется проще всего по отношению к так называемой прямоугольной системе координат, которая строится следующим образом:

1) выбираются две взаимно перпендикулярные прямые оси координат: ось x, или ось абсцисс, и ось y, или ось ординат (рис. 1); точка их пересечения 0, называемая началом координат;

2) на каждой из осей координат выбирают положительное направление;

3) для каждой оси выбирают единицу длины (на рис. 1 $e = PQ$).

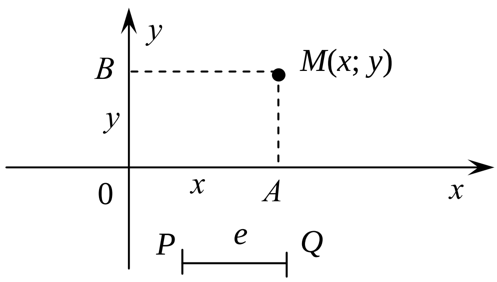


Рис. 1

Каждая точка на плоскости имеет определенные координаты, и, наоборот, каждому набору координат x, y отвечает определенная точка на плоскости. Это свойство дает возможность взамен точек рассматривать их координаты.

Если даны две точки своими координатами $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то расстояние между ними вычисляется по формуле

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

Угол φ, образованный отрезком M_1M_2 с положительный направлением оси абсцисс, определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2}$$

Пусть заданы две различные точки M_1 и M_2. Будем говорить, что точка M делит направленный отрезок M_1M_2 в отношении λ, если $\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}$.

З а м е ч а н и е. Координаты точки M, которая делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, могут быть определены по формулам:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda_M \cdot x_B}{1+\lambda_M}, \qquad y_M = \frac{y_A + \lambda_M \cdot y_B}{1+\lambda_M}. \tag{3}$$

Отношение $\lambda>0$, если точка M находится внутри отрезка; $\lambda<0$ ($\lambda \neq -1$), если M находится вне отрезка; и $\lambda = 0$, если M совпадает с M_1.

О б у ч а ю щ а я з а д а ч а. Однородный стержень с концами в точках $A(3;\,2)$ и $B(12;\,8)$ разделен точками M и N на три равные часта. Найти:

1) длину стержня;

2) координаты центра тяжести стержня;

3) координаты точек M и N;

4) найти отношение λ_B, в котором точка B делит отрезок MN.

Решение. . Воспользуемся формулой (1). Тогда

$$AB = \sqrt{(12-3)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{9^2+6^2} = \sqrt{81+36} = \sqrt{117} \text{ (ед.)}$$

Центр тяжести стержня, т.к. он однородный, будет находиться в его середине. Математически это означает, что нужно определить середину отрезка AB (рис. 2).

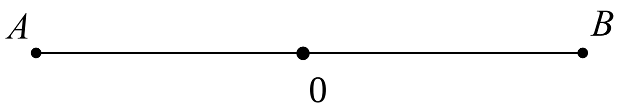


Рис. 2

Для точки 0 отношение $\lambda_0 = 1$, т.к. $\overline{AO} = 1 \cdot \overline{OB}$.

Значит,

$$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+12}{2} = \frac{15}{2},$$

$$y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+8}{2} = 5 \quad \Rightarrow \left(\frac{15}{2};\ 5\right).$$

Сделаем схематический чертеж (рис. 3).

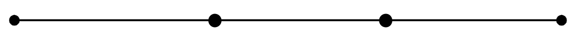


Рис. 3

Для точки M найдем отношение $\lambda_м$, такое, что $\overline{AM} = \lambda \cdot \overline{MB}$. Так как $\overline{AM} \downarrow\downarrow \overline{MB}$ и $\left|\overline{AM}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{MB}\right|$, то $\lambda_м = \frac{1}{2}$. Тогда на основании (3) получим координаты точки M:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda_M \cdot x_B}{1+\lambda_M} = \frac{3+\frac{1}{2}\cdot 12}{1+\frac{1}{2}} = \frac{9}{\frac{3}{2}} = 6,$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda_M \cdot y_B}{1+\lambda_M} = \frac{2+\frac{1}{2}\cdot 8}{\frac{3}{2}} = \frac{6}{\frac{3}{2}} = 4 \quad \Rightarrow M(6;\ 4).$$

Искомое отношение $\lambda_B = -2$, т.к. векторы $\overline{MB}$ и $\overline{BN}$ противонаправлены и $\left|\overline{MB}\right| = 2\cdot\left|\overline{BN}\right|$.

Уровень I

1. Под каким углом к положительному направлению оси Ox наклонен отрезок, соединяющий точки $A(1; -3)$ и $B(-7; 3)$?

Ответ: $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{3}{4}$.

2. Найти периметр треугольника с вершинами $A(1; 3)$, $B(4; 5)$, $C(-5; -7)$.

Ответ: ≈ 30,3 ед. масштаба.

3. Найти координаты точки M, делящей отрезок AB с концами в точках $A(-2; -3)$ и $B(2; 4)$ в отношении $\lambda = \frac{1}{3}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $(-1; -\frac{5}{4})$, $(-6; -10)$.

Уровень II

Вариант I

1. Вычислить длину медиан треугольника, зная координаты его вершин $A(3; -2)$, $B(5; 2)$ и $C(-1; 4)$.

Ответ: $\sqrt{26}$; $\sqrt{17}$ и $\sqrt{41}$.

2. Центр тяжести прямого однородного стержня находится в точке $O(5; 1)$; один его конец совпадает с точкой $A(–1; –3)$.Определить положение другого конца.

Ответ: (11; 5).

3. Найти точку пересечения медиан треугольника, зная координаты его вершин $A(1; 4)$, $B(–5; 0)$ и $C(–2; –1)$.

Ответ: (–2; 1).

Вариант 2

1. Найти расстояние от точки $C(3; –4)$ до середины отрезка, концы которого $A(1; 2)$ и $B(5; 4)$.

Ответ: 7.

2. Даны две точки $A(3; –1)$ и $B(2; 1)$. Определить:
а) координаты точки M, симметричной точке A относительно точки B;
б) координаты точки N, симметричной точке B относительно точки A.

Ответ: $M(–1; 3)$; $N(4; –3)$

3. Даны вершины треугольника $A(3; 3)$, $B(2; –1)$, $C(1; 4)$. Определить длины медиан этого треугольника.

Ответ: $\sqrt{15,25}$; $\sqrt{14,5}$; $\sqrt{21,25}$.

Вариант 3

1. Отрезок AB с концами в точках $A(–3; 2)$ и $B(4; –5)$ делится точкой C в отношении $\lambda = –3$. Найти координаты точки деления.

Ответ: $C(7,5; –8,5)$.

2. Проведен отрезок от точки $A(1; –1)$ до точки $B(–4; 5)$. До какой точки нужно продолжить его в том же направлении, чтобы его длина удвоилась?

Ответ: (–9; 11).

3. Даны три вершины параллелограмма $A(3; –5)$, $B(5; –3)$, $C(–1; 3)$. Определить четвертую вершину D, противоположную B.

Ответ: $D(–3; 1)$.

Вариант 4

1. Отрезок AB, соединяющий точки $A(2; 5)$ и $B(4; 9)$, разделить в отношении 1:3.

Ответ: $C(\frac{5}{2}; 6)$.

2. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-3: 5)$, $B(1; 7)$ и точка пересечения его диагоналей $M(1; 1)$. Определить две другие вершины и длину диагонали AC.

Ответ: $C(5; -3)$, $D(1; -5)$, $8\sqrt{2}$.

3. Отрезок между точками $A(3; 2)$ и $B(15; 6)$ разделен на пять равных частей. Определить координаты точек деления.

Ответ: $M_1(5{,}4; 2{,}8)$, $M_2(7{,}8; 3{,}6)$, $M_3(10{,}2; 4{,}4)$, $M_4(12{,}6; 5{,}2)$.

Вариант 5

1. Даны вершины треугольника $A(-4; 6)$, $B(-8; 9)$, $C(5; -6)$. Определить середины его сторон.

Ответ: $E(-6; \frac{15}{2})$, $F(\frac{1}{2}; 0)$, $K\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

2. Даны точки $A(1; -1)$ и $B(4; 5)$. До какой точки нужно продолжить отрезок AB, чтобы получился отрезок, длина которого была бы в три раза больше длины отрезка AB?

Ответ: $(10; 17)$.

3. Отрезок AD разделен на три равные части. Точки деления заданы $B(0; -1)$, $C(2; -3)$. Найти координаты концов отрезка AD.

Ответ: $(-2; 1)$, $(4; -5)$.

Уровень III

1. На луче, выходящем из начала координат и проходящем через точку $M(4; 3)$, найти точку P, расстояние от которой до начала координат равно 9.

Указание. Найдите отношение λ_p, в котором P делит отрезок OM.

Ответ: $P(7{,}2; 5{,}4)$.

2. Найти вершины треугольника, зная середины его сторон $P(3; -2)$, $Q(1; 6)$, $R(-4; 2)$.

Ответ: $(-2; -6)$, $(8; 2)$, $(6; 10)$.

3. Отрезок AB перемещается так, что концы его все время остаются на двух неподвижных прямых: конец A скользит по прямой, параллельной оси Ox и проходящей над ней на расстоянии трех единиц; конец B скользит по прямой, параллельной оси Oy и проходящей слева от нее на

расстоянии двух единиц. Определить положение концов отрезка в тот момент, когда середина отрезка совпадает с точкой $M(3;\ 1)$.

Ответ: $A(8;\ 3)$, $B(–2;–1)$.

4. Дан треугольник $A(4;\ 1)$, $B(7;\ 5)$, $C(–4;\ 7)$. Найти точку пересечения биссектрисы угла A с противолежащей стороной BC.

Указание. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

Ответ: $M\left(3\frac{1}{3};\quad 5\frac{1}{3}\right)$.

5. Найти точку пересечения общих касательных двух окружностей, центры которых совпадают с точками $C_1(2;\ 5)$ и $C_2\left(7\frac{1}{3};\ 10\frac{1}{3}\right)$, а радиусы соответственно равны трем и семи единицам.

Указание. Сделать чертеж, провести общие касательные, линию центров, соединить центры кругов с точками прикосновения P_1 и P_2. Из подобия треугольников MC_1P_1 и MC_2P_2 найти отношение λ_M, в котором точка M делит отрезок C_1C_2.

Ответ: $M(–2;\ 1)$.

Методика проведения практических занятий осуществляется в соответствии с *методической схемой II*.

I. Линейные операции над векторами и их свойства. Условие коллинеарности векторов. Базис, разложение векторов по базису. Проекция на ось, координаты векторов. Линейные операции над векторами в координатной форме. Модуль и направляющие косинусы вектора; их выражение через координаты.

Уровень I

(выполняется во внеаудиторной самостоятельной работе)

Вариант I

1. В параллелограмме $ABCD$ обозначены: $\overline{AB}=\bar{a}$ и $\overline{AD}=\bar{b}$. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ и $\overline{MD}$, где M есть точка пересечения диагоналей параллелограмма..

Ответ: $\overline{MA}=-\frac{1}{2}(\bar{a}+\bar{b})$, $\overline{MB}=\frac{1}{2}(\bar{a}-\bar{b})$, $\overline{MC}=\frac{1}{2}(\bar{b}+\bar{a})$, $\overline{MD}=\frac{1}{2}(\bar{b}-\bar{a})$.

2. Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, проверить геометрически справедливость тождеств?

1) $(\bar{a}+\bar{b})+(\bar{a}-\bar{b})=2\bar{a}$;

2) $(\bar{a}+\bar{b})-(\bar{a}-\bar{b})=2\bar{b}$;

3) $\bar{a}+(\bar{b}-\bar{a})=\bar{b}$;

4) $\bar{b}+(\bar{a}-\bar{b})=\bar{a}$;

5) $\dfrac{\bar{a}-\bar{b}}{2}+\bar{b}=\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$.

3. Каким условиям должны удовлетворять векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы имело место соотношение $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|$:

1) $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}|-|\bar{b}|$;

2) $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}|+|\bar{b}|$;

3) $|\bar{a}-\bar{b}|=|\bar{a}|+|\bar{b}|$.

Ответ: 1) $\bar{a}\perp\bar{b}$;

2) $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны и имеют одинаковое направление;

3) $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, но имеют противоположное направление.

4. Каким условием должны быть связаны векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$, чтобы вектор $\bar{p}+\bar{q}$ делил угол между ними пополам?

Предполагается, что все три вектора отнесены к общему началу.

Ответ: $|\bar{p}|=|\bar{q}|$.

5. В треугольнике ABC рассматриваются векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$. Выразить каждый из этих векторов через два другие.

6. Проверьте геометрически справедливость формулы:

$(\bar{a}+\bar{b})-(\bar{a}-2\bar{b})=3\bar{b}$;

$\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2}-\bar{b}=\dfrac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$.

7. Заданы векторы $\bar{a}(-1;\ 2;\ 0)$, $\bar{b}(3;\ 1;\ 1)$, $\bar{c}(2;\ 0;\ 1)$ и $\bar{d}=\bar{a}-2\bar{b}+\frac{1}{3}\bar{c}$. Вычислить:

а) $|\bar{a}|$, направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ и его $\overline{a_0}$;

б) $\cos\left(\bar{b},\hat{}\ \bar{j}\right)$;

в) координату X вектора $\overline{d}$;

г) $np_{\overline{j}}\overline{d}$.

Ответ: $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{5}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\gamma=0$, $\overline{a_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}};0\right)$;

$\cos\left(\overline{b},\wedge\overline{j}\right)=\frac{1}{\sqrt{11}}$; $X(\overline{d})=-\frac{19}{3}$; $np_{\overline{j}}\overline{d}=Y\left(\overline{d}\right)=0$.

8. На плоскости заданы векторы $\overline{e_1}$ (–1; 2), $\overline{e_2}$ (2; 1) и $\overline{a}$ (0; –2). Убедиться, что $\left\{\overline{e_1},\overline{e_2}\right\}$ – базис. Найти разложение вектора $\overline{a}$ по базису $\left\{\overline{e_1},\overline{e_2}\right\}$.

Ответ: $\overline{a}=-\frac{4}{5}\overline{e_1}-\frac{2}{5}\overline{e_2}$.

9. Вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$ (0; 6; –8), образует острый угол с осью *Oz*. Зная, что $\left|\overline{x}\right|$=50, найти его координаты.

Ответ: $\overline{x}$ (0; –30; 40).

1. В начале занятия беглое и активное повторение основного теоретического материала с использованием графической схемы и информационной таблицы.

Определение 1. Величины, для задания которых достаточно указания их числовых значений, называется ***скалярными*** величинами.

Примеры скалярных величин: длина, угол, площадь, объем, время, температура, плотность, сопротивление проводника, электроемкость, работа и др.

Определение 2. ***Геометрическим вектором*** называется направленный отрезок.

Понятие вектора возникло как математическая абстракция объектов, характеризующихся величиной и направлением, например, таких как перемещение, скорость, ускорение, напряженность электрического и магнитного поля, сила, момент силы и т.п.

Векторы обозначается либо $\overline{a}$, либо $\overline{AB}$ (*A* – начало, *B* – конец вектора).

Термин «вектор» ввел У. Гамильтон (около 1845 г.).

Основополагающие понятия:

- Нуль-вектор.
- Модуль вектора.
- Единичный вектор.
- Равные векторы.
- Противоположные векторы.
- Коллинеарные векторы.
- Компланарные векторы.
- Проекция вектора на ось.

Определение 3. Линейными операциями над векторами называют операции сложения, вычитания, умножения вектора на число.

Сложение векторов осуществляется по правилу многоугольника (в случае двух векторов правилу треугольника или параллелограмма) (рис. 2 – 4).

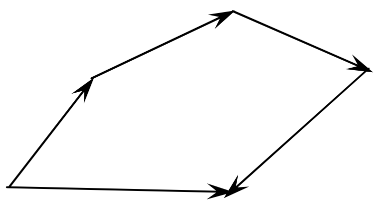


Рис. 2

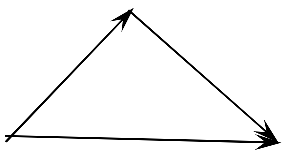


Рис. 3

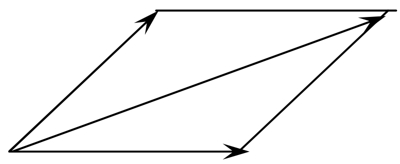


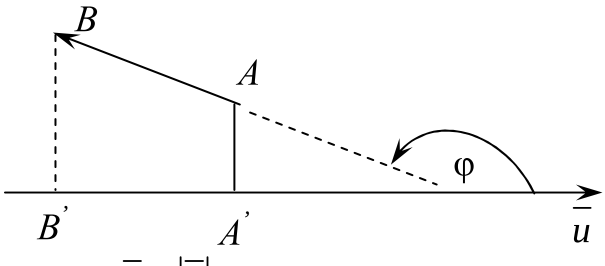
Рис. 4

З а м е ч а н и е 1. На практике с операцией сложения векторов мы встречаемся, когда имеем дело с равновесием сил, сходящимися силами, сложением скоростей и т. п.

З а м е ч а н и е 2. Выражение «выразить вектор через несколько других» означает представить вектор в виде линейной комбинации этих векторов.

Определение 4. Проекцией вектора $\bar{a}$ на ось $\bar{u}$ называется величина отрезка $A'B'$, заключенного между проекциями начала и конца вектора на эту ось (рис. 5).

Численно, проекция вектора на ось есть скалярная величина, равная произведению модуля проектируемого вектора на косинус угла между положительными направлениями оси и вектора:



$$пр_{\bar{u}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$$

Рис. 5

$$пр_{\bar{u}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\left(\bar{a}, {}^\wedge\, \bar{u}\right) = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

Определение 5. Величины a_x, a_y и a_z – проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси Ox, Oy, Oz – называются координатами вектора $\bar{a}$ в прямоугольной системе координат в трехмерном пространстве: $\bar{a}=(a_x;\ a_y;\ a_z)$. Координаты однозначно определяют положение вектора в пространстве. Этот (аналитический) способ задания вектора позволяет решать задачи геометрии средствами алгебры.

Линейные операции над векторами и длина вектора определяются на основании свойств проекции аналитически довольно просто:

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x;\ \ a_y \pm b_y;\ \ a_z \pm b_z),$$

$$\lambda\bar{a} = (\lambda a_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z),$$

$$|\,\bar{a}\,| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

Направление вектора $\bar{a}$ в пространстве можно задать с помощью косинусов углов, образуемых вектором с координатными осями Ox, Oy, Oz:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Эти косинусы называются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$. Очевидно, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Определение 6. Единичный вектор $(\cos\alpha;\ \ \cos\beta;\ \ \cos\gamma)$, сонаправленный с вектором $\bar{a}$, называется ***ортом*** этого вектора.

З а м е ч а н и е. В некоторых задачах бывает полезно перейти от вектора $\bar{a}$ к его орту $\overline{a_0}$.

Определение 7. Векторы называются ***коллинеарными,*** если они лежат на параллельных прямых. Обозначается: $\bar{a}\,||\,\bar{b}$, $\bar{a}\downarrow\downarrow\bar{b}$, $\bar{a}\downarrow\uparrow\bar{b}$.

$$\bar{a}\,||\,\bar{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda.$$

Определение 8. Векторы называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости, или параллельны одной плоскости.

Определение 9.

1) Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ называется ***базисом в*** $\boldsymbol{R^3}$. Обозначается $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$.

2) Упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ называется ***базисом в*** $\boldsymbol{R^2}$: $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$.

3) Любой вектор $\overline{e_1} \neq 0$ образует ***базис в*** $\boldsymbol{R^1}$:$\{\overline{e_1}\}$.

ТЕОРЕМА. Любой вектор пространства единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из базиса:

1. $\overline{a} = \alpha\overline{e_1} + \beta\overline{e_2} + \gamma\overline{e_3}$ в R^3;
2. $\overline{a} = \alpha\overline{e_1} + \beta\overline{e_2}$ в R^2;
3. $\overline{a} = \alpha\overline{e_1}$ в R^1.

Коэффициенты в этой линейной комбинации называются координатами $\overline{a}$ в соответствующем базисе.

Чаще всего мы будем использовать ортонормированный базис:

$$\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}, \{\overline{i}, \overline{j}\}, \{\overline{i}\}.$$

2. Совместное обсуждение (со всей аудиторией) выполненного во внеаудиторной самостоятельной работе уровня I.

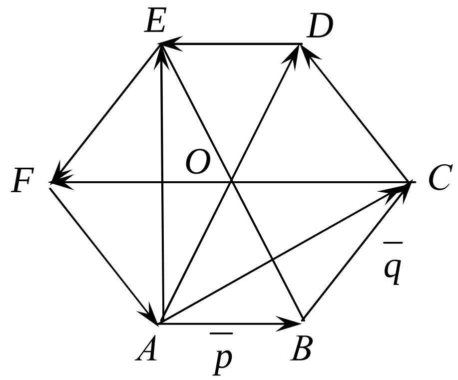
3. Самостоятельное изучение обучающих задач.

Обучающие задачи

Задача 1. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ (рис. 6) известны $\overline{AB} = \overline{p}$ и $\overline{BC} = \overline{q}$:

1) выразить через $\overline{p}$ и $\overline{q}$ $\overline{AD}$ и $\overline{AE}$;

2) выразить $\overline{AD}$ через $\overline{BC}$, $\overline{BC}$ через $\overline{EF}$, $\overline{CF}$ через $\overline{AB}$ и $\overline{AB}$ через $\overline{BC}$.



Решение. Векторы $\overline{OC} = \overline{p}$, $\overline{OD} = \overline{q}$ (в силу параллельного переноса и т.к. $ABCD$ – правильный шестиугольник). Тогда по определению разности векторов $\overline{CD} = \overline{q} - \overline{p}$.

Вектор $\overline{DE}$ является противоположным вектору $\overline{AB}$. Значит $\overline{DE} = -\overline{p}$. Аналогично

$$\overline{EF} = -\overline{BC} = -\overline{q};\ \overline{FA} = -\overline{CD} = \overline{p} - \overline{q}.$$

По правилу треугольника $\overline{AC} = \overline{p} + \overline{q}$, $\overline{AE} = \overline{AF} + \overline{FE} = \overline{q} - \overline{p} + \overline{q} =$ $= 2\overline{q} - \overline{p}$. В правильном шестиугольнике $\overline{AD} = 2\overline{AO} = 2\overline{q}$.

$\overline{BC} \uparrow\uparrow \overline{AO}$ и $\Rightarrow \overline{AD} = 2\overline{BC}$, т.к. $\overline{BC} = \overline{AO}$;

Так как векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ неколлинеарны, то $\overline{AB}$ нельзя выразить через $\overline{BC}$.

Ответ: $\overline{CD} = -\overline{p} + \overline{q}$, $\overline{DE} = -\overline{p}$, $\overline{FA} = -\overline{CD} = \overline{p} - \overline{q}$, $\overline{AD} = 2\overline{BC}$, $\overline{BC} = -\overline{FE}$, $\overline{CF} = -\overline{AB}$, $\overline{AB}$ нельзя выразить через $\overline{BC}$.

Задача 2. В произвольной точке пространства приложены две силы $\overline{F_1}$ (3; 0; –4) и $\overline{F_2}$ (4; –2; –4). Определить:

- равнодействующую этих сил и ее величину;
- направление $\overline{S}$ биссектрисы угла между силами $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$;
- работу силы $\overline{F_1}$ по перемещению из точки A(1; 2; –7) в точку B(0;7;2);
- силу $\overline{F_4}$, противонаправленную с $\overline{F_2}$, такую, что $\left|\overline{F_4}\right| = 3$.

Решение: Так как $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$, то

$$\overline{R} = \big(3+4;\, 0+(-2);\, (-4)+(-4)\big) = (7;\,-2;\,-8).$$

Тогда $\left|\overline{R}\right| = \sqrt{7^2 + (-2)^2 + (-8)^2} = \sqrt{49+4+64} = \sqrt{117}$.

Для определения $\overline{S}$ есть несколько способов. Все они основаны на том свойстве ромба, что диагональ ромба является биссектрисой угла между сторонами. Поэтому, для нахождения необходимо построить ромб на $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ любым возможным способом.

Способ 1. Перейдем от заданных сил к их ортам $\overline{F_{1_0}}$ и $\overline{F_{2_0}}$, тогда $\overline{S} = \overline{F_{1_0}} + \overline{F_{2_0}}$:

$$\left|\overline{F_1}\right| = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5, \qquad \left|\overline{F_2}\right| = \sqrt{16+4+16} = 6,$$

$$\overline{F_{1_0}} = \left(\frac{3}{5};\, 0;\, -\frac{4}{5}\right), \qquad \overline{F_{2_0}} = \left(\frac{4}{6};\, -\frac{2}{6};\, -\frac{4}{6}\right) = \left(\frac{2}{3};\, -\frac{1}{3};\, -\frac{2}{3}\right),$$

$$\overline{S} = \left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3};\, 0-\frac{1}{3};\, -\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{19}{15};\, -\frac{1}{3};\, -\frac{22}{15}\right).$$

Способ 2. Уравняем силы по величине, например, до силы $\overline{F_2}$,

$$\overline{F_1'} = \frac{\left|\overline{F_2}\right|}{\left|\overline{F_1}\right|}\cdot\overline{F_1} = \frac{6}{5}(3;0;-4) = \left(\frac{18}{5};0;-\frac{24}{5}\right).$$

Тогда сила $\overline{S'} = \overline{F_1'} + \overline{F_2}$ также будет направлена по биссектрисе:

$$\overline{S'} = \left(\frac{18}{5}+4;\ 0-2;\ -\frac{24}{5}-4\right) = \left(\frac{38}{5};-2;-\frac{44}{5}\right).$$

Определим вектор $\overline{AB}$=(0 – 1; 7 – 2; 2 + 7) = (–1; 5; 9), вдоль которого перемещается сила $\overline{F_1}$. Тогда,

$$A = \overline{F_1}\cdot\overline{S} = \overline{F_1}\cdot\overline{AB} = 3\cdot(-1) + 0\cdot 5 + (-4)\cdot 9 = -3 - 36 = -39.$$

По условию $\overline{F_4}\downarrow\uparrow\overline{F_2}$, следовательно, $\overline{F_4} = \lambda\overline{F_2}$. Отсюда

$$|\lambda| = \frac{\left|\overline{F_4}\right|}{\left|\overline{F_2}\right|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Но, т.к. $\overline{F_4}\downarrow\uparrow\overline{F_2}$, то $\lambda = -\frac{1}{2}$. Значит $\overline{F_4} = -\frac{1}{2}(4;-2;-4) = (-2;1;2)$.

Задача 3. Даны векторы $\overline{a} = (2;-1;3)$, $\overline{b} = (1;2;-3)$, $\overline{c} = (0;1;2)$, $\overline{d} = (-1;9;-13)$ со своими координатами в базисе $(\overline{e}_1;\overline{e}_2;\overline{e}_3)$. Показать, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ сами образуют базис, и найти разложение вектора $\overline{d}$ в новом базисе.

Решение. Вычислим определитель, составленный из координат этих векторов: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 19 \neq 0.$

Это значит, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис пространства R^3.

Пусть $\overline{d} = \alpha_1\overline{a} + \alpha_2\overline{b} + \alpha_3\overline{c}$ – разложение вектора $\overline{d}$ по базису $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$.

По условию задачи имеем:

$$-1\cdot\overline{e}_1 + 9\cdot\overline{e}_2 - 13\cdot\overline{e}_3 = \alpha_1\left(2\cdot\overline{e}_1 - 1\cdot\overline{e}_2 + 3\cdot\overline{e}_3\right) +$$
$$+\alpha_2\left(1\cdot\overline{e}_1 + 2\cdot\overline{e}_2 - 3\cdot\overline{e}_3\right) + \alpha_3\left(0\cdot\overline{e}_1 + 1\cdot\overline{e}_2 + 2\cdot\overline{e}_3\right),$$

$$-1\cdot\overline{e}_1 + 9\cdot\overline{e}_2 - 13\cdot\overline{e}_3 = \left(2\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3\right)\cdot\overline{e}_1 +$$
$$+\left(-1\cdot\alpha_1 + 2\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3\right)\cdot\overline{e}_2 + \left(3\cdot\alpha_1 - 3\cdot\alpha_2 + 2\cdot\alpha_3\right)\cdot\overline{e}_3.$$

Из условия равенства двух векторов получим:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} 2\alpha_1 & +1\alpha_2 & +0\alpha_3 & = & -1, \\ -1\alpha_1 & +2\alpha_2 & +1\alpha_3 & = & 9, \\ 3\alpha_1 & -3\alpha_2 & +2\alpha_3 & = & -13. \end{array}\right\} \overset{[1]}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{rrrcr} \alpha_1 & -2\alpha_2 & -\alpha_3 & = & -9, \\ 2\alpha_1 & +\alpha_2 & & = & -1, \\ 3\alpha_1 & -3\alpha_2 & +2\alpha_3 & = & -13. \end{array}\right\} \overset{[2]}{\Rightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{rrrcr} \alpha_1 & -2\alpha_2 & -\alpha_3 & = & -9, \\ & 5\alpha_2 & +2\alpha_3 & = & 17, \\ & 3\alpha_2 & +5\alpha_3 & = & 14. \end{array}\right\} \overset{[3]}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{rrrcr} \alpha_1 & -2\alpha_2 & -\alpha_3 & = & -9, \\ & \alpha_2 & +\dfrac{2}{5}\alpha_3 & = & \dfrac{17}{5}, \\ & 3\alpha_2 & +5\alpha_3 & = & 14. \end{array}\right\} \overset{[4]}{\Rightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{rrrcr} \alpha_1 & -2\alpha_2 & -\alpha_3 & = & -9, \\ & \alpha_2 & +\dfrac{2}{5}\alpha_3 & = & \dfrac{17}{5}, \\ & & \dfrac{19}{5}\alpha_3 & = & \dfrac{19}{5}. \end{array}\right\} \overset{[5]}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{rcr} \alpha_1 & = & -2, \\ \alpha_2 & = & 3, \\ \alpha_3 & = & 1. \end{array}\right\}$$

[1]: обе части первого уравнения умножим на (–1), поменяем местами первое и второе уравнения;

[2]: обе части первого уравнения умножим на (–2) и прибавим, соответственно, ко второму уравнению. Затем обе части первого уравнения умножим на (–3) и прибавим, соответственно, к третьему уравнению.

[3]: обе части второго уравнения разделим на 5.

[4]: обе части второго уравнения умножим на (–3) и прибавим, соответственно, к третьему.

[5]: из третьего уравнения находим $\alpha_3 = 1$. Подставим это значение во второе уравнение и получим $\alpha_2 = 3$. Подставляя полученные значения $\alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1$ в первое уравнение, найдем $\alpha_1 = -2$.

Эту систему можно решить по формулам Крамера:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_{\alpha_1}}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_{\alpha_2}}{\Delta}, \quad \alpha_3 = \frac{\Delta_{\alpha_3}}{\Delta},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 19$, $\qquad \Delta_{\alpha_1} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \\ -13 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -38$,

$$\Delta_{\alpha_2} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & 1 \\ 3 & -13 & 2 \end{vmatrix} = 57, \qquad \Delta_{\alpha_3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 9 \\ 3 & -3 & -13 \end{vmatrix} = 19.$$

Отсюда находим $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 1$.

Итак, $\overline{d} = -2\overline{a} + 3\overline{b} + 1\overline{c}$.

Ответ: $\overline{d}(-2;\ \ 3;\ \ 1)$.

4. Выполнение своего варианта на уровне II (по два человека на один вариант).

Уровень II

Вариант 1

1. В параллелепипеде $ABCD\,A'B'C'D'$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overline{AB} = \overline{m}$, $\overline{AD} = \overline{n}$, $\overline{AA'} = \overline{p}$. Построить вектор $\overline{m} + \overline{n} + \overline{p}$.

2. Даны: $|\overline{a}| = 15$, $|\overline{b}| = 17$ и $|\overline{a} + \overline{b}| = \sqrt{67}$. Вычислить $|\overline{a} - \overline{b}|$.

Ответ: 31.

3. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, чтобы имело место соотношение $|\overline{a} + \overline{b}| > |\overline{a} - \overline{b}|$?

4. Точка O является центром тяжести треугольника ABC. Доказать, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{0}$.

5. Найти вектор $\overline{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\overline{a} = 7\overline{i} - 4\overline{j} - 4\overline{k}$ и $\overline{b} = -2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$, если $|\overline{x}| = 5\sqrt{6}$.

Ответ: $\overline{x} = \dfrac{5}{3}\left(\overline{i} + 7\overline{j} + 2\overline{k}\right)$.

6. Даны векторы $\overline{e_1}$ (0; 5; –3), $\overline{e_2}$ (1; –3; 7), $\overline{e_3}$ (–2; –3; 1), $\overline{a}$ (–4; –1; –1) в некотором базисе. Показать, что векторы $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right\}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{a}$ в этом базисе.

Ответ: $\overline{a} = \overline{e_1} + 2\overline{e_3}$.

Вариант 2

1. В параллелепипеде $ABCD\,A'B'C'D'$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overline{AB} = \overline{m}$, $\overline{AD} = \overline{n}$, $\overline{AA'} = \overline{p}$. Построить вектор $\overline{m} + \overline{n} + \dfrac{1}{2}\overline{p}$.

2. Даны $|\overline{a}| = 11$, $|\overline{b}| = 12$, $|\overline{a} - \overline{b}| = 13$. Вычислить $|\overline{a} + \overline{b}|$.

Ответ: 19.

3. Какому условию должны удовлетворять $\overline{a}$ и $\overline{b}$, чтобы имело место соотношение $|\overline{a}+\overline{b}| < |\overline{a}-\overline{b}|$?

4. Точка M – точка пересечения медиан треугольника ABC, O – произвольная точка пространства. Доказать равенство $\overline{OM}=\frac{1}{3}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}\right)$.

5. Даны векторы $\overline{e_1}$ (1; 2; 3), $\overline{e_2}$ (–1; 3; 2), $\overline{e_3}$ (7; –3; 5), $\overline{a}$ (6; 10; 17) в некотором базисе. Показать, что векторы $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{a}$ в этом базисе.

Ответ: $\overline{a} = 2\overline{e_1} + 3\overline{e_2} + \overline{e_3}$.

6. Две силы $\overline{F_1}$ (2; –3; 6) и $\overline{F_2}$ (–1; 2; –2) приложены к одной точке. Определить координаты силы $\overline{F}$, направленной по биссектрисе угла между силами $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$, при условии, что $|\overline{F}|=3\sqrt{42}$.

Ответ: $\overline{F}$ (–3; 15; 12).

Вариант 3

1. В параллелепипеде $ABCD\,A'B'C'D'$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами $\overline{AB} = \overline{m}$, $\overline{AD} = \overline{n}$, $\overline{AA'} = \overline{p}$. Построить вектор $\frac{1}{2}\overline{m} + \frac{1}{2}\overline{n} + \overline{p}$.

2. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\varphi = 60°$, причем $|\overline{a}| = 8$, $|\overline{b}| = 5$. Определить $|\overline{a}+\overline{b}|$ и $|\overline{a}-\overline{b}|$.

Ответ: $\sqrt{129}$; 7.

3. Три вектора $\overline{AB} = \overline{c}$, $\overline{BC} = \overline{a}$ и $\overline{CA} = \overline{b}$ служат сторонами треугольника. С помощью $\overline{a}$, $\overline{b}$, и $\overline{c}$ выразить векторы, совпадающие с медианами треугольника.

Ответ: $\overline{AM} = \overline{c} + \frac{1}{2}\overline{a}$; $\overline{BN} = \overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$; $\overline{CP} = \overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c}$.

4. В равнобочной трапеции $ABCD$ известны нижнее основание $\overline{AB} = \overline{a}$, боковая сторона $\overline{AD} = \overline{b}$ и угол между ними $\angle A = \pi/3$. Разложить по $\overline{a}$ и $\overline{b}$ все векторы, составляющие остальные стороны и диагонали трапеции.

Ответ: $\overline{BC}=-\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\overline{a}+\overline{b}$; $\overline{CD}=\frac{|\overline{b}|-|\overline{a}|}{|\overline{a}|}\overline{a}$;

$\overline{AC}=\frac{|\overline{a}|-|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\overline{a}+\overline{b}$; $\overline{BD}=-\overline{a}+\overline{b}$.

5. Даны векторы $\overline{e_1}(2; 7; 3)$, $\overline{e_2}(3; 1; 8)$, $\overline{e_3}(2; –7; 4)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{a}(16; 14; 27)$ в этом базисе.

Ответ: $\overline{a} = 5\overline{e_1} + 3\overline{e_3}$.

6. Найти вектор $\overline{x}$, направленный по орту биссектрисы угла между векторами $\overline{a}(1; 2; 2)$ и $\overline{b}(2; 3; –6)$.

Ответ: $\overline{x}\left(\frac{11}{15}; \frac{19}{15}; -\frac{8}{15}\right)$.

Вариант 4

1. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами $\overline{AB} = \overline{m}$, $\overline{AD} = \overline{n}$, $\overline{AA'} = \overline{p}$. Построить вектор $\overline{m} + \overline{n} + \overline{p}$.

2. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол φ = 120°. Определить $|\overline{a}+\overline{b}|$ и $|\overline{a}-\overline{b}|$.

Ответ: $\sqrt{19}$, 7.

3. Три силы $\overline{M}$, $\overline{N}$ и $\overline{P}$ приложенные к одной точке, имеют взаимно перпендикулярные направления. Определить величину их равнодействующей $\overline{R}$, если известно, что $|\overline{M}|$ = 2 кг, $|\overline{N}|$ = 10 кг и $|\overline{P}|$ = 11 кг.

Ответ: $|\overline{R}|$ = 15.

4. В треугольнике ABC сторона BC разделена точкой D в отношении $\overline{m}:\overline{n}$, т.е. $\overline{BD} = \frac{m}{n}\overline{DC}$. Разложить вектор $\overline{AD}$ по векторам $\overline{AB} = \overline{c}$ и $\overline{AC} = \overline{b}$.

Ответ: $\overline{AD} = \frac{m}{m+n}\overline{b} + \frac{n}{m+n}\overline{c}$.

5. Даны векторы $\overline{e_1}(1; 2; –3)$, $\overline{e_2}(–1; 0; 3)$, $\overline{e_3}(7; 9; –15)$, $\overline{a}(4; 10; –12)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{a}$ в этом базисе.

Ответ: $\overline{a} = 5\overline{e_1} + \overline{e_2}$.

6. Найти силу $\overline{F}$, направленную по орту биссектрисы угла между силами $\overline{F_1}(1; 2; –2)$ и $\overline{F_2}(4; –5; 20)$.

Ответ: $\overline{F}\left(\frac{11}{21}; \frac{3}{7}; \frac{3}{7}\right)$.

Вариант 5

1. В параллелепипеде заданы векторы, совпадающие с его ребрами $\overline{AB} = \overline{m}$, $\overline{AD} = \overline{n}$, $\overline{AA'} = \overline{p}$. Построить вектор $-\overline{m} + \frac{1}{2}\overline{n} - \overline{p}$.

2. Даны $|\overline{a}| = 12$, $|\overline{b}| = 5$ и $|\overline{a}+\overline{b}| = 17$. Вычислить $|\overline{a}-\overline{b}|$.

Ответ: 7.

3. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, чтобы имело место соотношение:

1) $\overline{a} + \overline{b} = \lambda(\overline{a} - \overline{b})$; 2) $\dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \dfrac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$.

Ответ: 1) $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны;
2) $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеют одинаковое направление.

4. Доказать, что сумма векторов, соединяющих центр правильного треугольника с его вершинами, равна нуль-вектору.

5. Даны векторы $\overline{e_1}(2;\ 0;\ 1)$, $\overline{e_2}(1;\ -1;\ 2)$, $\overline{e_3}(3;\ 4;\ -2)$, $\overline{a}(8;\ -1;\ 8)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{a}$ в этом базисе.

Ответ: $\overline{a} = 5\overline{e_1} + \overline{e_3}$.

6. Найти силу $\overline{F}$, направленную по орту биссектрисы угла между силами $\overline{F_1}(2;\ -3;\ 6)$ и $\overline{F_2}(4;\ 5;\ -20)$.

Ответ: $\overline{F}\left(\frac{10}{21}; -\frac{4}{21}; -\frac{2}{21}\right)$.

Вариант 6

1. В треугольнике ABC вектор $\overline{AB} = \overline{m}$ и вектор $\overline{AC} = \overline{n}$. Построить векторы: $\dfrac{\overline{m}+\overline{n}}{2}$ и $\dfrac{\overline{n}-\overline{m}}{2}$.

2. Даны $|\overline{a}| = 15$, $|\overline{b}| = 17$ и $|\overline{a} - \overline{b}| = 2$. Вычислить $|\overline{a} + \overline{b}|$.

Ответ: 32.

3. В правильном шестиугольнике *ABCDEF* известны $\overline{AB} = \overline{p}$ и $\overline{BC} = \overline{q}$. Выразить через $\overline{p}$ и $\overline{q}$ векторы $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AE}$.

4. $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ и $\overline{CF}$ – медианы треугольника *ABC*. Доказать равенство $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{0}$.

5. Даны векторы $\overline{e_1}(1; –3; 4)$, $\overline{e_2}(7; 3; –2)$, $\overline{e_3}(–2; 1; –1)$, $\overline{a}(–3; –1; 2)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{a}$ в этом базисе.

Ответ: $\overline{a} = \overline{e_1} + 2\overline{e_3}$.

6. Найти вектор $\overline{x}$, направленный по орту биссектрисы угла между векторами $\overline{a}(2; 4; 4)$ и $\overline{b}(4; 5; –20)$.

Ответ: $\overline{x}\left(\frac{11}{21}; \frac{19}{21}; -\frac{6}{21}\right)$.

Уровень III

1. Проверить, что векторы, совпадающие с медианами любого треугольника, в свою очередь могут служить сторонами другого треугольника.

2. В ромбе *ABCD* диагонали $\overline{AC} = \overline{a}$ и $\overline{BD} = \overline{b}$. Разложить по этим векторам все векторы, совпадающие со сторонами ромба $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$.

Ответ: $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{a} - \frac{1}{2}\overline{b}$; $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$;

$\overline{CD} = -\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$; $\overline{DA} = -\frac{1}{2}\overline{a} - \frac{1}{2}\overline{b}$.

3. В треугольнике *ABC* сторону *AB* точками *M* и *N* разделили на три равные части. Найти вектор $\overline{CM}$, если $\overline{CA} = \overline{a}$ и $\overline{CB} = \overline{b}$.

Ответ: $\overline{CM} = \dfrac{2\overline{a} + \overline{b}}{3}$.

4. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, чтобы они были сторонами некоторого треугольника?

5. Показать, что $|\overline{a} + \overline{b}| \le |\overline{a}| + |\overline{b}|$. В каком случае в этом соотношение имеет место равенство?

6. В равностороннем треугольнике ABC точка M есть середина стороны BC, O – центр тяжести треугольника. Имеет ли смысл каждое из выражений?

1) $\overline{AO}=\lambda_1\overline{AM}$; 2) $\overline{MO}=\lambda_2\overline{AO}$; 3) $\overline{OA}=\lambda_3\overline{OB}$?

В случае утвердительного ответа найти соответствующее значение λ.

Ответ: выражения 1) и 2) имеют смысл:

1) $\lambda_1=\frac{2}{3}$, 2) $\lambda_2=\frac{1}{2}$, выражение 3) не имеет смысла.

7. Четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, O – точка пересечения его диагоналей, точка M – произвольная точка, отличная от 0. Можно ли выразить вектор $\overline{a}=\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}+\overline{MD}$ через вектор $\overline{MO}$?

Ответ: да, $\overline{a}=4\overline{MO}$.

II. Скалярное произведение векторов, его свойства и выражение через координаты. Условие ортогональности векторов

Уровень I

(выполняется во внеаудиторной самостоятельной работе)

1. Зная, что $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=3$, $(\overline{a},\hat{}\ \overline{b})=135°$, найти:

1) $\overline{a}\cdot\overline{b}$; 2) $\overline{a}^2$; 3) $\overline{b}^2$; 4) $(\overline{a}+\overline{b})^2$; 5) $(\overline{a}-\overline{b})^2$.

Ответ: 1) $-3\sqrt{2}$; 2) 4; 3) 9; 4) $13-6\sqrt{2}$; 5) $13+6\sqrt{2}$.

2. Вычислить $\overline{a}\cdot\overline{b}$, если $|\overline{a}|=3$; $|\overline{b}|=1$ и 1) $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$ 2) $\overline{a}\downarrow\uparrow\overline{b}$.

Ответ: 3; –3.

3. Найти числовое значение скаляра $3|\overline{m}|-2\overline{m}\cdot\overline{n}+4\overline{n}^2$, если $|\overline{m}|=\frac{1}{3}$, $|\overline{n}|=6$ и $(\overline{m},\hat{}\ \overline{n})=\frac{\pi}{3}$.

Ответ: 143.

4. Под действием силы $\overline{F}(5;\ 4;\ 3)$ тело переместилось из начала вектора $\overline{S}(2;\ 1;\ -2)$ в его конец. Вычислить работу силы $\overline{F}$.

Ответ: $A=8$ (ед.)

5. Даны вершины четырехугольника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$. Вычислить угол φ между его диагоналями.

Ответ: $\varphi = 90°$.

1. В начале занятия беглое и активное повторение основного теоретического материала с использованием графической схемы и информационной таблицы.

Определение 1. ***Скалярным произведением*** двух ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\left(\overline{a}, \hat{}\ \overline{b}\right) = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi .$$

Очевидно, $$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot np_{\overline{a}}\overline{b} = \left|\overline{b}\right| \cdot np_{\overline{b}}\overline{a} .$$

Замечание 1. Понятие скалярного произведения возникло в физике. Если вектор $\overline{F}$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\overline{S}$, то работа A указанной силы определяется равенством

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{F}\right| \cdot \left|\overline{S}\right| \cdot \cos\left(\overline{F}, \hat{}\ \overline{S}\right).$$

Алгебраические свойства скалярного произведения:

1. $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$;
2. $\overline{a} \cdot \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$;
3. $\overline{a} \cdot \left(\lambda\overline{b}\right) = \left(\lambda\overline{a}\right) \cdot \overline{b} = \lambda\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)$.

Замечание 2. Очевидно, алгебраические свойства скалярного произведения аналогичны свойствам умножения действительных чисел и здесь имеют место формулы сокращенного умножения:

$$(\overline{a} \pm \overline{b})2 = \overline{a}^2 \pm 2\overline{a}\,\overline{b} + \overline{b}^2 \quad \text{и} \quad (\overline{a} + \overline{b})(\overline{a} - \overline{b}) = \overline{a}^2 - \overline{b}^2.$$

Геометрические свойства скалярного произведения:

1. $\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}^2 = \left|\overline{a}\right|^2$;
2. $\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} = 0$;
3. $\overline{a} \cdot \overline{b} > 0 \Leftrightarrow 0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, $\quad \overline{a} \cdot \overline{b} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$.

Для ортов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ имеет место:

$$\bar{i}^{\,2} = \bar{j}^{\,2} = \bar{k}^{\,2} = 1, \qquad \bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{i}\cdot\bar{k} = \bar{j}\cdot\bar{k} = 0.$$

В координатной форме скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z.$$

Из этой формулы, в частности, следуют формулы для определения косинуса угла между векторами и проекции вектора на ось другого вектора:

$$\cos\left(\bar{a},\hat{\ }\bar{b}\right) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}},$$

$$пр_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

2. Совместное обсуждение (со всей аудиторией) выполненного во внеаудиторной самостоятельной работе уровня А.

3. Самостоятельное изучение обучающих задач.

Обучающие задачи

Задача 1. Три силы $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$ расположены в одной и той же плоскости. Даны их длины: $|\overline{F_1}| = 3$, $|\overline{F_2}| = 2$, $|\overline{F_3}| = 2$. Известно, что силы $\overline{F_2}$ и $\overline{F_3}$ составляют с силой $\overline{F_1}$ углы в 60°. Определить угол α между силами $\overline{F_2}$ и $\overline{F_1}$ и длину равнодействующей всех трех сил.

Решение: Приведем заданные силы к общему началу. Тогда возможны два случая (рис. 7):

1) 2)

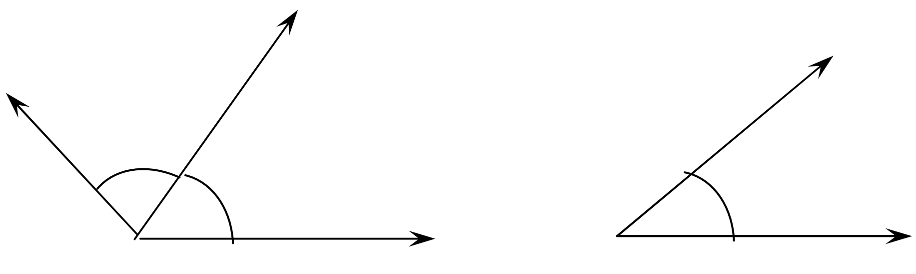


Рис. 7

В первом случае α = 60°+ 60° = 120°, во втором α = 0°.

Равнодействующая трех сил в векторной форме:

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}\,.$$

Тогда, из геометрического свойства скалярного произведения $\left(\overline{a}^2 = \left|\overline{a}\right|^2\right)$ следует, что

$$\left|\overline{R}\right| = \sqrt{\left(\overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}\right)^2} = \sqrt{\overline{F_1}^2 + \overline{F_2}^2 + \overline{F_3}^2 + 2\overline{F_1}\cdot\overline{F_2} + 2\overline{F_2}\cdot\overline{F_3} + 2\overline{F_1}\overline{F}_3} =$$

$$= \sqrt{\left|\overline{F_1}\right|^2 + \left|\overline{F_2}\right|^2 + \left|\overline{F_3}\right|^2 + 2\left|\overline{F_1}\right|\cdot\left|\overline{F_2}\right|\cdot\cos 60^\circ + 2\left|\overline{F_1}\right|\left|\overline{F_3}\right|\cdot\cos 60^\circ + 2\left|\overline{F_2}\right|\cdot\left|\overline{F_3}\right|\cdot\cos\alpha}\,.$$

В случае, когда α = 120°, $\overline{R} = \sqrt{9+4+4+6+6+(-4)} = \sqrt{25}$ (ед.).

В случае, когда α = 0°, $\overline{R} = \sqrt{9+4+4+6+6+8} = \sqrt{37}$ (ед.).

Ответ: α = 120°, $\left|\overline{R}\right|$=5; α = 0°, $\left|\overline{R}\right| = \sqrt{37}$.

4. Выполнение своего варианта на уровне II (по два человека на один вариант).

Уровень II

Вариант 1

1. Определить работу силы $\overline{F}$, $\left|\overline{F}\right|$=15Н, которая, действуя на тело, вызывает его перемещение на 4 м под углом $\pi/3$ к направлению действия силы.

Ответ: 30Дж.

2. Вычислите длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=2\overline{m}+\overline{n}$ и $\overline{b}=\overline{m}-2\overline{n}$, где $\overline{m}$ и $\overline{n}$ – единичные векторы, угол между которыми 60°.

Ответ: $\sqrt{7}$ и $\sqrt{13}$.

3. Пользуясь скалярным умножением векторов, докажите, что

а) диагонали ромба взаимно перпендикулярны;

б) диагонали прямоугольника равны между собой.

4. Найти координаты вектора $\overline{x}$, коллинеарного вектору $\overline{a}$(2; 1; –1) и удовлетворяющего условию $\overline{a}\cdot\overline{x}$=3.

Ответ: $\overline{x}(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$.

5. Дан треугольник с вершинами $A(-3; 5; 6)$, $B(1; -5; 7)$, $C(8; -3; -1)$. Найти внутренний угол при вершине A и внешний при вершине C.

Ответ: 45°, 135°.

6. Даны три силы $\overline{F_1} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$, $\overline{F_2} = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$, $\overline{F_3} = 10\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$. Найти:

а) равнодействующую силу $\overline{R}$ и ее величину;

б) $пр_{\overline{F_1}}\overline{R}$, $пр_{\overline{F_2}}\overline{R}$, $пр_{\overline{F_3}}\overline{R}$.

Ответ: $\overline{R}(13; 3; 2)$, $|\overline{R}| = \sqrt{182}$; $\frac{11}{3}, \frac{25}{3}, \frac{73}{\sqrt{30}}$.

Вариант 2

1. Определить работу силы $\overline{F}$, $|\overline{F}|$=7Н, которая, действуя на тело, вызывает его перемещение на 2 м под углом $2\pi/3$ к направлению действия силы.

Ответ: –7 Дж.

2. Упростить выражение $\bar{a}^2 + 3\bar{a}\cdot\bar{b} - 2\bar{b}\bar{c} + 1$, если $\bar{a} = 4\bar{m} - \bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + 2\bar{n}$, $\bar{c} = 2\bar{m} - 3\bar{n}$, где $\bar{m}^2 = 4$, $\bar{n}^2 = 1$ и $\left(\bar{m},\hat{}\,\bar{n}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: 104.

3. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5; 3; 4)$, $B(-1; -7; 5)$, $C(6; -5; -3)$, $D(2; 5; -4)$ есть квадрат.

4. Найти координаты вектора $\bar{x}$, коллинеарного вектору $\bar{a}(1; 2; -3)$ и удовлетворяющего условию $\bar{a}\cdot\bar{x}$=28.

Ответ: $\bar{x}(2; 4; -6)$.

5. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{c}(2; 1; 0)$, $\bar{b}(0; -2; 1)$.

Ответ: 90°.

6. Даны три силы $\overline{F_1}(1; -3; 4)$, $\overline{F_2}(3; -4; 2)$ и $\overline{F_3}(-1; 1; 4)$. Вычислить:

а) равнодействующую силу $\overline{R}$ и ее величину;

б) $пр_{\overline{F_1}}\overline{R}$, $пр_{\overline{F_2}}\overline{R}$, $пр_{\overline{F_3}}\overline{R}$.

Ответ: $\overline{R}(3; -6; 10)$, $|\overline{R}| = \sqrt{145}$; $\frac{61}{\sqrt{26}}, \frac{53}{\sqrt{29}}, \frac{31}{\sqrt{18}}$.

Вариант 3

1. Определить работу силы $\overline{F}$, $|\overline{F}|$ = 8Н, которая, действуя на тело, вызывает его перемещение на 3 м под углом π/4 к направлению действия силы.

Ответ: $12\sqrt{2}$ Дж.

2. Докажите, что $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)^2+\left(\overline{a}-\overline{b}\right)^2=2\left(\overline{a}^2+\overline{b}^2\right)$ – верное равенство и выясните его геометрический смысл.

3. Даны вершины четырехугольника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$ и $D(-5;-5;3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

4. Вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$ (3; 4; –12), образует с осью $OУ$ тупой угол. Зная, что $\left|\overline{x}\right|$=26, найти его координаты.

Ответ: $\overline{x}$(–6; –8; 24).

5. Даны вершины треугольника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ и $C(3;-2;1)$. Определить его внутренний угол при вершине B.

Ответ: 45°.

6. Даны три силы $\overline{F_1}$(1; 0; –2), $\overline{F_2}$(3; 2; –4) и $\overline{F_3}$(–2; 3; 4). Вычислить:

а) равнодействующую силу $\overline{R}$ и ее величину;

б) $пр_{\overline{F_1}}\overline{R}$, $пр_{\overline{F_2}}\overline{R}$, $пр_{\overline{F_3}}\overline{R}$.

Ответ: $\overline{R}$(2; 5; –2), $|\overline{R}|=\sqrt{33}$; $\dfrac{6}{\sqrt{5}};\dfrac{24}{\sqrt{29}};\dfrac{3}{\sqrt{29}}$.

Вариант 4

1. Даны векторы $\overline{e_1}$(1; 2; –3), $\overline{e_2}$(–1; 0; 3), $\overline{e_3}$(7; 9; –15), $\overline{a}$(4; 10; –12) в некотором базисе. Показать, что векторы $\left\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\right\}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{a}$ в этом базисе.

Ответ: $\overline{a}=5\overline{e_1}+\overline{e_2}$.

2. Определить работу силы $\overline{F}$, $|\overline{F}|$ = 16Н, которая, действуя на тело, вызывает его перемещение на 7 м под углом 3π/4 к направлению действия силы.

Ответ: $-56\sqrt{2}$ Дж.

3. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60°. Зная, что $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 2$ и $|\overline{c}| = 6$, определить модуль вектора $|\overline{p}| = |\overline{a}| + |\overline{b}| + |\overline{c}|$.

Ответ: $|\overline{p}| = 10$.

4. При каком значении λ векторы $\overline{a} = 4\overline{i} + \lambda\overline{j} + 5\overline{k}$ и $\overline{b} = \lambda\overline{i} + 2\overline{j} - 6\overline{k}$ взаимно перпендикулярны?

Ответ: $\lambda = 5$.

5. Найти силу $\overline{F}$, направленную по биссектрисе угла между силами $\overline{F_1}(1; 2; -2)$ и $\overline{F_2}(4; -5; 20)$.

Ответ: $\overline{F}\left(\frac{11}{21}; \frac{3}{7}; \frac{3}{7}\right)$.

6. Найти вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{a}(4; 2; -5)$ и удовлетворяющий условию $\overline{x} \cdot \overline{a} = -90$.

Ответ: $\overline{x}(-8; -4; 10)$.

7. Даны вершины треугольника $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ и $C(1; -2; 1)$. Определить внешний угол при вершине A.

Ответ: $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$.

8. Даны три силы $\overline{F_1}(5; 1; -3)$, $\overline{F_2}(-4; 0; 2)$ и $\overline{F_3}(-1; 1; 2)$. Вычислить:

а) равнодействующую силу $\overline{R}$ и ее величину;

б) $пр_{\overline{F_1}}\overline{R}$, $пр_{\overline{F_2}}\overline{R}$, $пр_{\overline{F_3}}\overline{R}$.

Ответ: $\overline{R}(0; 2; 1)$, $|\overline{R}| = \sqrt{5}$; $\frac{1}{\sqrt{35}}; \frac{2}{\sqrt{20}}; \frac{4}{\sqrt{6}}$.

Вариант 5

1. Определить работу силы $\overline{F}$, $|\overline{F}| = 13$Н, которая, действуя на тело, вызывает его перемещение на 4 м под углом $\pi/6$ к направлению действия силы.

Ответ: $26\sqrt{2}$ Дж.

2. К одной и той же точке приложены две силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$, действующие под углом 120°, причем $\left|\overline{P}\right|$ = 7 и $\left|\overline{Q}\right|$ = 4. Найти величину равнодействующей силы $\overline{R}$.

Ответ: $\sqrt{37}$.

3. Длина гипотенузы AB треугольника ABC равна c. Вычислите сумму $\overline{AB}\cdot\overline{AC}+\overline{BC}\cdot\overline{BA}+\overline{CA}\cdot\overline{CB}$.

Ответ: c^2.

4. Найти вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$(5; 2; –1) и удовлетворяющий условию $\overline{x}\cdot\overline{a}$ = 90.

Ответ: $\overline{x}$(15; 6; –3).

5. Даны вершины треугольника ABC A(–1; –2; 4), B(–4; –2; 0) и C (3; –2; 1). Вычислить внешний угол при вершине B.

Ответ: $\dfrac{3\pi}{4}$.

6. Под действием силы $\overline{F}$ (5; 4; 3) тело переместилось из начала вектора $\overline{S}$(2; 1; –2) в его конец. Вычислить работу A силы $\overline{F}$, угол φ между направлениями силы и перемещения и величину проекции $\overline{F}$ на $\overline{S}$.

Ответ: A= 8, cos φ ≈ 0,38, $пр_{\overline{S}}\overline{F}=\dfrac{8}{3}$.

Вариант 6

1. Определить работу силы $\overline{F}$, $|\overline{F}|$ = 15Н, которая, действуя на тело, вызывает его перемещение на 4 м под углом 5π/6 к направлению действия силы.

Ответ: $-30\sqrt{3}$ Дж.

2. Докажите, что при любом расположении точек A, B, C, D на плоскости имеет место равенство $\overline{BC}\cdot\overline{AD}+\overline{CA}\cdot\overline{BD}+\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0$.

3. Найдите угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$(1; –2; 3), $\overline{b}$(1; 5; 3).

Ответ: $\arccos\left(-\dfrac{3}{7}\right)$.

4. Вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$(4; –6; 12) имеет $\left|\overline{x}\right|$= 7. Найти его координаты, если $\overline{x}\downarrow\downarrow\overline{a}$.

Ответ: $\overline{x}$(2; –3; 6).

5. Даны два вектора $\overline{a}(1;\ –2;\ 2)$, $\overline{b}(2;\ –2;\ –1)$. Найти их скалярное произведение и угол между ними. Чему равно выражение $2\overline{a}^2 - 4\overline{a}\cdot\overline{b} + 5\overline{b}^2$?

Ответ: 4; $\arccos\left(\frac{4}{9}\right)$; 47.

6. Даны три силы $\overline{F_1}(1; –2; –2)$, $\overline{F_2}(2; 3; –6)$ и $\overline{F_3}(3; 4; 12)$. Вычислить:

а) равнодействующую силу $\overline{R}$ и ее величину;

б) $пр_{\overline{F_1}}\overline{R}$, $пр_{\overline{F_2}}\overline{R}$, $пр_{\overline{F_3}}\overline{R}$.

Ответ: $\overline{R}(6; 5; 4)$, $|\overline{R}| = \sqrt{77}$; 4, $\frac{3}{7}$, $\frac{76}{13}$.

Уровень III

1. К вершине куба приложены три силы, равные по величине, соответственно, 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, выходящим из данной вершины. Найти величину равнодействующей этих трех сил и углы, образуемые ею с составляющими силами.

Ответ: 5; $\arccos\frac{7}{10}$; $\arccos\frac{8}{10}$; $\arccos\frac{9}{10}$.

2. Луч образует с векторами $\overline{i}$ и $\overline{j}$ углы, соответственно, равные $\pi/4$ и $\pi/3$, а с вектором $\overline{k}$ – тупой угол. Найдите этот угол.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

3. Докажите, что в трапеции сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований.

4. Два трактора, идущие с постоянной скоростью по берегам прямого канала, тянут барку при помощи двух канатов. Величины сил натяжения канатов $|\overline{F_1}|$ = 800 Н и $|\overline{F_2}|$ = 960 Н, угол между канатами равен 60°. Определить сопротивление воды, испытываемое баркой, если она движется параллельно берегам, и углы α, β между канатами и направлением движения.

Ответ: $|\overline{F}|$=1530Н, $\alpha \approx 33^0$, $\beta \approx 27^0$.

5. Даны три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, удовлетворяющие условию $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$. Зная, что $|\overline{a}|$= 3, $|\overline{b}|$= 1 и $|\overline{c}|$= 4, вычислить $\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}\cdot\overline{c}+\overline{c}\cdot\overline{a}$.

Ответ: –13.

6. В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Вычислить угол между ними.

Ответ: $\arccos\frac{4}{5}$.

7. Можно ли говорить о скалярном произведении трех векторов? О скалярном кубе вектора? О кубе скаляра вектора? Ответ обосновать.

8. Даны разложения векторов, служащих сторонами треугольника, по двум взаимно перпендикулярным ортам: $\overline{AB}=5\bar{i}+2\bar{j}$, $\overline{BC}=2\bar{i}-4\bar{j}$ и $\overline{CA}=-7\bar{i}+2\bar{j}$. Вычислить длину медианы $\overline{AM}$ и высоты $\overline{AD}$ треугольника ABC.

Ответ: $\left|\overline{AM}\right|=6$; $\left|\overline{AD}\right|=12\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Указание. Необходимо выразить вектор-медиану и вектор-высоту через стороны треугольника, а потом уже через единичные векторы: $\overline{AM}=\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}$ и $\overline{AD}=\overline{AB}+\lambda\overline{BC}$, где λ следует вычислить из условия перпендикулярности $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$.

9. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найти координаты вектора $\bar{c}$, если $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}$, $\bar{b}=\bar{j}+\bar{k}$.

Ответ: $\bar{c}\left(-\frac{1}{3};\ \frac{4}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$, или $\bar{c}(1;\ 0;\ 1)$.

III. Векторное произведение векторов, его свойства и выражение через координаты. Смешанное произведение трех векторов, его свойства и выражение через координаты. Условие компланарности трех векторов.

Уровень I

(выполняется во внеаудиторной самостоятельной работе)

1. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi=\pi/6$. Зная, что $|\bar{a}|=4$, $|\bar{b}|=7$, вычислить $|\bar{a}\times\bar{b}|$.

Ответ: 14.

2. Даны: $|\bar{a}|=10$, $|\bar{b}|=2$ и $\bar{a}\cdot\bar{b}=12$. Вычислить $|\bar{a}\times\bar{b}|$.

Ответ: 16.

3. Определить векторное произведение и его модуль для векторов $\bar{a}(-1; 2; 4)$ и $\bar{b}(2; -1; -4)$.

Ответ: $-4\bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k}$; $\sqrt{41}$.

4. Найти смешанное произведение трех векторов $\bar{a}(1; 1; 2)$, $\bar{b}(2; 1; 1)$, $\bar{c}(1; -2; 3)$. Какую тройку векторов образуют эти векторы? Найти $np_{\bar{c}}\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)$.

Ответ: –10; левую; $-\dfrac{10}{\sqrt{14}}$.

5. Лежат ли точки $A(1; 2; -1)$, $B(4; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ в одной плоскости?

Ответ: лежат.

1. В начале занятия беглое и активное повторение основного теоретического материала с использованием графической схемы и информационной таблицы.

Векторное произведение

Наряду с умножением двух векторов, приводящим к скаляру, рассмотрим еще один тип умножения векторов, в результате которого получается вектор. Потребность введения такого умножения подтверждается при решении целого ряда геометрических и механических проблем (вычисление момента силы, выражение площадей с помощью векторов и т.п.).

Определение 1. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ в R^3 с общим началом в точке O называется правой, если кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ совершается, если смотреть с конца вектора $\bar{c}$, против движения часовой стрелки (рис. 8). В противном случае данная тройка называется левой (рис. 9).

Определение 2. ***Векторным произведением*** векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$ (рис. 10), который определяется следующий образом:

1) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен к плоскости, определяемой векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$;

2) тройка векторов $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ – правая.

3) модуль вектора $\bar{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\left|\bar{c}\right| = \left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = \left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\left(\bar{a},\hat{\ }\bar{b}\right);$$

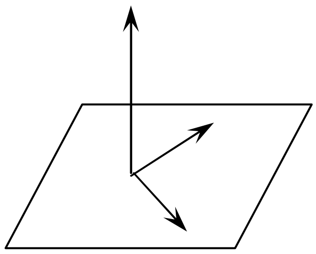


Рис. 8

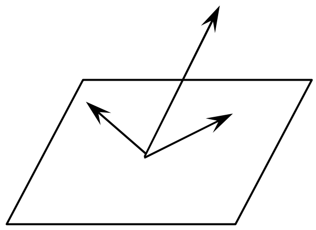


Рис. 9

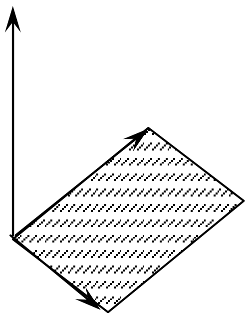


Рис. 10

Замечание. Обратите внимание, что определение векторного произведения задает вектор в геометрической форме, причем длина нового вектора определяется из условия 3), а направление из условий 1), 2). Подумайте, почему недостаточно для задания направления одного из двух последних условий.

Векторное произведение вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ обозначают $\overline{a}\times\overline{b}$ или $[\overline{a},\ \overline{b}]$.

***Алгебраические свойства векторного произведения*:**

1. $\overline{a}\times\overline{b}=-\left(\overline{b}\times\overline{a}\right)$;
2. $\lambda\overline{a}\times\overline{b}=\overline{a}\times\lambda\overline{b}=\lambda(\overline{a}\times\overline{b})$;
3. $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$.

***Геометрические свойства векторного произведения*:**

1. $|\,\overline{a}\times\overline{b}\,|=S_{парал.}$, $\quad \dfrac{1}{2}\,|\,\overline{a}\times\overline{b}\,|=S_{\Delta}$;
2. $\overline{a}\,||\,\overline{b}\Leftrightarrow\ \overline{a}\times\overline{b}=\overline{0}$;
3. $\overline{a}\times\overline{a}=\overline{0}$.

В координатной форме векторное произведение определяется следующим образом:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right).$$

Замечание. С помощью векторного произведения можно вычислить, например, вращающий момент $\overline{M}$ силы $\overline{F}$, приложенной к точке B тела, закрепленного в точке A: $\overline{M}=\overline{AB}\times\overline{F}$ или скорость точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси: $\overline{v}=\overline{\omega}\times\overline{r}$ и т.п.

Смешанное произведение векторов

Определение 3. ***Векторно-скалярным или смешанным п***роизведением упорядоченной тройки векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется число, которое получается скалярным умножением векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на третий вектор $\bar{c}$ и обозначается $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ или $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

***Алгебраические свойства смешанного произведения*:**

1. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$ – смешанное произведение не зависит от группировки множителей.

2. $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}=\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a}=-(\bar{b}\,\bar{a}\,\bar{c})=-(\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a})=-(\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b})$ – при перестановке множителей, не нарушающей их кругового порядка, смешанное произведение не изменяется; при перестановке, нарушающей их круговой порядок, смешанное произведение меняет только свой знак.

3. $(\overline{a_1}+\overline{a_2})\,\bar{b}\,\bar{c}=\overline{a_1}\,\bar{b}\,\bar{c}+\overline{a_2}\,\bar{b}\,\bar{c}$;

4. $(\lambda\bar{a})\bar{b}\,\bar{c}=\lambda(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})$, $\forall\lambda\in R$.

***Геометрические свойства смешанного произведения*:**

1. $V_{парал.}=|\,\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,|$, $V_{пир.}=\dfrac{1}{6}V_{парал.}$;

2. $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}>0 \;\Rightarrow$ тройка $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ – правая;

3. $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}<0 \;\Rightarrow$ тройка $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ – левая;

4. $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=0 \;\Rightarrow$ векторы $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ – компланарны;

5. $\bar{a}\,\bar{a}\,\bar{b}=\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{b}=\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{c}=\ldots=0$.

В координатной форме смешанное произведение вычисляется из определителя:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

2. Совместное обсуждение (со всей аудиторией) выполненного во внеаудиторной самостоятельной работе уровня *А*.

3. Самостоятельное изучение обучающих задач

Обучающие задачи

Задача 1. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = 5\pi/6$. Зная, что $|\bar{a}|=6$, $|\bar{b}|=4$, вычислить $|(3\bar{a}-2\bar{b})\times(2\bar{a}+5\bar{b})|$.

Решение. Используя свойства векторного произведения, упростим выражение для вектора:

$(3\overline{a} - 2\overline{b})\times(2\overline{a} + 5\overline{b}) = 3\overline{a}\times 2\overline{a} + 3\overline{a}\times 5\overline{b} + \left(-2\overline{b}\right)\times 2\overline{a} +$

$+ (-2\overline{b})\times 5\overline{b} = 6\overline{a}\times\overline{a} + 15\overline{a}\times\overline{b} - 4\overline{b}\times\overline{a} - 10\overline{b}\times\overline{b} = \left|\ \overline{a}\times\overline{a} = \overline{b}\times\overline{b} = \overline{0},\right.$

$\left.-\overline{b}\times\overline{a} = \overline{a}\times\overline{b}\ \right| = \overline{0} + 15\overline{a}\times\overline{b} + 4\overline{a}\times\overline{b} - \overline{0} = 19\overline{a}\times\overline{b}.$

Следовательно,

$\left|(8\overline{a} - \overline{b})\times(2\overline{a} + 5\overline{b})\right| = \left|19\overline{a}\times\overline{b}\right| = 19\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cdot\sin\left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right) =$

$= 19\cdot 6\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 19\cdot 12 = 228.$

З а д а ч а 2. Векторное произведение $(\overline{a} + \overline{b})\times(\overline{a} - \overline{b})$ преобразовать в предположении, что $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны, и дать геометрическое толкование полученному результату.

Решение. На основании свойств векторного произведения

$$(\overline{a} + \overline{b})\times(\overline{a} - \overline{b}) = \overline{a}\times\overline{a} + \overline{b}\times\overline{a} + \overline{a}\times(-\overline{b}) + \overline{b}\times(-\overline{b}) =$$

$$= \overline{a}\times\overline{a} + \overline{b}\times\overline{a} - \overline{a}\times\overline{b} - \overline{b}\times\overline{b} = \overline{b}\times\overline{a} + \overline{b}\times\overline{a} = 2\overline{b}\times\overline{a}.$$

Тогда $\left|(\overline{a} + \overline{b})\times(\overline{a} - \overline{b})\right| = 2\left|\overline{b}\times\overline{a}\right|$. Полученное тождество означает, что площадь параллелограмма, построенного на диагоналях данного параллелограмма, вдвое больше площади основного параллелограмма.

З а д а ч а 3. Даны координаты вершин пирамиды $A(5; 1; -4)$, $B(1; 2; -1)$, $C(3; 3; -4)$, $D(2; 2; 2)$. Определить площадь основания ΔABC и объем пирамиды.

Решение. Рассмотрим ΔABC. Из геометрических свойств векторного произведения $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$. Определим координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$: $\overline{AB} = (1 - 5; 2 - 1; -1 + 4) = (-4; 1; 3)$, $\overline{AC} = (3 - 5; 3 - 1; -4 + 4) = (-2; 2; 0)$. Тогда,

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -6\overline{i} - 6\overline{j} - 6\overline{k},$$

и

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 36 + 36} = \frac{1}{2}6\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \quad \text{(ед.)}.$$

Определим координаты вектора $\overline{AD}(-3;\ 1;\ 6)$. Тогда из геометрических свойств смешанного произведения

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}\right|=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}-4 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 6\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|-24\right|=4 \ \text{(ед.)}$$

4. Выполнение своего варианта на уровне II (по два человека на один вариант).

Уровень II

Вариант 1

1. $|\overline{a}|=1$, $|\overline{b}|=2$ и $\left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$. Вычислить $|(2\overline{a}+\overline{b})\times(\overline{a}+2\overline{b})|$.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

2. Упростить выражение $\overline{i}\times(\overline{j}+\overline{k})-\overline{j}\times(\overline{i}+\overline{k})+\overline{k}(\overline{i}+\overline{j}+\overline{k})$.

Ответ: $2(\overline{k}-\overline{i})$.

3. Доказать тождество $(\overline{a}\times\overline{b})^2+(\overline{a}\ \overline{b})^2=\overline{a}^2\overline{b}^2$.

4. Даны три силы: $\overline{F_1}(2;\ -1;\ -3)$, $\overline{F_2}(3;\ 2;-1)$ и $\overline{F_3}(-4;\ 1;\ 3)$, приложенные к точке $A(-1;\ 4;\ -2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $B(2;\ 3;\ -1)$.

Ответ: $\sqrt{66}$, $-\dfrac{1}{\sqrt{66}}$, $\dfrac{4}{\sqrt{66}}$, $\dfrac{17}{\sqrt{66}}$.

5. Даны вершины пирамиды $A(2;\ 0;\ 4)$, $B(0;\ 3;\ 7)$, $C(0;\ 0;\ 6)$, $D(4;3;5)$. Вычислить:

а) площадь основания ΔABC;

б) угол между ребрами AB и AC;

в) объем пирамиды;

г) высоту пирамиды.

Ответ: $\sqrt{19}$; $\arccos\left(\dfrac{5}{2\sqrt{11}}\right)$; 2; $\dfrac{1}{\sqrt{19}}$.

Вариант 2

1. $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=1$ и $\left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$. Вычислить $|(\overline{a}+3\overline{b})\times(3\overline{a}-\overline{b})|$.

Ответ: $10\sqrt{3}$.

2. Упростить $\overline{i}\times(\overline{j}+\overline{k})-\overline{j}\times(\overline{i}+2\overline{k})+\overline{k}(\overline{i}+\overline{j}-\overline{k})$.

Ответ: $2\overline{k}-3\overline{i}$.

3. Доказать тождество $(\bar{a}\times\bar{b})^2 \le \bar{a}^2\bar{b}^2$.

4. Даны три силы: $\overline{F_1}(2; -1; -3)$, $\overline{F_2}(3; 2; -1)$ и $\overline{F_3}(-4; 1; 3)$, приложенные к точке $A(-1; 4; -2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $B(2; 3; -1)$.

Ответ: $\sqrt{66}$, $-\dfrac{1}{\sqrt{66}}$, $\dfrac{4}{\sqrt{66}}$, $\dfrac{17}{\sqrt{66}}$.

5. Даны вершины пирамиды $A(2; 0; 4)$, $B(0; 3; 7)$, $C(0; 0; 6)$, $D(4;3;5)$. Вычислить:

а) площадь основания ΔABC;

б) угол между ребрами AB и AC;

в) объем пирамиды;

г) высоту пирамиды.

Ответ: $\sqrt{19}$; $\arccos\left(\dfrac{5}{2\sqrt{11}}\right)$; 2; $\dfrac{1}{\sqrt{19}}$.

Вариант 3

1. $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 3$ и $\left(\bar{a},\hat{}\,\bar{b}\right) = \dfrac{\pi}{6}$. Вычислить $|(3\bar{a}-2\bar{b})\times(\bar{a}+3\bar{b})|$.

Ответ: 66.

2. Упростить выражение $(2\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{c}-\bar{a})+(\bar{b}+\bar{c})\times(\bar{a}+\bar{b})$.

Ответ: $\bar{a}\times\bar{c}$.

3. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ удовлетворяют условию $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$. Доказать, что $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{b}\times\bar{c}=\bar{c}\times\bar{a}$.

4. Даны три силы: $\overline{F_1}(2; 4; 6)$, $\overline{F_2}(1; -2; 3)$ и $\overline{F_3}(1; 1; -7)$, приложенные к точке $A(3; -4; 8)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $B(1; 0; -3)$.

Ответ: 15, $-\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{3}$.

5. Даны вершины пирамиды $A(-1; 0; 2)$, $B(1; -2; 5)$, $C(3; 0; -4)$, $D(-2; 3; 0)$. Вычислить:

а) площадь основания ΔABC;

б) угол между ребрами AB и AC;

в) объем пирамиды;

г) высоту пирамиды.

Ответ: 14; $\arccos\left(\dfrac{-5}{\sqrt{17}\sqrt{13}}\right)$; 44; $\dfrac{66}{7}$.

Вариант 4

1. $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=2$ и $\left(\bar{a},\hat{}\,\bar{b}\right)=\dfrac{5\pi}{6}$. Вычислить $|(2\bar{a}-3\bar{b})\times(\bar{a}+4\bar{b})|$.

Ответ: 33.

2. Упростить выражение $(3\bar{i}-4\bar{j}-5\bar{k})\times(2\bar{i}+6\bar{j}-\bar{k})$.

Ответ: $34\bar{i}-7\bar{j}+26\bar{k}$.

3. Доказать, что при любых $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ векторы $\bar{a}-\bar{b}$, $\bar{b}-\bar{c}$ и $\bar{c}-\bar{a}$ компланарны. Какой геометрический смысл этого факта?

4. Даны три силы: $\overline{F_1}(0;\ 2;\ -3)$, $\overline{F_2}(1;\ -3;\ 4)$ и $\overline{F_3}$ (1; 4; 5), приложенные к точке $A(-1;\ 1;\ 3)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $B(-1;\ 0;\ 2)$.

Ответ: $\sqrt{101}$, $\dfrac{9}{\sqrt{101}}$, $\dfrac{2}{\sqrt{101}}$, $\dfrac{-4}{\sqrt{101}}$.

5. Даны вершины пирамиды $A(2;\ 0;\ 4)$, $B(0;\ 3;\ 7)$, $C(0;\ 0;\ 6)$, $D(4;\ 3;\ 5)$. Вычислить:

а) площадь основания ΔABC;

б) угол между ребрами AC и AD;

в) объем пирамиды;

г) высоту пирамиды.

Ответ: $3\sqrt{3}$; $\arccos\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{7}}\right)$; 2; $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Вариант 5

1. $|\bar{a}|=5$, $|\bar{b}|=4$ и $\left(\bar{a},\hat{}\,\bar{b}\right)=\dfrac{\pi}{4}$. Вычислить $|(3\bar{a}-2\bar{b})\times(\bar{a}+4\bar{b})|$.

Ответ: $140\sqrt{2}$.

2. Упростить выражение $2\bar{i}\cdot(\bar{j}\times\bar{k})+3\bar{j}\cdot(\bar{j}\times\bar{k})+4\bar{k}\cdot(\bar{j}\times\bar{k})$.

Ответ: 3.

3. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$ связаны соотношениями $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{c}\times\bar{d}$, $\bar{a}\times\bar{c}=\bar{b}\times\bar{d}$. Доказать, что векторы $(\bar{a}-\bar{d})$ и $(\bar{b}-\bar{c})$ коллинеарны.

4. Даны две силы $\overline{F_1}(4;\ 1;\ 3)$, $\overline{F_2}(-2;\ 2;\ 1)$, приложенные в точке $A(6;\ -6;\ -3)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно

а) начала координат;

б) точки $B(5; –8; –5)$.

Ответ: а) 45; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$; б) $\sqrt{5}$, $\frac{2}{\sqrt{5}}$, 0, $-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

5. Даны вершины пирамиды $A(–2; 3; 0)$, $B(–1; 0; 2)$, $C(1; –2; 5)$, $D(3; 0; –4)$. Вычислить:

а) площадь основания ΔABC;
б) угол между ребрами BC и BD;
в) объем пирамиды;
г) высоту пирамиды.

Ответ: 14; $\arccos\left(\frac{-5}{\sqrt{17}\sqrt{13}}\right)$; 4; $\frac{66}{7}$.

Вариант 6

1. $|\overline{a}|=4$, $|\overline{b}|=3$ и $\left(\overline{a},\hat{}\,\overline{b}\right)=\frac{3\pi}{4}$. Вычислить $|(2\overline{a}-3\overline{b})\times(\overline{a}+\overline{b})|$.

Ответ: $30\sqrt{2}$.

2. Упростить выражение $(4\overline{a}-\overline{b}+2\overline{c})\times(\overline{a}+3\overline{b}-2\overline{c})$.

Ответ: $13\overline{a}\times\overline{b}-10\overline{a}\times\overline{c}-4\overline{b}\times\overline{c}$.

3. Доказать тождество $(\overline{a}+\overline{b})(\overline{b}+\overline{c})(\overline{c}+\overline{a})=2\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.

4. Найти координаты вектора $\overline{x}$, если он перпендикулярен векторам $\overline{a_1}(4; –2; –3)$ и $\overline{a_2}(0; 1; 3)$, образует с ортом $\overline{j}$ тупой угол и $|\overline{x}|=26$.

Ответ: $\overline{x}(–6; –24; 8)$.

5. Даны вершины тетраэдра $A(2; 0; 1)$, $B(0; 1; –2)$, $C(2; 3; –4)$, $D(–5; 3; 2)$. Вычислить:

а) площадь грани BCD;
б) угол между ребрами BC и BD;
в) объем пирамиды;
г) высоту пирамиды.

Ответ: $\sqrt{86}$; $\arccos\left(\frac{-7}{3\sqrt{15}}\right)$; 64; $\frac{192}{\sqrt{86}}$.

Уровень III

1. Даны два вектора $\overline{a}(8; 4; 1)$ и $\overline{b}(2; –2; 1)$. Найти вектор $\overline{c}$, компланарный векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, перпендикулярный к вектору $\overline{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\overline{b}$ тупой угол.

Ответ: $\overline{c}\left(-\frac{5}{\sqrt{2}};\ \frac{11}{\sqrt{2}};\ \frac{-4}{\sqrt{2}}\right)$.

2. Доказать тождество $\bar{a}\,\bar{b}(\bar{c}+\lambda\bar{a}+\mu\bar{b})=\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$, где λ, μ – какие угодно числа.

3. Доказать «тождество Лагранжа»:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2+c_1^2 & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_2^2+b_2^2+c_2^2 \end{vmatrix}.$$

4. Проверить, что $\bar{a}_1\bar{b}_2+\bar{a}_2\bar{b}_1=0$, если существует вектор $\bar{x}$, одновременно удовлетворяющий двум уравнениям: $\bar{a}_2\times\bar{x}=\bar{b}_1$ и $\bar{a}_2\times\bar{x}=\bar{b}_2$.

5. Будут ли равносильны следующие пары равенств:

1) $\bar{a}=\bar{b}$ и $\lambda\bar{a}=\lambda\bar{b}$;

2) $\bar{c}=\bar{b}$ и $\bar{a}\,\bar{c}=\bar{b}\,\bar{c}$;

3) $\bar{a}=\bar{b}$ и $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{b}\times\bar{c}$;

4) $\bar{a}=\bar{b}$ и $\bar{a}+\bar{c}=\bar{b}+\bar{c}$

Ответ: 1) да; 2) нет; 3) нет; 4)да.

IV. Итоговое повторение, решение ключевых задач. Собственные значения и собственные векторы матрицы

1. Преподаватель у доски в быстром темпе решает задание:

Даны вектора $\bar{a}$ (0;1;–2), $\bar{b}$ (3;–2;4), $\bar{c}$ (–0;–2;4).

Найти:

I.

– Какие из заданных векторов

а) коллинеарные;

б) перпендикулярные;

II.

– $\bar{a}_0$;

– $\left(\bar{a},\hat{}\,\bar{b}\right)$.

III. $\bar{a}\times\bar{c}$.

2. По два студента у доски решают задания из своих вариантов:

1) тема «Скалярное произведение» (вариант 1 – задание 7, вариант 2 – задание 6, вариант 3 – задание 5, вариант 4 – задание 3);

2) тема «Векторное произведение» (вариант 1 – задание 3; вариант 3 – задание 3);

3) тема «Смешанное произведение» (вариант 4 – задание 3, задание 1 из уровня III).

3. Преподаватель отвечает на вопросы, возникшие у студентов в ходе работы над нулевым вариантом.

4. Студенты изучают обучающую задачу.

Обучающая задача. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение матрицы A

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

или

$$(2-\lambda)(5-5\lambda+\lambda^2)-2(5-2\lambda)+\lambda=0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим кубическое уравнение $-\lambda^3+7\lambda^2-10\lambda=0$, корни которого равны $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=5$.

Чтобы найти собственные векторы, решаем систему уравнений

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0; \\ 2x_1 & +(2-\lambda)x_2 & +x_3 & = & 0; \\ x_1 & +x_2 & +(3-\lambda)x_3 & = & 0. \end{cases}$$

Найдем собственный вектор $\overline{p}_1$, соответствующий собственному значению $\lambda_1=0$. Система уравнений примет вид

$$\begin{cases} (2-0)x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0; \\ 2x_1 & +(2-0)x_2 & +x_3 & = & 0; \\ x_1 & +x_2 & +(3-0)x_3 & = & 0. \end{cases} \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0, \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0. \end{cases}$$

Пусть $x_3=0$, тогда $x_1=a$, $x_2=-a$,

$\overline{p}_1=a(1;-1;0)$, $a\neq 0$, $a\in R$. Для $\lambda_2=2$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (2-2)x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0; \\ 2x_1 & +(2-2)x_2 & +x_3 & = & 0; \\ x_1 & +x_2 & +(3-2)x_3 & = & 0. \end{cases} \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} & +2x_2 & +x_3 & = & 0; \\ 2x_1 & & +x_3 & = & 0; \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0. \end{cases}$$

Пусть $x_2 = a$, тогда $x_3 = -2a$, $x_1 = a$, $\overline{p}_2 = (1;1;-2)\cdot a$, $a \neq 0,\ a \in R$.

Для $\lambda_3 = 5$ имеем

$$\begin{cases} (2-5)x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0; \\ 2x_1 & +(2-5)x_2 & +x_3 & = & 0; \\ x_1 & +x_2 & +(3-5)x_3 & = & 0. \end{cases} \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} -3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0; \\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 0; \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 0; \\ & -5x_2 & +5x_3 & = & 0; \end{cases} \quad x_2 = x_3.$$

Пусть $x_3 = a$, тогда $x_2 = a$, $\overline{p}_3 = (1;1;1)a$, $a \neq 0,\ a \in R$.

Итак, собственные векторы заданной матрицы:

$\overline{p}_1 = (1;-1;0)a$; $\overline{p}_2 = (1;1;-2)a$; $\overline{p}_3 = (1;1;1)a$, $a \neq 0,\ a \in R$.

Ответ: $\overline{p}_1 = (1;-1;0)a$; $\overline{p}_2 = (1;1;-2)a$; $\overline{p}_3 = (1;1;1)a$, $a \neq 0,\ a \in R$.

5. Преподаватель у доски находит собственные значения и собственные векторы матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = 0$;

$\overline{p}_1 = (1;1;-1)a$; $\overline{p}_2 = (1;-2;-1)a$; $\overline{p}_3 = (1;0;1)a$, $a \neq 0,\ a \in R$.

6. Студенты самостоятельно находят собственные значения и собственные векторы матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = 9$;..

$\overline{p}_1 = (1;2;2)a$; $\overline{p}_2 = (2;1;-2)a$; $\overline{p}_3 = (2;-2;1)a$, $a \neq 0,\ a \in R$.

V. Решение нулевого варианта контрольной работы

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$ (рис. 11): $A(1,2,3)$, $B(3, 4, 2)$, $C(1, 2, 6)$, $D(3, 1, 5)$. Найти:

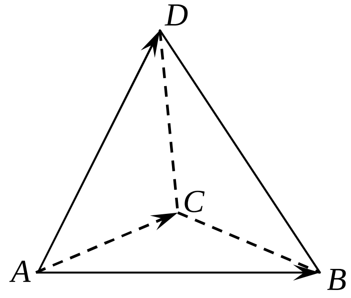
– длину ребра AC;

– угол между рёбрами AB и AC;

– площадь грани ABC;

– длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC;

– объём пирамиды.



ис. 11

Для нахождения длины ребра AC необходимо вычислить следующее координаты $\overline{AC}$:

$\overline{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A)$;

$\overline{AC} = (1-1; 2-2; 6-3)$;

$\overline{AC} = (0; 0; 3)$;

$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{0+0+9} = \sqrt{9} = 3$.

Для нахождения угла между ребрами $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ вычислим длину ребра $\overline{AB}$:

$\overline{AB} = (3-1; 4-2; 2-3)$;

$\overline{AB} = (2, 2, -1)$

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$.

Воспользуемся формулой скалярного произведения

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cos\left(\widehat{\overline{a}\,\overline{b}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|},$$

где $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

Таким образом,

$$\cos\left(\widehat{\overline{AB}, \overline{AC}}\right) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right|} = \frac{0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)}{3 \cdot 3} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3};$$

$$\left(\widehat{\overline{AB}, \overline{AC}}\right) = \arccos(-\frac{1}{3}) = \pi - \arccos\frac{1}{3}.$$

Для вычисления площади возможно использование двух способов.

1 способ:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|,$$

где $\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right);$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}=6\bar{i}-6\bar{j}+0\bar{k};$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+6^2+0^2}=\frac{1}{2}\sqrt{36+36}=\frac{1}{2}\sqrt{72}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{9\cdot 8}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}=3\sqrt{2}.$$

2 способ:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|\sin\left(\widehat{\overline{AB},\overline{AC}}\right)$$

$$\sin\left(\widehat{\overline{AB},\overline{AC}}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\widehat{\overline{AB},\overline{AC}}\right)}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$S=\frac{1}{2}3\cdot 3\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=3\sqrt{2}.$$

Для нахождения высоты, опущенной из вершины B на сторону AC , воспользуемся следующей формулой

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|\sin\left(\widehat{\overline{AB},\overline{AC}}\right)=\frac{1}{2}\left|\overline{AC}\right|\cdot h$$

$$h=\frac{2S}{\left|\overline{AC}\right|}=\frac{2\cdot 3\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}.$$

Для вычисления объёма пирамиды $ABCD$ воспользуемся следующим свойством смешанного произведения

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\;\overline{AC}\;\overline{AD}\right|.$$

Вычислим вектор $\overline{AD}$

$\overline{AD} = (2, -1, 2)$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}\right| = \frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|18| = 3$$

Ответ: 3; 1,91; $3\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; 3.

Задача 2. Доказать, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе.

$\overline{a}$ = (5, 4, 1), $\overline{b}$ = (–3, 5, 2), $\overline{c}$ = (2, –1, 3), $\overline{d}$ = (7, 23, 4).

Решение. Докажем, что $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис. Для этого вычислим смешанное произведение векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},\ \overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 130.$$

Так как определитель не равен 0, то данные вектора не компланарны и образуют базис.

Разложим данные вектора по базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$.

$\overline{a} = 5\overline{i} + 4\overline{j} + \overline{k}$;

$\overline{b} = -3\overline{i} + 5\overline{j} + 2\overline{k}$;

$\overline{c} = 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$;

$\overline{d} = 7\overline{i} + 23\overline{j} + 4\overline{k}$.

Представим разложение вектора $\overline{d}$ по новому базису

$\overline{d} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$.

Теперь вместо $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ подставим их разложение по базису

$$\overline{d} = \alpha \cdot \left(5\overline{i} + 4\overline{j} + \overline{k}\right) + \beta\left(-3\overline{i} + 5\overline{j} + 2\overline{k}\right) + \gamma\left(2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}\right) = 7\overline{i} + 23\overline{j} + 4\overline{k}.$$

Раскроем скобки и перегруппируем

$$\overline{d} = 5\overline{i} \cdot \alpha + 4\overline{j} \cdot \alpha + \overline{k} \cdot \alpha - 3\overline{i} \cdot \beta + 5\overline{j} \cdot \beta + 2\overline{k} \cdot \beta + 2\overline{i} \cdot \gamma - \overline{j} \cdot \gamma + 3\overline{k} \cdot \gamma$$
$$= (5\alpha - 3\beta + 2\gamma)\overline{i} + (4\alpha + 5\beta - \gamma)\overline{j} + (\alpha + 2\beta + 3\gamma)\overline{k} = 7\overline{i} + 23\overline{j} + 4\overline{k}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых переменных, так как данные уравнения тождественны, составляем систему

$$\begin{cases} 5\alpha - 3\beta + 2\gamma = 7, \\ 4\alpha + 5\beta - \gamma = 23, \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 4. \end{cases}$$

Решаем систему методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 130$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 23 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 390 \qquad \alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{390}{130} = 3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 4 & 23 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 260 \qquad \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{260}{130} = 2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 4 & 5 & 23 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -130 \qquad \gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-130}{130} = -1$$

Таким образом, новое разложение вектора $\bar{d}$ по базису $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ $\bar{d} = 3 \cdot \bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}$.

Ответ: $\bar{d} = 3 \cdot \bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}$.

Задача 3. Выяснить, при каком значении α векторы $\bar{a}(1,1,\alpha)$, $\bar{b}(-3,2,1)$, $\bar{c}(2,0,-3)$ компланарны.

Решение. Вектора компланарны, если их смешанное произведение равно 0.

Следовательно, мы вычислим смешанное произведение, приравняем нулю и посмотрим при каком значении α будет выполняться это условие.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad -6 + 0 + 2 - 4\alpha + 0 - 9 = 0, \alpha = -\frac{13}{4}.$$

Ответ: $\alpha = -\dfrac{13}{4}$.

Задача 4. Вектор $\overline{x}$, перпендикулярный к векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, образует с осью OY тупой угол. Найти вектор $\overline{x}$, если $\overline{a}(-2,7,10)$, $\overline{b}(0,3,4)$, $|\overline{x}|=\sqrt{26}$.

Решение. Пусть существует вектор $\overline{c}\perp\overline{a}$ и $\overline{c}\perp\overline{b}$, значит $\overline{c}\parallel\overline{x}$.

Чтобы найти вектор $\overline{c}$ воспользуемся определением векторного произведения.

Следовательно $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$.

$$\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -2 & 7 & 10\\ 0 & 3 & 4\end{vmatrix}=-2\overline{i}+8\overline{j}-6\overline{k}.$$

$\overline{c}(-2,8,-6)$. Так как $\overline{c}\parallel\overline{x}$, то, их координаты пропорциональны, следовательно $\dfrac{x_x}{-2}=\dfrac{x_y}{8}=\dfrac{x_z}{-6}=\lambda$. Значит $\overline{x}=(-2\lambda;8\lambda;-6\lambda)$.

Найдем длину вектора $\overline{x}$.

$|\overline{x}|=\sqrt{4\lambda^2+64\lambda^2+36\lambda^2}=\sqrt{26}$ (по условию), $\Rightarrow\ \lambda^2=\dfrac{1}{4},\quad |\lambda|=\dfrac{1}{2}$.

Так как $\overline{x}$ образует с осью Oy тупой угол, то координата по у будет отрицательной, $\overline{x}=(-2\lambda;8\lambda;-6\lambda)$.

Следовательно,

$$\lambda=-\frac{1}{2},\quad \overline{x}=\left(-2\left(-\frac{1}{2}\right);8\left(-\frac{1}{2}\right);-6\left(-\frac{1}{2}\right)\right),\qquad \overline{x}=(1;-4;3)$$

Ответ: $\overline{x}=(1;-4;3)$.

Задача 5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & -1\\ -2 & 2 & -2\\ -1 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, для этого от элементов находящихся на главной диагонали отнимем λ и составим определитель равный 0.

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & -2 & -1\\ -2 & 2-\lambda & -2\\ -1 & -2 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Вычислим данный определитель:

$$(5-\lambda)^2(2-\lambda)-4-4-(2-\lambda)-4(5-\lambda)-4(5-\lambda)=0$$

$$(5-\lambda)^2(2-\lambda)-8-(2-\lambda)-8(5-\lambda)=0$$

$$-\lambda^3+12\lambda^2-36\lambda=0$$

$$\lambda\left(-\lambda^2+12\lambda-36\right)=0$$

$\lambda_1=0$ или $-\lambda^2+12\lambda-36=0$

$\lambda_2=\lambda_3=6$ – собственные значения.

Найдём собственный вектор для собственного значения $\lambda_1=0$.

Составим однородную систему уравнений

$$\begin{cases}5x-2y-z=0,\\ -2x+2y-2z=0,\\ -x-2y+5z=0.\end{cases}$$

Решая данную систему методом Гаусса, получаем

$$\begin{cases}x+2y-5z=0,\\ 6y-12z=0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=a,\\ y=2a,\\ x=a.\end{cases}$$

Следовательно, собственный вектор $\overline{p_1}=(a,2a,a)=(1,2,1)a$, $a\neq 0$, $a\in R$.

Найдём собственный вектор для собственного значения $\lambda_2=6$. Составим однородную систему уравнений

$$\begin{cases}-x-2y-z=0,\\ -2x-4y-2z=0,\\ -x-2y-z=0.\end{cases}$$

Данная система сводится к одному уравнению $-x-2y-z=0$.

Следовательно, собственный вектор $\overline{p_2}=(a,-a,a)=(1,-1,1)a$, $a\neq 0$, $a\in R$..

Для того чтобы найти $\overline{p_3}$ воспользуемся следующим свойством $\overline{p_1}\perp\overline{p_2}\perp\overline{p_3}$. Следовательно $\overline{p_3}=\overline{p_1}\times\overline{p_2}$.

$$\overline{p_3}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=3\bar{i}-3\bar{k},\quad \overline{p_3}=(3a,0,-3a)=(3,0,-3)a,\quad a\neq 0,\quad a\in R.$$

Ответ: $\overline{p_1}=(1,2,1)a$, $\overline{p_2}=(1,-1,1)a$, $\overline{p_3}=(3,0,-3)a$, $a\neq 0$, $a\in R$..

Трехуровневые тестовые задания к разделу «Векторная алгебра»

Уровень I

1. Даны вектора $\overline{a}$ (2; 1; –2), $\overline{b}$ (3; 2; 4), $\overline{c}$ (–4; –2; 4).
Найти:

I. Какие из заданных векторов
а) коллинеарные;
б) перпендикулярные.

II.
а) $\overline{a}_0$;
б) $\left(\overline{a},\hat{}\,\overline{b}\right)$;
с) $\text{пр}_{\overline{a}}\overline{c}$.

III. $\overline{a}\times\overline{c}$.

2. На плоскости даны точки $A(1; 2)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 5)$. Доказать, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ образуют базис. Разложить $\overline{BC}$ по этому базису, найти направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$.

Уровень II

1. Заданы три вектора $\overline{a} = (-1; 2; 0)$, $\overline{b} = (3; 1; 1)$, $\overline{c} = (2; 0; 1)$. Найти:
а) $\overline{a}\times\overline{b}$, $\overline{a}\cdot\overline{c}$;
б) $\text{пр}_{\overline{a}}\overline{c}$, $\cos\left(\overline{a},\hat{}\,\overline{b}\right)$;
в) $S_{\text{параллелограмма}}$, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$;
г) $\overline{x}\uparrow\downarrow\overline{a}$, $|\overline{x}| = 2\sqrt{5}$, $\overline{x}$ – ?

2. Даны вершины пирамиды $A_1(2; 0; -1)$, $A_2(-2; -11; 5)$, $A_3(1; -4; -1)$, $A_4(-2; 1; -4)$. Найти:
а) проекцию вектора $\overline{A_3M}$ на вектор $\overline{A_3A_4}$;
б) угол $A_4A_1A_3$;
в) площадь грани $A_4A_1A_3$;
г) объем пирамиды;
д) высоту пирамиды.

3. Образует ли тройка $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ ($\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ из п. 1) базис в пространстве?

4.
а) Как вычислить работу силы?
б) $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0 \Leftrightarrow$?

Уровень III

1. Найти вектор, перпендикулярный к векторам $\overline{a}\,(1;\,2;\,-3)$ и $\overline{b}\,(2;\,4;\,6)$.

2. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найти координаты вектора $\overline{c}$, если $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j}$, $\overline{b} = \overline{j} + \overline{k}$.

Ответ: $\overline{c}\left(-\frac{1}{3};\ \frac{4}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$ или $\overline{c}\,(1;\,0;\,1)$.

3. Даны три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, удовлетворяющие условию $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$. Зная, что $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 2$ и $|\overline{c}| = 3$, вычислить $\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}\cdot\overline{c}+\overline{c}\cdot\overline{a}=\overline{0}$.

Ответ: -19.

4. Четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, O – точка пересечения его диагоналей, M – произвольная точка, отличная от O. Можно ли выразить вектор $\overline{a} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}$ через вектор $\overline{MO}$?

Ответ: да, $\overline{a} = 4\overline{MO}$.

5. Точка O является центром тяжести треугольника ABC. Доказать, что $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{0}$.

6. В равнобочной трапеции $ABCD$ известны нижнее основание $\overline{AB} = \overline{a}$, боковая сторона $\overline{AD} = \overline{b}$ и угол между ними $\angle A = \pi/3$. Разложить по $\overline{a}$ и $\overline{b}$ все векторы, составляющие остальные стороны и диагонали трапеции.

Ответ: $\overline{BC} = -\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\overline{a}+\overline{b}$; $\overline{CD} = \frac{|\overline{b}|-|\overline{a}|}{|\overline{a}|}\overline{a}$; $\overline{AC} = \frac{|\overline{a}|-|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\overline{a}+\overline{b}$;

ГЛОССАРИЙ

Скалярная величина	величина, которая может быть задана числом в выбранной системе единиц.
Векторная величина	величина, которая задается значением и направлением.
Коллинеарные вектора	вектора, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой)
Координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$	коэффициенты X, Y, Z в разложении вектора $\bar{a}$ по базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$: $\bar{a} = X \cdot \bar{i} + Y \cdot \bar{j} + Z \cdot \bar{k}$.
Условие коллинеарности двух векторов, заданных координатами $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$	пропорциональность их соответствующих координат: $\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$.
Направляющие косинусы вектора $\bar{a} = \{X, Y, Z\}$	косинусы углов, образуемых вектором $\bar{a}$ с положительными направлениями осей OX, OY, OZ: $\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$; $\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$; $\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$.
Скалярное произведение вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$	число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними: $(\bar{a}, \bar{b}) = \lvert\bar{a}\rvert \cdot \lvert\bar{b}\rvert \cdot \cos\varphi$.
Формула вычисления скалярного произведения векторов $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, заданных в координатной форме	$(\bar{a}, \bar{b}) = X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2$.

Формула вычисления угла φ между векторами $\bar{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$ и $\bar{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$	$\cos\varphi=\dfrac{X_1\cdot X_2+Y_1\cdot Y_2+Z_1\cdot Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$
Условие перпендикулярности (ортогональности) двух векторов	$X_1\cdot X_2+Y_1\cdot Y_2+Z_1\cdot Z_2=0$.
Векторное произведение векторов в координатной форме	$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$.
Геометрический смысл векторного произведения	$S_{\square}=\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert$.
Смешанное произведение	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$
Смешанное произведение в координатной форме	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.
Условие компланарности трех векторов	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$.
Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, как на сторонах	$V=\lvert\bar{a}\bar{b}\bar{c}\rvert$.

УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 5
ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Введение

Аналитическая геометрия – область математики, в которой геометрические объекты изучаются средствами алгебры (линейной и векторной), а также математического анализа на основе метода координат. Для описания геометрических объектов наиболее употребительной является декартова прямоугольная система координат (ДПСК).

Введение на плоскости ДПСК позволяет однозначно определять положение точки двумя параметрами – проекцией на ось OY – y и проекцией на ось OX – x, а положение других геометрических объектов – с помощью уравнений, где координаты его точек выступают как неизвестные. Способ задания геометрического объекта уравнением принято называть ***аналитическим***.

В данном учебном модуле будем рассматривать различные способы аналитического задания геометрических объектов, а также возможности изучения их взаимного расположения с помощью заданных уравнений.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ

Студент должен знать	*Студент должен уметь*
– основные определения, связанные с понятиями аналитической геометрии на плоскости и в пространстве; – способы задания прямой на плоскости; – формулы для вычисления угла между прямыми; – формулу расстояния между точкой и прямой; – канонические уравнения невырожденных кривых второго порядка на плоскости; – способы задания плоскости; – формулы для вычисления угла между плоскостями; – формулу расстояния между точкой и плоскостью; – способы задания прямой в пространстве; – формулу для вычисления угла между прямыми в пространстве; – формулу для вычисления угла между прямой и плоскостью в пространстве; – канонические уравнения невырожденных поверхностей второго порядка в пространстве	– узнавать прямую по ее общему, каноническому, параметрическому и т.д. уравнениям; – записывать уравнение прямой для любого способа ее задания; – исследовать взаимное расположение прямых на плоскости; – определять угол между прямыми на плоскости, точку их пересечения; – определять расстояние между точкой и прямой на плоскости; – определять точку, симметричную относительно данной прямой; – приводить уравнение линии второго порядка к каноническому виду; – узнавать плоскость по ее общему уравнению; – записывать уравнения плоскости для любого способа ее задания; – определять точку, симметричную относительно данной плоскости; – узнавать прямую в пространстве для любого ее способа задания; – записывать уравнение прямой в пространстве для любого ее способа задания; – исследовать взаимное расположение плоскостей, прямой и плоскости, двух прямых; – узнавать вид невырожденной поверхности второго порядка по ее уравнению; приводить уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА МОДУЛЯ

Название вопросов, которые изучаются на лекции	Номер практического занятия	Наглядные и методические пособия	Формы контроля знаний
1. Понятие об уравнении линии на плоскости. Прямая на плоскости как линия 1-го порядка. Уравнение прямой на плоскости по точке и нормальному вектору (направляющему вектору, угловому коэффициенту), по двум точкам, в «отрезках».	I	4, 5, 8, 9, 12, 13, 18, 21, 22, 25	ПДЗ
2. Расстояние от точки до прямой. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Линии 2-го порядка на плоскости. Эллипс, гипербола, парабола.	II, III	4, 5, 8, 9, 12, 13, 18, 21, 22, 25	Опрос
3. Понятие уравнения поверхности в пространстве. Плоскость как поверхность 1-го порядка. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору, в «отрезках», по трем точкам. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.	IV	4, 5, 8, 9, 12, 13, 18, 21, 22, 25	Р, ПДЗ
4. Прямая в пространстве, как линия пересечения двух плоскостей. Уравнения прямой в пространстве по точке и направляющему вектору, по двум точкам. Взаимное расположение прямой и плоскости.	V, VI	4, 5, 8, 9, 12, 13, 18, 21, 22, 25	Р, ПДЗ
5. Поверхности 2-го порядка в пространстве. Эллипсоид, гиперболоиды, конус 2-го порядка, параболоиды, цилиндры 2-го порядка. Метод сечений.	VII	4, 5, 8, 9, 12, 13, 18, 21, 22, 25	ИДЗ, опрос

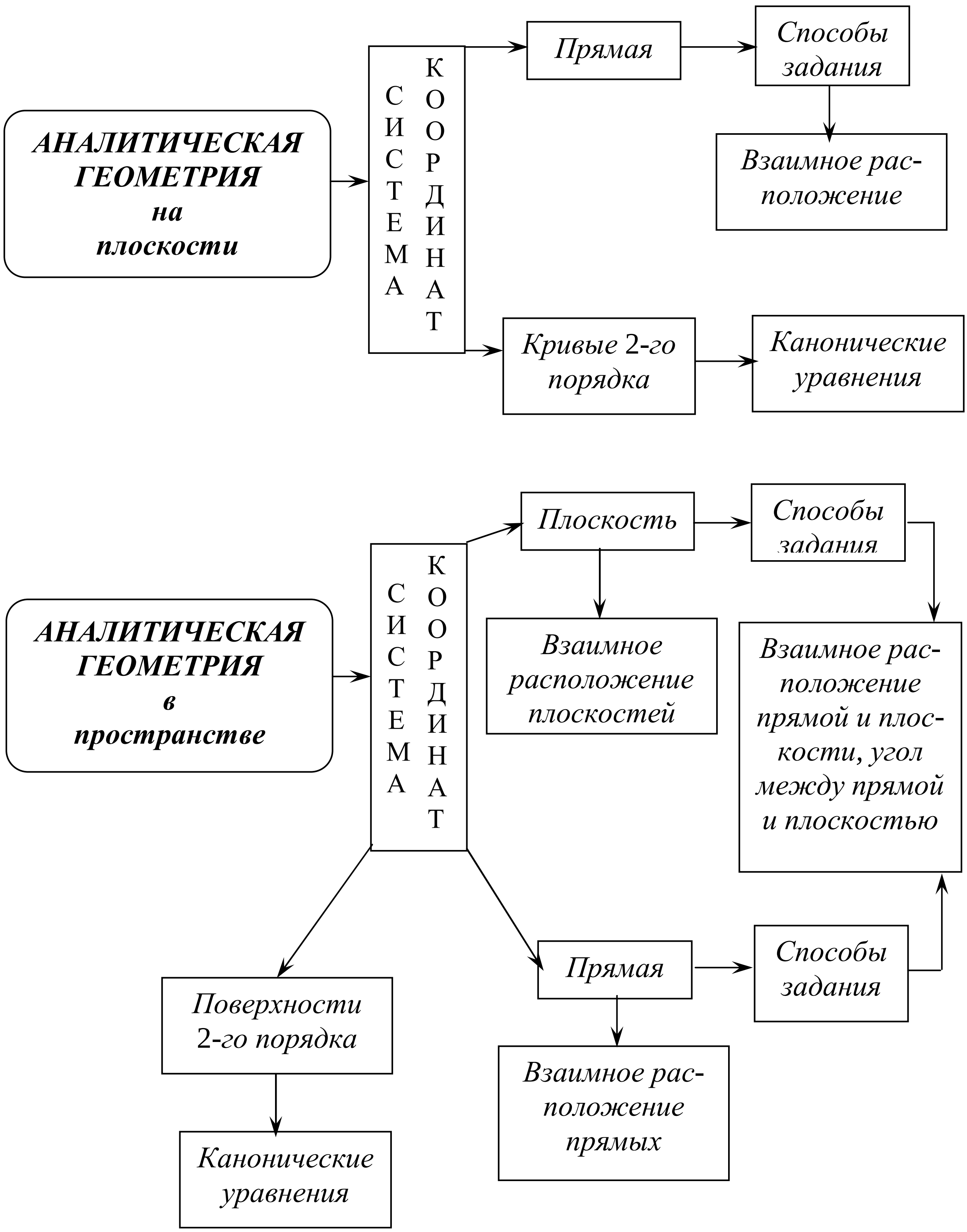
Принятые сокращения:

ПДЗ – проверка домашнего задания;

Р – разминка

ИДЗ – индивидуальное домашнее задание;

ГРАФИЧЕСКАЯ СХЕМА МОДУЛЯ



ИНФОРМАЦИОННАЯ ТАБЛИЦА
«АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ»

Аналитическая геометрия на плоскости

1. ***Общее уравнение прямой***

Всякое уравнение первой степени относительно двух переменных определяет прямую на плоскости $\boxed{Ax+By+C=0}$.

2. ***Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении***

$$\boxed{y-y_0=k(x-x_0)}.$$

3. ***Уравнение прямой линии на плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$, перпендикулярно данному вектору $\overline{N}(A,B)$.***

$\overline{N}\cdot\overline{M_0M}=0$, $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

4. ***Уравнение прямой линии, проходящей через две точки***

$\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)\ ||\ \overline{M_1M}=(x-x_1, y-y_1)$

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}}.$$

5. ***Каноническое и параметрические уравнения прямой линии на плоскости***

1. *Каноническое* уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\overline{s}(m,n)$ $\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}}$.

2. *Параметрические* уравнения прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\overline{s}(m,n)$, $\overline{M_0M}=t\cdot\overline{s}$, или $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases}$

6. ***Уравнение прямой линии в отрезках***

$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}$, $a\cdot b\neq 0$, **или** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

7. ***Расстояние d от $M_0(x_0, y_0)$ до прямой***

$Ax+By+C=0$, $\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$.

8. ***Угол между прямыми на плоскости***

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы *общими уравнениями* $L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, тогда $\cos\left(L_1,\hat{}\ L_2\right)=\cos\left(\overline{n}_1,\hat{}\ \overline{n}_2\right)=\frac{\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2}{|\overline{n}_1|\cdot|\overline{n}_2|}$.

1. Пусть L_1 и L_2 заданы *каноническими уравнениями* $L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}$, $L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$, тогда $\cos\left(L_1,\hat{}\ L_2\right)=\cos\left(\overline{s}_1,\hat{}\ \overline{s}_2\right)=\frac{\overline{s}_1\cdot\overline{s}_2}{|\overline{s}_1|\cdot|\overline{s}_2|}$.

2. Пусть L_1 и L_2 заданы уравнениями с *угловыми коэффициентами* $L_1: y=k_1x+b_1$, $L_2: y=k_2x+b_2$, тогда $\operatorname{tg}\left(L_1,\hat{}\ L_2\right)=\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=$ $=\left|\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha}\right|=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1}\right|$.

9. ***Взаимное расположение двух прямых на плоскости***

Пусть заданы две прямые своими общими уравнениями (все остальные способы можно к этому свести): $L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$. Тогда прямые L_1 и L_2:

– *совпадают*, $L_1\equiv L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

– *параллельны* и *не совпадают*, $L_1\parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$,

– *пересекаются* $L_1\cap L_2=M_1 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$;

Аналитическая геометрия в пространстве

1. *Плоскость в пространстве*

$Ax+By+Cz+D=0$ – ***общее уравнение плоскости***

1) $A(x\text{-}x_0)+B(y\text{-}y_0)+C(z\text{-}z_0)=0$ – уравнение плоскости проходящей через точку $M(x_0;y_0;z_0)$ $\perp \bar{n}(A,B,C)$.

2) Уравнение плоскости, проходящей через точку, || двум векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $M\in\alpha \Leftrightarrow$ $\overline{M_0M}\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}=0$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0.$$

3) Уравнение плоскости проходящей через две точки, || вектору $\bar{a}$, $M(x, y, z)\in\alpha \Leftrightarrow$ $\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\bar{a}=0$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}=0.$$

4) Уравнение плоскости проходящей через три точки $M(x,y,z)\in\alpha \Leftrightarrow \overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3}=0$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

2. *Прямая в пространстве*

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$ – ***общее уравнение прямой***

Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases}$$

где t коэффициент пропорциональности

Канонические уравнения прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

Канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Расстояние от точки до плоскости

1. if M_1 удовлетворяет уравнению L, то

$$d(M_1,L)=0.$$

2. if $M_1\notin L$, то

$$d(M_1,\alpha)=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Угол между плоскостями

Пусть заданы две плоскости $\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

$$\cos\left(\alpha_1,^\wedge\alpha_2\right)=\cos\left(\bar{n}_1,^\wedge\bar{n}_2\right)=\frac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|}$$

Взаимное расположение плоскостей

Пусть заданы общие уравнения двух плоскостей: $\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Тогда возможны следующие случаи:

1) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}\Rightarrow\alpha_1\equiv\alpha_2$;

2) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}\Rightarrow\alpha_1\parallel\alpha_2$;

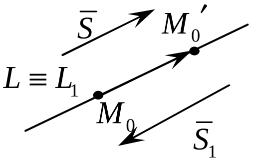
3) $\bar{n}_1\perp\bar{n}_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\Rightarrow\alpha_1\perp\alpha_2$;

4) $\bar{n}_1\nparallel\bar{n}_2\Leftrightarrow\alpha_1\cap\alpha_2=\{L\}$.

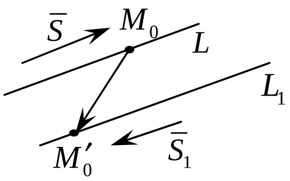
Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть $L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и $L_1:\dfrac{x-x_0'}{m_1}=\dfrac{y-y_0'}{n_1}=\dfrac{z-z_0'}{p_1}$.

1. $L\equiv L_1 \Leftrightarrow \bar{S}\parallel \bar{S}_1 \parallel \overline{M_0M_0'}$:

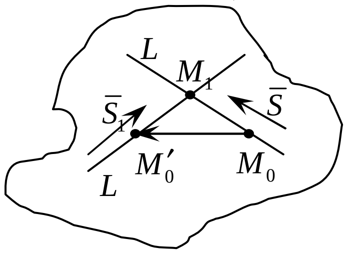


2. $L\parallel L_1 \Leftrightarrow \bar{S}\parallel \bar{S}_1$, но $\nparallel$ $\overline{M_0M_0'}$



3. $L\cap L_1=\{M_1\}\Leftrightarrow$

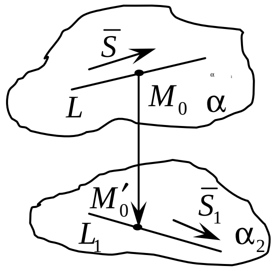
$\bar{S}\ \bar{S}_1\overline{M_0M_0'}=0, \bar{S}\nparallel \bar{S}_1$



4. Пусть L и L_1 ***скрещивающиеся*** $\Leftrightarrow$ $\bar{S}\ \bar{S}_1\overline{M_0M_0'}\neq 0$.

5. ***Расстояние между скрещивающимися прямыми:***

$$d(L,L_1)=\frac{\left|\bar{S}\bar{S}_1\overline{M_0M_0'}\right|}{\left|\bar{S}\times\bar{S}_1\right|}$$



Расстояние от точки до прямой

$L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, $\quad M_1(x_1,y_1,z_1)$

$$d(M_1,L)=\left|\overline{M_0M_1}\right|\cdot\sin\alpha=\left|\overline{M_0M_1}\right|\cdot\sin\left(\overline{M_0M_1},\wedge\,\bar{S}\right).$$

Угол между двумя прямыми в пространстве

$$\cos\left(L_1,\wedge\,L_2\right)=\cos\left(\bar{S}_1,\wedge\,\bar{S}_2\right)=\frac{\bar{S}_1\cdot\bar{S}_2}{\left|\bar{S}_1\right|\left|\bar{S}_2\right|}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть прямая L задана каноническими уравнениями $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, плоскость $\alpha-$ общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$. В пространстве прямая и плоскость могут:

1) $L\in\alpha\Leftrightarrow$

1. $\bar{S}\perp\bar{n}\Leftrightarrow\bar{S}\cdot\bar{n}=0$.

2. $M_0\in\alpha\Leftrightarrow$

$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

2) $L\parallel\alpha\Leftrightarrow$

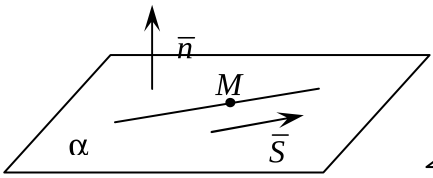
1. $\bar{S}\perp\bar{n}\Leftrightarrow\bar{S}\cdot\bar{n}=0$

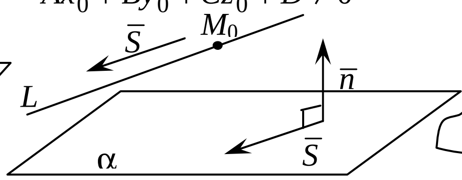
2. $M_0\notin\alpha\Leftrightarrow$

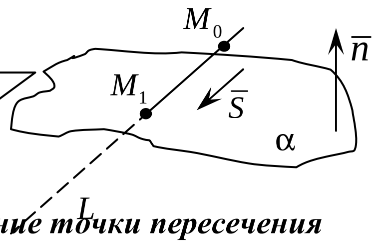
$Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$

3) $L\cap\alpha=\{M_1\}$

1. $\bar{S}\cdot\bar{n}\neq 0$







Угол между прямой и плоскостью

Пусть заданы плоскость $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ и прямая

$L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

$$\sin\beta=\frac{\left|Am+Bn+Cp\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

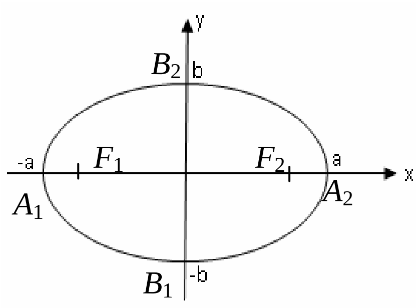
Определение точки пересечения прямой и плоскости

$L\cap\alpha=\{M_1\}\Leftrightarrow\bar{S}\cdot\bar{n}\neq 0$.

$$\begin{cases}Ax+By+Cz+D=0,\\ \begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt.\end{cases}\end{cases}\qquad .$$

Невырожденные кривые второго порядка на плоскости

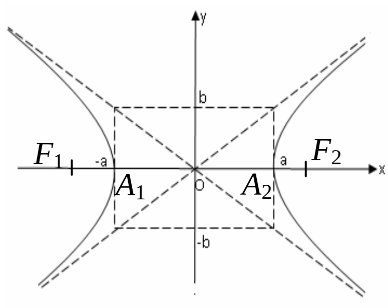
1. Эллипс $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$.



Важные характеристики:

1. Координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, $c^2=a^2-b^2$
2. $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ – координаты вершин эллипса
3. $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$, $(\varepsilon<1)$ – эксцентриситет
4. $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ – уравнения директрис.
5. $\varepsilon=\dfrac{r}{d}$, где r – расстояние от точки эллипса до фокуса; d – расстояние от точки эллипса до односторонней директрисы.
6. $\left.\begin{aligned} r_1&=\varepsilon x-a\\ r_2&=\varepsilon x+a\end{aligned}\right\}$ – фокальные радиусы точек эллипса.

2. Гипербола $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$.



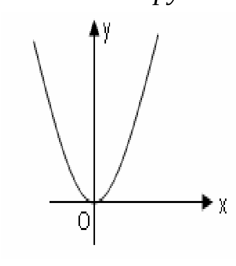
Важные характеристики:

7. Координаты фокусов:
$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, $c^2=a^2+b^2$.
8. $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ – координаты вершин гиперболы.
9. $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$, $(\varepsilon>1)$.
10. $y=\pm\dfrac{b}{a}\cdot x$ – уравнения асимптот.
11. $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ – уравнения директрис.
12. $\varepsilon=\dfrac{r}{d}$, где r – расстояние от точки гиперболы до фокуса; d – расстояние от точки гиперболы до односторонней директрисы.
13. $\left.\begin{aligned} r_1&=\varepsilon x-a\\ r_2&=\varepsilon x+a\end{aligned}\right\}$ – фокальные радиусы правой ветви гиперболы;

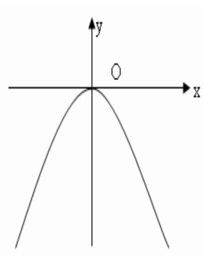
$\left.\begin{aligned} r_3&=-\varepsilon x+a\\ r_4&=-\varepsilon x-a\end{aligned}\right\}$ – фокальные радиусы левой ветви гиперболы.

3. Парабола

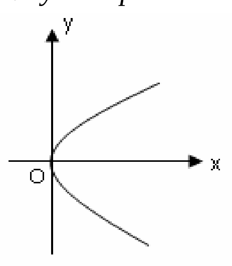
1. $x^2=2py$



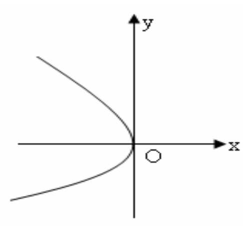
2. $x^2=-2py$



3. $y^2=2px$



4. $y^2=-2px$



Поверхности 2-го порядка

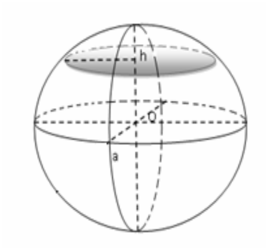
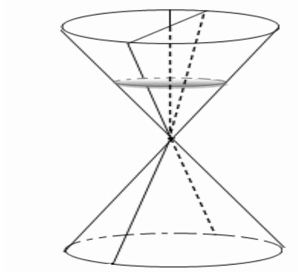
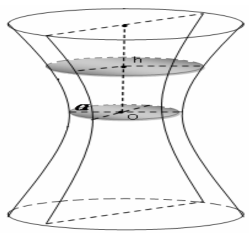
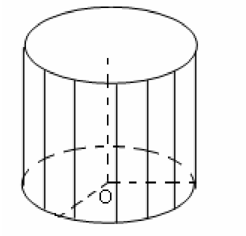
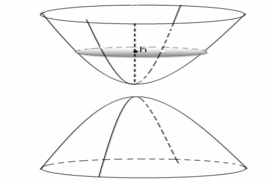
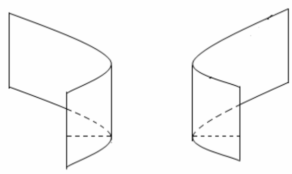
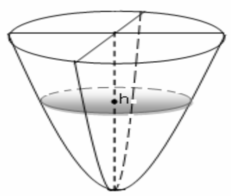
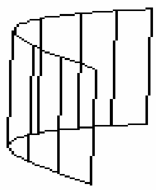
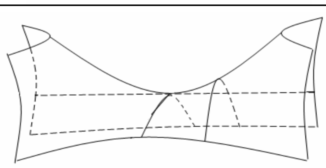
Поверхностью второго порядка называют поверхность, заданную алгебраическим *уравнением* второй степени.

$$\boxed{Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Gyz+Mx+Hy+Nz+F=0},$$

где $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Поверхность второго порядка можно разбить на классы основных невырожденных поверхностей, имеющих одну и ту же форму канонического уравнения:

1) эллипсоид,
2) однополостный гиперболоид,
3) двуполостный гиперболоид,
4) конус второго порядка,
5) эллиптический параболоид,
6) гиперболический параболоид,
7) эллиптический цилиндр,
8) гиперболический цилиндр,
9) параболический цилиндр

	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ *эллипсоид*		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ *конус*
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *однополостный гиперболоид*		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *эллиптический цилиндр*
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ *двуполостный гиперболоид*		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *гиперболический цилиндр*
	$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z$ *эллиптический параболоид*		$x^2=2py$ *параболический цилиндр*
	$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=2z$ *гиперболический параболоид*		

5.1. Алгебраические линии. Прямая на плоскости – линия первого порядка. Способы задания прямой

Определение 5.1.1. ***Уравнением линии*** на плоскости Oxy называется такое уравнение $F(x,y)=0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты точек (x, y), лежащих на линии, и только они. Переменные x и y называют ***координатами*** точек заданной линии.

Замечание 5.1.1. Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием ее уравнения.

Замечание 5.1.2. В аналитической геометрии на плоскости мы будем рассматривать задачи двух типов:

1. По уравнению линии определить её вид, геометрические свойства, расположение на плоскости.

2. Зная геометрические свойства линии, задать её аналитически – уравнением или системой уравнений, связывающих её координаты.

Замечание 5.1.3. В аналитической геометрии ***провести прямую*** означает ***описать её уравнением***, связывающим координаты точек этой прямой.

Задача 1 (*задание прямой точкой и углом наклона к оси* Ox).

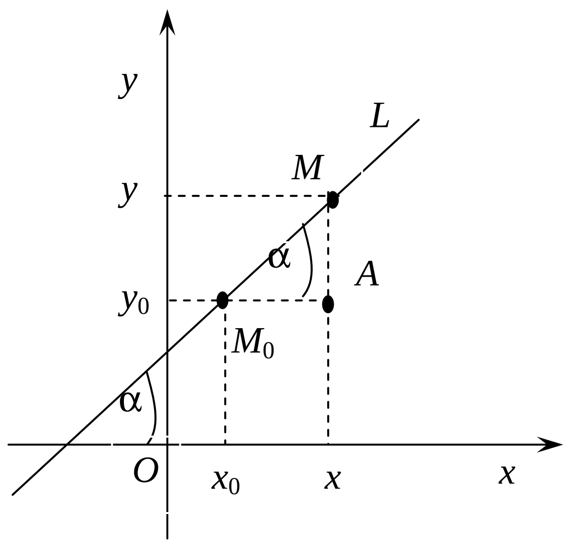


Рис. 1

Провести прямую через точку $M_0(x_0,y_0)$ под углом α к оси Ox (рис. 1).

Дано: $M_0(x_0,y_0)\in L$, угол между $(L,Ox)=\alpha$.

Найти: уравнение L.

Решение. Возьмём произвольную точку $M(x,y)\in L$ и рассмотрим прямоугольный ΔM_0AM. В треугольнике M_0AM, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$; $\operatorname{tg}\alpha=k$; значит,

$$M\in L\Leftrightarrow k=\frac{y-y_0}{x-x_0}\quad\Leftrightarrow\quad y-y_0=k(x-x_0). \qquad (5.1.1.)$$

Уравнение (5.1.1.) можно переписать в виде $y=kx+(-kx_0+y_0)$ или

$$y=kx+b. \qquad (5.1.2)$$

Вывод: Прямую на плоскости можно задать точкой и углом наклона к положительному направлению оси Ox, или его тангенсом (угловым коэффициентом).

Определение 5.1.2. Уравнение вида (5.1.2) называют ***уравнением прямой с угловым коэффициентом k***.

Определение 5.1.3. Если уравнение линии (L) в ДПСК имеет вид $P(x,y)=0$, где P – многочлен n-ной степени, то говорят, что задана ***алгебраическая линия n-го порядка***.

Например, прямая $y=kx+b$ – линия первого порядка, а парабола $y=ax^2+bx+c$, окружность $x^2+y^2=R^2$ – алгебраические линии второго порядка.

Графики же логарифмических функций, тригонометрических функций и т.п. не являются алгебраическими линиями, их называют ***трансцендентными линиями.***

ТЕОРЕМА 5.1.1. Уравнение $Ax+By+C=0$ (*) задает прямую на плоскости.

Доказательство. В уравнении (*) возможны два случая:

1. $B=0$, тогда $Ax+C=0$. Если A=0, то уравнение (*) теряет смысл, поэтому очевидно $A\neq 0$, следовательно $x=-\dfrac{C}{A}$ – прямая, параллельная оси Oy, т.е. имеет вид $x=a$.

2. $B\neq 0$, тогда (*) преобразуется к эквивалентному уравнению $By=-C-Ax$, $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$. Обозначим $-\dfrac{A}{B}=k$, $-\dfrac{C}{B}=b$, таким образом, имеем, что уравнение (*) принимает вид $y=kx+b$, которое задает уравнение прямой на плоскости.

Замечание 5.1.4. По определению 5.1.3 уравнение (*) является линией 1-го порядка на плоскости.

Определение 5.1.4. Уравнение $Ax+By+C=0$ называется ***общим уравнением прямой на плоскости.***

5.2. Способы задания прямой на плоскости

Определение 5.2.1. Вектор, перпендикулярный данной прямой, называется ***вектором нормали*** данной прямой (нормальным вектором). Обозначается: $\overline{n}$, $\overline{N}$, $\overline{n}_L$.

З а д а ч а 1 (задание прямой точкой и вектором нормали).

Провести прямую L, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$, перпендикулярно вектору $\bar{n}(A, B)$ (рис. 2).

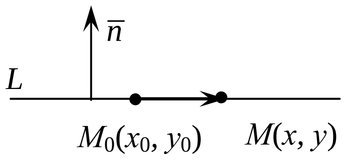


Рис. 2

Дано: $M_0 \in L$, $\bar{n}$ перпендикулярен L.

Решение. Возьмём произвольную точку $M(x, y) \in L$, тогда $M_0 \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \bar{n} \Leftrightarrow$ $\overline{M_0M} \cdot \bar{n} = 0$ – векторное уравнение искомой прямой. $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0) \Rightarrow \overline{M_0M} \cdot \bar{n} = A(x - x_0) + B(y - y_0)$, значит $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Таким образом, получили

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{5.2.1}$$

уравнение, которому должны удовлетворять координаты произвольной точки прямой.

Докажем, что это уравнение действительно описывает прямую. Из (5.2.1) следует $Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$. Обозначим $(-Ax_0 - By_0) = C$. Значит, (5.2.1) равносильно $Ax + By + C = 0$ (*) – общему уравнению прямой. По теореме 5.1.1 оно задает прямую на плоскости.

***Вывод*:** прямую на плоскости можно задать точкой и нормальным вектором.

Определение 5.2.2. Вектор, имеющий направление заданной прямой, называется ***направляющим вектором*** данной прямой. Обозначается: $\bar{s}, \bar{q}, \bar{a}, \overline{S_L}$.

З а д а ч а 2 (*задание прямой точкой и направляющим вектором*).

Провести прямую L на плоскости, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ в направлении вектора $\bar{S}(m, n)$ (рис. 3).

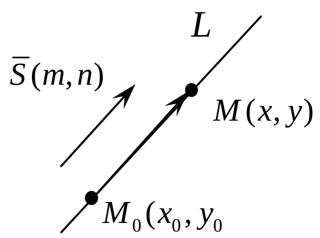


Рис. 3

Дано: $M_0 \in L$, $\bar{S} \parallel L$.

Найти: уравнение L.

Решение. Пусть $M(x, y) \in L$, тогда выполняется условие $M(x, y) \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \bar{S} \Leftrightarrow$ (по условию коллинеарности).

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{5.2.2}$$

Получили уравнение, которому должны удовлетворять все точки заданной прямой. Докажем, что уравнение (5.2.2) описывает искомую прямую. Преобразуем уравнение (5.2.2) по свойству пропорции $n(x-x_0)=m(y-y_0)$. Тогда уравнение (5.2.2) равносильно $n(x-x_0)-m(y-y_0)=0$ или $nx-my+(-nx_0+my_0)=0$. Обозначим $n=A, -m=B, (-nx_0+my_0)=C$. Тогда уравнение (5.2.2) принимает вид: $Ax+By+C=0$. То есть, уравнение (5.2.2) действительно задает прямую, а значит, и прямую L, проходящую через точку $M_0(x_0,y_0)$ в направлении вектора $\overline{S}(m,n)$.

Вывод: прямую на плоскости можно задать точкой и направляющим вектором.

Определение 5.2.3. Уравнение $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$ называется ***каноническим уравнением*** прямой.

З а м е ч а н и е 5.2.1. Если коэффициент пропорциональности для каждой точки заданной прямой в уравнении (5.2.2) обозначить через t, будем иметь:

$$\begin{cases} \dfrac{y-y_0}{n}=t \\ \dfrac{x-x_0}{m}=t \end{cases}, \quad t\in R, \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt. \end{cases} \tag{5.2.3}$$

Получаем новый способ задания прямой.

Определение 5.2.4. Уравнения (5.2.3) называют ***параметрическими уравнениями*** прямой.

З а м е ч а н и е 5.2.1. Задание прямой в виде (5.2.3) наиболее удобно использовать в механике для описания движения материальной точки по прямой.

З а д а ч а 3 (*задание прямой двумя точками*).

Провести прямую L через точки $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ (рис. 4).

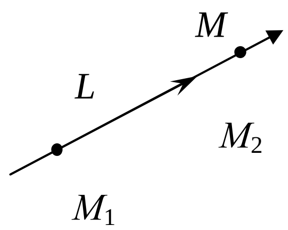


Рис. 4

Дано: $M_1(x_1,y_1)\in L,\ M_2(x_2,y_2)\in L$.

Найти уравнение L.

Решение. Возьмём произвольную точку $M(x,y)\in L$. Вектор $\overline{M_1M_2}$ является направляющим вектором заданной прямой $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

Значит, для прямой L можно составить каноническое или параметрические уравнения:

$$M(x,y)\in L \Leftrightarrow \overline{M_1M} \parallel \overline{M_1M_2}. \qquad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (5.2.4)$$

Очевидно, уравнение (5.2.4) имеет вид канонического уравнения (5.2.2), следовательно, оно задает искомую прямую.

Вывод: прямую на плоскости можно задать двумя точками.

Задача 4 (*задание прямой величинами отрезков, отсекаемых прямой на осях координат*).

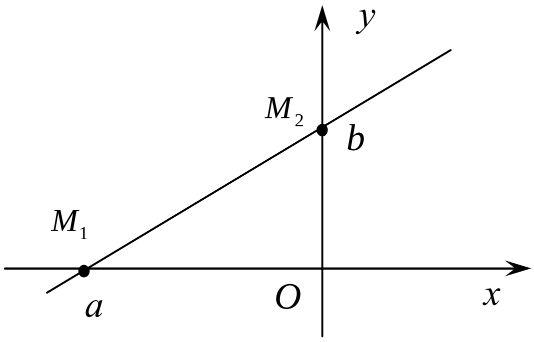


Рис. 5

Провести прямую, если известны величины отрезков, отсекаемых ею на координатных осях (рис. 5).

Дано: a – величина отрезка, отсекаемого на оси Ox; b – величина отрезка, отсекаемого на оси Oy. Найти уравнение L.

Решение. Из условия следует, что точки $M_1(a,0)$, $M_2(0,b)$ принадлежат прямой L, следовательно, из формулы (5.2.4) задачи 3 вытекает уравнение искомой прямой: $\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$; $\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}$; $\Rightarrow$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (5.2.5)$$

Вывод: Прямую, не проходящую через начало координат, можно задать величинами отрезков, отсекаемых ею на осях координат.

Определение 5.2.4. Уравнение (5.2.5) называют ***уравнением прямой в отрезках.***

Пример. Даны вершины треугольника ABC: $A(-2,-3)$, $B(1,6)$, $C(6,1)$. Найти: уравнение медианы AM.

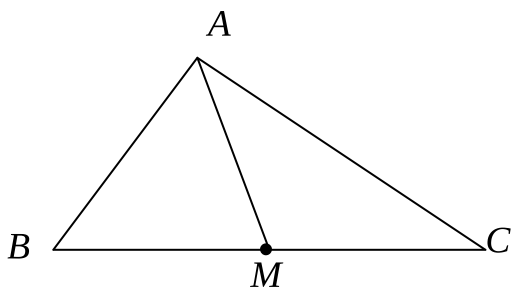


Рис. 6

Решение. Определим координаты M, как середины отрезка BC.

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}; \quad y_M=\frac{y_B+y_C}{2}.$$

$$M\left(\frac{1+6}{2};\frac{6+1}{2}\right), \quad M\left(\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right).$$

Теперь по двум известным точкам A и M составляем уравнение медианы AM:

$$\frac{x-(-2)}{\frac{7}{2}-(-2)}=\frac{y-(-3)}{\frac{7}{2}-(-3)},\ \frac{x+2}{\frac{11}{2}}=\frac{y+3}{\frac{13}{2}},\quad \text{или}$$

$$\frac{x+2}{11}=\frac{y+3}{13},\qquad \text{или}$$

$$13(x+2)=11(y+3),\qquad \text{или}$$

$$13x+26=11y+33.$$

Таким образом,

AM: $13x-11y-7=0$ – искомое уравнение медианы.

Упражнение. Найти координаты точки M_1, симметричной точке $M(1,0,-2)$ относительно прямой L: $2x+7y-8=0$.

5.3. Угол между прямыми. Взаимное расположение прямых

Замечание 5.3.1. На практике часто приходится решать и другие задачи: *по уравнению прямой определить её геометрические свойства*.

I. Угол между прямыми

Определение 5.3.1. За ***угол между прямыми*** на плоскости принимают один из смежных углов, образованных этими прямыми при их пересечении.

В зависимости от способа задания прямой можно вывести формулы для вычисления углов между прямыми.

1) Пусть прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями

$$L_1: A_1x+B_1y+C_1=0,\qquad L_2: A_2x+B_2y+C_2=0,$$

тогда угол между прямыми можно определить, как угол между нормалями к этим прямым: $\cos\left(L_1,\hat{\ } L_2\right)=\cos\left(\overline{n}_1,\hat{\ }\overline{n}_2\right)=\dfrac{\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2}{\left|\overline{n}_1\right|\cdot\left|\overline{n}_2\right|}$.

2) Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1};\qquad L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}.$$

В этом случае угол между прямыми можно определить, как угол между их направляющими векторами: $\cos\left(L_1,\hat{\ } L_2\right)=\cos\left(\overline{S}_1,\hat{\ }\overline{S}_2\right)=\dfrac{\overline{S}_1\cdot\overline{S}_2}{\left|\overline{S}_1\right|\cdot\left|\overline{S}_2\right|}$.

3) Пусть прямые (рис. 7), заданы уравнениями с угловыми коэффициентами

$$L_1: y = k_1 x + b_1; \qquad L_2: y = k_2 x + b_2.$$

Из геометрических соображений следует, что $\varphi = \beta - \alpha$:

Тогда $\operatorname{tg}(L_1, L_2) = \operatorname{tg}\varphi = \left|\operatorname{tg}(\beta - \alpha)\right| = \left|\dfrac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha}\right| = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}\right|.$

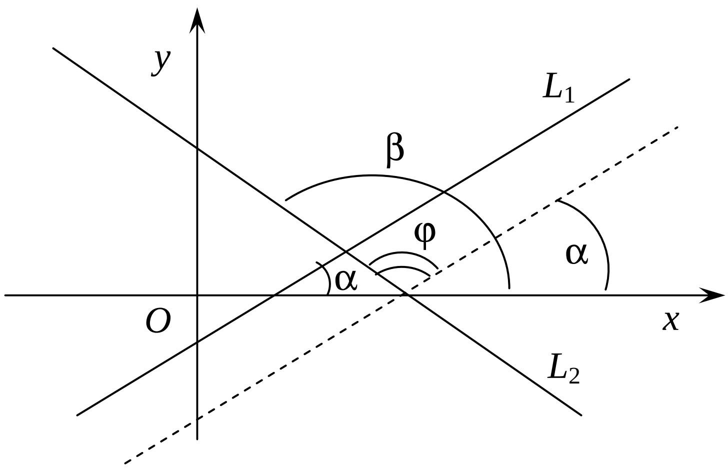


Рис. 7

II. Взаимное расположение двух прямых

Пусть заданы две прямые своими общими уравнениями (все остальные способы можно к этому свести):

$$L_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0;$$
$$L_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Прямые на плоскости могут – ***совпадать, быть параллельными, пересекаться***.

1. $L_1 \equiv L_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Доказательство. $\Rightarrow$) Пусть $L_1 \equiv L_2$, следовательно, в общих уравнениях соответствующие коэффициенты будут иметь один и тот же коэффициент пропорциональности, так как уравнения должны будут задавать одну и ту же прямую $\Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

$\Leftarrow$) Пусть $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, тогда общие уравнения задают одну и ту же прямую (уравнения можно сделать одинаковыми).

2. Прямая L_1 параллельна прямой L_2 – это равносильно равенству $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, так как в этом случае $\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$, но L_1 не совпадает с L_2.

3. $L_1 \cap L_2 = M_1$ ($\cap$ – пересечение). Пусть M_1 – точка пересечения прямых, следовательно $\bar{n}_1$ не параллелен $\bar{n}_2$. Это равносильно тому, что $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$.

В последнем случае может возникнуть задача о нахождении точки M_1 – точки пересечения прямых или об угле между прямыми. Т.к. координаты точки пересечения прямых должны удовлетворять уравнениям этих прямых, то точку M_1 можно найти, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Упражнение. Заданы прямые:

$$AB: 4x + 3y - 5 = 0$$
$$BC: x - 3y + 10 = 0\,.$$
$$AC: x - 2 = 0$$

Найти:

– вершины ΔABC;

– площадь ΔABC;

– составить уравнение прямой, проходящей через вершину $A \parallel BC$;

– определить углы ΔABC.

5.4. Расстояние от точки до прямой

Задача. Пусть задана точка M_1 с координатами $(x_1, y_1) \notin L$. $L: Ax + By + C = 0$ (рис. 8). Найти расстояние от точки M_1 до прямой L: $d(M_1, L)$.

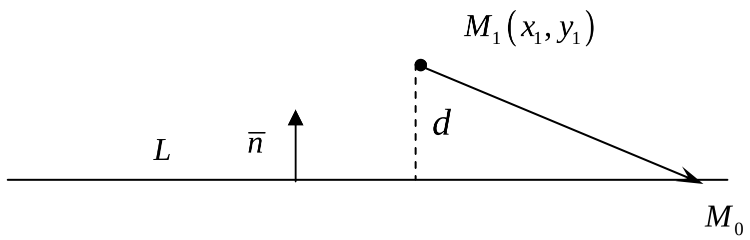


Рис. 8

1. Если M_1 удовлетворяет уравнению L, то $d\left(M_1, L\right)=0$.

2. Если $M_1 \notin L \Leftrightarrow Ax_1+By_1+C \neq 0$ и M_0 – произвольная точка на L, то $d\left(M_1, L\right)$ есть модуль проекции вектора $\overline{M_1 M_0}$ на вектор $\bar{n}$. Тогда

$$d\left(M_{1,} L\right)=\left|np_{\bar{n}} \overline{M_1 M_0}\right|=\left|\frac{\overline{M_1 M_0} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|}\right|=\left|\frac{\left(x_0-x_1\right) \cdot A+\left(y_0-y_1\right) \cdot B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=$$

$$=\left|\frac{Ax_0-Ax_1+By_0-By_1}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\left|\frac{\left(Ax_0+By_0+C\right)-\left(Ax_1+By_1+C\right)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=$$

$$=\left[\left(m.\kappa.\ M_0 \in L,\ mo\ Ax_0+By_0+C=0\right)\right]=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Таким образом, формула $d\left(M_1, L\right)=\dfrac{\left|Ax_1+By_1+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ определяет расстояние от точки до прямой.

5.5. Алгебраические линии второго порядка

Определение 5.5.1. Линия, определяемая на плоскости уравнением вида $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+N=0$ (*), где $A^2+B^2+C^2 \neq 0$, называется ***алгебраической линией второго порядка***.

В аналитической геометрии доказано, что, если (*) задаёт невырожденную кривую, то это одна из трех кривых: эллипс, гипербола, парабола.

Возникает вопрос: «Как найти средства, с помощью которых можно было бы по виду уравнения определить вид кривой?» Оказалось, что можно найти такую систему координат, в которой уравнение (*) принимает специальный вид, называемый ***каноническим уравнением***, по виду которого можно однозначно определить, какая невырожденная кривая второго порядка задана.

5.5.1. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса

Определение 5.5.2. ***Эллипсом*** называется геометрическое место точек (ГМТ) плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, большая, чем расстояние между фокусами.

Задача. Написать уравнение эллипса с центром в начале координат, фокусы которого расположены на оси Ox (рис. 9).

Пусть $|F_1F_2| = 2c$, а сумма расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов равна $2a$, значит, $F_1(-c;0)$; $F_2(+c;0)$. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка эллипса, тогда по определению 5.5.2 имеем $|F_2M| + |F_1M| = const$.

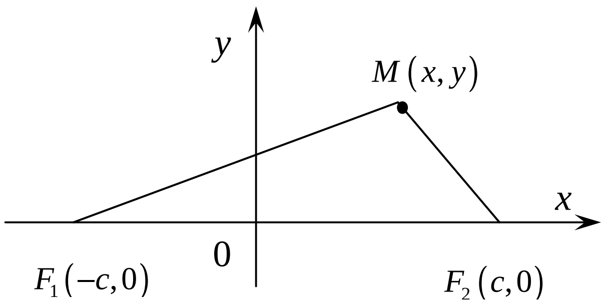


Рис. 9

Пусть $MF_1 + MF_2 = 2a$, т.е.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (5.5.1)$$

Умножим (5.5.1) на сопряженное выражение

$$(x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2 = 2a(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}),$$

$$2a\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right) = x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - x^2 + 2xc - c^2 - y^2,$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \dfrac{2xc}{a}, \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a; \end{cases}$$

$$2\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2\left(\frac{xc}{a} + a\right), \quad \frac{xc}{a} + a \geq 0,$$

$$(x+c)^2 + y^2 = \frac{x^2c^2}{a^2} + 2xc + a^2,$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = \frac{x^2c^2}{a^2} + 2xc + a^2,$$

$$x^2 \cdot \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2, a > c \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2;$$

$$\frac{x^2b^2}{a^2} + y^2 = b^2.$$

Преобразуя последнее уравнение, получим искомое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5.5.2)$$

где $b^2 = a^2 - c^2, a > b$, $2a$ – сумма расстояний от точки эллипса до фокусов.

Определение 5.5.3. Уравнение (5.5.2) называется ***каноническим уравнением эллипса*** с центром в начале координат, фокусы которого находятся на оси Ox.

Замечание 5.5.1. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ где $b>a$, $a^2=b^2-c^2$, также задаёт эллипс с центром в начале координат, фокусы которого лежат на оси Oy.

Замечание 5.5.2. Уравнение $\frac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1$ задаёт эллипс с центром в точке $C\left(x_0;y_0\right)$.

5.5.2. Исследование формы эллипса по его каноническому уравнению

Задача. Изучить геометрические свойства эллипса по его каноническому уравнению: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$.

1. По виду уравнения заключаем, что эллипс симметричен относительно осей Ox, Oy. Координаты x, y входят в уравнение во вторых степенях, следовательно, достаточно изобразить эллипс в первой четверти.

2. Определение точки пересечения эллипса с осями координат:

$$\text{С } Ox: \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \\ y=0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x^2=a^2 \Rightarrow |x|=a \\ x_{1,2}=\pm a; A_1(-a;0), A_2(a,0) \end{matrix};$$

$$\text{С } Oy: \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2}=1; \\ x=0, \end{cases} \quad \begin{matrix} y^2=b^2 \\ |y|=b \end{matrix}, \; B_1(0;-b), B_2(0;b).$$

3. Из уравнения следует $\begin{cases} \left|\frac{x}{a}\right|\le 1, \\ \left|\frac{y}{b}\right|\le 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x|\le a, \\ |y|\le b. \end{cases}$ – прямоугольник, внутри которого находится эллипс.

4. Из уравнения $y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ построим эллипс (рис. 10).

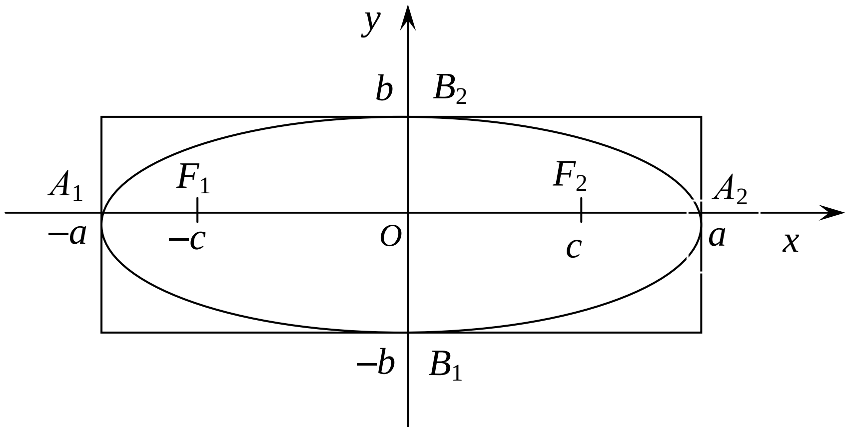


Рис. 10

5.5.3. Важные характеристики эллипса

По каноническому уравнению эллипса можно определить следующие его важные характеристики.

Определение 5.5.4. Точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ называются ***вершинами эллипса***.

Определение 5.5.5. Прямые OB_2, OA_2 называются, соответственно, ***большой и малой полуосью***, если $b > a$ и ***малой и большой полуосью***, если $a > b$.

Определение 5.5.6. ***Эксцентриситетом*** эллипса называется отношение фокусного расстояния $2c$ к длине большой оси.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}\ , \text{ если } a > b; \qquad \varepsilon = \frac{c}{b}, \text{ если } b > a.$$

Очевидно, у эллипса $\varepsilon < 1$.

Определение 5.5.7. ***Директрисами*** эллипса $(a > b)$ называются прямые, определяемые уравнениями: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Определение 5.5.8. ***Фокальными радиусами*** точки $M(x;y)$, лежащей на эллипсе, называется числа $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$.

Определение 5.5.9. ***Эксцентриситетом*** эллипса называется также число: $\varepsilon = \dfrac{r}{d}$, где r – расстояние от точки M до фокуса, d – расстояние от точки M до соответствующей директрисы.

5.6. Гипербола. Канонические уравнения гиперболы. Важные характеристики гиперболы

Определение 5.6.1. ***Гиперболой*** называется геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$), причем, эта постоянная меньшая, чем расстояние между фокусами.

Упражнение. Вывести каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат, фокусы которой находятся на оси Ox. Обозначив $\left\| F_1M \right| - \left| F_2M \right\| = 2a$ или $\left| MF_1 \right| - \left| MF_2 \right| = \pm 2a$, т.е. $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$.

З а м е ч а н и е 5.6.1. Каноническое уравнение гиперболы, которое может быть получено аналогичным способом, как и для эллипса, имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.6.1}$$

где $c^2 = a^2 + b^2$, если фокусы гиперболы находятся на оси Ox и

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.6.2}$$

где $c^2 = a^2 + b^2,\ c > a,\ c > b$, если фокусы гиперболы находятся на оси Oy.

Изучая аналогично, как и для эллипса, каноническое уравнение гиперболы, можно построить ее на графике (рис. 11).

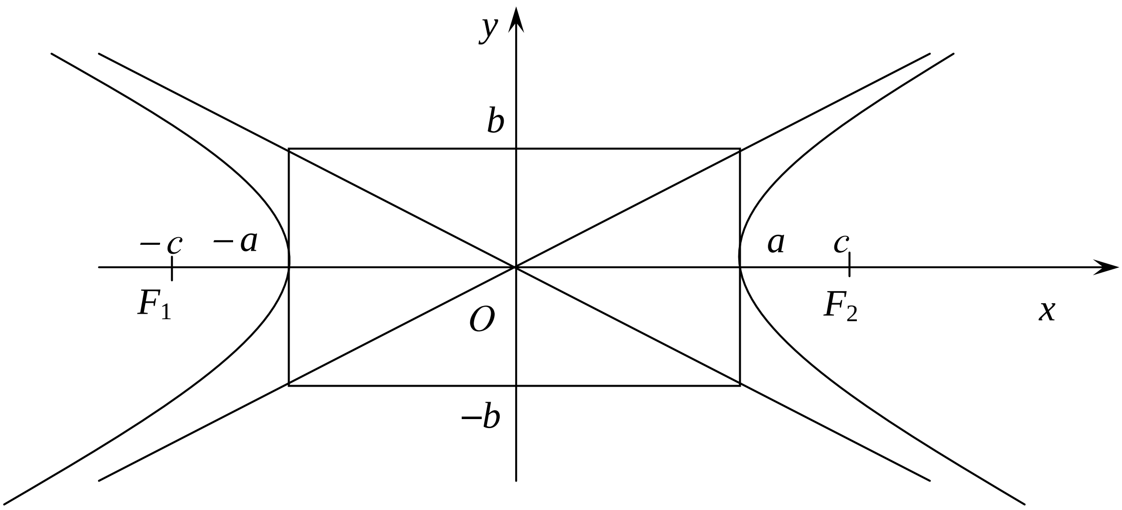


Рис. 11

Определение 5.6.2. Ось, на которой находятся вершины гиперболы называется ***действительной.*** Ось, на которой нет вершин, называется ***мнимой***.

Важные характеристики гиперболы

1. Координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, $c^2 = a^2 + b^2$.
2. $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ – координаты вершин гиперболы.
3. $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, $(\varepsilon > 1)$.
4. $y = \pm\dfrac{b}{a}\cdot x$ – уравнения асимптот.
5. $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ – уравнения директрис.
6. $\varepsilon = \dfrac{r}{d}$, где r – расстояние от точки гиперболы до фокуса; d - расстояние от точки гиперболы до односторонней директрисы.
7. $\left.\begin{matrix} r_1 = \varepsilon x - a \\ r_2 = \varepsilon x + a \end{matrix}\right\}$ – фокальные радиусы правой ветви гиперболы;

   $\left.\begin{matrix} r_3 = -\varepsilon x + a \\ r_4 = -\varepsilon x - a \end{matrix}\right\}$ – фокальные радиусы левой ветви гиперболы.

Упражнение. Записать важные характеристики гиперболы (5.6.2).

Замечание 5.6.2. Гипербола $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ имеет центр симметрии в точке $C(x_0, y_0)$.

5.7. Парабола. Каноническое уравнение параболы

Определение 5.7.1. ***Параболой*** называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки плоскости (фокуса) и данной прямой (директрисы), лежащей в этой же плоскости.

Расстояние между фокусом и директрисой принято обозначать p.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы. Соединим точку M с F. Проведём отрезок MN перпендикулярно директрисе. Согласно определению параболы $|MF|=|MN|$ (рис. 12). По формуле расстояния между точками находим

$$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\text{, а } |MN|=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}.$$

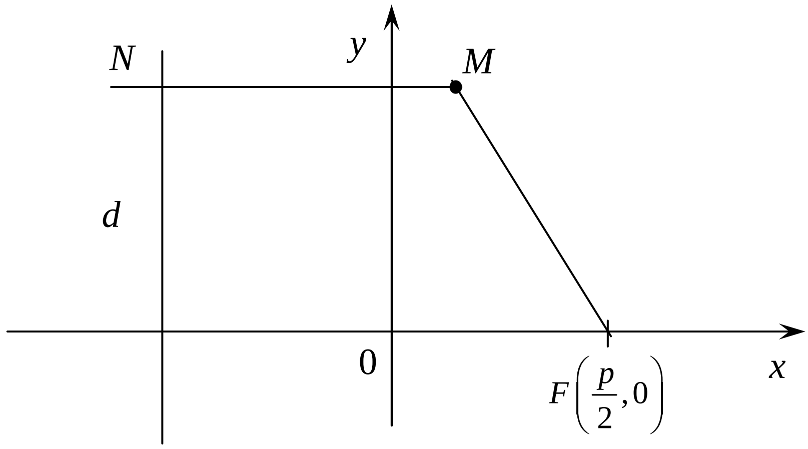


Рис. 12

Следовательно, $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$. Возведя обе части в квадрат, получим

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4} \qquad \text{т.е.} \quad y^2=2px. \qquad (5.7.1)$$

Определение 5.7.2. **У**равнение (5.7.1) называется ***каноническим уравнением параболы***.

З а м е ч а н и е 5.7.1. Каноническое уравнение параболы может быть выведено аналитическими средствами. Его форма зависит от того, в какой части плоскости находится фокус.

1. Пусть фокус F находится в правой полуплоскости, на оси Ox, а вершина параболы в начале координат, тогда каноническое уравнение выглядит следующим образом:

$$y^2=2px.$$

Нарисуем её (рис. 13): точки $M_1\left(\frac{p}{2};p\right)$, $M_2\left(\frac{p}{2};-p\right)$ принадлежат параболе.

2. Каноническое уравнение параболы, расположенной в левой полуплоскости (рис. 14), выглядит следующим образом: $y^2 = -2px$.

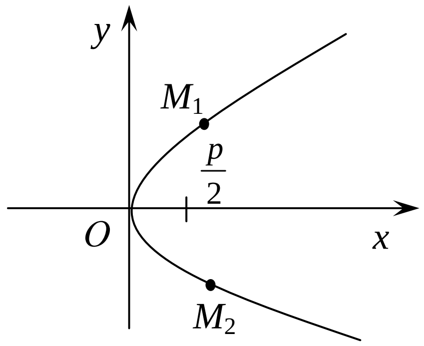


Рис. 13

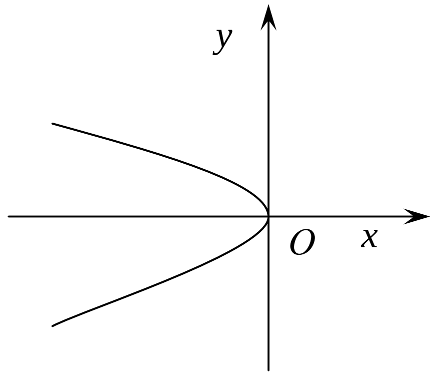


Рис. 14

Каноническое уравнение параболы, расположенной в верхней полуплоскости (рис. 15): $x^2 = 2py$.

Каноническое уравнение параболы, расположенной в нижней полуплоскости (рис. 16): $x^2 = -2py$.

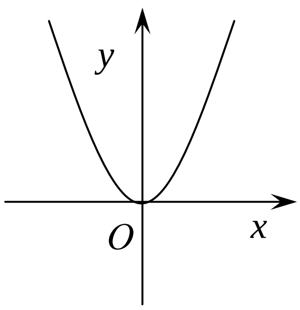


Рис. 15

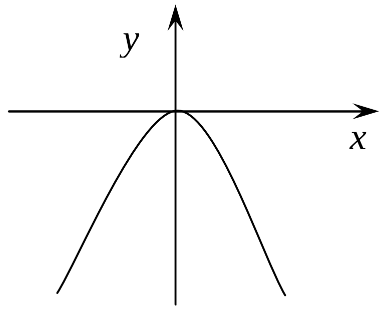


Рис. 16

З а м е ч а н и е 5.7.2. Уравнение $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ задает параболу, вершина которой имеет координаты $A(x_0; y_0)$.

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

5.8. Определение функции нескольких переменных. Поверхность в пространстве. Алгебраические поверхности

Функция одной переменной не охватывает все зависимости, существующие в природе. Например, из физики известно, что объём газов по закону Менделеева-Клапейрона вычисляется по формуле: $V = R\frac{T}{\rho}$, где $R - const$, T – температура, ρ – давление. Очевидно, что V газа зависит от двух переменных величин: ρ и T.

На практике приходится рассматривать объекты с более сложными зависимостями. Следовательно, необходимы новые средства математики для описания таких объектов.

Определение 5.8.1. Переменная величина y называется ***функцией нескольких переменных***, если каждой упорядоченной n-ке чисел соответствует единственное определенное значение y.

Обозначают: $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$. Чаще всего мы будем рассматривать функции двух или трёх переменных: $z = f\left(x, y\right)$; $u = f\left(x, y, z\right)$.

Определение 5.8.2. ***Графиком функции*** $z = f\left(x, y\right)$ называется множество точек реального пространства с координатами $M\left(x, y, f\left(x, y\right)\right)$.

Определение 5.8.3. Если в пространстве введена фиксированная система координат (например, ДПСК), то функция $z = f\left(x, y\right)$ задает некоторую ***поверхность*** в пространстве.

Определение 5.8.4. ***Уравнением поверхности*** в фиксированной системе координат называется такое уравнение с тремя переменными $F(x, y, z) = 0$, которому удовлетворяют координаты точек поверхности и только они.

Определение 5.8.5. Если уравнение поверхности в ДПСК в пространстве задаётся в виде $F(x, y, z) = 0$, где F – многочлен n-ой степени относительно $x, y, z,$ то говорят, что задана ***алгебраическая поверхность n-го порядка.***

5.9. Плоскость – алгебраическая поверхность первого порядка

ТЕОРЕМА 5.9.1. Алгебраическое уравнение первой степени относительно ДПСК

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (*),$$

где A, B, C одновременно не равны нулю, определяет ***плоскость*** в пространстве.

Доказательство. Рассмотрим $\overline{n}(A,B,C)$ и радиус-вектор произвольной точки пространства $\overline{r}(x,y,z)$, тогда $(*) \Leftrightarrow \overline{n}\cdot\overline{r} + D = 0$; $\overline{n}\cdot\overline{r} = |\overline{n}|\cdot np_{\overline{n}}\overline{r}$. Значит, $(*) \Leftrightarrow |\overline{n}|\cdot np_{\overline{n}}\overline{r} + D = 0 \Rightarrow np_{\overline{n}}\overline{r} = -\dfrac{D}{|\overline{n}|}$.

Таким образом, получили, что уравнение (*) в пространстве задаёт совокупность точек $M(x,y,z)$, для которых проекция вектора $\overline{r}(x,y,z)$ на постоянный вектор $\overline{n}(A,B,C)$ имеет постоянное значение (рис. 17). Очевидно, что эти точки заполняют некоторую плоскость, перпендикулярную $\overline{n}$.

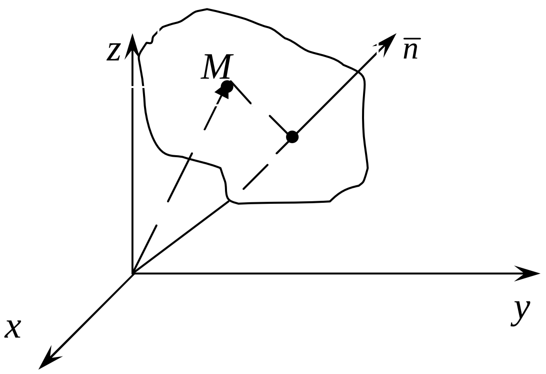


Рис. 17

Определение 5.9.1. Уравнение (*) называется ***общим уравнением плоскости***.

Способы задания плоскости

Определение 5.9.2. Вектор, перпендикулярный данной плоскости, называется ***нормальным вектором*** плоскости.

Задача 1. (*уравнение плоскости проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору*). Написать уравнение плоскости проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярно вектору $\overline{n}(A,B,C)$ (рис. 18).

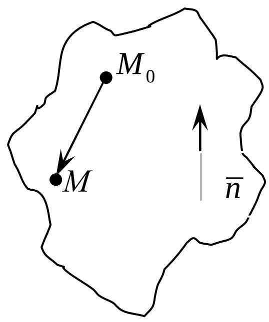


Рис. 18

Решение. Возьмём произвольную точку $M(x,y,z)$. Тогда по условию имеем

$$\overline{n} \perp \overline{M_0M} \Leftrightarrow \overline{n}\cdot\overline{M_0M} = 0$$

$$\Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (5.9.1)$$

$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0 \Rightarrow$ получим общее уравнение плоскости.

Определение 5.9.3. Уравнение (5.9.1) называется ***общим уравнением*** плоскости, проходящей через точку M_0, перпендикулярно вектору $\overline{n}$.

Задача 2 (*уравнение плоскости в отрезках*). Написать уравнение плоскости, если известны величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат: a, b, c (рис. 19).

Общее уравнение искомой плоскости имеет вид (*).

По условию

$$M_1 \in \alpha \Rightarrow Aa + D = 0 \Rightarrow A = -\frac{D}{a};$$

$$M_2 \in \alpha \Rightarrow Bb + D = 0 \Rightarrow B = -\frac{D}{b};$$

$$M_3 \in \alpha \Rightarrow Cc + D = 0 \Rightarrow C = -\frac{D}{c}.$$

Тогда уравнение (*) примет вид:

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0.$$

По условию плоскость не проходит через начало координат, следовательно $D \neq 0$.

Разделим полученное уравнение на $-D$: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (5.9.2)$$

Определение 5.9.4. Уравнение (5.9.2) называется ***уравнением плоскости в отрезках.***

Пример. Вычислить объём пирамиды, ограниченной плоскостью $3x + 2y - z + 6 = 0$ и координатными плоскостями (рис. 20).

Решение. Приведём уравнение плоскости α к форме уравнения (5.9.2):

$$3x + 2y - z = -6, \qquad \frac{x}{-2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{6} = 1.$$

Получили пирамиду, следовательно, $V = \frac{1}{3} S_{осн} H$, $H = 6$,

$$S_{осн} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3, \qquad V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6 = 6 \,(\text{ед}^3).$$

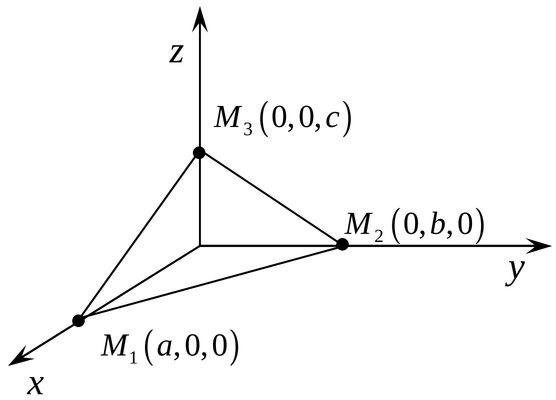


Рис. 19

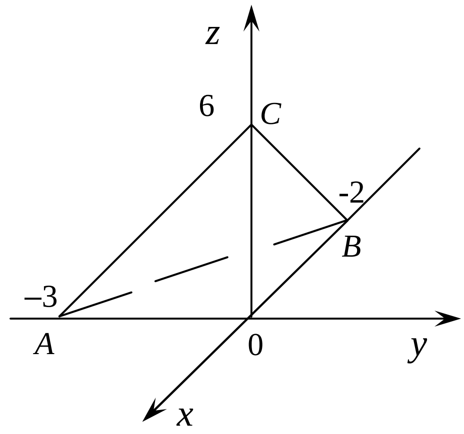


Рис. 20

З а д а ч а 3 (*уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой*). Написать уравнение плоскости проходящей через три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ (рис. 21).

Решение. Задача имеет смысл только при условии, когда вектор $\overline{M_1M_2}$ не является параллельным вектору $\overline{M_1M_3}$.

1 *способ*. Возьмём произвольную точку $M(x,y,z)$. Тогда

$$M\in\alpha \Leftrightarrow \overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3}=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (5.9.3)$$

Определение 5.9.5. **У**равнение (5.9.3) называется ***уравнением плоскости***, ***проходящей через три заданные точки***, не лежащие на одной прямой.

2 *способ*. Чтобы задать плоскость, например, с помощью уравнения (5.9.1), нужно знать 1) M_0; 2) $\overline{n}$.

1) за точку M_0 можно выбрать любую из трёх точек, например $M_1(x_1,y_1,z_1)$

2) $$\left.\begin{matrix} \overline{n}\perp\overline{M_1M_2} \\ \overline{n}\perp\overline{M_1M_3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{n}=\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=$$

$$=A\overline{i}+B\overline{j}+C\overline{k}\,.$$

З а д а ч а 4 (*уравнение плоскости, проходящей через две точки, параллельно вектору*). Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и параллельной вектору $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$.

Решение. Задача имеет смысл, если вектор $\overline{M_1M_2}$ не параллелен $\overline{a}$ (рис. 22).

1 *способ*. Возьмём произвольную точку $M(x, y, z)$.

Тогда

$M \in \alpha \Leftrightarrow \overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{\alpha} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.9.4)$$

– уравнение плоскости, проходящее через две точки, параллельно данному вектору.

2 *способ*.

1) M_1

2) $\overline{n} = \overline{M_1M_2} \times \overline{a}$.

З а д а ч а 5 (*уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно заданным двум векторам*).

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, параллельно двум векторам $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\overline{b}(b_x, b_y, b_z)$ (рис. 23).

Решить самостоятельно.

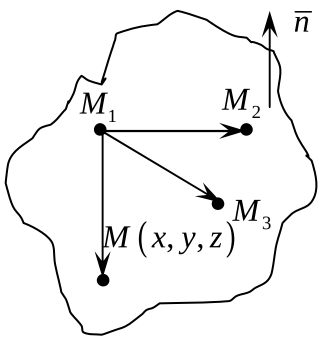


Рис. 21

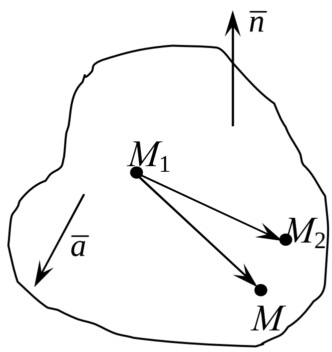


Рис. 22

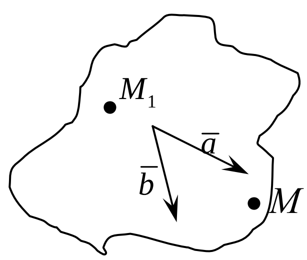


Рис. 23

5.10. Расстояние от точки до плоскости

Пусть заданы точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и плоскость $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$. Аналогично, как и для прямой, выводится формула

$$d(M_1, \alpha) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Вывести самостоятельно.

5.11. Угол между плоскостями

Определение 5.11.1. За ***угол*** между двумя плоскостями принимается величина одного из смежных двухгранных углов, образованных при их пересечении.

Пусть заданы две плоскости:

$\alpha_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$

$\alpha_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$

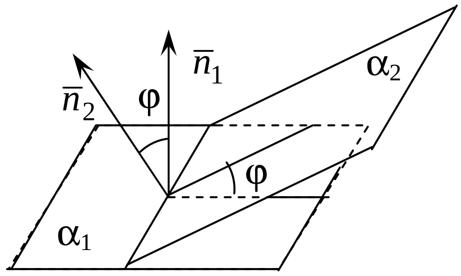


Рис. 24

Очевидно, линейный двугранный угол между плоскостями будет совпадать с углом между векторами нормалей этих плоскостей (рис. 24). Следовательно, косинус угла может быть определён по формуле:

$$\cos\left(\alpha_1, ^\wedge \alpha_2\right) = \cos\left(\overline{n}_1, ^\wedge \overline{n}_2\right) = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|}.$$

5.12. Взаимное расположение плоскостей

Пусть заданы общие уравнения двух плоскостей:

$$\alpha_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\alpha_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Тогда возможны следующие случаи:

1) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2} \Rightarrow \alpha_1 \equiv \alpha_2$;

2) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2} \Rightarrow \alpha_1 \parallel \alpha_2$;

3) $\overline{n}_1 \perp \overline{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 \perp \alpha_2$;

4) $\overline{n}_1$ не параллелен $\overline{n}_2 \Leftrightarrow \alpha_1 \cap \alpha_2 = \{L\}$.

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

5.13. Задание прямой общими уравнениями

Линию в пространстве можно рассматривать, как пересечение двух поверхностей. В частности, прямую в пространстве (алгебраическая линия 1-го порядка) можно задать пересечением двух плоскостей. Следовательно, аналитически прямая будет задаваться системой двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (5.13.1)$$

Определение 5.13.1. Формулы (5.13.1) называются ***общими уравнениями*** прямой в пространстве.

З а м е ч а н и е**.** Плоскости пересекаются по прямой тогда и только тогда, когда они не параллельны. Значит, система уравнений (5.13.1) будет задавать прямую, когда $\overline{n}_1$ ***не параллелен*** $\overline{n}_2$.

5.14. Канонические уравнения прямой, проходящей через точку, параллельно данному вектору

Определение 5.14.1. Вектор, параллельный данной прямой, называется ***направляющим вектором*** этой прямой.

З а д а ч а. Через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ провести прямую параллельно вектору $\overline{S}(m, n, p)$ (рис. 25).

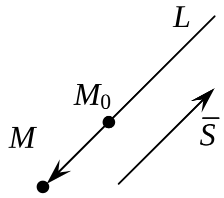


Рис. 25

Решение. Возьмём произвольную точку $M(x, y, z)$. Тогда

$$M \in \alpha \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \overline{S} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (5.14.1)$$

Определение 5.14.2. Уравнения (5.14.1) называются ***каноническими*** уравнениями прямой.

З а м е ч а н и е. Для каждой точки $M \in L$ коэффициент пропорциональности в (5.14.1) будет иметь своё определённое значение. Если обозначить его $t \in R$, то получим ***параметрические*** уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \qquad (5.14.2)$$

Упражнение. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$.

5.15. Приведение общего уравнения прямой в R^3 к каноническому виду

Задача. Пусть задана прямая в R^3 общими уравнениями:

$$L: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} (\operatorname{rang} A = 2).$$

Написать канонические уравнения заданной прямой.

Решение. Канонические уравнения прямой имеют вид (5.14.1). Значит, чтобы записать канонические уравнения заданной прямой нужно знать:

1) $M_0 \in L$,

2) $\overline{S}(m, n, p)$;

1) точку M_0 найдём, как одно из решений заданной системы уравнений (рис. 26). Так как $\operatorname{rang} A = 2$, то одна из неизвестных в системе является свободной. Значит, определив базисный минор и базисную неизвестную, мы найдём множество решений заданной системы уравнений. Положив свободную неизвестную, равной конкретному значению, например 0, мы найдём M_0;

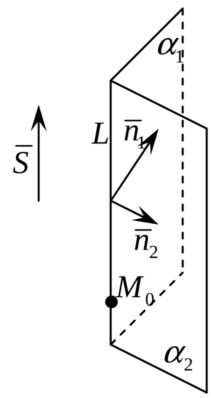


Рис. 26

2) так как $L \in \alpha_1 \Rightarrow \overline{S} \perp \overline{n}_1$,

так как $L \in \alpha_2 \Rightarrow \overline{S} \perp \overline{n}_2 \quad \Rightarrow \overline{S} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$.

Подставив координаты M_0 и $\overline{S}$ в уравнение (5.14.1), получим канонические уравнения.

Пример. Заданы общие уравнения прямой $L: \begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0, \\ 3x - 3y + z - 4 = 0. \end{cases}$

1. Записать уравнение прямой в каноническом виде.
2. Через точку $M_1(1, 0, 2)$ провести прямую $L_1 \parallel L$. (рис.27) Составить параметрические уравнения прямой L_1.

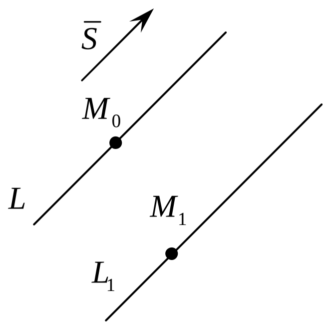


Рис. 27

Решение.

1) Определим одно из решений заданной системы линейных уравнений: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right)$;

$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$. Положим $z = \text{const}$. Например, $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 3x - 3y = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1, \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$. Таким образом, имеем: $M_0\left(1, -\dfrac{1}{3}, 0\right)$. $\overline{S} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot 0 - \overline{j} \cdot (-1) + \overline{k} \cdot 3$; $\overline{S}(0,1,3)$.

Тогда канонические уравнения заданной прямой имеют вид:

$$L: \frac{x-1}{0} = \frac{y + \frac{1}{3}}{1} = \frac{z}{3}.$$

2) Так как $L \parallel L_1 \Rightarrow \overline{S} \parallel \overline{S}_1$. Возьмем $\overline{S}_1 = \overline{S}(0,1,3)$, тогда $L_1: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{3}$. Отсюда параметрические уравнения искомой прямой имеют вид: $\begin{cases} x = 1, \\ y = t, \\ z = 2 + 3t. \end{cases}$

5.16. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

В пространстве прямые могут:

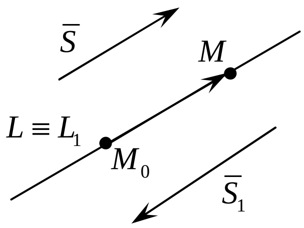
1) совпадать,
2) пересекаться,
3) быть параллельными,
4) быть скрещивающимися.

В аналитическом изучении взаимного расположения прямых в пространстве будем исходить из их канонических уравнений:

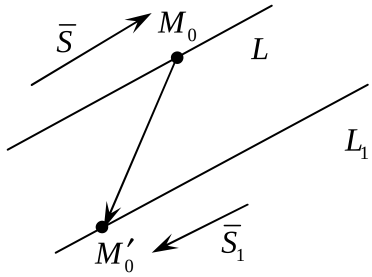
$$L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad \text{и} \quad L_1: \frac{x - x_0'}{m_1} = \frac{y - y_0'}{n_1} = \frac{z - z_0'}{p_1}.$$

Все возможные ситуации удобно исследуются по изучению взаимного расположения трёх векторов: $\bar S, \bar S_1$ и $\overline{M_0M_0'}$.

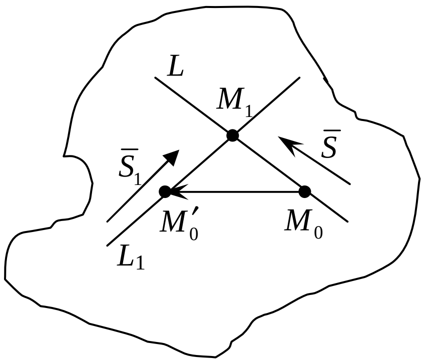
1. Пусть
$L \equiv L_1 \Leftrightarrow \bar S \parallel \bar S_1 \parallel \overline{M_0M_0'}$:



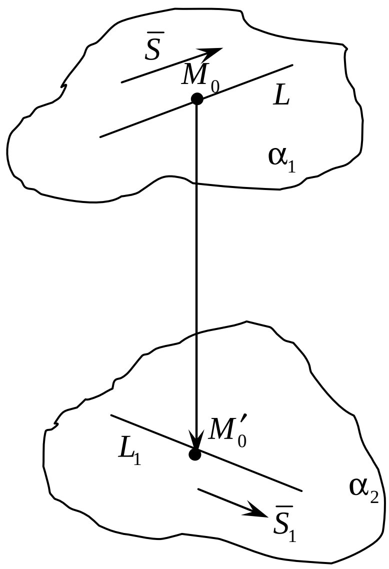
2. Пусть $L \parallel L_1 \Leftrightarrow \bar S \parallel \bar S_1$, но не параллельно $\overline{M_0M_0'}$



3. Пусть
$L \cap L_1 = \{M_1\} \Leftrightarrow \bar S\ \bar S_1 \overline{M_0M_0'} = 0,$
$\bar S \nparallel \bar S_1$



4. Пусть заданные прямые скрещивающиеся
$\Leftrightarrow \bar S\ \bar S_1 \overline{M_0M_0'} \neq 0$:



5.17. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

Определение 5.17.1. За ***угол*** между прямыми принимают любой из смежных углов, образуемых при их пересечении.

Очевидно, что $\cos\left(L_1,\hat{\ } L_2\right) = \cos\left(\bar S_1,\hat{\ } \bar S_2\right) = \dfrac{\bar S_1 \cdot \bar S_2}{\left|\bar S_1\right|\left|\bar S_2\right|}$.

Определение 5.17.2. За расстояние от точки до прямой принимают длину перпендикуляря, опущенного из точки на эту прямую.

Задача 1. Пусть задана точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и прямая $L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$. Найти расстояние от точки M_1 до прямой L: $d(M_1,L)$.

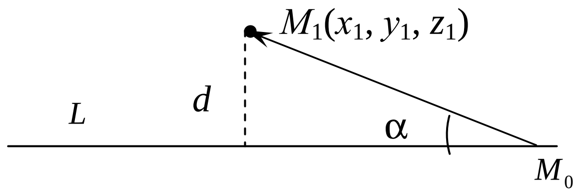


Рис. 28

Решение.

1. Если M_1 удовлетворяет уравнению L, то $d(M_1,L)=0$.

2. Если $M_1 \notin L$, а $M_0 \in L$, то

$$\boxed{d(M_1,L)=\left|\overline{M_0M_1}\right|\cdot\sin\alpha=\left|\overline{M_0M_1}\right|\cdot\sin\left(\overline{M_0M_1},\wedge\,\overline{S}\right)}.$$

Определение 5.17.3. Две прямые называются ***скрещивающимися***, если они не лежат в одной плоскости.

Определение 5.17.4. ***Расстоянием между скрещивающимися прямыми*** называется длина отрезка с концами на этих прямых и перпендикулярного каждой из прямых, т.е. длина их общего перпендикуляра.

Задача 2 Пусть заданы скрещивающиеся прямые

$$L:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \text{ и } L_1:\frac{x-x_0'}{m_1}=\frac{y-y_0'}{n_1}=\frac{z-z_0'}{p_1}.$$

Найти расстояние между этими прямыми.

Решение. По условию имеем направляющие векторы заданных прямых $\overline{S}(m,n,p)$, $\overline{S_1}(m_1,n_1,p_1)$, а также точки, принадлежащие этим прямым, $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_0'(x_0',y_0',z_0')$, и вектор $\overline{M_0M_0'}=(x_0'-x_0,y_0'-y_0,z_0'-z_0)$ (рис. 29). Отметим, что так как заданные прямые скрещивающиеся, то $\overline{S}\,\overline{S_1}\,\overline{M_0M_0'}\neq 0$.

Построим плоскость α, где $L\subset\alpha$, $\overline{s}\parallel\alpha$, $\overline{s_1}\parallel\alpha$. Тогда $M_0\in\alpha$, $\overline{n}=\overline{s}\times\overline{s_1}=(A,B,C)$, причем $\overline{n}\perp\alpha$. Используя формулу (5.9.1), составим уравнение плоскости α: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Аналогичным образом, построим плоскость α_1, где $L_1\subset\alpha_1$, $\overline{s}\parallel\alpha_1$, $\overline{s_1}\parallel\alpha_1$. Тогда $M_0'\in\alpha_1$, а вектор $\overline{n}=\overline{s}\times\overline{s_1}=(A,B,C)$ также перпендикулярен α_1. Таким образом, имеем $\left.\begin{array}{l}\overline{n}\perp\alpha,\\ \overline{n}\perp\alpha_1\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\parallel\alpha_1$. Определим расстояние между параллельными плоскостями, при этом воспользуемся формулой (5.10.1.):

$$d\left(\alpha_1,\alpha\right)=d\left(M_0',\alpha\right)=\frac{\left|A(x_0'-x_0)+B(y_0'-y_0)+C(z_0'-z_0)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\frac{\left|\bar{n}\cdot\overline{M_0M_0'}\right|}{\left|\bar{n}\right|}=\frac{\left|\overline{S}\times\overline{S_1}\cdot\overline{M_0M_0'}\right|}{\left|\overline{S}\times\overline{S_1}\right|}=\frac{\left|\overline{S}\ \overline{S_1}\overline{M_0M_0'}\right|}{\left|\overline{S}\times\overline{S_1}\right|}.$$

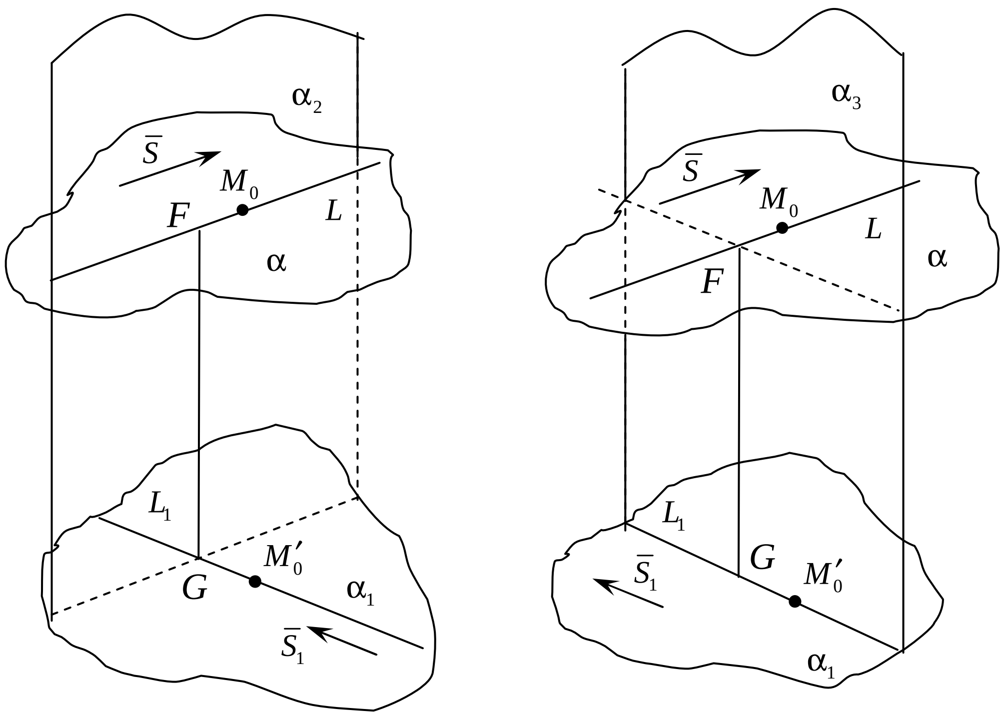


Рис. 29

Расстояние между скрещивающимися прямыми L и L_1 - их общий перпендикуляр FG, является результатом пересечения двух плоскостей α_2 и α_3, где $\alpha_2\perp\alpha$ и $L\subset\alpha_2$, $\alpha_3\perp\alpha$ и $L_1\subset\alpha_3$. Поэтому длину перпендикуляра FG можно определить через расстояние между параллельными плоскостями α и α_1:

$$d\left(L,L_1\right)=d\left(\alpha_1,\alpha\right)=\frac{\left|\overline{S}\ \overline{S_1}\overline{M_0M_0'}\right|}{\left|\overline{S}\times\overline{S_1}\right|}.$$ Таким образом,

$$\boxed{d\left(L,L_1\right)=\frac{\left|\overline{S}\ \overline{S_1}\overline{M_0M_0'}\right|}{\left|\overline{S}\times\overline{S_1}\right|}.} \qquad (5.17.2)$$

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

5.18. Аналитическое определение взаимного расположения прямой и плоскости

В пространстве прямая и плоскость могут:

1) $L \in \alpha$,
2) $L \parallel \alpha$,
3) $L \cap \alpha = \{M_1\}$.

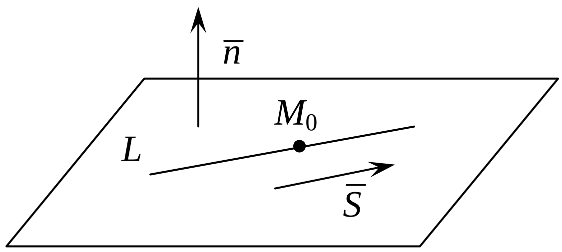
Пусть прямая L задана каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

плоскость $\alpha -$ общим уравнением:

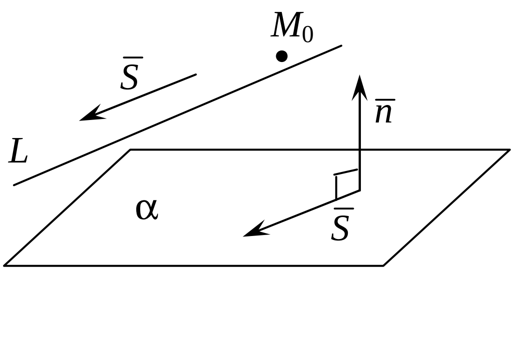
$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Тогда рассмотрим



1) $L \in \alpha$. В этом случае имеем, что:

1. $\overline{S} \perp \overline{n} \Leftrightarrow \overline{S} \cdot \overline{n} = 0$.
2. $M_0 \in \alpha \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

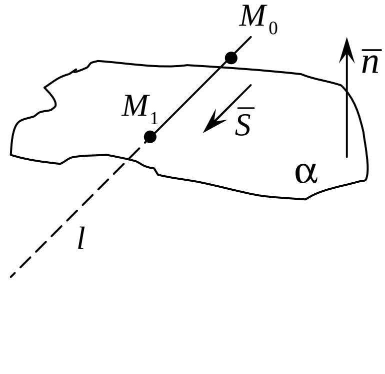


2) $L \parallel \alpha$.В этом случае:

1. $\overline{S} \perp \overline{n} \Leftrightarrow \overline{S} \cdot \overline{n} = 0$.
2. $M_0 \notin \alpha \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.

3) Пусть $L \cap \alpha = \{M_1\}$.

1. $\overline{S} \cdot \overline{n} \neq 0$.



5.19. Определение точки пересечения прямой и плоскости

Задача. Пусть заданы $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая $L: \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$. Пусть $L \cap \alpha = \{M_1\} \Leftrightarrow \overline{S} \cdot \overline{n} \neq 0$, найти точку M_1.

Точку пересечения прямой и плоскости удобнее находить, если прямая задана в параметрическом виде. Тогда параметр t для точки M_1 легко определяется из системы линейных уравннений:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \end{cases}$$

5.20. Угол между прямой и плоскостью

Определение 5.20.1. За ***угол*** между прямой и плоскостью, принимают принимают угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.

Задача. Пусть заданы плоскость $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая $L: \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ и пусть $L \cap \alpha = \{M_1\} \Leftrightarrow \overline{S} \cdot \overline{n} \neq 0$. Определить угол между прямой и плоскостью (рис. 30).

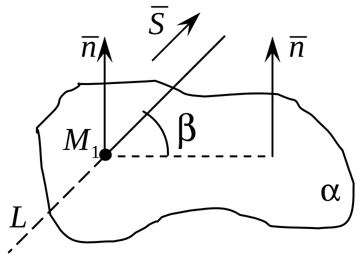


Рис. 30

Решение. Так как $\beta = 90° - \left(\overline{n}, {}^\wedge\, \overline{S}\right)$, то можно вычислить

$$\sin\beta = \left|\sin\left(90° - \left(\overline{n}, {}^\wedge\, \overline{S}\right)\right)\right| = \left|\cos\left(\overline{n}, {}^\wedge\, \overline{S}\right)\right| = \frac{\left|\overline{n} \cdot \overline{S}\right|}{\left|\overline{n}\right| \cdot \left|\overline{S}\right|}.$$

$$\sin\beta = \frac{\left|Am + Bn + Cp\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Пример. Даны четыре точки $A_1(0,7,1)$, $A_2(2,-1,5)$, $A_3(1,6,3)$, $A_4(3,-9,8)$. Составить уравнение плоскости $A_1A_2A_3$. Вычислить синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три точки: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$. Будем иметь

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-7 & z-1 \\ 2-0 & -1-7 & 5-1 \\ 1-0 & 6-7 & 3-1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x & y-7 & z-1 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

$$2\cdot\begin{vmatrix} x & y-7 & z-1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x & y-7 & z-1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$x\cdot\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}-(y-7)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+(z-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$x\cdot(-6)-(y-7)\cdot(0)+(z-1)\cdot(3) = 0, \; -6x+3z-3=0.$$

Таким образом, $(A_1A_2A_3)$: $\quad 2x-z+1=0$.

Синус угла между прямой с направляющим вектором $\overline{S}=(m,n,p)$ и плоскостью с вектором нормали $\overline{n}=(A,B,C)$ вычисляется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{\left|\overline{n}\cdot\overline{S}\right|}{\left|\overline{n}\right|\left|\overline{S}\right|}.$$

В нашем случае $\qquad \overline{n}_{(A_1A_2A_3)}=(\,2,0,-1\,)$,

$\overline{S}_{A_1A_4}=\overline{A_1A_4}=(3-0,-9-7,8-1)=(3,-16,7)$,

$\overline{n}\cdot\overline{S}=2\cdot3+0\cdot(-16)-1\cdot7=6-7=-1$,

$\left|\overline{n}\right|=\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$,

$\left|\overline{S}\right|=\sqrt{3^2+(-16)^2+7^2}=\sqrt{9+256+49}=\sqrt{314}$.

Значит, $\qquad \sin\varphi=\dfrac{|-1|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{314}}=\dfrac{1}{\sqrt{1570}}$.

5.21. Поверхности второго порядка

Определение 5.21.1. ***Поверхностью второго порядка*** называют поверхность, заданную алгебраическим *уравнением* второй степени

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Gyz + Mx + Hy + Nz + F = 0,$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Поверхность второго порядка можно разбить на классы основных невырожденных поверхностей, имеющих одну и ту же форму канонического уравнения:

1) эллипсоид, 2) однополостный гиперболоид, 3) двуполостный гиперболоид, 4) конус второго порядка, 5) эллиптичесий параболоид, 6) гиперболический параболоид 7) эллиптичесий цилиндр, 8) гиперболический цилиндр, 9) параболический цилиндр.

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{в^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – эллипсоид,

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{в^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – однополостный гиперболоид,

3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{в^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ – двуполостный гиперболоид,

4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{в^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ – конус второго порядка,

5) $\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}=2z$ – эллиптический параболоид,

6) $\dfrac{x^2}{p^2}-\dfrac{y^2}{q^2}=2z$ – гиперболический параболоид,

7) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{в^2}=1$ – эллиптический цилиндр,

8) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{в^2}=1$ – гиперболический цилиндр,

9) $x^2=2py$ – параболический цилиндр.

Определение 5.21.2. ***Эллипсоидом*** называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (5.21.1)$$

Уравнение (5.21.1) называется ***каноническим уравнением эллипсоида***.

Установим геометрический вид эллипсоида. Для этого рассмотрим сечения данного эллипсоида плоскостями, параллельными плоскости Oxy. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением вида $z = h$, где h – любое число, а линия, которая получается в сечении, определяется двумя уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases} \qquad (5.21.2)$$

Исследуем уравнения (5.21.2) при различных значениях h.

1) Если $|h| > c$ ($c > 0$), то $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<0$ и уравнения (5.21.2) определяют мнимый эллипс, т. е. точек пересечения плоскости $z=h$ с данным эллипсоидом не существует.

2) Если $h=\pm c$, то $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ и линия (5.21.2) вырождается в точки (0; 0; + c) и (0; 0; – c) (плоскости $z=\pm c$ касаются эллипсоида).

3) Если $|h|<c$, то уравнения (5.21.2) можно представить в виде

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^{*2}}+\dfrac{y^2}{b^{*2}}=1, \\ z=h, \end{cases}$$

откуда следует, что плоскость $z=h$ пересекает эллипсоид по эллипсу с полуосями $a^*=a\sqrt{1-h^2/c^2}$ и $b^*=b\sqrt{1-h^2/c^2}$. При уменьшении $|h|$ значения a^* и b^* увеличиваются и достигают своих наибольших значений при $h=0$, т. е. в сечении эллипсоида координатной плоскостью Oxy получается самый большой эллипс с полуосями $a^*=a$ и $b^*=b$.

Аналогичная картина получается и при пересечении данной поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxz и Oyz.

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить эллипсоид, как замкнутую овальную поверхность. Величины a, b, c называются ***полуосями*** эллипсоида. В случае $a = b = c$ эллипсоид является ***сферой*** (рис. 31).

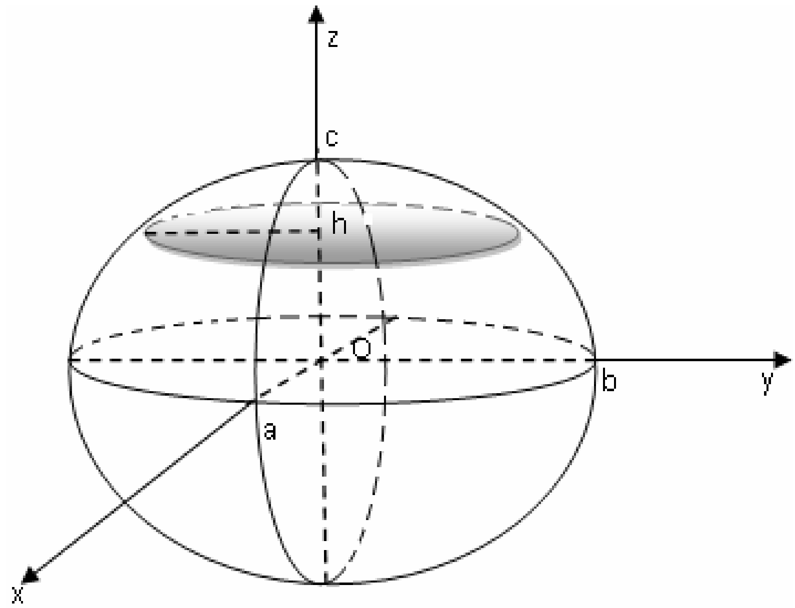


Рис. 31

Определение 5.21.3. ***Однополостным гиперболоидом*** называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (5.21.3)$$

Уравнение (5.21.3) называется ***каноническим уравнением однополостного гиперболоида.***

Установим вид поверхности (5.21.3). Для этого рассмотрим сечение ее координатными плоскостями Oxz ($y = 0$) *и* Oyz ($x = 0$). Получаем соответственно уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$$

из которых следует, что в сечениях получаются гиперболы.

Теперь рассмотрим сечения данного гиперболоида плоскостями $z = h$, параллельными координатной плоскости Oxy. Линия, получающаяся в сечении, определяется уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^{*2}}+\dfrac{y^2}{b^{*2}}=1, \\ z=h, \end{cases} \tag{5.21.4}$$

из которых следует, что плоскость $z = h$ пересекает гиперболоид по эллипсу с полуосями $a^*=a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ и $b^*=b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$, достигающими своих наименьших значений при $h = 0$, т.е. в сечении данного гиперболоида координатной плоскостью Oxy получается самый маленький эллипс с полуосями $a^* = a$ и $b^* = b$. При бесконечном возрастании $|h|$ величины a^* и b^* возрастают бесконечно.

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить однополостный гиперболоид в виде бесконечной трубки, бесконечно расширяющейся по мере удаления (по обе стороны) от плоскости Oxy.

Величины a, b, c называются полуосями однополостного гиперболоида (рис. 32).

Определение 5.21.4. ***Двуполостным гиперболоидом*** называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{5.21.5}$$

Уравнение (5.21.) называется ***каноническим уравнением двуполостного гиперболоида.***

Установим геометрический вид поверхности (5.21.5). Для этого рассмотрим его сечения координатными плоскостями Oxz и Oyz. Получаем соответственно уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1 \\ x=0 \end{cases},$$

из которых следует, что в сечениях получаются гиперболы.

Теперь рассмотрим сечения данного гиперболоида плоскостями $z = h$, параллельными координатной плоскости Oxy. Линия, полученная в сечении, определяется уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1 \\ z=h \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^{*2}}+\dfrac{y^2}{b^{*2}}=1 \\ z=h \end{cases}, \tag{5.21.6}$$

из которых следует, что при $|h| > c$ $(c > 0)$ плоскость $z = h$ пересекает гиперболоид по эллипсу с полуосями $a^* = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$ и $b^* = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$. При увеличении $|h|$ величины a^* и b^* тоже увеличиваются.

При $h = \pm c$ уравнениям (5.21.6) удовлетворяют координаты только двух точек: $(0;\, 0;\, +c)$ и $(0;\, 0;\, -c)$ (плоскости $z = \pm c$ касаются данной поверхности).

При $|h| < c$ уравнения (5.21.6) определяют мнимый эллипс, т.е. точек пересечения плоскости $z = h$ с данным гиперболоидом не существует.

Величины a, b и с называются полуосями двуполостного гиперболоида (рис. 33).

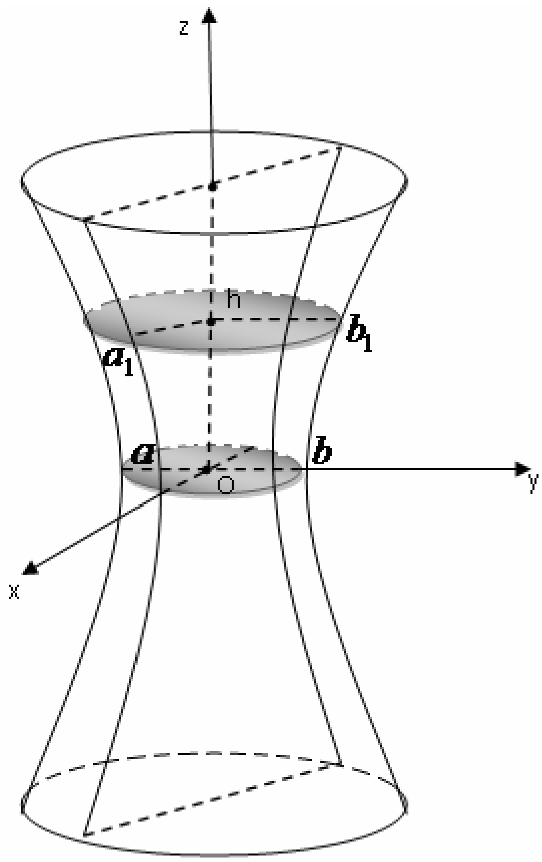


Рис. 32

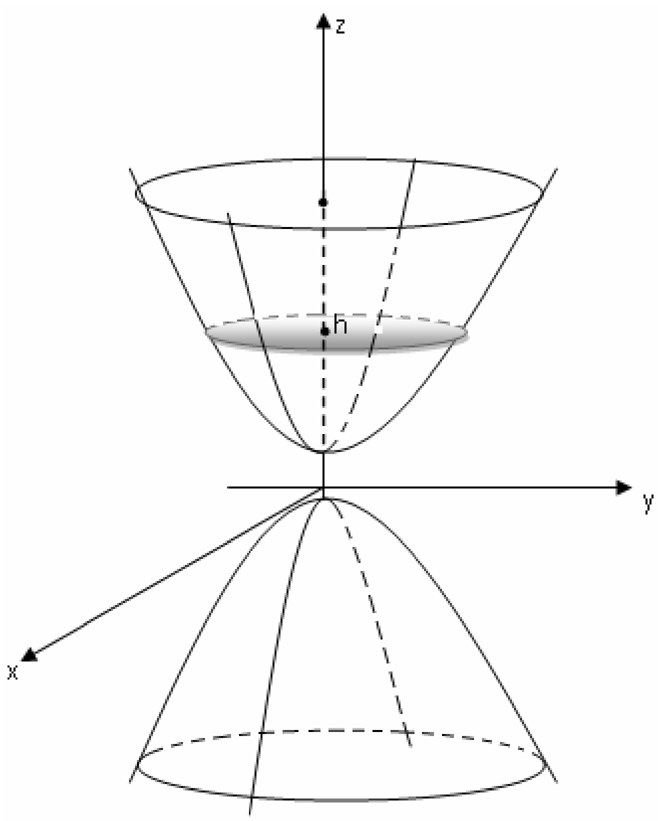


Рис. 33

Определение 5.21.5. ***Эллиптическим параболоидом*** называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 2z. \tag{5.21.7}$$

Уравнение (5.21.7) называется ***каноническим уравнением эллиптического параболоида.***

Рассмотрим сечения данной поверхности координатными плоскостями Oxz и Oyz. Получаем соответственно уравнения

$$\begin{cases} x^2 = 2p^2 z \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y^2 = 2q^2 z \\ x = 0 \end{cases},$$

из которых следует, что в сечениях получаются параболы, симметричные относительно оси Oz, с вершинами в начале координат.

Теперь рассмотрим сечения данного параболоида плоскостями $z=h$, параллельными координатной плоскости Oxy. Линия, получающаяся в сечении, определяется уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2} = 2h \\ z = h \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a*^2} + \dfrac{y^2}{b*^2} = 1 \\ z = h \end{cases}, \tag{5.21.8}$$

из которых следует, что при $h > 0$ плоскость $z=h$ пересекает эллиптический параболоид по эллипсу с полуосями $a* = \sqrt{2hp^2}$ и $b* = \sqrt{2hq^2}$. При увеличении h величины $a*$ и $b*$ тоже увеличиваются; при $h = 0$ эллипс вырождается в точку (плоскость $z=0$ касается данного параболоида). При $h < 0$ уравнения (5.21.8) определяют мнимый эллипс, т.е. точек пересечения плоскости $z = h$ с данным параболоидом нет.

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить эллиптический параболоид в виде бесконечно выпуклой чаши.

Точка (0; 0; 0) называется вершиной параболоида; числа p и q – его параметрами.

В случае $p = q$ уравнение (5.21.8) определяет окружность с центром на оси Oz, т.е. эллиптический параболоид можно рассматривать как поверхность (рис. 34), образованную вращением параболы вокруг её оси (параболоид вращения).

Определение 5.21.6. ***Гиперболическим параболоидом*** называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат, определяется уравнением

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 2z. \tag{5.21.9}$$

Уравнение (5.21.9) **называется каноническим уравнением гиперболического параболоида.**

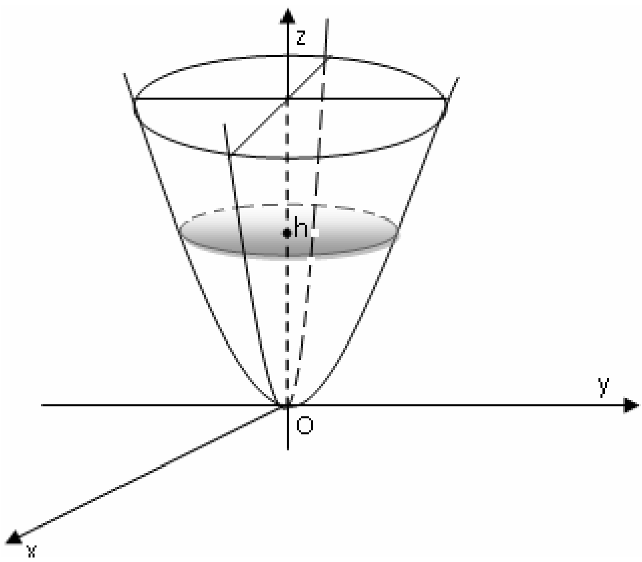


Рис. 34

Рассмотрим сечение параболоида плоскостью Oxz ($y = 0$). Получаем уравнение

$$\begin{cases} x^2 = 2p^2 z \\ y = 0 \end{cases}, \tag{5.21.10}$$

из которых следует, что в сечении получается парабола, направленная вверх, симметричная относительно оси Oz, с вершиной в начале координат. В сечениях поверхности плоскостями, параллельными плоскости Oxz ($y = h$), получаются так же направленные вверх параболы:

$$\begin{cases} x^2 = 2p^2\left(z + \dfrac{h^2}{2q^2}\right). \\ y = h \end{cases}$$

Рассмотрим сечение данного параболоида плоскостью Oyz ($x = 0$).

Получаем уравнение

$$\begin{cases} y^2 = -2q^2 z \\ x = 0 \end{cases},$$

из которых следует, что и в этом случае в сечении получается парабола, но теперь направленная вниз, симметричная относительно оси Oz, с вершиной в начале координат (рис. 35). Рассмотрев сечения параболоида плоскостями, параллельными плоскости Oyz ($x = h$), получим уравнения

$$\begin{cases} y^2 = -2q^2\left(z - \dfrac{h^2}{2p^2}\right), \\ x = h \end{cases}$$

из которых следует, что при любом h в сечении получается парабола, направленная вниз, а вершина её лежит на параболе, определённой уравнениями (5.21.10).

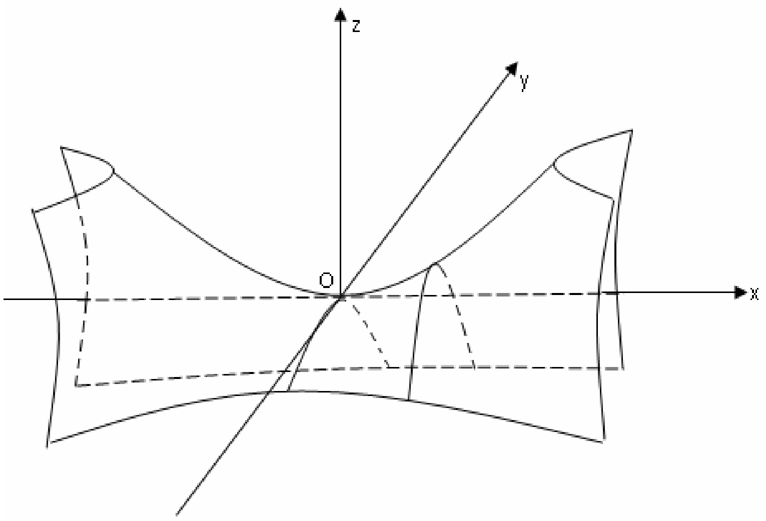


Рис. 35

Рассмотрев сечения параболоида плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy, получим уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p^2} - \dfrac{y^2}{q^2} = 2h \\ z = h \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{2p^2 h} - \dfrac{y^2}{2q^2 h} = 1 \\ z = h \end{cases},$$

из которых следует, что

при $h > 0$ в сечении получаются гиперболы, пересекающие плоскость Oxy;

при $h < 0$ – гиперболы, пересекающие плоскости Oyz;

при $h = 0$ – гипербола вырождается в пару пересекающихся прямых

$$\begin{cases} \dfrac{x}{p} - \dfrac{y}{q} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Точка (0; 0; 0) называется вершиной параболоида; числа p и q – его параметрами.

Определение 5.21.7. ***Конусом второго порядка*** называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (5.21.11)$$

Рассмотрим геометрические свойства конуса. В сечение этой поверхности плоскостью Oxz ($y = 0$) получаем линию

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

которая представляет собой две пересекающиеся прямые:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Аналогично, в сечении конуса плоскостью Oyz ($x = 0$) также получаются две пересекающиеся прямые

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим сечения поверхности плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy (рис. 36). Получим

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^{*2}} + \dfrac{y^2}{b^{*2}} = 1 \\ z = h \end{cases},$$

из которых следует, что при $h > 0$ и $h < 0$ в сечениях получаются эллипсы с полуосями $a^* = \dfrac{a|h|}{c}$, $b^* = \dfrac{b|h|}{c}$.

При увеличении абсолютной величины h полуоси a^* и b^* также увеличиваются.

При $h = 0$ линия пересечения поверхности с плоскостью $z = h$ вырождается в точку (0; 0; 0).

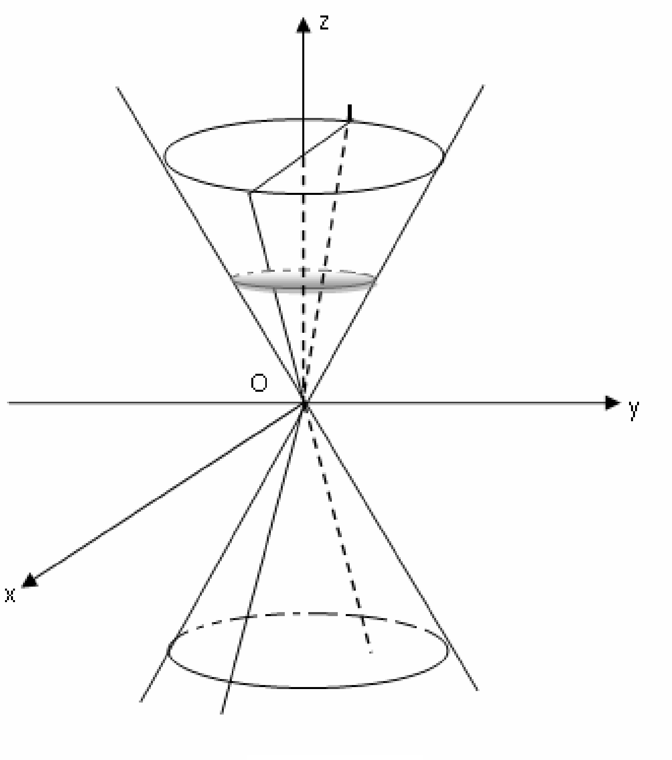


Рис. 36

5.22. Цилиндрические поверхности

Определение 5.22.1. Поверхность образованная движением прямой L, которая перемещается в пространстве, сохраняя постоянное направление и пересекая каждый раз некоторую кривую K, называется ***цилиндрической поверхностью*** или цилиндром (рис. 37). При этом кривая K называется направляющей цилиндра, а прямая L – его образующей.

Будем рассматривать цилиндрические поверхности, направляющие которых лежат в одной из координатных плоскостей, а образующие параллельны координатной оси, перпендикулярной этой плоскости.

Пусть в плоскости Oxy лежит некоторая линия K, уравнение которой $F(x;y)=0$. Построим цилиндр с образующими параллельными оси Oz, и направляющей K.

ТЕОРЕМА 5.2.1. Уравнение цилиндра, образующие которого параллельны оси Oz, имеет вид $F(x;y)=0$, т.е. не содержит координаты z.

Возьмём на цилиндре любую точку $M(x;y;z)$. Она лежит на какой-то образующей (рис. 38). Пусть N – точка пересечения этой образующей с плоскостью Oxy. Следовательно, точка N лежит на кривой K и её координаты удовлетворяют уравнению $F(x;y)=0$.

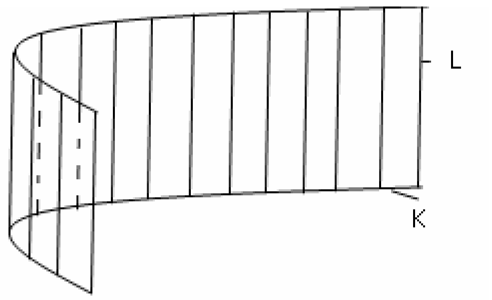


Рис. 37

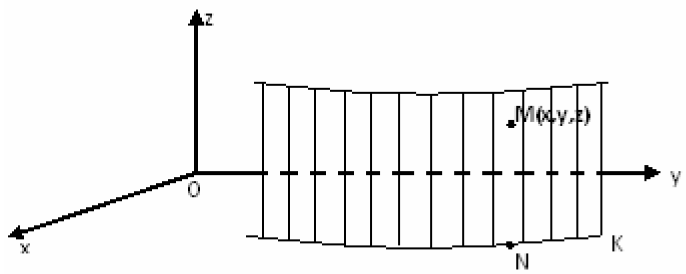


Рис. 38

Но точка M имеет такие же абсциссы x и ординату y, что и точка N. Следовательно, уравнению $F(x;y)=0$ удовлетворяют и координаты точки $M(x;y;z)$, так как оно не содержит z. И так как M – это любая точка цилиндра, то уравнение $F(x;y)=0$ и будет уравнением этого цилиндра.

Теперь ясно, что $F(x;z)=0$ есть уравнение цилиндра с образующими, параллельными оси Oy, а $F(y;z)=0$ – с образующими, параллельными оси Ox.

Замечание. Название цилиндра определяется названием направляющей.

Если направляющей служит эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в плоскости Oxy, то соответствующая цилиндрическая поверхность называется ***эллиптическим цилиндром.***

Частным случаем эллиптического цилиндра является круговой цилиндр (рис. 39), его уравнение $x^2+y^2=R^2$.

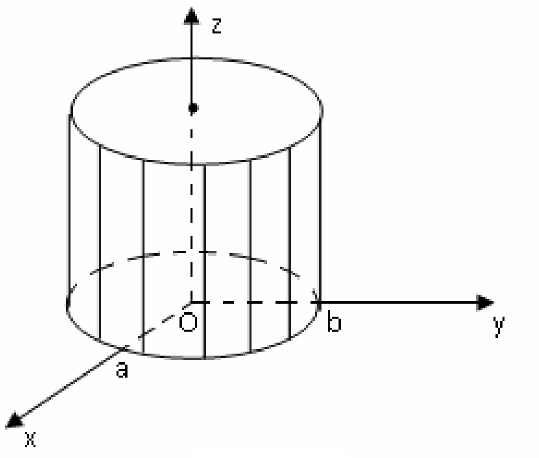


Рис. 39

Уравнение $x^2=2pz$ определяет в пространстве ***параболический цилиндр*** (рис. 40).

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ определяет в пространстве ***гиперболический цилиндр*** (рис. 41).

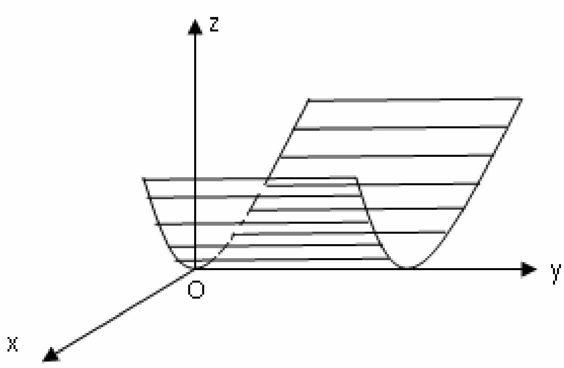


Рис. 40

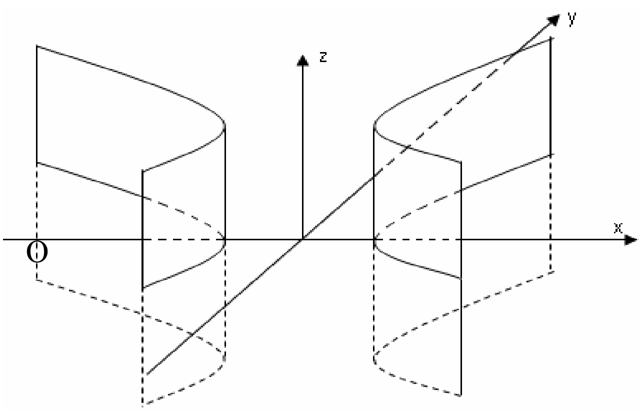


Рис. 41

Все эти поверхности называются цилиндрами второго порядка, так как их уравнения есть уравнения второй степени относительно текущих координат x, y и z.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Учебно-информационный блок для проведения практических занятий

Тема занятия	Тип занятия	Кол-во час
I. Прямая на плоскости, как линия 1-го порядка. Уравнение прямой на плоскости: по точке и нормальному вектору; направляющему вектору; угловому коэффициенту; по двум точкам; в «отрезках». Расстояние от точки до прямой.	Повторение и обобщение имеющихся знаний. Усвоение и закрепление изученного на лекции нового материала.	2
II. Решение задач на взаимное расположение прямых на плоскости.	Углубление и расширение полученных знаний. Усвоение нового материала. Текущий контроль.	2
III. Линии 2-го порядка на плоскости. Эллипс, гипербола, парабола.	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль.	2
IV. Уравнение поверхности в пространстве. Плоскость как поверхность 1-го порядка. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору, в «отрезках», по трем точкам. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.	Усвоение и закрепление изученного на лекции нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль.	2
V. Прямая в пространстве, как линия пересечения двух плоскостей. Уравнения прямой в пространстве.	Усвоение и закрепление изученного на лекции нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль.	2
VI. Взаимное расположение прямой и плоскости.	Повторение Углубление и расширение полученных знаний. Обобщение, систематизация и применение полученных знаний. Текущий контроль.	2
VII. Поверхности 2-го порядка.	Усвоение и закрепление изученного на лекции нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль.	2

Основная и дополнительная литература

1. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1980.

2. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак. – Мн.: Навука и тэхника, 1991.

3. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1973.

4. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986.

5. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981.

I. Прямая на плоскости как линия 1-го порядка. Уравнение прямой на плоскости по точке и нормальному вектору (направляющему вектору, угловому коэффициенту), по двум точкам, в «отрезках». Расстояние от точки до прямой

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы, информационной таблицы. Основной акцент ставится на усвоение способов задания прямой на плоскости.

2. Вместе со всей аудиторией обсуждение решений обучающих задач.

Обучающая задача. Даны вершины треугольника ABC: $A(-2,-3)$, $B(1,6)$, $C(6,1)$ (рис. 1). Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

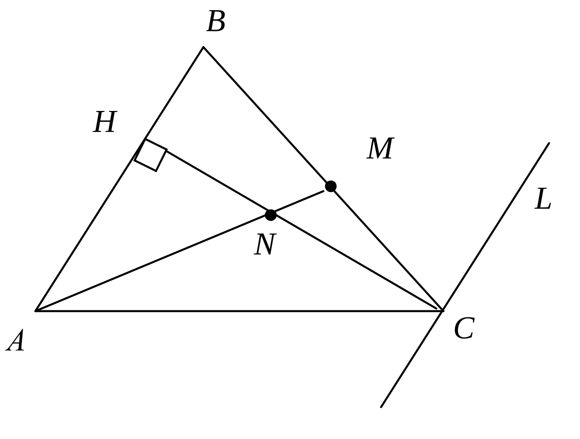


Рис. 1

Решение.

а) уравнение прямой, проходящей через две точки

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Значит,

AB: $\dfrac{x-(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{y-(-3)}{6-(-3)}$, или $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+3}{9}$, или $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{3}$, или $3x+6=y+3$. Таким образом, окончательно имеем

AB: $3x-y+3=0$.

б) высота $CH\perp AB \Rightarrow \bar{n}_{AB}\parallel CH$. Воспользуемся каноническим уравнением прямой:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

$$\bar{n}_{AB}=(3;-1)=\bar{S}_{CH};\ C(6;1).$$

$\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y-1}{-1}$, или $-(x-6)=3(y-1)$, или $-x+6=3y-3$. Следовательно, *CH*: $x+3y-9=0$.

в) определим координаты *M*, как середины отрезка *BC*.

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2};\quad y_M=\frac{y_B+y_C}{2}.$$

$$M\left(\frac{1+6}{2};\frac{6+1}{2}\right),\quad M\left(\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right).$$

Теперь по двум известным точкам *A* и *M* составляем уравнение медианы *AM*:

$\dfrac{x-(-2)}{\frac{7}{2}-(-2)}=\dfrac{y-(-3)}{\frac{7}{2}-(-3)}$, $\dfrac{x+2}{\frac{11}{2}}=\dfrac{y+3}{\frac{13}{2}}$, или $\dfrac{x+2}{11}=\dfrac{y+3}{13}$, или $13(x+2)=11(y+3)$, или $13x+26=11y+33$.

Таким образом, *AM*: $13x-11y-7=0$.

г) для нахождения координат точки *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH* составляем систему уравнений:

$$\begin{cases}13x-11y-7=0,\\ x+3y-9=0.\end{cases}\qquad \begin{cases}13\cdot(9-3y)-11y-7=0,\\ x=9-3y.\end{cases}$$

$13\cdot(9-3y)-11y-7=0$, $117-39y-11y-7=0$, $-50y+110=0$.

Отсюда, имеем $y=\frac{11}{5}$; $x=9-\frac{33}{5}=\frac{12}{5}$.

Таким образом, $N\left(\frac{12}{5};\frac{11}{5}\right)$.

д) так как прямая, проходящая через вершину C, параллельна стороне AB, то за вектор нормали можно взять вектор $\overline{n}_{AB}=(3;-1)$. По точке и нормальному вектору составляем уравнение прямой:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \qquad C(6;1).$$

L: $3(x-6)-1(y-1)=0$ или $3x-18-y+1=0$, L: $3x-y-17=0$.

е) расстояние от точки C до прямой AB вычисляем по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$$d=\frac{|3\cdot 6-1+3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{20}{\sqrt{10}}\approx 6{,}3.$$

Ответ: а) AB: $3x-y+3=0$, б) CH: $x+3y-9=0$,

в) AM: $13x-11y-7=0$, г) $N\left(\frac{12}{5};\frac{11}{5}\right)$,

д) $3x-y-17=0$, е) $d=\frac{20}{\sqrt{10}}\approx 6{,}3$.

3. Два студента у доски параллельно решают по две задачи:

Задача 1. Прямая L задана точкой $M_0(-1;2)\in L$ и нормальным вектором $\overline{n}=(2,3)$. Требуется написать уравнение прямой L, привести его к общему виду.

Ответ: L: $2x+3y-4=0$.

Задача 2. Написать уравнение прямой L_1, проходящей через точку $M_1(2;7)$, перпендикулярно заданной прямой L: $2x+3y-4=0$. Написать уравнение прямой L_2, проходящей через точку $M_2(-3;2)$ параллельно заданной прямой L.

Ответ: L_1: $3x-2y+8=0$,

L_2: $2x+3y=0$.

Задача 3. Прямая L задана точкой $M_0(-1;2) \in L$ и направляющим вектором $\overline{S} = (3;-1)$. Записать каноническое и параметрические уравнения прямой L.

$$\textit{Ответ}: L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1}, \quad \begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = \ \ 2 - t. \end{cases}$$

Задача 4. Прямая L задана двумя своими точками $M_1(1;2)$ и $M_2(-1;0)$. Записать каноническое и параметрические уравнения прямой L.

$$\textit{Ответ}: L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1}, \quad \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t. \end{cases}$$

4. Студент у доски решает:

Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(1;2)$, $B(2;-2)$ и $C(6;-1)$. Требуется:

а) Написать уравнение стороны AB.

$$\textit{Ответ}: AB: \ 4x + y - 6 = 0.$$

б) Написать уравнение высоты CD и вычислить ее длину.

$$\textit{Ответ}: CD: \ x - 4y - 10 = 0, \ d = \sqrt{17} \approx 4{,}12.$$

в) Найти косинус угла φ между высотой CD и медианой BM.

$$\textit{Ответ}: \cos\left(CD,^\wedge BM\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. Студент у доски решает задачу:

Задача. Дана точка $M_1(1;2)$ и прямая L. Вычислить расстояние от точки M_1 до прямой L. Найти точку M_1', симметричную точке M_1 относительно прямой L.

$$\textit{Ответ}: d(M_1, L) = \frac{6}{\sqrt{10}} \approx 1{,}9, \ M_1'(-2{,}6;\, 3{,}2).$$

Домашнее задание

1. Повторение теоретического материала по теме «Прямая на плоскости». Изучение обучающих задач из следующего практического занятия.

2. Решить следующие задачи:

З а д а ч а 1. Прямая L задана точкой $M_0(-2;3) \in L$ и нормальным вектором $\overline{n} = (2,3)$. Требуется написать уравнение прямой L, привести его к общему виду.

Ответ: L: $2x + 3y - 5 = 0$.

З а д а ч а 2. Написать уравнение прямой L_1, проходящей через точку $M_1(2;-5)$, перпендикулярно заданной прямой L: $x + 3y - 7 = 0$. Написать уравнение прямой L_2, проходящей через точку $M_2(-3;1)$, параллельно заданной прямой L.

Ответ: L_1: $3x - y - 11 = 0$,
L_2: $x + 3y = 0$.

З а д а ч а 3. Прямая L задана точкой $M_0(-2;3) \in L$ и направляющим вектором $\overline{S} = (0;-1)$. Записать каноническое и параметрические уравнения прямой L.

Ответ: L: $\dfrac{x+2}{0} = \dfrac{y-3}{-1}$, $\begin{cases} x = -2, \\ y = 3 - t. \end{cases}$

З а д а ч а 4. Прямая L задана двумя своими точками $M_1(1;-2)$ и $M_2(-1;7)$. Записать каноническое и параметрические уравнения прямой L.

Ответ: L: $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{9}$, $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -2 + 9t. \end{cases}$

Задание на 9 баллов:

З а д а ч а 5. Даны две противоположные вершины квадрата $A(1;3)$ и $C(-1;1)$. Найти координаты двух его других вершин и написать уравнения его сторон.

Ответ: $B(1;1)$, $D(-1;3)$,
(AB): $x - 1 = 0$, (BC): $y - 1 = 0$,
(CD): $x + 1 = 0$, (AD): $y - 3 = 0$.

З а д а ч а 6. Написать уравнения сторон треугольника ABC, если задана его вершина $A(1;3)$ и уравнения двух медиан $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$.

Ответ: $x - y + 2 = 0$, $x - 4y - 1 = 0$, $x + 2y - 7 = 0$.

II. Решение задач на взаимное расположение прямой на плоскости

1. Мини-контрольная по теме «Производная» (на 5 минут).
2. Студенты самостоятельно решают:

Даны прямые $L_1:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}$; $\quad L_2:\ \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{0}$. Требуется:

а) Исследовать взаимное расположение прямых L_1 и L_2.

Ответ: пересекаются.

б) Найти точку пересечения прямых L_1 и L_2, угол между прямыми.

Ответ: $L_1 \cap L_2 = M(-5;0)$, $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

3. Решение и обсуждение задач на 9 баллов из домашнего задания 5 (два студента у доски, пока идет обсуждение первой задачи, второй студент готовит решение второй).
4. Со всей аудиторией анализ решения обучающей задачи.

Обучающая задача. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $C(4;3)$, а также уравнения биссектрисы $x+2y-5=0$ и медианы $4x+13y-10=0$, проведенных из одной вершины.

Решение. Так как точка $C(4;3)$ не принадлежит ни одной из прямых $x+2y-5=0$ и $4x+13y-10=0$, то предположим, что прямые выходят из вершины *B*. Обозначим *BK*: $x+2y-5=0$, $BM:\ 4x+13y-10=0$.

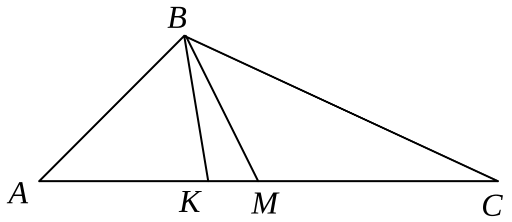


Рис. 2

Найдем координаты вершины *B*, как точку пересечения двух прямых. Для этого решим систему уравнений:

$$B:\begin{cases} x+2y-5=0, \\ 4x+13y-10=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5-2y, \\ 20-8y+13y-10=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5-2y, \\ 5y=-10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-2, \\ x=9 \end{cases} \quad \text{или} \quad B(9;-2).$$

Составим уравнение стороны *BC* по двум точкам по формуле:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

$BC:\ \dfrac{x-4}{9-4}=\dfrac{y-3}{-2-3}$, или $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y-3}{-5}$, или $x-4=-y+3$, или

$BC:\quad x+y-7=0$.

Так как BK – биссектриса, то точки, лежащие на прямой BK равноудалены от сторон AB и BC.

Продолжим биссектрису BK и проведем через точку C прямую, перпендикулярную к BK (рис. 3).

Так как BK: $x+2y-5=0$, то $\overline{n}_{BK}=(1;2)\,||\,\overline{S}_{CK'}=(1;2)$, $C(4;3)$:

$\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-3}{2}$, или $2x-8=y-3$, или

$CK':\ 2x-y-5=0$,

где K' – точка пересечения биссектрисы BK и перпендикуляра.

Найдем координаты точки K':

$$K':\ \begin{cases}x+2y-5=0,\\ 2x-y-5=0\end{cases}\quad \begin{cases}x=5-2y,\\ 10-4y-y-5=0.\end{cases}\quad \begin{cases}x=5-2y,\\ -5y=-5.\end{cases},\quad \begin{cases}y=1,\\ x=3.\end{cases}$$

Итак, $K'(3;1)$.

Найдем координаты точки C', симметричной точки C, относительно биссектрисы BK по формулам:

$$x_{K'}=\frac{x_{C'}+x_C}{2},\qquad y_{K'}=\frac{y_{C'}+y_C}{2}.$$

$3=\dfrac{x_{C'}+4}{2}$, $\qquad x_{C'}=6-4$, $\qquad x_{C'}=2$.

$1=\dfrac{y_{C'}+3}{2}$, $\qquad y_{C'}=2-3$, $\qquad y_{C'}=-1$.

$C'(2;-1)$.

$C'\in AB$ по построению. По двум точкам находим уравнение прямой AB ($B(9;-2)$, $C'(2;-1)$).

$\dfrac{x-2}{9-2}=\dfrac{y+1}{-2+1}$, или $\dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y+1}{-1}$, или $-x+2=7y+7$, или

$AB:\quad x+7y+5=0$.

Достроим ΔABC до параллелограмма $ABCM'$ (рис. 4).

Через точку C проведем прямую, параллельную AB.

$\overline{n}_{AB}=(1;7)$, $C(4;3)$.

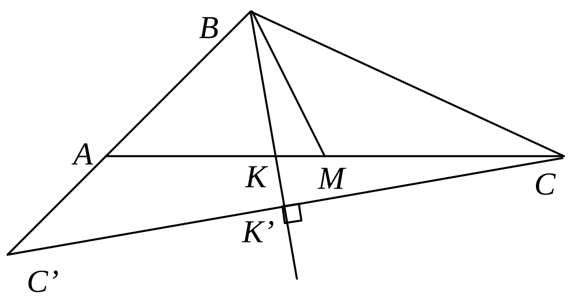


Рис. 3

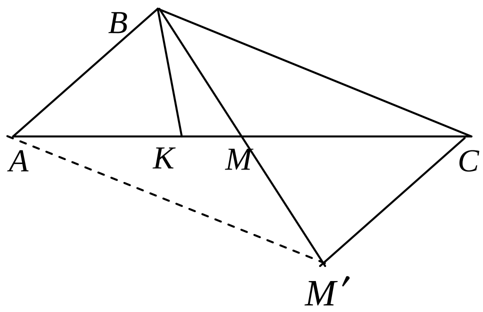


Рис. 4

Найдем уравнение прямой по точке и перпендикулярному вектору:
$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

$1(x-4)+7(y-3)=0$, или $x-4+7y-21=0$, или

CM': $x+7y-25=0$.

Найдем координаты точки M', где $M'=BM\cap CM'$.

M': $\begin{cases}4x+13y-10=0,\\ x+7y-25=0.\end{cases}$ $\begin{cases}100-28y+13y-10=0,\\ x=25-7y.\end{cases}$

$\begin{cases}-15y=-90,\\ x=25-7y.\end{cases}$ $\begin{cases}y=6,\\ x=-17,\end{cases}$ т.е. $M'(-17;6)$.

Так как в треугольнике BM – медиана, то в параллелограмме BM' будет диагональю. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, координаты точки M можно найти, как середину отрезка BM'.

$$x_M=\frac{x_B+x_{M'}}{2},\qquad y_M=\frac{y_B+y_{M'}}{2}.$$

$$x_M=\frac{9-17}{2}=-4,\qquad y_M=\frac{-2+6}{2}=2.$$

$M(-4;2)$.

Точка $M\in AC$. По двум точкам можно составить уравнение прямой AC. $M(-4;2)$, $C(4;3)$.

$\frac{x+4}{4+4}=\frac{y-2}{3-2}$, или $\frac{x+4}{8}=\frac{y-2}{1}$, или $x+4=8y-16$, или

AC: $x-8y+20=0$.

Ответ: AB: $x+7y+5=0$,
BC: $x+y-7=0$,
AC: $x-8y+20=0$.

4. Мини-диктант по способам задания прямой на плоскости.

Домашнее задание

1. Повторить теоретический материал по лекциям и информационной таблице по теме «Линии 2-го порядка на плоскости. Эллипс, гипербола, парабола».

2. Решить:

1) Даны прямые $L_1: \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-4}{0}$; $L_2: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{5}$. Требуется:

а) Исследовать взаимное расположение прямых L_1 и L_2.

Ответ: пересекаются.

б) Найти точку пересечения прямых L_1 и L_2, угол между прямыми.

Ответ: $L_1 \cap L_2 = M(2{,}8;\, 4)$, $\cos\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

2) Уравнение одной из сторон угла есть $4x-3y+9=0$, уравнение его биссектрисы есть $x-7y+21=0$. Написать уравнение прямой, на которой лежит другая сторона угла.

Ответ: $3x+4y-12=0$.

3) Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(-1;-1)$, $B(1;3)$ и $C(4;-1)$. Из вершины B проведена высота. К какой из сторон ближе расположена середина этой высоты?

Ответ: к стороне AB.

4) Дано уравнение эллипса $24x^2+49y^2=1176$. Найти:

а) длины его полуосей;
б) координаты фокусов;
в) эксцентриситет;
г) уравнения директрис и расстояние между ними.

Ответ: а) $a=7$, $b=2\sqrt{7}$; б) $F_1(-5{,}0)$, $F_2(5{,}0)$, в) $\varepsilon=\dfrac{5}{7}$, г) $x=\pm\dfrac{49}{5}, d=\dfrac{98}{5}=19{,}6$.

5) Установить, что уравнение $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$ определяет эллипс. Найти его центр C, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис.

Ответ: $C(1;-2)$, $a=2\sqrt{3}$, $b=4$, $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, $D_1: y+10=0$, $D_2: y-6=0$.

III. Линии 2-го порядка на плоскости. Эллипс, гипербола, парабола

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы, информационной таблицы, с изображением на доске схематических графиков кривых. Основной акцент ставится на усвоение канонических уравнений трех основных классов невырожденных кривых второго порядка и их построение в декартовой прямоугольной системе координат.

2. Два студента у доски решают упреждающие задачи 4 и 5 из домашнего задания. Проводится анализ и обсуждение их решений со всей аудиторией.

3. Студенты самостоятельно решают задачу:

Задача. Построить гиперболу $16x^2-9y^2=-144$. Найти:

а) полуоси; г) уравнения асимптот;
б) координаты фокусов; д) уравнения директрис.
в) эксцентриситет;

Ответ: а) a=3, $в$ =4; б) $F_1(0,-5)$, $F_2(0,5)$,
в) $\varepsilon=\frac{5}{4}$, г) $y=\pm\frac{4}{3}x$, д) $y=\pm\frac{16}{5}$.

4. Преподаватель у доски напоминает методику выделения полного квадрата в квадратном трехчлене.

5. Студент у доски решает задачу:

ЗАДАЧА. Установить, что данное уравнение $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$ определяет гиперболу. Найти ее центр C, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

Ответ: C(-5,1); a=8, $в$=6; $\varepsilon=\frac{5}{4}$;
уравнения асимптот: $3x-4y+19=0$, $3x+4y+11=0$;
уравнения директрис: $x=-\frac{7}{5}$, $x=\frac{57}{5}$.

6. Студент у доски решает задачу:

ЗАДАЧА. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, если известно, что парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси OX и $p=\frac{1}{2}$.

Ответ: $y^2=-x$.

7. Студенты самостоятельно решают задачу:

ЗАДАЧА. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, найти координаты ее вершины A и величину параметра p:

а) $y^2 = 4x - 8$; б) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$; в) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

Ответ: а) $A(2;0)$, $p = 2$.

б) $A(6;-1)$, $p = 3$.

в) A(-4; 3), $p = \frac{1}{4}$.

Замечание. У всех студентов, работающих у доски, проверяется знание таблицы производных, правил дифференцирования.

Домашнее задание

1. Подготовка теоретического материала по теме «Уравнение поверхности в пространстве. Плоскость как поверхность 1-го порядка. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору, в «отрезках», по трем точкам. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости».

2. Составить уравнение эллипса, зная, что:

а) его большая полуось равна 10 и фокусы имеют координаты $F_1(-6;0)$, $F_2(10;0)$;

б) $a = 5$, $F_1(-3;5), F_2(3;5)$.

Ответ: 1) $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$.

3. Установить, что уравнение $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$ определяет гиперболу. Найти ее центр, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

Ответ: $C(2;-1)$, $a = 3$, $b = 4$, $\varepsilon = \frac{5}{4}$,

уравнения асимптот: $4x + 3y - 5 = 0$ и $4x - 3y - 11 = 0$,

уравнения директрис: $y = -4,2$ и $y = 2,2$.

4. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу. Найти координаты ее вершины A и величину параметра p.

а) $y = 4x^2 - 8x + 7$; б) $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$.

Ответ: а) $A(1;3)$, $p = \frac{1}{8}$, б) $A(1;2)$, $p = 2$.

IV. Уравнение поверхности в пространстве. Плоскость как поверхность 1-го порядка. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору, в «отрезках», по трем точкам. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы, информационной таблицы. Основной акцент ставится на усвоение способов задания плоскости в пространстве, изучение взаимного расположения плоскостей. Провести краткий анализ решения обучающих задач.

Обучающая задача. Даны четыре точки $A_1(0,7,1)$, $A_2(2,-1,5)$, $A_3(1,6,3)$, $A_4(3,-9,8)$. Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$,

б) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к вектору $\overline{A_1A_2}$.

Вычислить косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Решение.

а) Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} x-0 & y-7 & z-1 \\ 2-0 & -1-7 & 5-1 \\ 1-0 & 6-7 & 3-1 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x & y-7 & z-1 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0, \qquad 2\cdot\begin{vmatrix} x & y-7 & z-1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} x & y-7 & z-1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$x\cdot\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}-(y-7)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+(z-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$x\cdot(-6)-(y-7)\cdot(0)+(z-1)\cdot(3) = 0,$$
$$-6x+3z-3=0,$$
$$(A_1A_2A_3):\quad 2x-z+1=0.$$

б) $\alpha\perp\overline{A_1A_2} \Rightarrow \bar{n}_\alpha=(\ 1,-4,2\ )$.

Воспользуемся формулой:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

$1(x-3)-4(y+9)+2(z-8)=0$, $\quad x-3-4y-36+2z-16=0$,

$\alpha: \; x-4y+2z-55=0$.

Для вычисления угла между плоскостями воспользуемся формулой:

$$\cos\left(\overline{n}_1,^\wedge\overline{n}_2\right)=\frac{\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2}{|\overline{n}_1|\cdot|\overline{n}_2|}.$$

В нашем случае $\overline{n}_1=(0,0,1)$, $\qquad \overline{n}_2=(2,0,-1)$.

Поэтому,

$$\cos\left(\overline{n}_1,^\wedge\overline{n}_2\right)=\frac{0\cdot2+0\cdot0+1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{4+1}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

2. Студент у доски решает:

Задача 1. Заданы плоскость *P*: $-2x+y-z+1=0$ и точка $M(1;1;1)$. Написать уравнение плоскости P', проходящей через точку *M*, параллельно плоскости *P*, и вычислить расстояние $\rho(P,P')$.

Ответ: $2x-y+z-2=0$, $\rho=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Задача 2. Написать уравнение плоскости P', проходящей через заданные точки $M_1(1;2;0)$ и $M_2(2;1;1)$ перпендикулярно плоскости *P*: $-x+y-1=0$.

Ответ: $x+y-3=0$.

3. Студент у доски решает:

Задача 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;1;1)$ параллельно векторам $\overline{a}_1=(0;1;2)$ и $\overline{a}_2=(-1;0;1)$.

Ответ: $x-2y+z=0$.

Задача 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;2;0)$ и $M_2(2;1;1)$ параллельно вектору $\overline{a}=(3;0;1)$.

Ответ: $-x+2y+3z-3=0$.

4. Студенты самостоятельно выполняют следующее задание: исследовать взаимное расположение плоскостей. В случае их параллельности, найти расстояние $\rho(P_1, P_2)$ между плоскостями, а в случае пересечения плоскостей, найти косинус угла между ними.

а) $P_1: -x+2y-z+1=0$, $P_2: y+3z-1=0$.

б) $P_1: 2x-y+z-1=0$, $P_2: -4x+2y-2z-1=0$.

Ответ: а) пересекаются, $\cos\left(\widehat{P_1,P_2}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{15}}$.

б) параллельны, $\rho(P_1,P_2)=\frac{3}{2\sqrt{6}}$.

Домашнее задание

1. Подготовка теоретического материала по теме «Прямая в пространстве, как линия пересечения двух плоскостей. Уравнение прямой в пространстве».

2. Выполнить следующие задания:

Упражнение 1. Заданы плоскость *P*: $x+y-z+1=0$ и точка $M(3;-2;1)$. Написать уравнение плоскости P', проходящей через точку *M*, параллельно плоскости *P*, и вычислить расстояние $\rho(P, P')$.

Ответ: $x+y-z=0$, $\rho=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Упражнение 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0;-1;1)$ параллельно векторам $\overline{a}_1=(3;1;2)$ и $\overline{a}_2=(-1;0;1)$.

Ответ: $x-5y+z-6=0$.

Упражнение 3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;3;0)$ и $M_2(2;0;-1)$ параллельно вектору $\overline{a}=(2;1;0)$.

Ответ: $x-2y+7z+5=0$.

Упражнение 4. Исследовать взаимное расположение плоскостей. В случае их параллельности, найти расстояние $\rho(P_1, P_2)$ между плоскостями, а в случае пересечения плоскостей, найти косинус угла между ними.

А) $P_1: x-y+1=0$, $P_2: y-z+1=0$;

б) $P_1: 2x-y-z+1=0$, $P_2: -4x+2y+2z-2=0$.

Ответ: а) пересекаются, $\cos\left(\widehat{P_1,P_2}\right)=-\frac{1}{2}$;

б) совпадают.

V. Прямая в пространстве, как линия пересечения двух плоскостей. Уравнение прямой в пространстве

1. Мини-контрольная по способам задания плоскости.

2. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы, информационной таблицы. Основной акцент ставится на усвоение способов задания прямой в пространстве, на изучение взаимного расположения прямых в пространстве. Провести краткий анализ решения обучающих задач.

Обучающие задачи

Задача 1. Даны четыре точки $A_1(0,7,1)$, $A_2(2,-1,5)$, $A_3(1,6,3)$, $A_4(3,-9,8)$. Составить уравнения:

а) прямой A_1A_2,

б) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$,

в) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2.

Вычислить синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой уравнений прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

$$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-7}{-1-7}=\frac{z-1}{5-1},$$

$$\frac{x}{2}=\frac{y-7}{-8}=\frac{z-1}{4}, \qquad \text{т.е. } A_1A_2:\ \frac{x}{1}=\frac{y-7}{-4}=\frac{z-1}{2}.$$

б) Из условия перпендикулярности прямой A_4M и плоскости $A_1A_2A_3$ следует, что в качестве направляющего вектора прямой можно взять нормальный вектор $\bar{n}=(2,0,-1)$ плоскости $A_1A_2A_3$. Воспользуемся формулой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

$$A_4M: \qquad \frac{x-3}{2}=\frac{y+9}{0}=\frac{z-8}{-1}.$$

в) $\overline{A_1A_2} \parallel A_3N$, значит, воспользуемся формулой:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

$$\overline{A_1A_2}=(2-0;-1-7;5-1)=(2;-8;4)\parallel(1;-4;2).$$

Тогда $\qquad A_3N:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-6}{-4}=\dfrac{z-3}{2}.$

Синус угла между прямой с направляющим вектором $\overline{S}=(m,n,p)$ и плоскостью с вектором нормали $\overline{n}=(A,B,C)$ вычисляется по формуле:

$$\sin\varphi=\frac{\left|\overline{n}\cdot\overline{S}\right|}{\left|\overline{n}\right|\left|\overline{S}\right|}.$$

В нашем случае $\qquad \overline{n}_{(A_1A_2A_3)}=(\ 2,0,-1\ ),$

$\overline{S}_{A_1A_2}=\overline{A_1A_4}=(3-0,-9-7,8-1)=(3,-16,7),$

$\overline{n}\cdot\overline{S}=2\cdot3+0\cdot(-16)-1\cdot7=6-7=-1,$

$\left|\overline{n}\right|=\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5},$

$\left|\overline{S}\right|=\sqrt{3^2+(-16)^2+7^2}=\sqrt{9+256+49}=\sqrt{314}.$

Значит, $\qquad \sin\varphi=\dfrac{|-1|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{314}}=\dfrac{1}{\sqrt{1570}}.$

З а д а ч а 2. Исследовать взаимное расположение прямых:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z-3}{0}\qquad\text{и}\qquad\frac{x-1}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+2}{-2}.$$

Найти расстояние и косинус угла между заданными прямыми.

Решение. По условию имеем направляющие векторы заданных прямых $\overline{S}_1(2,-3,0)$ и $\overline{S}_2(3,1,-2)$, а также точки, принадлежащие этим прямым, $M_0(2,-4,3)$ и $M_0'(1,4,-2)$. Тогда $\overline{M_0M'_0}=(-1,8,-5)$. Исследуем взаимное расположение прямых. Для этого вычислим смешанное произведение рассматриваемых трех векторов:

$$\overline{S_1}\,\overline{S_2}\,\overline{M_0M_0'}=\begin{vmatrix}2&-3&0\\3&1&-2\\-1&8&-5\end{vmatrix}=29\neq0\Rightarrow \text{прямые скрещиваются.}$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми определим по формуле $d\left(L_1,L_2\right)=\dfrac{\left|\overline{S_1}\;\overline{S_2}\;\overline{M_0M_0{}'}\right|}{\left|\overline{S_1}\times\overline{S_2}\right|}$. Векторное произведение

$$\overline{S_1}\times\overline{S_2}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{J} & \overline{k}\\ 2 & -3 & 0\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=6\overline{i}+4\overline{j}+11\overline{k};\quad \left|\overline{S_1}\times\overline{S_2}\right|=\sqrt{36+16+121}=\sqrt{173}.$$

Отсюда $d\left(L_1,L_2\right)=\dfrac{\left|\overline{S_1}\;\overline{S_2}\;\overline{M_0M_0{}'}\right|}{\left|\overline{S_1}\times\overline{S_2}\right|}=\dfrac{29}{\sqrt{173}}$. Для определения косинуса угла между прямыми воспользуемся формулой: $\cos\varphi=\dfrac{\overline{S_1}\cdot\overline{S_2}}{\left|\overline{S_1}\right|\left|\overline{S_2}\right|}$. Будем иметь $\cos\varphi=\dfrac{3}{\sqrt{182}}$.

3. Студент у доски решает:

Упражнение 1. Прямая L задана общими уравнениями. Написать для этой прямой канонические уравнения и уравнения в проекциях.

$$L:\quad\begin{cases}2x-y+2z-3=0,\\ x+2y-z-1=0.\end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{x-x_0}{-3}=\dfrac{y-y_0}{4}=\dfrac{z-z_0}{5}$,

где $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ – точка прямой L.

Например, $M_0\left(\dfrac{7}{5};-\dfrac{1}{5};0\right)$. Уравнения в проекциях: $\begin{cases}4x+3y-5=0,\\ 5x+3z-7=0,\\ 5y-4z+1=0.\end{cases}$

4. Студент у доски решает:

Упражнение 2. Для прямых $L_1:\ \dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z+3}{-2}$ и $L_2:\ \dfrac{x-21}{6}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z-2}{-1}$. Требуется:

а) доказать, что прямые не лежат в одной плоскости, т. е. являются скрещивающимися;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L_2 параллельно L_1;

в) вычислить расстояние между прямыми;

Ответ: б) $4x+3y+12z-93=0$; в) 13.

Домашнее задание

1. Подготовка теоретического материала по теме «Взаимное расположение прямой и плоскости».

2. Выполнить следующие задания:

Задание 1. Прямая L задана общими уравнениями:

$$L:\quad \begin{cases} x-y+z+2=0, \\ x+2y-4z-1=0. \end{cases}$$

Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1;-3;0)$.

Ответ: $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z}{4}$.

Задание 2. Даны четыре точки $A_1(2,-3,1)$, $A_2(2,-1,5)$, $A_3(1,0,3)$, $A_4(3,-5,4)$. Составить уравнения:

а) прямой A_1A_2,

б) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$,

в) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2,

Вычислить синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Ответ: а) $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{4}$;

б) $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-4}{-2}$; в) $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{4}$; $\sin\varphi=\dfrac{1}{2\sqrt{58}}$.

Задание 3. Исследовать взаимное расположение прямых

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z-3}{4} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{0}=\frac{y-4}{1}=\frac{z}{-2}.$$

Найти угол и расстояние между заданными прямыми.

Ответ: прямые скрещиваются; 1; $\cos\varphi=-\dfrac{11}{5\sqrt{5}}$.

VI. Взаимное расположение прямой и плоскости

1. Мини-контрольная по способам задания прямой в пространстве.

2. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы, информационной таблицы. Основной акцент ставится на изучение взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве.

3. Два студента у доски решают (один – с помощью аудитории и преподавателя, другой – самостоятельно):

Упражнение 1. Заданы прямая $L:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{0}$ и точка $M(0;1;2)\notin L$ (проверить!). Требуется:

а) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L и точку M;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно прямой L;

в) написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую L.

Ответ: а) $x-2y+z=0$,

б) $2x+y-1=0$,

в) $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ 2x+y-1=0, \end{cases}$ или $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{5}$.

Упражнение 2. Заданы плоскость $P:\ x+y-z+1=0$ и прямая $L:\ \dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$, причем $L\notin P$ (проверить!). Требуется:

а) вычислить $\sin\left(\widehat{P,L}\right)$ и координаты точки пересечения прямой и плоскости;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L перпендикулярно к плоскости P.

Ответ: а) $\sin\left(\widehat{P,L}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$, $M(1;-6;-4)$,

б) $3x-y+2z-1=0$.

4. Студент у доски решает:

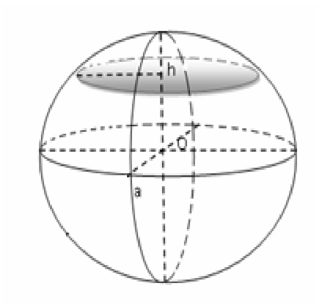
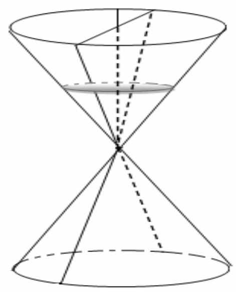
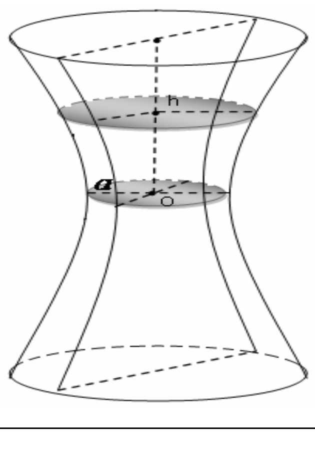
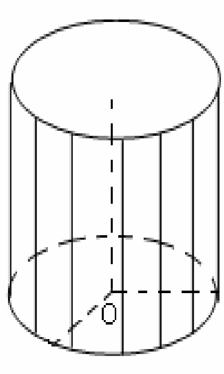
Задача. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(7;1;0)$ параллельно плоскости $2x+3y-z-15=0$ и пересекающей прямую $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{2}$.

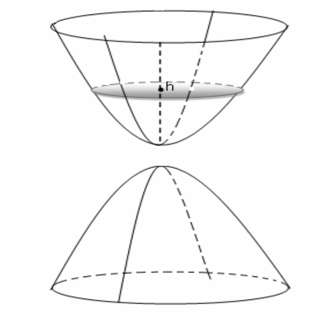
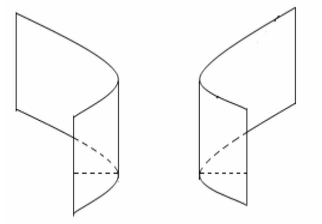
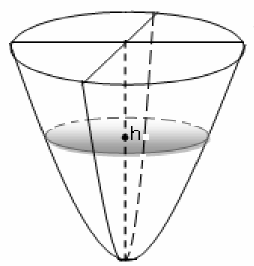
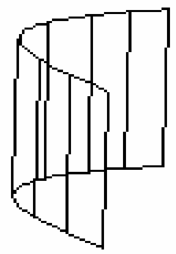
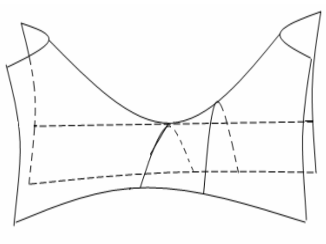
Ответ: $\dfrac{x-7}{67}=\dfrac{y-1}{-28}=\dfrac{z}{70}$.

VII. Поверхности второго порядка

Поверхности в пространстве – это геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию. Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел x, y и z – их координатами. Свойство, общее всем точкам поверхности, можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности. Между поверхностями второго порядка и кривыми второго порядка можно установить связь, а именно практически все кривые второго порядка имеют свой аналог в составе поверхностей второго порядка.

Проведем классификацию поверхностей второго порядка.

	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ *эллипсоид*		$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ *конус*
	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ *однополостный гиперболоид*		$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *эллиптический цилиндр*

	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ *двуполостный гиперболоид*		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *гиперболический цилиндр*
	$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z$ *эллиптический параболоид*		$y^2=2px$ параболический *цилиндр*
	$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=2z$ *гиперболический параболоид*		

Обучающие задачи

Задача 1. Уравнение поверхности $36x^2+16y^2+9z^2-216x+64y-18z+253=0$ привести к каноническому виду и определить вид поверхности, изобразить.

Решение. Выделим полный квадрат для x, y, z.

$$36(x^2-6x+9)+16(y^2+4y+4)+9(z^2-2z+1)-9-64-324+253=0$$

$$36(x-3)^2+16(y+2)^2+9(z-1)^2=144$$

Так как каноническое уравнение эллипсоида имеет следующий вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

разделим правую и левую часть на 144

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}+\frac{(z-1)^2}{16}=1.$$

Данная поверхность – эллипсоид с центром в точке $O'(3,-2,1)$ и полуосями $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ (рис. 5).

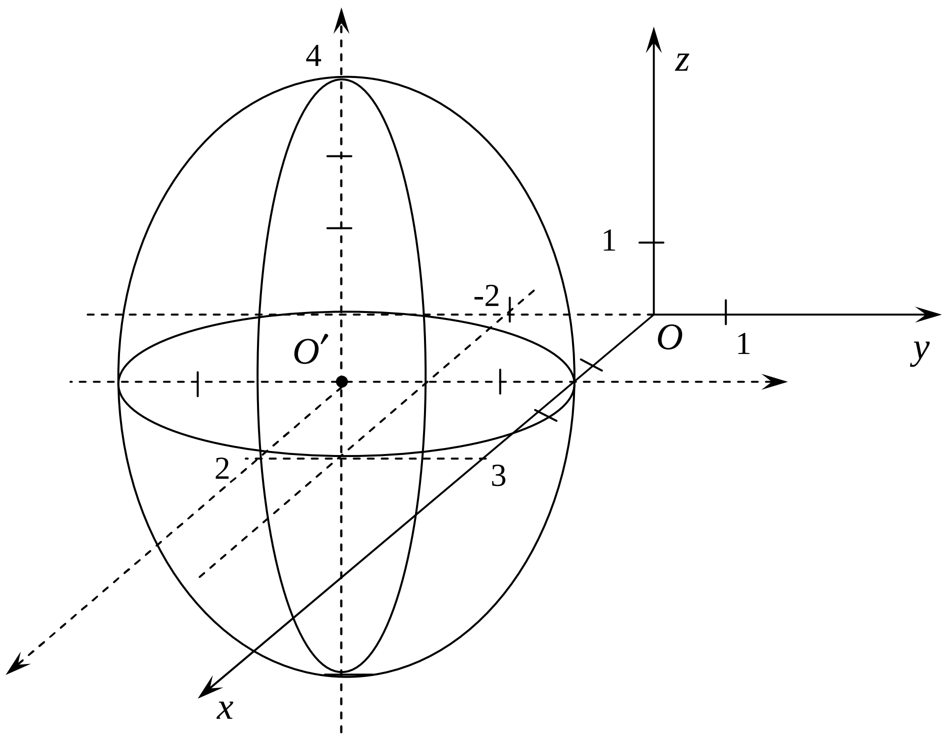


Рис. 5

Задача 2. Найти точки пересечения поверхности и прямой

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1, \frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-4}{-1}.$$

Решение.

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-4}{-1}=t \quad \begin{cases} \dfrac{x-2}{-1}=t \\ \dfrac{y-3}{-2}=t \\ \dfrac{z-4}{-1}=t \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=-t \\ y-3=-2t \\ z-4=-t \end{cases} \quad \begin{cases} x=-t+2 \\ y=-2t+3 \\ z=-t+4 \end{cases}$$

$$\frac{(-t+2)^2}{16}-\frac{(-2t+3)^2}{16}+\frac{(-t+4)^2}{9}=1$$

$$9(-t+2)^2-9(-2t+3)^2+16(-t+4)^2=16\cdot 9$$

$$9\left(t^2-4t+4\right)-9\left(4t^2-12t+9\right)+16\left(t^2-8t+16\right)=144$$

$$9t^2-36t+36-36t^2+108t-81+16t^2-128t+256=144$$
$$-11t^2-56t+67=0$$
$$t_1=1,\ t_2=-\frac{67}{11}$$
$$\begin{cases} x=-1+2=1 \\ y=-2\cdot 1+3=1 \\ z=-1+4=3 \end{cases}$$
Таким образом, первая точка пересечения (1, 1, 3).
$$\begin{cases} x=\frac{67}{11}+2=\frac{89}{11} \\ y=2\cdot\frac{67}{11}+3=\frac{167}{11} \\ z=\frac{67}{11}+4=\frac{111}{11} \end{cases}$$
Вторая точка пересечения $\left(\frac{89}{11};\frac{167}{11};\frac{111}{11}\right)$.

Ответ: (1,1,3); $\left(\frac{89}{11};\frac{167}{11};\frac{111}{11}\right)$.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка:
$$2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-\sqrt{6}x+6\sqrt{3}y-5\sqrt{2}z-3=0. \qquad (*)$$
Решение. Матрица A квадратичной формы старших членов имеет вид
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$
Так как ранг матрицы A равен двум, то уравнение (*) определяет нецентральную поверхность.

Составим характеристическое уравнение матрицы:
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0.$$
Корни этого уравнения $\lambda_1=2$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=0$.

Найдем главное направление, соответствующее характеристическому числу λ_1 = 2. Подставив в систему $\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x+a_{12}y+a_{13}z=0;\\ a_{21}x+(a_{22}-\lambda)y+a_{23}z=0;\\ a_{31}x+a_{32}y+(a_{33}-\lambda)z=0;\end{cases}$ коэффициенты заданного уравнения получим:

$$\begin{cases}2y+z=0;\\ 2x+z=0;\\ x+y+z=0;\end{cases}$$

За ненулевое решение этой системы можно принять, например, x = 1, y=1, z=– 2, тогда вектор $\bar{u}_1=\{1;1;-2\}$ будет определять первое главное направление.

Найдем главное направление, соответствующее характеристическому числу λ_2=5. Подставив в систему $\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x+a_{12}y+a_{13}z=0;\\ a_{21}x+(a_{22}-\lambda)y+a_{23}z=0;\\ a_{31}x+a_{32}y+(a_{33}-\lambda)z=0;\end{cases}$ коэффициенты заданного уравнения получим:

$$\begin{cases}(2-5)x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0;\\ 2x_1 & +(2-5)x_2 & +x_3 & = & 0;\\ x_1 & +x_2 & +(3-5)x_3 & = & 0.\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}-3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0;\\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 0;\\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=0;\\ \quad -5x_2+5x_3=0.\end{cases}$$

$x_2=x_3$. Пусть x_3= 1, тогда x_2= x_1 = 1, $\bar{u}_2=(1;1;1)$.

Наконец, третье главное направление, соответствующее характеристическому числу $\lambda_3=0$, определяем из системы:

$$\begin{cases}2x+2y+z=0;\\ 2x+2x+z=0;\\ x+y+3z=0;\end{cases}$$

За ненулевое решение этой системы можно принять, например, $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$. Тогда вектор $\bar{u}_3 = \{1; -1; 0\}$ определяет третье главное направление.

Перейдем теперь к единичным векторам главных направлений:

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{u}_1}{|\bar{u}_1|} = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}\right\};$$

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{u}_2}{|\bar{u}_2|} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right\};$$

$\bar{e}_3 = \dfrac{\bar{u}_3}{|\bar{u}_3|} = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 0\right\}$, которые определяют значения направляющих косинусов векторов этих направлений.

Тогда, применив формулы:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3, \\ y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3, \\ z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3, \end{cases} \qquad (**)$$

найдем коэффициенты линейной части $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}x + 3\sqrt{3}y - \dfrac{5}{2}\sqrt{2}z$ уравнения (*) в новой системе координат:

$$a'_{14} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 5\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0;$$

$$a'_{24} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 5\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5;$$

$$a'_{34} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{-2}{\sqrt{6}} + 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 5\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 = 4.$$

Следовательно, в новой системе координат уравнение (*) принимает вид

$$2x_1^2 + 5y_1^2 + 10y_1 + 8z_1 - 3 = 0.$$

Полученное уравнение можно переписать так:

$$2x_1^2 + 5(y_1 + 1)^2 + 8(z_1 - 1) = 0.$$

Совершив теперь параллельный перенос по формулам: $\begin{cases} x_1 = x'; \\ y_1 = y' - 1; \\ z_1 = z' + 1, \end{cases}$

мы получим каноническое уравнение данной поверхности

$$2x'^2 + 5y'^2 + 8z' = 0.$$

Данная поверхность является эллиптическим параболоидом.

З а д а ч а . Определите вид следующей поверхности второго порядка $$2x^2 - 3z^2 + 4z^2 - 36 = 0.$$

Уровень I

З а д а н и е 1. Выделением полных квадратов определите вид следующей поверхности второго порядка:

1) $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 - 12x - 24y - 24z + 30 = 0$;
2) $-x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4x + 4y - 24z + 52 = 0$;
3) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 2x + 8y + 27z - 18 = 0$;
4) $x^2 + 2y^2 + 6x - 18y - 8z + 49 = 0$;
5) $x^2 - 3y^2 + 8x + 6y + 10 = 0$;
6) $x^2 + 4x - 6y + 22 = 0$;
7) $z^2 - 2z - 8x - 7 = 0$;
8) $z^2 + 4z + 6y - 20 = 0$;
9) $4x^2 + 8y^2 - z^2 + 8x - 16y + 4z - 32 = 0$;
10) $3x^2 - 2z^2 + 6x + 2y + 4z + 1 = 0$;
11) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6x + 4y - 12z - 13 = 0$;
12) $4x^2 + 9y^2 - z^2 - 16x + 18y + 2z + 60 = 0$;
13) $9x^2 + 16y^2 - 36z^2 + 54x - 64y + 288z - 431 = 0$;
14) $3x^2 + 2y^2 - 12x + 12y - 18z + 30 = 0$;
15) $4x^2 + 9y^2 + 16x - 90 + 205 = 0$.

З а д а н и е 2. Выделением полных квадратов определите вид следующей поверхности второго порядка:

1. $2x^2 - 3z^2 + 4z^2 - 36 = 0$;
2. $3x^2 + 5y^2 - 5z^2 - 15 = 0$;
3. $4x^2 + 4y^2 - 5z = 0$;
4. $3x^2 + 15y^2 + 4z^2 + 48 = 0$;
5. $y^2 - z^2 + x = 0$;
6. $4y^2 - 3z^2 - 12x = 0$;
7. $5x^2 - 6y^2 + 15 = 0$;
8. $5x^2 - y^2 - z = 0$;
9. $5x^2 + 5y^2 - 3z = 0$;
10. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$;
11. $4x^2 - y^2 + 4z^2 + 16 = 0$;

12. $2x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 1 = 0$;
13. $16x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 48 = 0$;
14. $3x^2 + 4y^2 - 6z^2 - 96 = 0$;
15. $15x^2 - y^2 - 15z^2 - 30 = 0$.

Уровень II

Задание 1.

1. Установить, что плоскость $x - 2 = 0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершины.

2. Установить, что плоскость $z + 1 = 0$ пересекает однополостной гиперболоид $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$ по гиперболе; найти ее полуоси и вершины.

3. Установить, что плоскость $y + 6 = 0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ по параболе; найти ее параметр и вершину.

4. Установить, какая линия является сечением эллипсоида $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$ плоскостью $2x - 3y + 4z - 11 = 0$.

5. Установить, что плоскость $z - 3 = 0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершину.

6. Установить, какая линия является сечением гиперболического параболоида $\frac{x^2}{2}-\frac{z^2}{3}=y$ плоскостью $3x - 3y + 4z + 2 = 0$, и найти его центр.

7. Установить, что плоскость $y + 10 = 0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=6z$ по параболе; найти ее параметр и вершину.

8. Установить, что плоскость $z + 9 = 0$ пересекает однополостной гиперболоид $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{2}=1$ по гиперболе; найти ее полуоси и вершины.

9. Установить, что плоскость $x - 6 = 0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{9}=1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершины.

10. Установить, что плоскость $z - 5 = 0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершину.

11. Установить, какая линия является сечением гиперболического параболоида $\frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{3} = 2y$ плоскостью $3x - 3y + 4z + 2 = 0$, и найти его центр.

12. Установить, какая линия является сечением эллипсоида $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ плоскостью $2x - 3y + 4z - 11 = 0$.

13. Установить, что плоскость $z + 4 = 0$ пересекает однополостной гиперболоид $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$ по гиперболе; найти ее полуоси и вершины.

14. Установить, что плоскость $y - 7 = 0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершины.

15. Установить, что плоскость $x - 5 = 0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершину.

Задание 2.

1. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, $y = 0$ вокруг оси OY.

2. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $z = 0$ вокруг оси OY.

3. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{z^2}{9} = 1$, $y = 0$ вокруг оси OZ.

4. Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$, $y = 0$ вокруг оси OZ.

5. Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$, $x = 0$ вокруг оси OZ.

6. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, $z=0$ вокруг оси *OY*.

7. Составить уравнение поверхности, образованной вращением прямой $y=4z$, $x=0$ вокруг оси *OZ*.

8. Составить уравнение поверхности, образованной вращением параболы $y^2=2x$, $z=0$ вокруг оси *OX*.

9. Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\frac{x^2}{10}-\frac{z^2}{9}=1$, $y=0$ вокруг оси *OZ*.

10. Составить уравнение поверхности, образованной вращением прямой $x=4z$, $y=0$ вокруг оси *OZ*.

11. Составить уравнение поверхности, образованной вращением параболы $x^2=4y$, $z=0$ вокруг оси *OY*.

12. Составить уравнение поверхности, образованной вращением параболы $z^2=8y$, $x=0$ вокруг оси *OY*.

13. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$, $y=0$ вокруг оси *OZ*.

14. Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1$, $y=0$ вокруг оси *OZ*.

15. Составить уравнение поверхности, образованной вращением прямой $x=4y+5$, $z=0$ вокруг оси *OY*.

Задание 3. Найти точки пересечения поверхности и прямой (в ответ указать точку, содержащую целочисленные значения):

1. $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$, $\frac{x-3}{6}=\frac{y+4}{5}=\frac{z+2}{3}$; *Ответ*: (9, 1, 1).
2. $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{16}=1$, $\frac{x-5}{-5}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{2}$; *Ответ*: (0, 0, 4).
3. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-3}{-1}$; *Ответ*: (4, 3, 2).

4. $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=z$, $\frac{x-5}{-4}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+4}{6}$; *Ответ*: (1, 3, 2).

5. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$, $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z-2}{-2}$; *Ответ*: (4, – 2, 0).

6. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$, $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-10}{-7}=\frac{z-3}{-3}$; *Ответ*: (0, 3, 0).

7. $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$, $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z}{3}$; *Ответ*: (5, 5, 3).

8. $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{3}$; *Ответ*: (4, – 2, 0).

9. $\frac{x^2}{81}+\frac{z^2}{4}=y$, $\frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+2}{6}$; *Ответ*: (9, 5, 4).

10. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$, $\frac{x-3}{-3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{4}$; *Ответ*: (0, 4, 4).

11. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$, $\frac{x-5}{-5}=\frac{y+4}{4}=\frac{z-3}{-1}$; *Ответ*: (0, 0, 2).

12. $\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z+1}{3}$; *Ответ*: (0, 0, 2).

13. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=z$, $\frac{x-1}{8}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-5}{-3}$; *Ответ*: (9, 3, 2).

14. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{81}+\frac{z^2}{4}=1$, $\frac{x-4}{-3}=\frac{y+5}{8}=\frac{z}{2}$; *Ответ*: (1, 3, 2).

15. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$, $\frac{x-10}{-8}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-1}$; *Ответ*: (2, 1, 2).

Задание 4. Построить тело, ограниченное поверхностями

1. $x^2=z$, $z=0$, $2x-y=0$, $x+y=9$;
2. $z^2=4-y$, $x^2+y^2=4y$;
3. $y^2=z$, $z=0$, $x^2+y^2=9$, $z=0$;
4. $y=z$, $z=0$, $z=0$, $y=\sqrt{4-x}$, $y=\frac{1}{2}(x-1)$;
5. $y^2=x$, $z^2+y^2=16$, $x=0$;

6. $x^2 = y$, $y = 0$, $2x - y = 0$, $x + y = 9$;

7. $y^2 = 2 - x$, $x^2 + z^2 = 2z$;

8. $y^2 = x$, $x = 0$, $z^2 + y^2 = 9$, $z = 0$;

9. $x = z$, $z = 0$, $z = 0$, $x = \sqrt{1 - y}$, $x = y - 1$;

10. $y^2 = 3x$, $z^2 + y^2 = 9$, $x = 0$;

11. $x^2 = y$, $y = 0$, $x - y = 0$, $x + y = 4$;

12. $z^2 = 4 - y$, $x^2 + y^2 = 4$;

13. $y^2 = 2z$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$;

14. $y = 2z$, $z = 0$, $z = 0$, $y = \sqrt{16 - x}$, $y = \frac{1}{4}(x - 1)$;

15. $y^2 = 2x$, $z^2 + y^2 = 4$, $x = 0$.

Уровень III

1. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка $x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 3xz - 2x + y - 15z - 15 = 0$.

2. Произведите равномерное сжатие параболоида вращения $z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16}$ вдоль оси OY так, чтобы в сечении его плоскостью $z = 3$ получить эллипс $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{12} = 1$.

Индивидуальные домашние задания

При выполнении индивидуальных заданий использовать математические пакеты MathCAD, MatLab, Maple (см. приложение).

З а д а н и е 1.

1. Преобразовать к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка, назвать и построить поверхность:

а) $y^2 = z + 1$ б) $x^2 + 4y^2 – 3z^2 – 6z = 0$

2. Преобразовать к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка, назвать и построить поверхность:

а) $x^2 + z^2 + 4x + 3 = 0$ б) $4x^2 + y^2 – z^2 + 4z – 4 = 0$

3. Преобразовать к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка, назвать и построить поверхность:

а) $4x^2 + y^2 + 4z^2 – 2y – 3 = 0$ б) $x^2 + 3y^2 – 6y – z + 4 = 0$

4. Преобразовать к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка, назвать и построить поверхность:

а) $4x^2 – y^2 + z^2 – 2z + 1 = 0$ б) $x^2 + 3z^2 – y + 2 = 0$

5. Преобразовать к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка, назвать и построить поверхность:

а) $x^2 – 2y^2 + z^2 – 4z – 4 = 0$ б) $x^2 + 6y^2 – z + 2 = 0$

6. Преобразовать к каноническому виду уравнение поверхности □ТОрого порядка, назвать и построить поверхность:

а) $x^2 + y^2 + z^2 – 4y – 4z + 4 = 0$ б) $z + x^2 – 4 = 0$

7. Преобразовать к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка, назвать и построить поверхность:

а) $y^2 + 6y – 4x – 13 = 0$ б) $6x^2 – y^2 + 4z^2 + 4y + 8 = 0$

8. Преобразовать к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка, назвать и построить поверхность:

а) $3x^2 + 6y^2 + 4z^2 – 12x – 66y + 54 = 0$ б) $x^2 + z^2 – y – 4 = 0$

9. Преобразовать к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка, назвать и построить поверхность:

а) $x^2 + y^2 + z – 4 = 0$ б) $x^2 – y^2 + 3z^2 – 4x + 4 = 0$

10. Преобразовать к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка, назвать и построить поверхность:

а) $x^2 + y^2 – 4z^2 – 2y + 16z – 11 = 0$ б) $y^2 + z^2 + x – 3 = 0$

Задание 2.

1. Преобразовать к каноническому виду уравнение второго порядка, назвать и построить кривую $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$.

2. Преобразовать к каноническому виду уравнение линии второго порядка, назвать и построить график $y^2 + 9y - 4x + 16 = 0$.

3. Преобразовать к каноническому виду уравнение линии второго порядка, назвать и построить кривую $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$.

4. Преобразовать к каноническому виду уравнение линии второго порядка, назвать и построить кривую $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 21 = 0$.

5. Преобразовать к каноническому виду уравнение линии второго порядка, назвать и построить кривую $2x^2 + 2y^2 - 5x + 10y = 0$.

6. Преобразовать к каноническому виду уравнение линии второго порядка, назвать и построить график $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y + 16 = 0$.

7. Преобразовать к каноническому виду уравнение линии второго порядка, назвать и построить кривую $3x^2 - 9x + 3y^2 + 10y - 9 = 0$.

8. Преобразовать к каноническому виду уравнение линии второго порядка, назвать и построить график $4x^2 - 8x + 5y - 2 = 0$.

9. Преобразовать к каноническому виду уравнение линии второго порядка, назвать и построить кривую $5x^2 - 2y + 8x - 6 = 0$.

10. Преобразовать к каноническому виду уравнение линии второго порядка, назвать и построить кривую $2x^2 - 3x - y^2 + 4y - 6 = 0$.

11. Преобразовать к каноническому виду уравнение линии второго порядка, назвать и построить кривую $5y^2 - 10y + x + 6 = 0$.

12. Преобразовать к каноническому виду уравнение линии второго порядка, назвать и построить кривую $3x^2 - 9x + 3y^2 + 10y = 0$.

13. Преобразовать к каноническому виду уравнение линии второго порядка, назвать и построить кривую $9x^2 - 4y^2 + 18x + 8y - 31 = 0$.

14. Преобразовать к каноническому виду уравнение линии второго порядка, назвать и построить кривую $4x^2 + 9y^2 + 16x + 18y - 11 = 0$.

15. Преобразовать к каноническому виду уравнение линии второго порядка, назвать и построить кривую $2y^2 - 8y + x + 3 = 0$.

16. Преобразовать к каноническому виду уравнение линии второго порядка, назвать и построить кривую $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$.

Трехуровневые тестовые задания к разделу
«Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»

Уровень I

1. Написать уравнение прямой L_1, проходящей через точку $M_1(2;-5)$, перпендикулярно заданной прямой L: $2x+y-4=0$. Написать уравнение прямой L_2, проходящей через точку $M_2(-3;2)$, параллельно заданной прямой L.

2. Прямая L задана точкой $M_0(-3;2)\in L$ и нормальным вектором $\overline{n}=(-2,5)$. Требуется написать уравнение прямой L, привести его к общему виду.

3. Вычислить расстояние от точки $B(1, 0)$ до прямой AC, если $A(5, -3)$, $C(17, 2)$.

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0;-1;1)$ параллельно векторам $\overline{a}_1=(3;1;2)$ и $\overline{a}_2=(-1;0;1)$.

5. Привести уравнение к каноническому виду и определить вид поверхности: $4x^2-9y^2+3z^2-16x-54y-72z-65=0$.

Уровень II

1. Заданы прямые:

$$AB: 7x+3y-5=0,$$
$$BC: x-y+10=0,$$
$$AC: x-3=0.$$

Найти:

- вершины ΔABC;
- площадь ΔABC;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину $A \parallel BC$;
- определить углы ΔABC.

2. Написать уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(-1, 1)$, чем к точке $B(-4, 4)$. Построить линию.

3. Дана точка $A(1; -3; 2)$.Написать уравнение плоскости α, проходящей через точку A, параллельно плоскости $X0Z$.

4. Заданы плоскость P: $x+y-z+1=0$ и точка $M(3;-2;1)$. Написать уравнение плоскости P', проходящей через точку M, параллельно плоскости P, и вычислить расстояние $\rho(P,P')$.

5. Прямая L задана общими уравнениями. Написать канонические уравнения параллельной ей прямой, проходящей через точку $M(3;-2;1)$.

$$L:\quad \begin{cases} 2x-y+2z-3=0, \\ x+2y-z-1=0. \end{cases}$$

6. Исследовать форму поверхности и построить её:

$$2x^2-9y^2-z^2=36$$

Уровень III

1. Написать уравнение множества точек, сумма расстояний каждой из которых от точек $F_1(2, 0)$ и $F_2(-2, 0)$ равна $2\sqrt{5}$. Построить линию.

2. Написать уравнение множества точек плоскости, равноудаленных от точки $F(2, 2)$ и от оси $0X$. Построить линию.

3. Написать уравнение множества точек плоскости, равноудаленных от оси $0Y$ и точки $F(4, 0)$. Построить линию.

4. Дана плоскость (P) $x+y-z+1=0$ и прямая (l) $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. Написать уравнение плоскости, проходящей через (l) перпендикулярно плоскости P.

5. Построить тело, ограниченное указанными поверхностями:

$$x^2+y^2=4z^2,\ z\geq 0,\ y=x,\ y=8x,\ x=2.$$

ГЛОССАРИЙ

Уравнение прямой с угловым коэффициентом	$y = kx + b$, здесь k – угловой коэффициент
Общее уравнение прямой	$Ax+By+C=0$, здесь A, B, C – произвольные числа, не равные нулю одновременно
Формула вычисления угла между двумя прямыми	$\mathrm{tg}\,\theta = \left\| \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right\|$
Условие параллельности двух прямых $\boldsymbol{y = k_1 x + \bar{b}_1}$ ***и*** $\boldsymbol{y = k_2 x + \bar{b}_2}$	$k_1 = k_2$
Условие перпендикулярности двух прямых $\boldsymbol{y = k_1 x + b_1}$ ***и*** $\boldsymbol{y = k_2 x + b_2}$	$k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$
Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_1(x_1, y_1)$, с данным угловым коэффициентом k	$y - y_1 = k(x - x_1)$
Формула вычисления расстояния d от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $Ax+By+C=0$	$d = \dfrac{\|Ax_1 + By_1 + C\|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
Уравнение окружности с центром в точке $C(a, b)$ и радиусом R	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$
Окружность	геометрическое место точек, удаленных от точки $C(a, b)$ на равное расстояние R
Эллипс	геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, большая, чем расстояние между фокусами
Каноническое уравнение эллипса	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где a, b – полуоси эллипса
Гипербола	геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, меньшая, чем расстояние между фокусами
Каноническое уравнение гиперболы	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где a – действительная, b – мнимая полуоси гиперболы.

Парабола	геометрическое место точек, равностоящих от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой
Каноническое уравнение параболы	$y^2 = 2px$, здесь p – расстояние от фокуса до директрисы
Общее уравнение плоскости	$Ax+By+Cz+D=0$, где $\overline{n}\{A,B,C\}$ – вектор нормали к плоскости
Формула вычисления угла между двумя плоскостями (угол между их нормалями)	$\cos\varphi = \dfrac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$, где $\overline{n}_1\{A_1, B_1, C_1\}$, $\overline{n}_2\{A_2, B_2, C_2\}$ – векторы нормали к данным плоскостям
Условие перпендикулярности двух плоскостей (это условие эквивалентно условию перпендикулярности векторов нормали)	$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$
Условие параллельности двух плоскостей (это условие эквивалентно условию параллельности векторов нормали $\overline{n}_1, \overline{n}_2$)	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$
Канонические уравнения прямой в пространстве	$\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$, здесь $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ – точка на прямой, $\overline{S} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой
Параметрические уравнения прямой в пространстве	$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$ где t – коэффициент пропорциональности
Общее уравнение прямой (пересечение двух плоскостей)	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$
Формула вычисления угла между прямой $\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$	$\sin\varphi = \dfrac{\lvert Am + Bn + Cp \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$

Условие параллельности прямой $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ ***и плоскости*** $Ax+By+Cz+D=0$	$Am+Bn+Cp=0$, $Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq 0$
Условие перпендикулярности прямой $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ ***и плоскости*** $Ax+By+Cz+D=0$	$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$
Формула вычисления угла между двумя прямыми $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ ***и*** $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$	$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$
Условие параллельности двух прямых $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ ***и*** $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$	$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$
Условие перпендикулярности двух прямых $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ ***и*** $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$	$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
Расстояние от точки до плоскости	$d(M_1,\alpha)=\frac{\lvert Ax_1+By_1+Cz_1+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
Расстояние от точки до прямой	$d(M,L)=\lvert\overline{M_0M_1}\rvert\cdot\sin\left(\overline{M_0M_1},\wedge\,\overline{S}\right)$
Расстояние между скрещивающимися прямыми	$d(L_1,L_2)=\frac{\lvert\overline{S_1}\ \overline{S_2}\,\overline{M_0M_0'}\rvert}{\lvert\overline{S_1}\times\overline{S_2}\rvert}$

УРОВНЕВО-РЕЙТИНГОВАЯ СИСТЕМА КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ В СЕМЕСТРЕ

Учебно-познавательная деятельность студентов в процессе обучения математике, даже при наличии управляемой системы, предполагает не только наличие добросовестной их работы, но и наличие эффективного контроля за этой деятельностью. Подобный контроль должен быть достаточно частым и систематическим, т.к. только в этом случае можно использовать вытекающие из его результатов выводы. Нужно также иметь в виду, что в процессе обучения математике необходимо формировать у студента умения самоконтроля за своей познавательной деятельностью. Проверяя и оценивая свои знания, выявляя в них пробелы, студент обращается к той или иной теме. При этом обеспечивается осмысление и переработка изучаемого материала, познавательная деятельность приобретает спиралеобразный характер. Овладение умениями самоконтроля приучает обучающихся к планированию учебного труда, способствует углублению их внимания, памяти, выступает важным фактором развития познавательной самостоятельности.

Как свидетельствует педагогическая практика, систематический, научно организованный контроль оказывает положительное влияние на весь ход учебного процесса, активизирует самостоятельную деятельность студентов, облегчает управление этой деятельностью, приучает студентов к постоянной, кропотливой работе. Поэтому контроль должен быть полным, в смысле охвата объема изучаемого материала, и всеобщим, в смысле охвата всех обучающихся, а также учитывать дифференциацию студенческой аудитории. Основываясь на изучении непротиворечивых подходов к проблеме в психолого-педагогической литературе, на положениях некоторых педагогических исследований, на собственном педагогическом опыте, мы пришли к выводу, что наиболее оптимально для осуществления дифференциации обучения математике в техническом вузе деление студенческой аудитории на три типологические группы.

В соответствии с таким делением уровень усвоения высшей математики студентами, условно, можно охарактеризовать как **базовый, прикладной и творческий.**

В этой связи, уровень знаний каждого обучающегося мы предлагаем определять как с качественной, так и с количественной стороны. Количественные характеристики мы получаем с помощью тестов (в том числе – компьютерных), текущего, рубежного и итогового контроля знаний. Необходимо отметить, что методическая работа в этом направлении требует от преподавателя большого такта, кропотливого труда, внимания, гибкости и продуманности действий, особенно в первом семестре обучения.

Вместе с тем, на наш взгляд, нельзя абсолютизировать количественные характеристики уровня знаний при установлении индивидуально-типологических различий обучающихся. Здесь мы руководствуемся положением Л.С. Выготского о необходимости диагностики, определяющей «уровень актуального развития» и «зону ближайшего развития» личности. Последний может быть определен как уровень возможных достижений обучающегося в сотрудничестве с преподавателем. «Уровень актуального развития» студента наша методическая система определяет с помощью различных методов контроля за имеющимися математическими знаниями, устанавливая, тем самым, уровень готовности обучающегося к осуществлению дальнейшей учебной деятельности. Наиболее сложной мы считаем задачу определения «зоны ближайшего развития» студента, т.е. установление индивидуальных возможностей к самостоятельному овладению математических знаний, а также того «предельного» уровня, которого он может и должен достичь с помощью преподавателя и всей вузовской системы обучения.

Мы полагаем, что для выявления «зоны ближайшего развития» обучающегося в овладении высшей математикой главную роль играют качественные характеристики уровня его математических знаний. Эти характеристики возможно выявить в процессе исследования учебно-познавательной деятельности студентов при организации их обучения математике в соответствии с делением студенческой аудитории на три типологические группы. Для распределения обучающихся на группы мы выделяем следующие основные качественные показатели уровня математических знаний и уровня обучаемости: **а) объем знаний, б) понимание материала, в) осмысленность и действенность знаний, г) уровень познавательной активности и самостоятельности.**

Под **объемом знаний** студента по изучаемому разделу высшей математики понимается количество правил, определений, формулировок теорем и их доказательств, которые усвоены обучающимся на достаточном уровне.

Осмысленность и действенность знаний проверяется по умению студента анализировать проблемные ситуации, делать обобщения, выделять главное, структурировать, систематизировать математическую информацию, применять теоретические знания к решению практических задач, находить нетрадиционные пути решения этих задач.

Уровень познавательной активности и самостоятельности студента оценивается с учетом степени сложности решаемой проблемы или задачи и степени, проявленной при этом самостоятельности обучающегося (полностью решил сам или под руководством преподавателя, какая «доза» помощи при этом потребовалась).

Анализ количественных и качественных характеристик критерия определения уровня математических знаний и уровня обучаемости позволяет, условно, распределить студентов по трем типологическим группам.

Отметим, что качественные и количественные показатели тесно взаимосвязаны и являются результатом совместной деятельности преподавателя и студента. Качественные характеристики, как раз, проявляются в ходе определения количественных параметров указанного критерия. Качественные показатели должны отражать специфику усвоения учебного материала и уровень самостоятельного овладения им. Количественные показатели есть мера этих двух сторон. Дифференциация обучения позволяет учитывать эти специфические для каждого обучающегося характеристики в большей степени, чем при традиционном обучении, позволяет не рассматривать указанные показатели как раз и навсегда данные, а развивать их в процессе дифференцированной работы со студентами.

Проведем классификацию студенческой аудитории на три типологические группы, объединенные на основании исследования их учебно-познавательной деятельности с учетом вышеуказанных количественных и качественных характеристик. К первой типологической группе отнесем студентов с низким уровнем обучения, эти обучающиеся потенциально могут соответствовать базовому уровню усвоения математических знаний. Студентов со средним и высоким уровнем обучения отнесем ко второй и третьей типологической группе. Студенты второй типологической группы соответствуют прикладному, а третьей – творческому уровню усвоения математической информации.

I. Низкий уровень. Количественные параметры: средний балл уровневого контроля знаний «4»-«5»; по результатам тестирования выполнено менее 60 %. Качественные характеристики: освоение неполного объема знаний, недостаточная осмысленность знаний, неумение структурировать математическую информацию, неспособность к обобщениям, неумение применять теоретические знания даже в знакомой ситуации, низкая работоспособность, усвоение математических знаний на уровне таблиц, формул, основных навыков и умений. Имеют только общее представление о математике, ее методах, общее понимание о роли математики в современном мире, могут воспользоваться соответствующим справочником.

II. Средний уровень. Количественные параметры: средний балл уровневого контроля знаний «6»-«7»; по результатам тестирования выполнено 60 – 80 %. Качественные характеристики: освоение полного объема знаний, не всегда достаточная осмысленность знаний, умение применять теоретические знания в знакомой ситуации, умение разрешать проблемы под руководством преподавателя, недостаточная способность к структурированию информации, умение составлять несложные математические модели практических задач. Имеют прочные навыки решения стандартных задач, достаточно развитое логическое мышление.

Ш. Высокий уровень. Количественные параметры: средний балл уровневого контроля знаний «8» – «10»; по результатам тестирования выполнено от 80 до 100 %. Качественные показатели: освоение полного объема знаний, достаточная осмысленность их, умение применять теоретические и практические знания в новой, незнакомой ситуации, умение решать проблему самостоятельно, умение структурировать, обобщать математическую информацию, способности к решению нестандартных задач повышенной сложности, прочные навыки в составлении математических моделей практических задач, оригинальность мышления. Проявляют повышенный интерес к изучению математики, отличаются высокой работоспособностью.

Деление на типологические группы – не самоцель в дидактической системе обучения математике в техническом вузе, а является средством, позволяющим преподавателю четко определить тактику своей методической, учебной работы, реализовать дифференцированный подход в обучении, помочь каждому обучающемуся реализовать свои возможности в «зоне своего ближайшего развития». Преподаватель может считать, что он на правильном пути, что верно строит учебно-познавательный процесс и добился цели, если в определенный период обучения студент переходит на более высокий уровень. Если сильный студент (творческий уровень) начинает заниматься научной работой, побеждать в олимпиадах, участвовать в конференциях, способен «почти» обойтись без преподавателя. Наоборот, снижение уровня обучаемости у отдельных студентов является сигналом о недостатках или в работе преподавателя, или самого студента.

В рамках учебно-методического комплекса дифференциация осуществляется через тщательно продуманную систему заданий, ориентированную на три типологические группы. Каждый студент, в зависимости от подготовленности и направленности интересов, сам выбирает задания соответствующего уровня.

Мы являемся сторонниками такой концепции дифференциации обучения высшей математике, которая явно выделяет уровень минимально-обязательной подготовки и формирования на этой основе повышенных уровней овладения материалом. Учитывая свои способности и интересы, обучающийся получает право и возможность выбирать объем и глубину усвоения материала, варьировать свою учебную нагрузку. Достижение обязательных результатов обучения становится при таком подходе тем объективным критерием, на основе которого может видоизменяться ближайшая цель в обучении каждого студента и перестраиваться, в соответствии с этим, содержание работы обучающегося и контрольно-корректирующей деятельности преподавателя.

Контроль процесса обучения математике должен быть регулярным, комплексным и систематическим, преследовать главной целью организацию ритмичной самостоятельной познавательной деятельности, с последовательным возрастанием трудности ее выполнения. В этой связи, контроль в системе обучения математике решает определенные задачи и выполняет определенные функции:

1) через проверку и оценку подготовки теоретического материала к практическим занятиям, фрагментов лекций, структурированной математической информации, выполнения индивидуальных домашних заданий, внеаудиторных контрольных работ и т.п. вырабатывает навыки и умения учебной работы, индивидуальный стиль самостоятельной работы (СР);

2) через подведение итогов различных видов аудиторных СР, контрольных работ, тестирования, коллоквиумов и т.п. оказывает студентам помощь в осмыслении изучаемого материала, понимание его связи с другими частями курса и предметами, облегчает запоминание математической информации, обеспечивает последовательное повторение ее, активизирует мыслительную деятельность;

3) позволяет широко использовать возможности обратной связи в процессе обучения, т.к. преподаватель, оценивая не только уровень знаний студентов, но и динамику усвоения, характер ошибок в ответах и решенных задачах, непрерывно совершенствует методику изложения материала, помощи каждому студенту в организации и рациональном осуществлении активной, самостоятельной, целенаправленной и результативной познавательной деятельности;

4) через определение с помощью различных видов контроля количественных и качественных параметров уровня усвоения знаний и обучаемости реализует дифференцированный подход к обучению математике;

5) через разнообразие форм контроля, использование различных приемов самоконтроля повышает ответственность студентов за результаты учебного труда, воспитывает потребность в самостоятельном овладении знаниями, облегчает процесс адаптации первокурсников к вузовским условиям.

Проверка теоретического материала осуществляется по двум направлениям. Уровень подготовки лекционного материала, необходимого для работы на данном практическом занятии, проверяется вызовом отдельных студентов с места и сопровождается записями основных формул преподавателем на левой и правой частях доски. В отдельных случаях методически целесообразно выдавать нескольким студентам мини-доклады по изучаемой теме. Это развивает культуру речи обучающегося, заставляет его систематизировать информацию, готовит его к различным видам рубежного и итогового контроля. Опрос таблиц проводится в письменной форме, на это отводится не более пяти минут, чтобы избежать подсматриваний, списываний и т.д. Еще одной из форм контроля за усвоением теории являются небольшие тесты, которые очень удобны для отработки и закрепления навыков по основополагающим понятиям.

Проверку практических навыков и умений студентов по математике следует начинать с **предварительного контроля** качества их школьных знаний. Выделенный вид контроля может быть реализован с помощью тестов или контрольной работы. Необходимо отметить, безусловным достоинством теста является возможность охватить большой объем материала и тем самым, дать педагогу действительно широкое представление о знаниях обучающихся для индивидуальной работы, как с успевающими, так и с отстающими. Предварительный контроль позволяет провести первичную дифференциацию студенческой аудитории, выявить недостатки в школьных знаниях, определить методику работы в данных конкретных условиях. Так, пробелы в школьных математических знаниях преодолеваются с помощью СРС над методическим пособием «Преподаватель – абитуриенту». Для контроля за ее выполнением выдается индивидуальное задание.

В системе контроля знаний одним из важнейших элементов следует считать **текущий контроль** за познавательной деятельностью, который сокращает сроки адаптации студентов к вузовским условиям, к уровню требований, системе лекционных и практических занятий, облегчает управление самостоятельной деятельностью, познавательной активностью обучающихся, приучает их к постоянной, кропотливой работе, как в аудитории, так и вне ее, позволяет осуществлять «жесткий контроль» за работой каждого студента в течение семестра. Текущий контроль выполняет важную функцию гибкого использования обратной связи для совершенствования учебного процесса, прежде всего, определения характерных ошибок, допускаемых студентами. Этот вид контроля позволяет осуществить проверку за выполнением студентами внеаудиторной и аудиторной самостоятельной деятельности. Показателями текущего контроля служат результаты оценивания работы студентов у доски, в процессе выполнения аудиторных самостоятельных работ на выбранном уровне сложности, выполнения индивидуальных домашних заданий, написания таблиц по памяти и т.д.

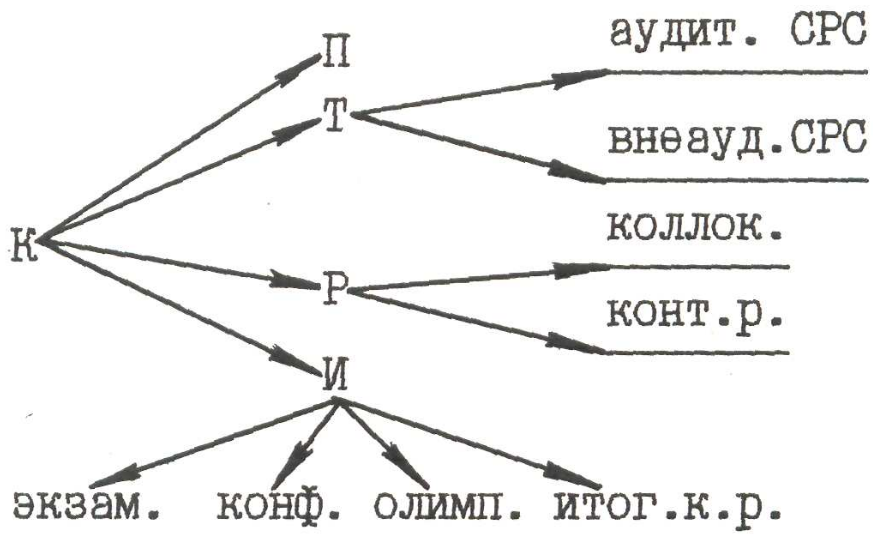
В системе оценки знаний существенную роль играет **рубежный контроль**, который проводится в виде двух-трех контрольных работ за семестр. Контрольная проводится в традиционной форме, при этом каждое задание оценивается в баллах, включаются задания повышенной сложности, и расценка баллов ведется так, что на оценку «9»-«10» нужно выполнить трудное задание.

Решение задач, реализуемых предыдущими формами контроля, завершает высшая его форма – **итоговый контроль**. На нем лежит и особая ответственность за проверку глубины, системности и полноты знаний, умений и навыков студентов. Итоговый контроль включает в себя 1) итоговые контрольные работы; 2) внеаудиторные контрольные работы; 3) олимпиады; 4) конференции; 5) экзамен.

Итоговые контрольные работы проводятся по следующей схеме. Вначале семестра выдается набор заданий по всему курсу обучения в данном семестре. Студенты знают, что из этих задач будут составлены варианты итоговой контрольной работы. Поэтому они имеют возможность готовиться к ней на протяжении всего семестра, тем самым создаются предпосылки для самоконтроля за уровнем знаний. Необходимость ориентации во множестве задач, систематизации их по темам (список представлен в произвольном порядке) способствует закреплению и повторению изучаемого материала. В итоговую контрольную работу включаются задания, требующие синтезированных знаний из различных разделов математики. Подготовка к итоговой контрольной работе требует от студента осмысления, углубления, переработки, закрепления учебной информации. В результате оценка этой контрольной – закономерный результат систематической самостоятельной познавательной деятельности в течение всего семестра. Итоговая контрольная работа позволяет преодолеть такой недостаток в построении курса математики, как изучение ее разделов без выделения часов на повторение. Заметим, что эта форма контроля может быть проведена с помощью компьютерной контролирующей программы.

Выделим еще два своеобразных вида итогового контроля: олимпиады и конференции. Участие студента в этих формах учебного процесса – это результат максимально активной самостоятельной познавательной деятельности, результат изучения дополнительной литературы, усвоения конкретных методов и приемов творческой деятельности. Чем более трудную задачу решает обучающийся, тем в большей степени он нуждается в вариативности действий, тем большее значение приобретает для него динамичность и системность его собственного ума. Олимпиада и научно-техническая конференция подводят итоги работы студентов «творческого» уровня мышления.

Таким образом, вся система контроля за самостоятельной познавательной деятельностью и другими формами учебной деятельности обучающегося может быть представлена графом:



Здесь К – контроль; П – предварительный; Т – текущий; Р – рубежный; И – итоговый.

Схема обязательно приводится студентам на одной из первых лекций, объясняется роль всех ее структурных элементов, оговариваются требования к прохождению через все элементы контроля.

Выдвигаются условия быть допущенным к сдаче экзамена по математике:

– работа в семестре не ниже, чем на оценку «4»;
– выполнение контрольных работ хотя бы на оценку «4»;
– выполнение внеаудиторной контрольной работы;
– выполнение индивидуальных домашних зданий;
– правильное написание по памяти таблиц.

В предлагаемой методике реализации контроля за результатами обучения математике действует система поощрения активной работы в семестре:

– получение оценки «9» без сдачи экзамена за первое – третье место на внутри вузовской олимпиаде; оценки «10» за такие же результаты на республиканской олимпиаде;

– получение дополнительных баллов на экзамене за ответ на нестандартный вопрос или решение сложного задания во время проведения лекционных занятий;

– наличие в сумме 15 и более баллов за две рубежные контрольные в семестре дают возможность быть допущенным к досрочной сдаче экзамена на последней неделе обучения в семестре. При этом пропусков занятий может быть не более двух. Студент, имеющий в сумме 14 балов за две рубежные контрольные в семестре, в случае активной работы на занятиях (получение не менее десяти оценок за самостоятельную работу на занятиях, посещение всех занятий), получает дополнительный поощрительный балл и допуск к досрочной сдаче экзамена с разрешения деканата;

– досрочный экзамен – это возможность получить оценку на экзамене по результатам уровнево-рейтингового контроля. Во время проведения этого контрольного мероприятия студенты освобождаются от сдачи заданий минимально-базового уровня, а также одного теоретического вопроса. Билет содержит один теоретический вопрос и два практических задания. Безукоризненное выполнение заданий по билету дает основание получения на экзамене оценки «8» или получения задания повышенной сложности на оценку «9», в противном случае – студент получает «6» или «7». Если ответ по билету окажется отрицательным, студенту придется сдавать экзамен по обычной методике, **т.е. он теряет возможность получения оценки по результатам уровнево-рейтингового контроля**. Студенты, претендующие на получение оценки «10», после решения задания повышенной сложности, доказывают в устной форме одну из теорем об остаточном члене в формуле Тейлора и отвечают на один-два дополнительных теоретических вопроса.

Представим также методику проведения обычного экзамена:

– обязательное письменное выполнение заданий минимально-базового уровня (нулевой вариант представлен ниже, отводится 60 минут), это дает основания для получения оценки «4» или «5»;

– в случае наличия в работе негрубых ошибок, студент получает шанс их исправить, в противном случае – получает отрицательную оценку;

– студенты, выполнившие безукоризненно свое задание, получают билет для следующего этапа экзамена. Билет содержит два теоретических и два практических задания прикладного уровня сложности и дает возможность получения оценки «6» – «8». Для сдачи экзамена на творческом уровне сложности требуется решить дополнительное сложное задание и, при желании, доказать указанную выше теорему.

Отметим, что задания повышенной сложности открыты в УМК в третьем уровне сложности, задания прикладного уровня – во втором уровне, а также в заданиях для итоговой контрольной работы.

Нам представляется, что предлагаемая система контроля, с одной стороны, ставит студента в рамки систематической проверки знаний, с другой стороны, создает условия для объективного контроля знаний, исключающего субъективизм преподавателя, дает право и возможность студенту самому выбирать уровень, на котором он будет получать оценку. Открытый характер заданий всех уровней сложности, а также наличие в УМК большого количества обучающих задач, решенных нулевых вариантов, тестов трех уровней сложности и т.п. создают предпосылки и условия для активной и плодотворной работы студентов в семестре, а также при подготовке к экзамену на выбранном уровне.

Задания минимально-базового уровня на экзамене

Вариант 0

1. Вычислить $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение: Для вычисления определителя мы воспользуемся правилом Саррюса (методом треугольников):

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 8\cdot(-1) + 2\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 3 - 8\cdot 2\cdot 1 =$$

$$= 3 - 16 + 4 + 1 - 12 - 16 = 36.$$

Ответ: 36.

2. Найти $A\cdot B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 2 + 0\cdot 1 & 1\cdot(-4) + 0\cdot 3 \\ -1\cdot 1 + 2\cdot 0 & -1\cdot 2 + 2\cdot 1 & -1\cdot(-4) + 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Решите систему методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & -11 & -5 & 6 \\ 0 & -11 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & -11 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Шаг 1

- первую строку переписываем без изменений;
- элементы первой строки умножаем на (–2) и складываем со второй строкой, полученную строку записываем в матрицу;
- элементы первой строки умножаем на (–3) и складываем с третьей строкой, полученную строку записываем в матрицу.

Ш а г 2

- первую и вторую строку переписываем без изменений;
- элементы второй строки умножаем на (–1) и складываем с третьей строкой, полученную строку записываем в матрицу.

Ш а г 3

Переходим от полученной расширенной матрицы к системе.

$$\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=-3 \\ 0x_1-11x_2-5x_3=6 \\ 0x_1+0x_2+4x_3=4 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1+5x_2+x_3=-3 \\ -11x_2-5=6 \\ x_3=1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1+5(-1)+1=-3 \\ x_2=-1 \\ x_3=1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1 \\ x_3=1 \end{cases}$$

4. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+7}{3x+1}$.

Решение:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+7}{3x+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=$ {так как у нас неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, то числитель и знаменатель делим на переменную в старшей степени}

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2+5x+7}{x^2}}{\dfrac{3x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{5x}{x^2}+\dfrac{7}{x^2}}{\dfrac{3x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{7}{x^2}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$\left(\frac{1+\dfrac{5}{\infty}+\dfrac{7}{\infty}}{\dfrac{3}{\infty}+\dfrac{1}{\infty}}\right)=\left(\frac{1+0+0}{0+0}\right)=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty.$$

5. Найти производную функции

$$y=9^{\cos^3 x}+\operatorname{arcctg}3x-\sqrt{(x-6)(x+6)}+\frac{1}{\cos x}.$$

Решение:

$$y'=\left(9^{\cos^3 x}+\operatorname{arcctg}3x-\sqrt{(x-6)(x+6)}+\frac{1}{\cos x}\right)'=$$

$$=\left(9^{\cos^3 x}\right)'+\left(\operatorname{arcctg}3x\right)'-\left(\sqrt{(x-6)(x+6)}\right)'+\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=$$

$$=9^{\cos^3 x}\cdot\ln 9\left(\cos^3 x\right)'-\frac{1}{1+(3x)^2}(3x)'-\frac{1}{2\sqrt{(x-6)(x+6)}}\left(x^2-36\right)'-$$

$$-\frac{1}{\cos^2 x}(\cos x)'=9^{\cos^3 x}\cdot\ln 9\cdot 3\cos^2 x(\cos x)'-\frac{3}{1+(3x)^2}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\left(x^2-36\right)}}\cdot(2x)+\frac{\sin x}{\cos^2 x}=$$

$$=-9^{\cos^3 x}\cdot\ln 9\cdot 3\cos^2 x\cdot\sin x-\frac{3}{1+9x^2}-\frac{x}{\sqrt{x^2-36}}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

6. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(1,2,3)$ и $M_2(3,2,-1)$.

Решение: Уравнение прямой, проходящей через две точки, имеет вид: $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Используя точки, данные нам по условию, $M_1(1,2,3)$ и $M_2(3,2,-1)$, получим: $$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{2-2}=\frac{z-3}{-1-3}.$$

Отсюда уравнение искомой прямой принимает вид: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-4}$.

7. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(1,-3,1)$ параллельно плоскости $3x-5y+6z-3=0$.

Решение: Так как плоскости параллельны, следовательно, их направляющие вектора также параллельны, следовательно, в качестве нормального вектора искомой плоскости мы можем использовать вектор $\overline{n}(3,-5,6)$, воспользовавшись формулой

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,\quad \overline{n}(A,B,C),$$

а также, используя данные условия $\overline{n}(3,-5,6)$, $M(1,-3,1)$, будем иметь: $3(x-1)-5(y+3)+6(z-1)=0$. Тогда окончательно уравнение плоскости принимает вид: $3x-5y+6z-24=0$.

8. Установить вид кривой $x^2+4y^2+2x+8y-4=0$.

Решение: $x^2+2x+4y^2+8y-4=0$.

Используя формулы $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$, выделим полные квадраты для x и y: $\left(x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2\right)-1^2+4\left(y^2+2\cdot 1\cdot y+1^2\right)-4-4=0$,

или $(x+1)^2-1+4(y+1)^2-4-4=0$.

В результате получим: $(x+1)^2+4(y+1)^2=9$.

Разделим правую и левую часть на 9: $\dfrac{(x+1)^2}{9}+\dfrac{4(y+1)^2}{9}=1$.

Приведем к каноническому виду $\dfrac{(x+1)^2}{3^2}+\dfrac{(y+1)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$.

Следовательно, данное уравнение определяет эллипс с центром в точке $O(-1,-1)$ и полуосями $a=3$, $b=\dfrac{3}{2}$.

9. Найти косинус угла между прямыми

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+9}{0}=\frac{z+4}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x-7}{2}=\frac{y-5}{0}=\frac{z+3}{1}.$$

Решение: Угол между прямыми определяется как угол между направляющими векторами $\overline{S}_1(3,0,-1)$, $\overline{S}_2(2,0,1)$.

Угол между двумя векторами найдем по формуле:

$$\cos\varphi=\cos\left(\widehat{\overline{S}_1,\overline{S}_2}\right)=\frac{\overline{S}_1\cdot\overline{S}_2}{\left|\overline{S}_1\right|\left|\overline{S}_2\right|}=\frac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}};$$

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot 2+0\cdot 0+(-1)\cdot 1}{\sqrt{9+0+1}\sqrt{4+0+1}}=\frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Вариант 1

1. Вычислить $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$. *Ответ*: 38.

2. Найти $A \cdot B$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. *Ответ*: $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Решите систему методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$ *Ответ*: $(2, 0, -1)$.

4. Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + x + 7}{3x^2 + x + 1}$. *Ответ*:1.

5. Найти производную функции

$$y = 8^{\cos^2 x} + \operatorname{arctg} 2x - \sqrt{(x-2)(x+2)} + \frac{1}{\sin x}.$$

Ответ: $-8^{\cos^2 x} \cdot \ln 8 \cdot \sin 2x + \dfrac{2}{1 + 4x^2} - \dfrac{x}{\sqrt{(x^2 - 4)}} - \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(0,1,2)$ и $M_2(2,1,-1)$. *Ответ*: $\dfrac{x-0}{2} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-2}{-3}$.

7. Составить уравнение плоскости которая проходит через точку $M(2,-1,0)$ параллельно плоскости $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

Ответ: $x - 2y + 3z - 4 = 0$.

8. Установить вид кривой $x^2 + 9y^2 + 8x - 18y = 0$.

Ответ: эллипс; $O(-4,1), a = 5, b = \dfrac{5}{3}$.

9. Найти косинус угла между прямыми

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+5}{2} \text{ и } \frac{x-7}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{2}.$$

Ответ: $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$.

10. Записать условие компланарности трёх векторов.
11. Необходимое условие существование экстремума.
12. Логарифмическая производная.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ
(первый семестр)

1. Матрицы. Основные понятия.
2. Линейные операции над матрицами.
3. Линейные операции над матрицами и их свойства.
4. Определители 2-го, 3-го, n-го порядков.
5. Основные свойства определителей.
6. Произведение матриц и его свойства.
7. Обратная матрица, ее вычисление
8. Системы линейных уравнений.
9. Основные понятия и определения.
10. Решение невырожденных линейных систем.
11. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
12. Формулы Крамера. Ранг матрицы.
13. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
14. Теорема Кронекера – Капелли.
15. Однородные системы уравнений.
16. Постоянные и переменные величины.
17. Функция одной переменной. Способы задания.
18. Аналитический способ задания функции.
19. Полярная система координат.
20. Специальные классы функций.
21. Класс элементарных функций.
22. Числовая последовательность.
23. Предел числовой последовательности.
24. Бесконечно малые и бесконечно большие числовые последовательности. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших числовых последовательностей.
25. Предел функции.
26. Бесконечно малые функции (БМФ). Основные свойства бесконечно малых функций.
27. Бесконечно большие функции и их свойства.
28. Теоремы о предельном переходе в неравенствах.
29. Основные теоремы о пределах функции.
30. Неопределённые выражения.
31. Первый замечательный предел.
32. Число e. Второй замечательный предел.

33. Некоторые важные пределы.
34. Пределы от функции $y = \left[u(x)\right]^{v(x)}$.
35. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций.
36. Понятие односторонних пределов.
37. Основные свойства непрерывных функций.
38. Свойства функций непрерывных на отрезке.
39. Определение производной функции в точке.
40. Дифференциал функции Правила дифференцирования.
41. Производная сложной функции. Производная обратной функции.
42. Таблица производных.
43. Бесконечная производная, односторонние производные.
44. Производная функции, заданной неявно.
45. Производная функции, заданной параметрически.
46. Логарифмическая производная.
47. Производные высших порядков.
48. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
49. Инвариантность формы дифференциала.
50. Дифференциалы высших порядков.
51. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях.
52. Локальный экстремум. Теорема Ферма.
53. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши.
54. Применение производной. Правило Лопиталя – Бернулли.
55. Исследование поведения функции на локальный экстремум.
56. Выпуклость (вогнутость) функции. Точки перегиба.
57. Асимптоты.
58. Общая схема исследования функции.
59. Глобальный экстремум функции. Практические задачи на оптимизацию. Схема построения математической модели.
60. Формулы Тейлора и Маклорена.
61. Разложение функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = e^x$ по формуле Маклорена.
62. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора (выделение главной части).
63. Основные понятия векторной алгебры.
64. Линейные операции над векторами.
65. Проекция вектора на ось.
66. Линейная зависимость векторов. Базис. Координаты вектора.
67. Скалярное произведение векторов и его свойства.

68. Основные задачи на скалярное произведение векторов.
69. Векторное произведение векторов и его свойства.
70. Основные задачи на векторное произведение векторов.
71. Смешанное произведение трех векторов и его свойства.
72. Основные задачи на смешанное произведение векторов.
73. Собственные числа и собственные вектора матрицы.
74. Алгебраические линии. Прямая на плоскости – линия первого порядка.
75. Способы задания прямой на плоскости (точка и вектор нормали).
76. Способы задания прямой на плоскости (точка и направляющий вектор).
77. Способы задания прямой на плоскости (две точки).
78. Угол между прямыми на плоскости.
79. Взаимное расположение прямых на плоскости.
80. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
81. Алгебраические линии второго порядка.
82. Эллипс. Важные характеристики эллипса.
83. Гипербола. Канонические уравнения гиперболы.
84. Важные характеристики гиперболы.
85. Парабола. Каноническое уравнение параболы.
86. Уравнения поверхности и линии в пространстве. Плоскость – алгебраическая поверхность в пространстве.
87. Способы задания плоскости (точка и вектор нормали).
88. Способы задания плоскости (точка и два направляющих вектора).
89. Способы задания плоскости (две точки и направляющий вектор).
90. Способы задания плоскости (три точки).
91. Уравнение плоскости в отрезках.
92. Взаимное расположение плоскостей.
93. Способы задания прямой в пространстве.
94. Переход от задания прямой общими уравнениями к заданию каноническими или параметрическими уравнениями.
95. Взаимное расположение прямых в пространстве.
96. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
97. Поверхности второго порядка. Метод сечений.

ЗАДАНИЯ К ИТОГОВЫМ ФОРМАМ КОНТРОЛЯ II И III УРОВНЕЙ

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^3}\right)$.

2. Найти S параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=\overline{m}+2\overline{n}$, $\overline{b}=2\overline{m}+\overline{n}$, если известно, что $|\overline{m}|=|\overline{n}|=1$, а $(\overline{m},\hat{}\ \overline{n})=30^\circ$.

3. Исследовать на непрерывность и сделать схематический чертеж:

$$f(x)=\begin{cases}2, & x<-1,\\ 1-x, & -1\le x\le 1,\\ \ln x, & x>1.\end{cases}$$

Вычислить $f'(-1)$, $f'(1)$.

4. Найти разложение вектора $\overline{a}=(1;-1;2)$ по базису $\overline{p},\overline{q},\overline{r}$: $\overline{p}=(2;1;0)$, $\overline{q}=(2;2;-1)$, $\overline{r}=(3;7;-7)$.

5. Составить канонические уравнения прямой $\begin{cases}2x-y+2z-5=0,\\ 2x+y-4z-7=0.\end{cases}$

6. Вычислить $\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\\ 7 & 0\end{pmatrix}$.

7. Ограничена ли последовательность $x_n=\dfrac{1}{n^2}$?

8. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{3n-1}=1$.

9. Решить систему $\begin{cases}x_1+7x_2-6x_3+9x_4-5x_5=0,\\ 2x_1+6x_2-7x_3+x_4=0.\end{cases}$

10. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n-2}=0$.

11. Найти $f'(0)$, исследовать на непрерывность

$$f(x)=\begin{cases}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

12. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

13. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;1;1)$, $M_2(2;3;-1)$ параллельно оси $0z$.

14. Проверить последовательность на монотонность $x_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$.

15. Вычислить $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

16. Решить систему $\begin{cases} 4x-5y+z=3, \\ -3x+2y+z=-4, \\ x-3y+z=0. \end{cases}$

17. В пирамиде с вершинами $A(3;\ 5;\ 4)$, $B(8,\ 7,\ 4)$, $C(5;\ 10;\ 4)$ и $D(4;\ 7;\ 8)$ найти угол между ребром AD и плоскостью ABC.

18. Найти вектор $\overline{AB}x\left(2\overline{BC}+\overline{CD}\right)$ (см. условие пункта 17).

19. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

20. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

21. Построить график функции $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$.

22. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$.

23. В ΔABC написать уравнение биссектрисы $\angle B$, если $A(3;\ -1)$, $B(3;\ 1)$, $C(1;\ 0)$.

24. Вычислить $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

25. Решить систему $\begin{cases} 5x+2y+z=0, \\ -x+3y-2z=5, \\ 2x-4y+z=-9. \end{cases}$

26. Доказать, по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{3n}=1$.

27. Ограничена ли последовательность $x_n = n^2$.

28. Исследовать на непрерывность и сделать схематический чертеж

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & x \le -2, \\ x^3, & -2 < x \le 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

Вычислить $f'(-2)$, $f'(1)$.

29. Образуют ли базис векторы $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j}$, $\overline{c} = 3\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k}$.

30. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-1;3)$, и параллельной двум неколлинеарным векторам $\overline{a} = (1;-1;2)$, $\overline{b} = (2;1;-3)$.

31. Найти $f'(x)$, исследовать на непрерывность

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \ne 0. \end{cases}$$

32. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x^2 + x}$.

33. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;1;1)$, $M_2(-2;0;-1)$ параллельно вектору $\overline{a}$ (0; –2; 3).

34. Напишите общий член последовательности $\{6, 13, 20, 27 \ldots\}$.

35. Доказать по определению, что $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2 - x\right) = 2$.

36. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

37. Решить систему $\begin{cases} 5x - 4y + 3z = 6, \\ x + y - 3z = 3, \\ 2x - 5y + z = -1. \end{cases}$

38. Составить уравнение высоты пирамиды, опущенной из вершины D на плоскость ABC, если A(4; 4; 10), B(4; 10; 2), C(2; 8; 4), D(9; 6; 9).

39. Найти вектор, перпендикулярный двум векторам $\overline{a}$ (1;2;-3) и $\overline{b}$ (2;4;–6).

40. Вычислить

а) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x \quad (n>0)$.

41. Найти момент и величину момента силы $\overline{F}(6; –3; –4)$, приложенной в токе $A(1; –4; 1)$, относительно точки $B(2; –2; 3)$.

42. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

43. Решить систему $\begin{cases} x-y=-1, \\ 3x+2y+3z=2, \\ 2x+4y+5z=4. \end{cases}$

44. Даны вершины пирамиды $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$, $O(0; 0; 0)$. Написать уравнение высоты, опущенной из точки O на плоскость ABC.

45. Проверить последовательность $\left\{\dfrac{n^2}{n^2+2}\right\}$ на монотонность.

46. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{3n-1}=1$.

47. Исследовать на непрерывность и сделать схематически чертеж

$$f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0, \\ -(x-1^2), & 0<x<2, \\ x-3, & x\ge 2, \end{cases}$$

найти $f'(0)$, $f'(2)$.

48. Даны вершины треугольника $A(–1; –1)$, $B(2; 3)$, $C(–1; 2)$. Найти разложение вектора $\overline{AB}$ по базису $\left\{\overline{AC}, \overline{CB}\right\}$.

49. Найти $f'(0)$, исследовать функцию на непрерывность и сделать схематический чертёж. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0, \\ \sin x, & x>0. \end{cases}$

50. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

51. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(8, –6)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площади в 12 кв.ед.

52. Вычислить A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

53. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 2x+7y+3z=6, \\ 3x+9y+4z=7, \\ x+5y+3z=3. \end{cases}$

54. Даны векторы $\overline{a}$ =(1; -1; 2), $\overline{b}$ =(2;-2;1). Найти проекцию вектора $\overline{c}-3\overline{a}-\overline{b}$ на направление вектора $\overline{b}$.

55. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n}=\frac{2}{3}$.

56. Ограничена ли последовательность $x_n=\frac{1}{n^3-1}$.

57. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точки $Q(1; 2; -1)$, $R(2; -3; -1)$.