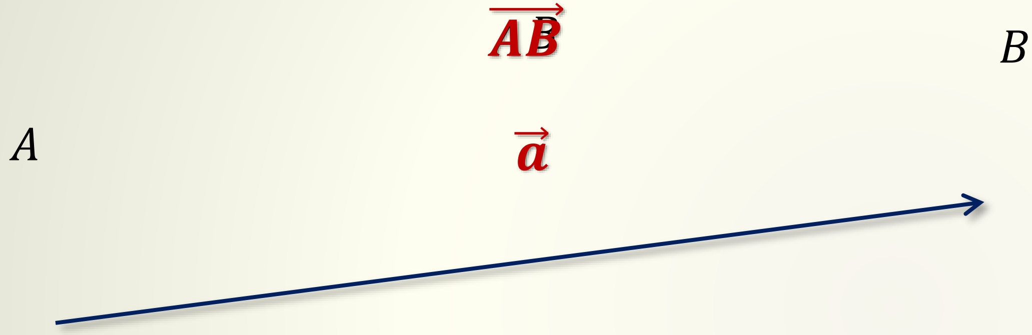
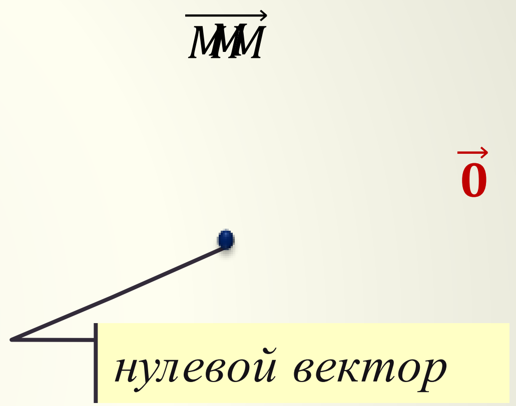
Векторы

(нужно добавить типовые задания из 5_1)

Вектор — направленный отрезок





$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$

Длина ненулевого вектора равна длине отрезка

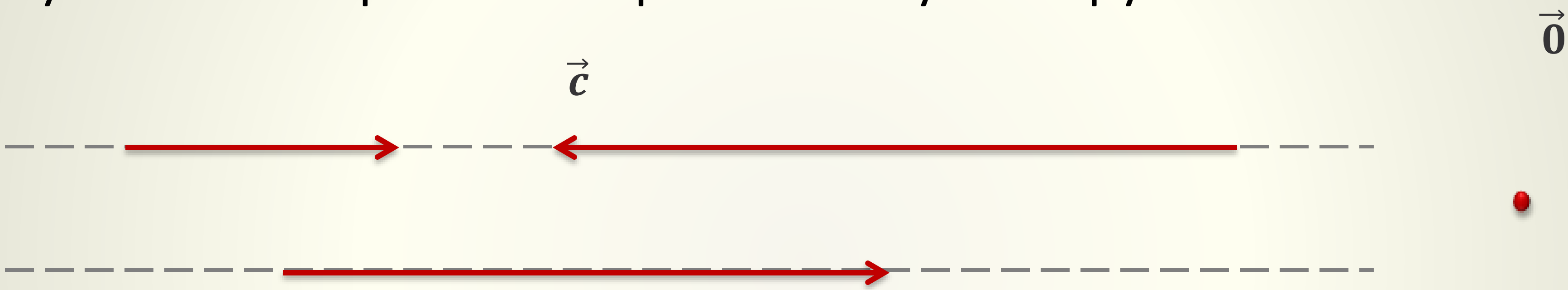
$\left|\vec{0}\right| = 0$

Длина нулевого вектора равна 0

Коллинеарные векторы — ненулевые векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых

Нулевой вектор коллинеарен любому вектору

$\vec{a}$ $\vec{b}$



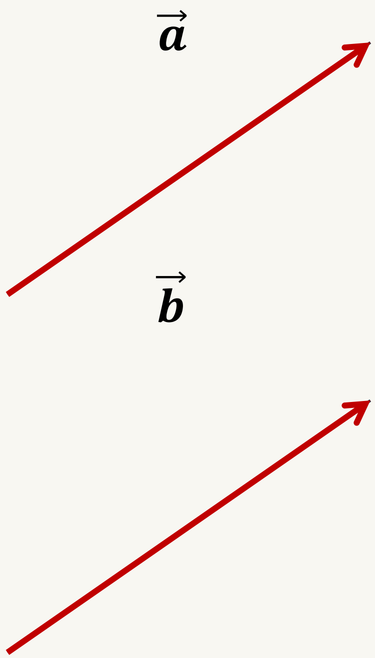
Коллинеарные векторы, имеющие **одинаковые** направления, называют **сонаправленными**

$\vec{a} \upuparrows \vec{c}$ $\vec{0} \upuparrows \vec{a}$ $\vec{0} \upuparrows \vec{b}$ $\vec{0} \upuparrows \vec{c}$

Коллинеарные векторы, имеющие **противоположные** направления, называют **противоположно направленными**

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$

Равные векторы

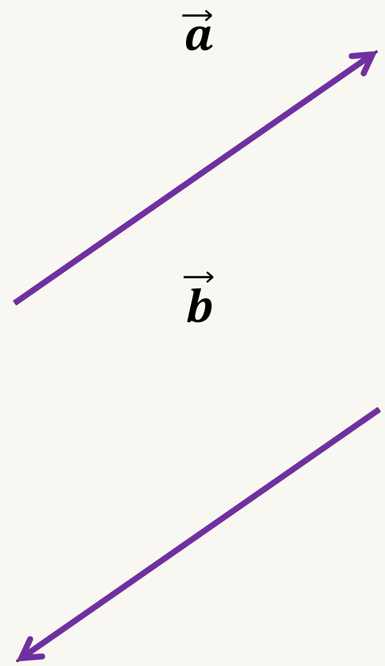


$\color{red}{\boldsymbol{\vec{a} = \vec{b}}}$

1. $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$
2. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

сонаправленные
векторы,
длины которых равны

Противоположные векторы



$\boldsymbol{\vec{a} = -\vec{b}}$

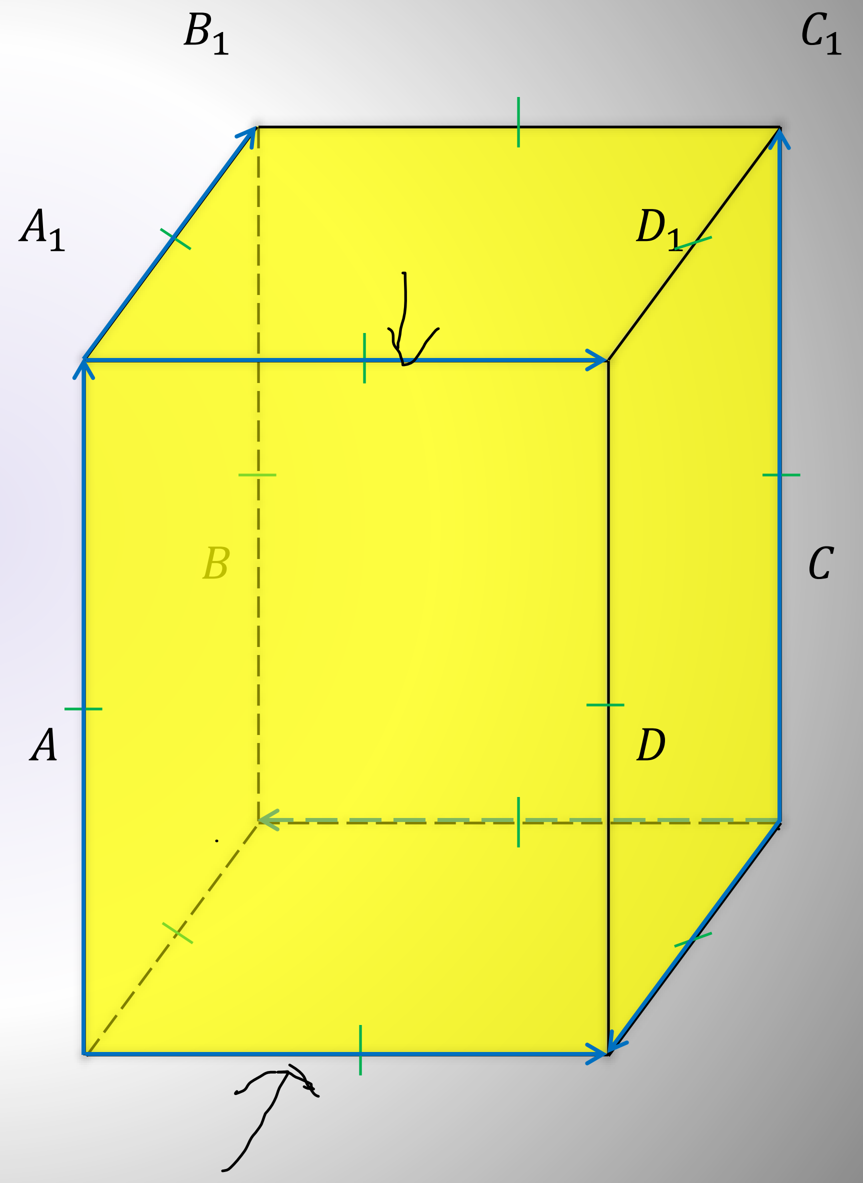
1. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$
2. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

противоположно
направленные векторы,
длины которых равны

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ –куб

Равные векторы:

Противоположные векторы:



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ −куб

Равные векторы:

$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$

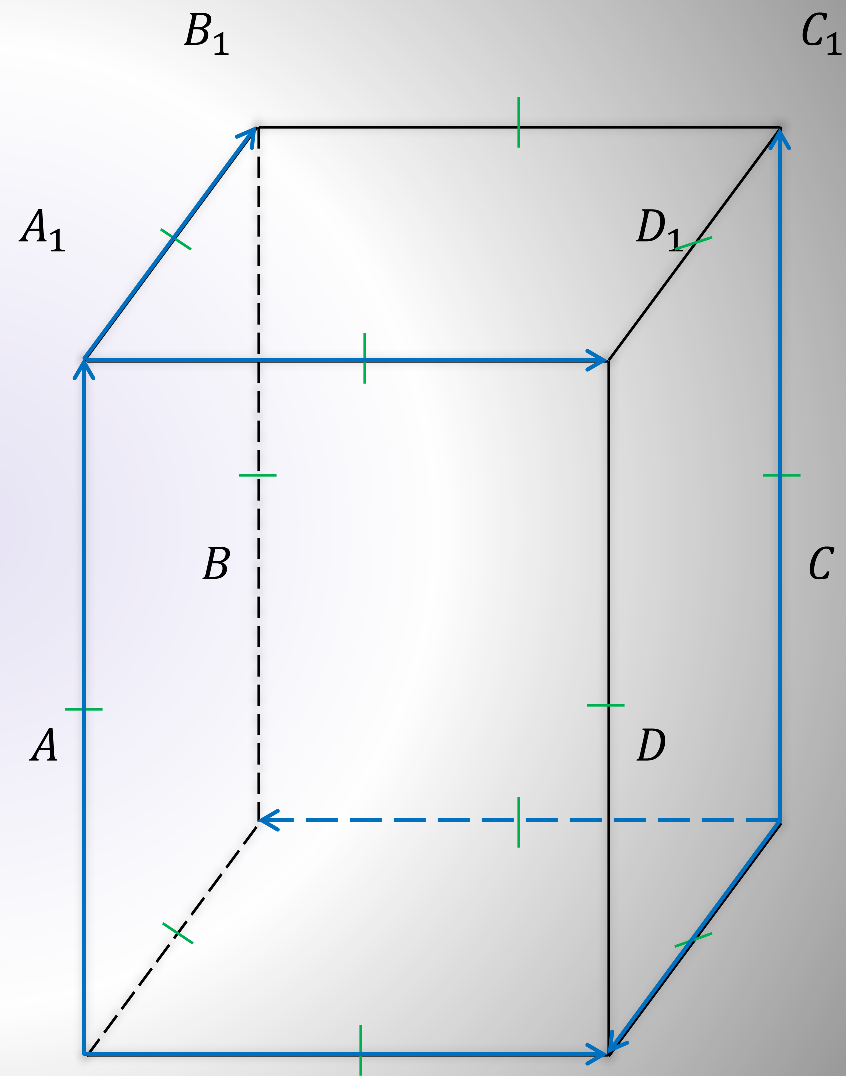
$\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{CD}$

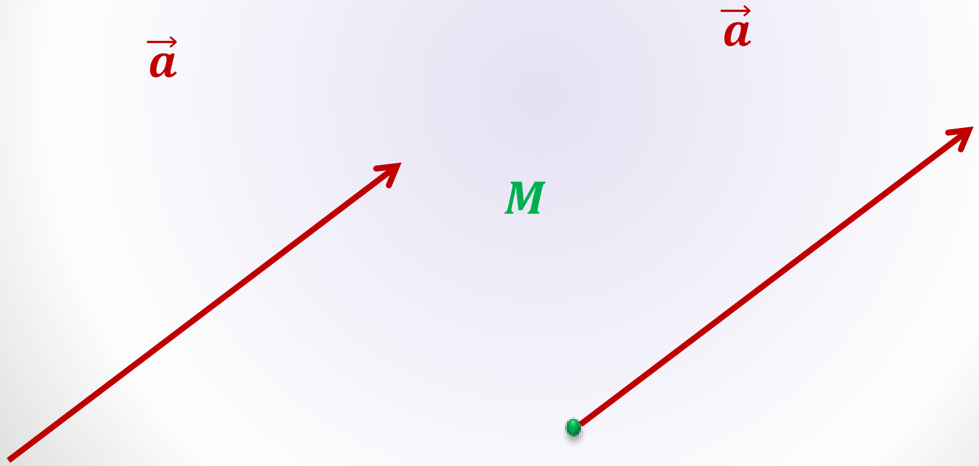
Противоположные векторы:

$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{A_1D_1} = -\overrightarrow{CB}$

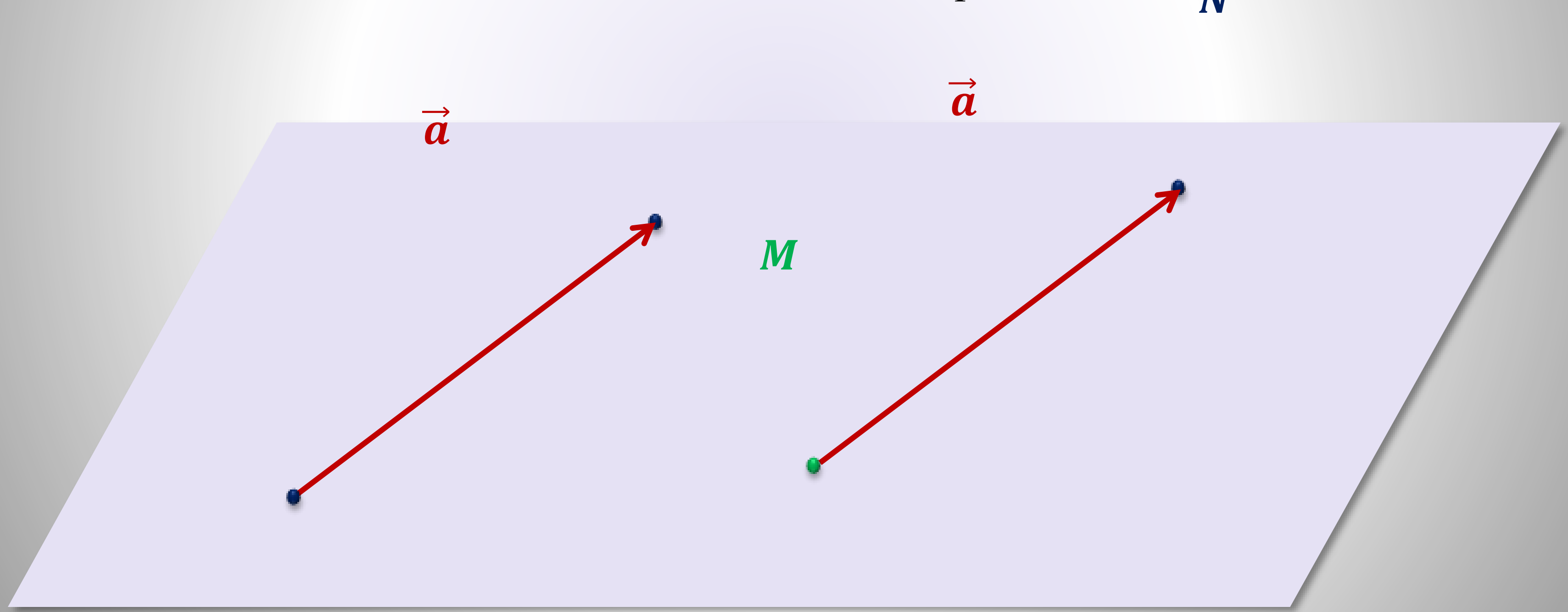


От любой точки M **плоскости** можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.

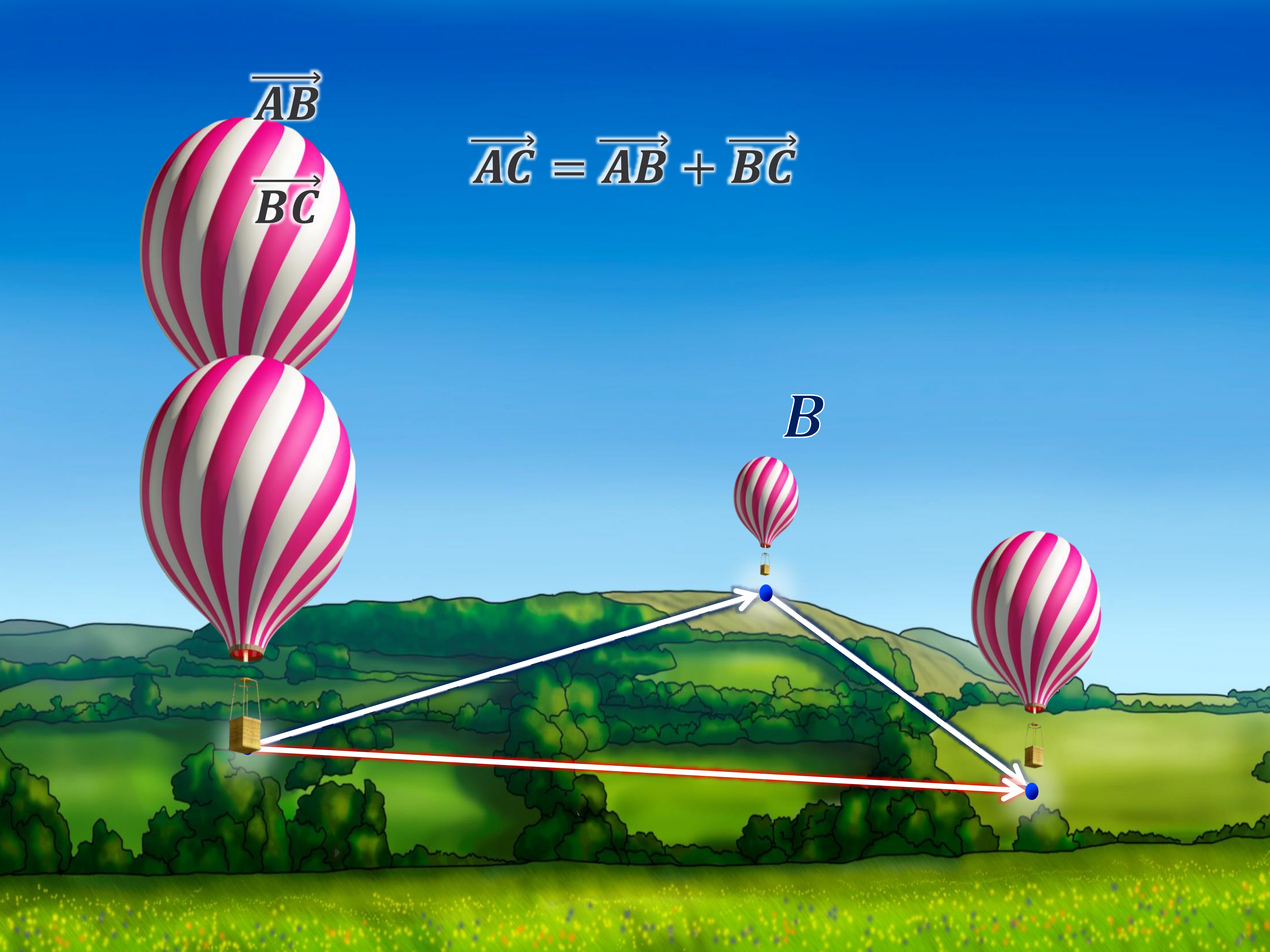


От любой точки M **пространства** можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.

Вектор $\vec{a}$ отложен от точки M.



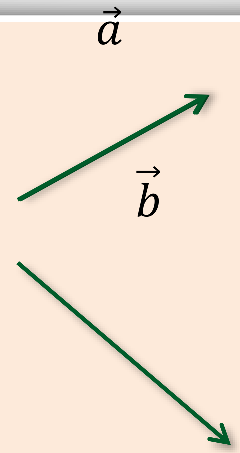
Сложение и вычитание векторов

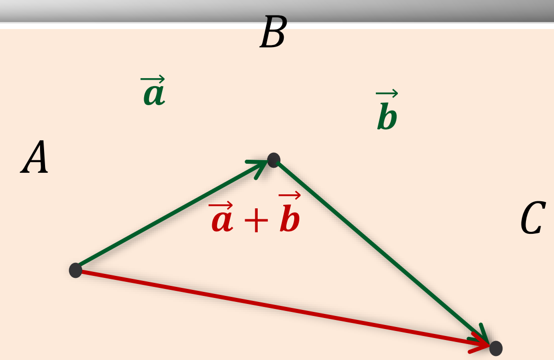


$\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
B

Правило треугольника

1. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$
2. $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$
3. $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$





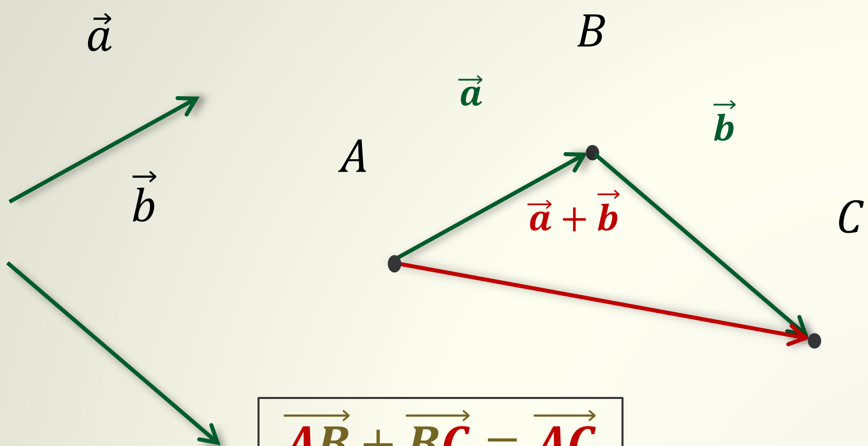
$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

$$\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KM}$$

$$\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$$

$$\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{RT}$$

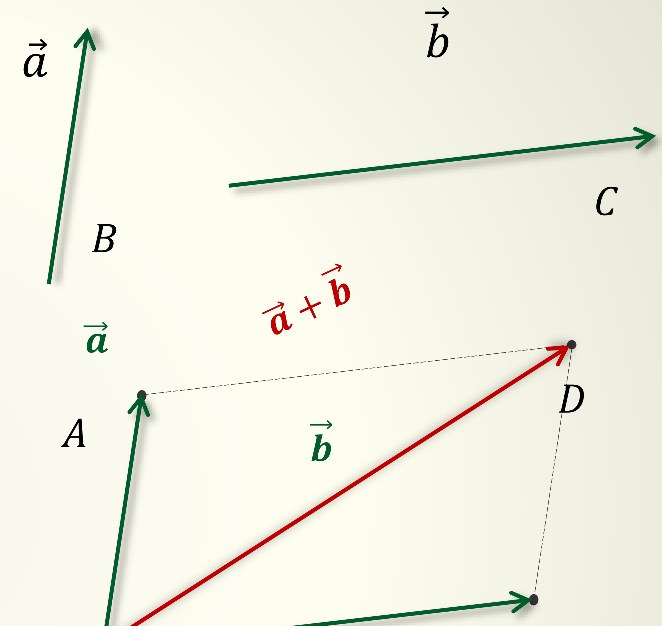
Правило треугольника



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

Правило параллелограмма



$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

Законы сложения векторов

переместительный

сочетательный

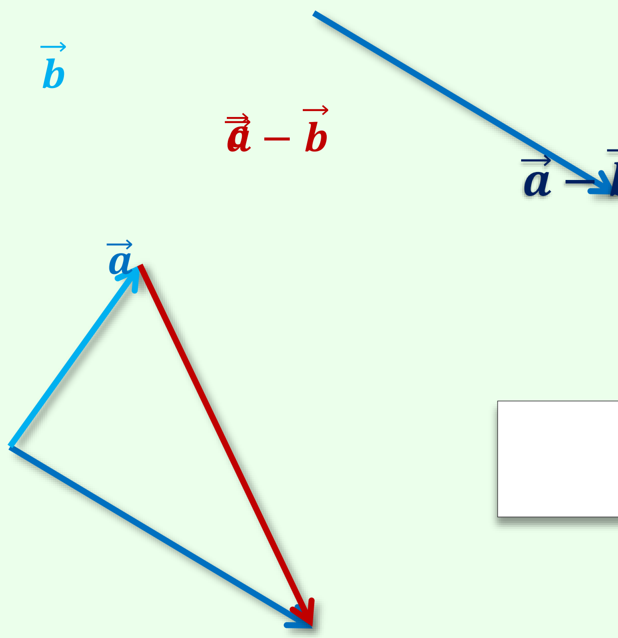
Разность векторов

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$

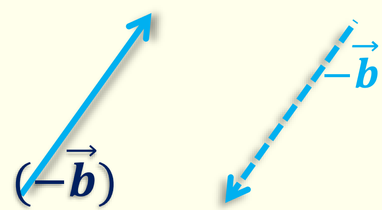
$\vec{c} + \vec{b}$

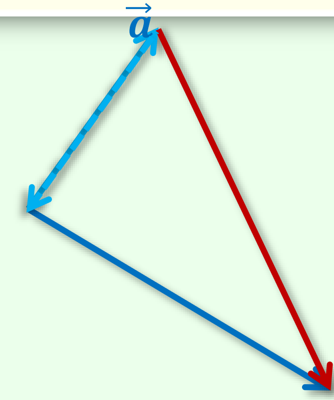
Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

$\vec{a}$ $\vec{b}$ $-\vec{b}$

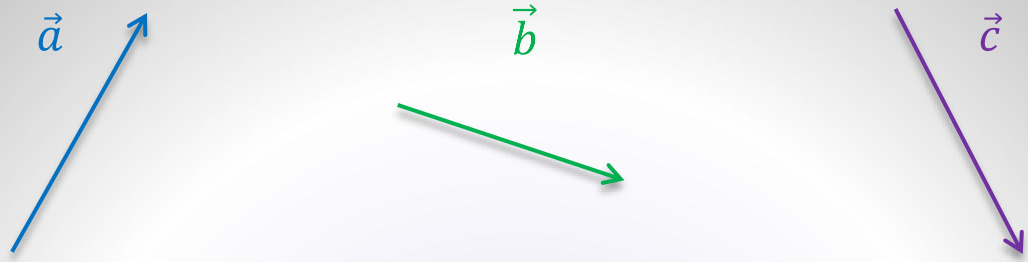


$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

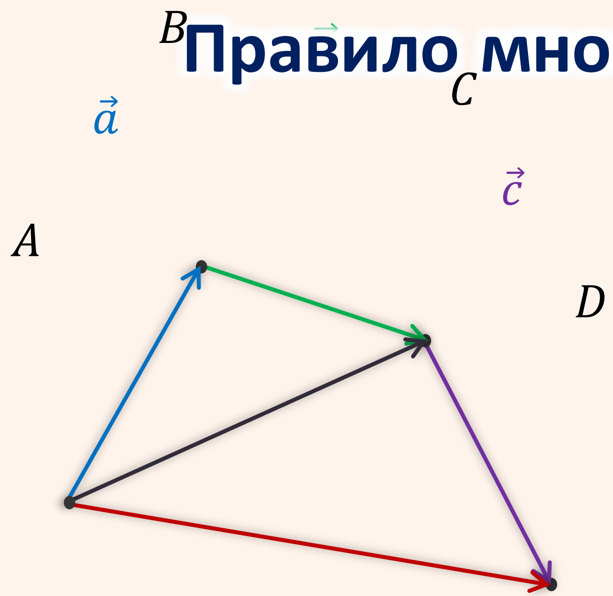




Сумма нескольких векторов



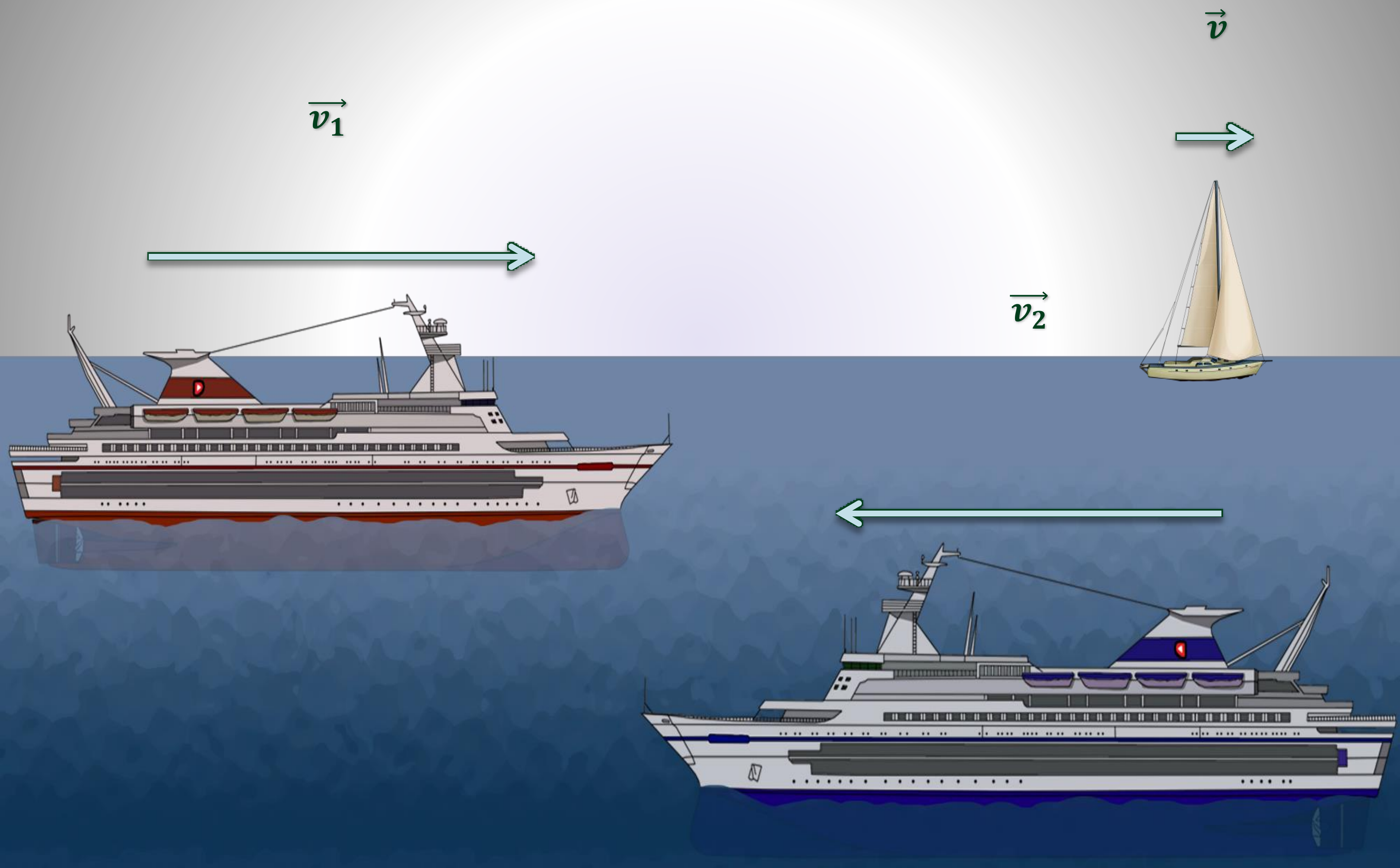
Правило многоугольника



1. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$
2. $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$
3. $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$
4. $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Умножение вектора на число

$\vec{v}$ $\qquad \overrightarrow{v_1} = 5\vec{v}$ $\qquad \overrightarrow{v_2} = -5\vec{v}$



Определение. **Произведением** ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$.

$$k \cdot \vec{a} = \vec{b}$$

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если $k \geq 0$

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, если $k < 0$

1. $\vec{a} \cdot 0 = \vec{0}$

2. $\vec{a}$ и $k \cdot \vec{a}$ – коллинеарны

Следствия

$|\vec{a}| \cdot 0$

$\vec{a}$

$k \cdot \vec{a}$

Свойства произведения вектора на число

1. $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$

сочетательный закон

2. $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

1-ый распределительный закон

3. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

2-ой распределительный закон

позволяют выполнять преобразования в выражениях, содержащих суммы, разности векторов и произведения векторов на числа, так же, как и в числовых выражениях

а) $2(\vec{m} + \vec{n}) - 3(4\vec{m} - \vec{n}) + \vec{m} =$

$= 2\vec{m} + 2\vec{n} - 12\vec{m} + 3\vec{n} + \vec{m} = 5\vec{n} - 9\vec{m}$

б) $\vec{m} - 3(\vec{n} - 2\vec{m} + \vec{p}) + 5(\vec{p} - 4\vec{m}) =$

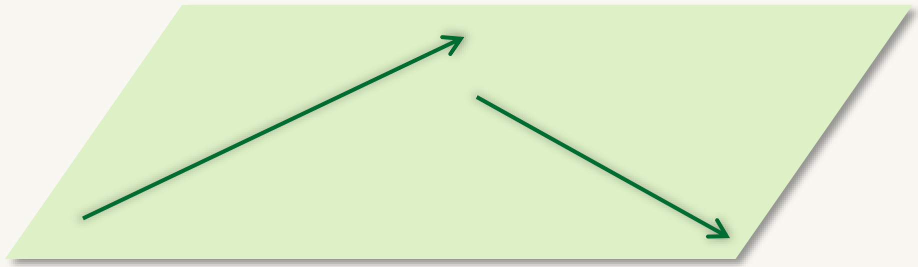
$= \vec{m} - 3\vec{n} + 6\vec{m} - 3\vec{p} + 5\vec{p} - 20\vec{m} =$

$= -13\vec{m} - 3\vec{n} + 2\vec{p}$

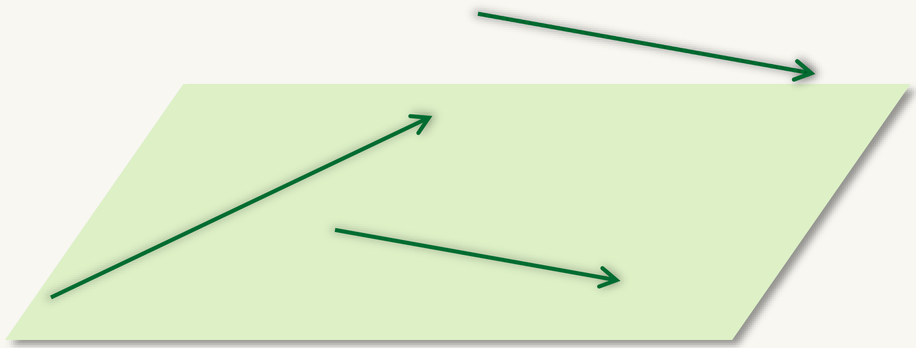
Компланарные векторы

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут **лежать в одной плоскости**

Векторы называются **компланарными**, если имеются равные им векторы, **лежащие в одной плоскости**



Любые **2** вектора являются **компланарными**



3 вектора являются **компланарными**,
если среди них есть
пара коллинеарных векторов

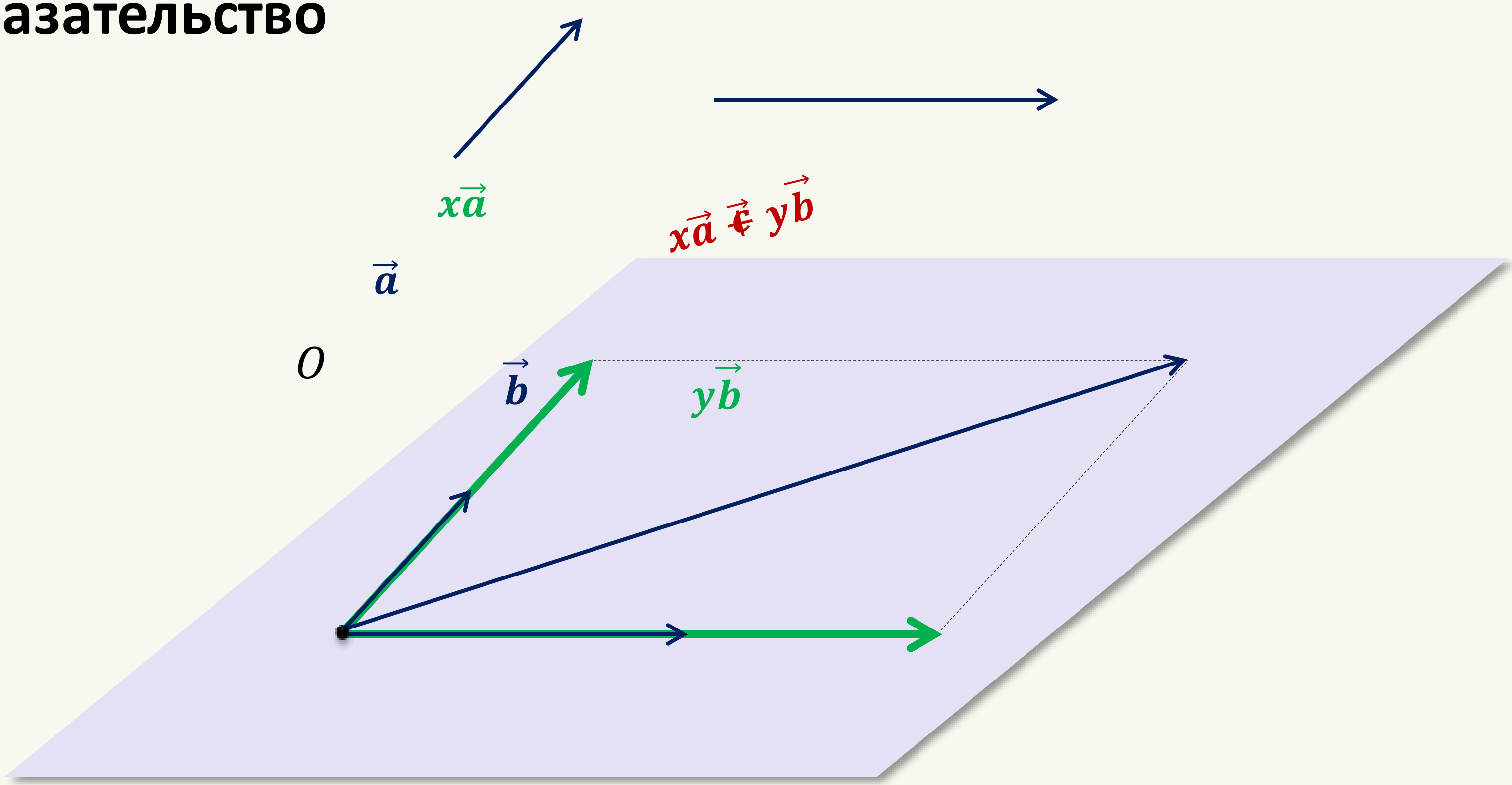
Теорема. (признак компланарности трёх векторов)

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\boldsymbol{\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}}$,

то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ <u>компланарны</u>.

$\boldsymbol{\vec{a}}$ $\boldsymbol{\vec{b}}$

Доказательство

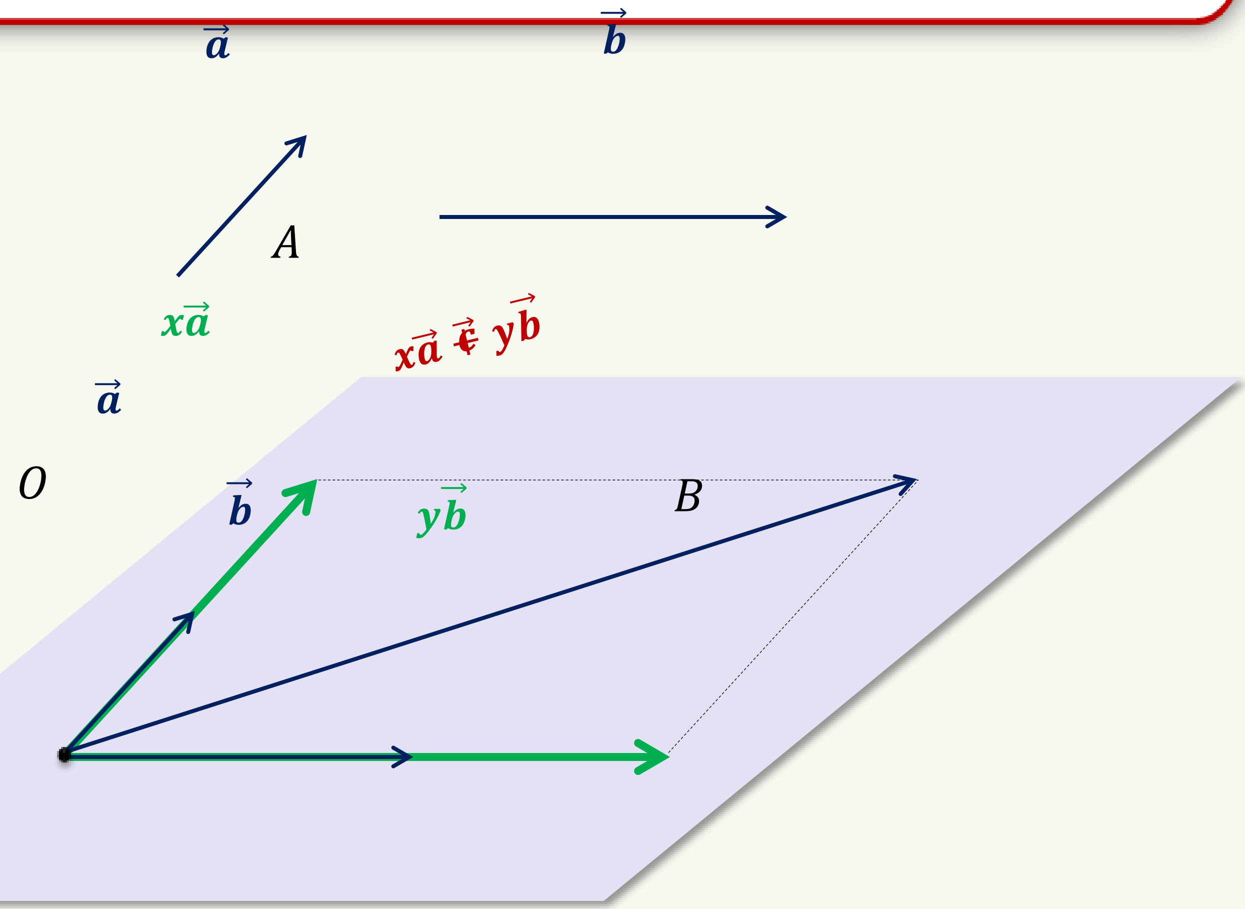


Теорема. (свойство трёх компланарных векторов)

Если векторы $\vec{a}$,$\vec{b}$и $\vec{c}$ <u>компланарны</u> ($\vec{a}$ ∦ $\vec{b}$),

то вектор $\vec{c}$можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\boldsymbol{\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}}$.

Доказательство.



Правило параллелепипеда

Правило параллелепипеда

$\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – не компланарные

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

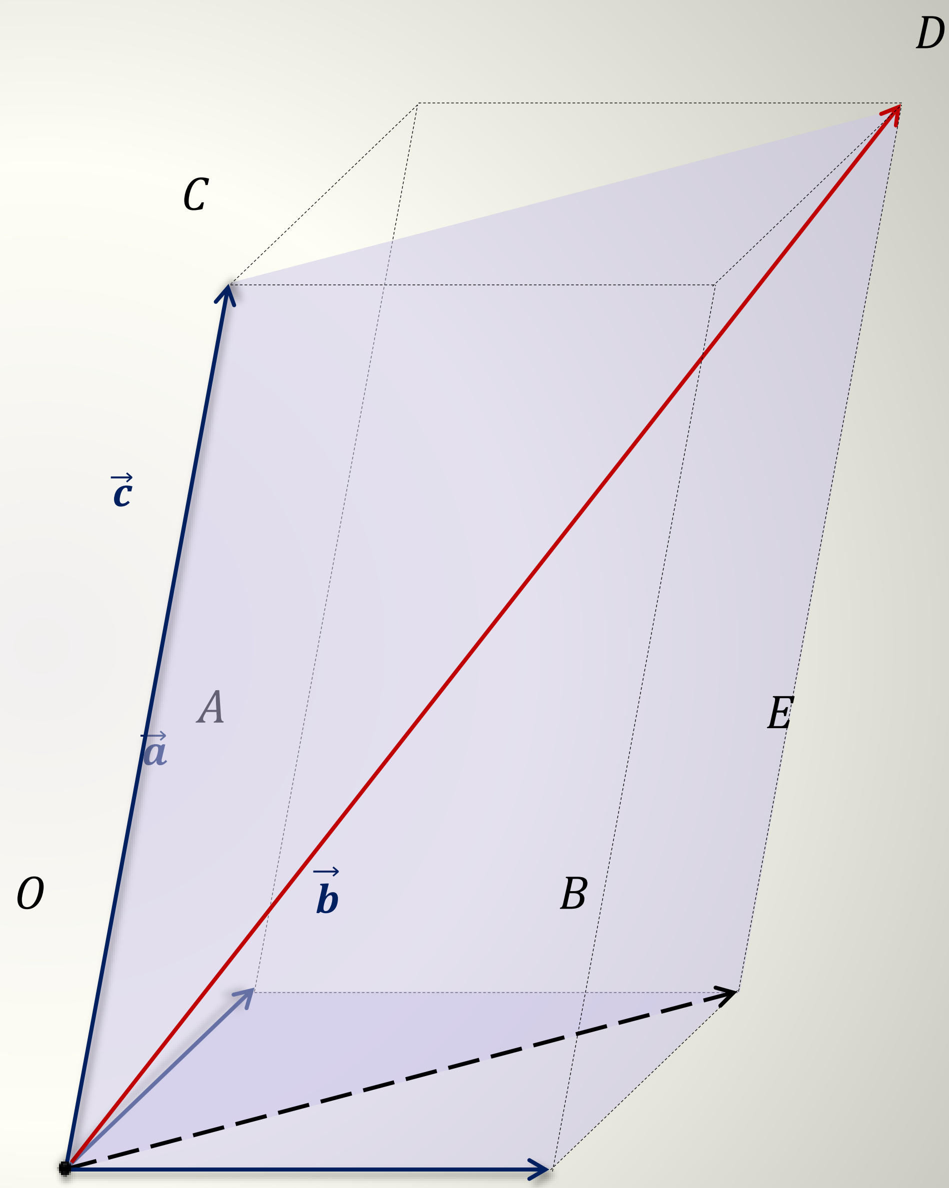
$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$

$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$

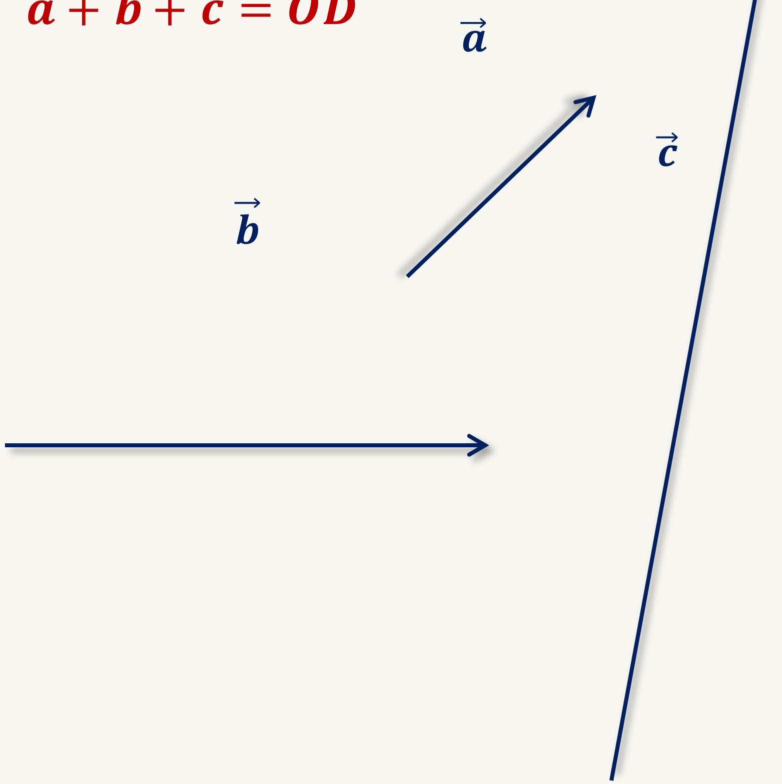
$\boldsymbol{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OD}}$

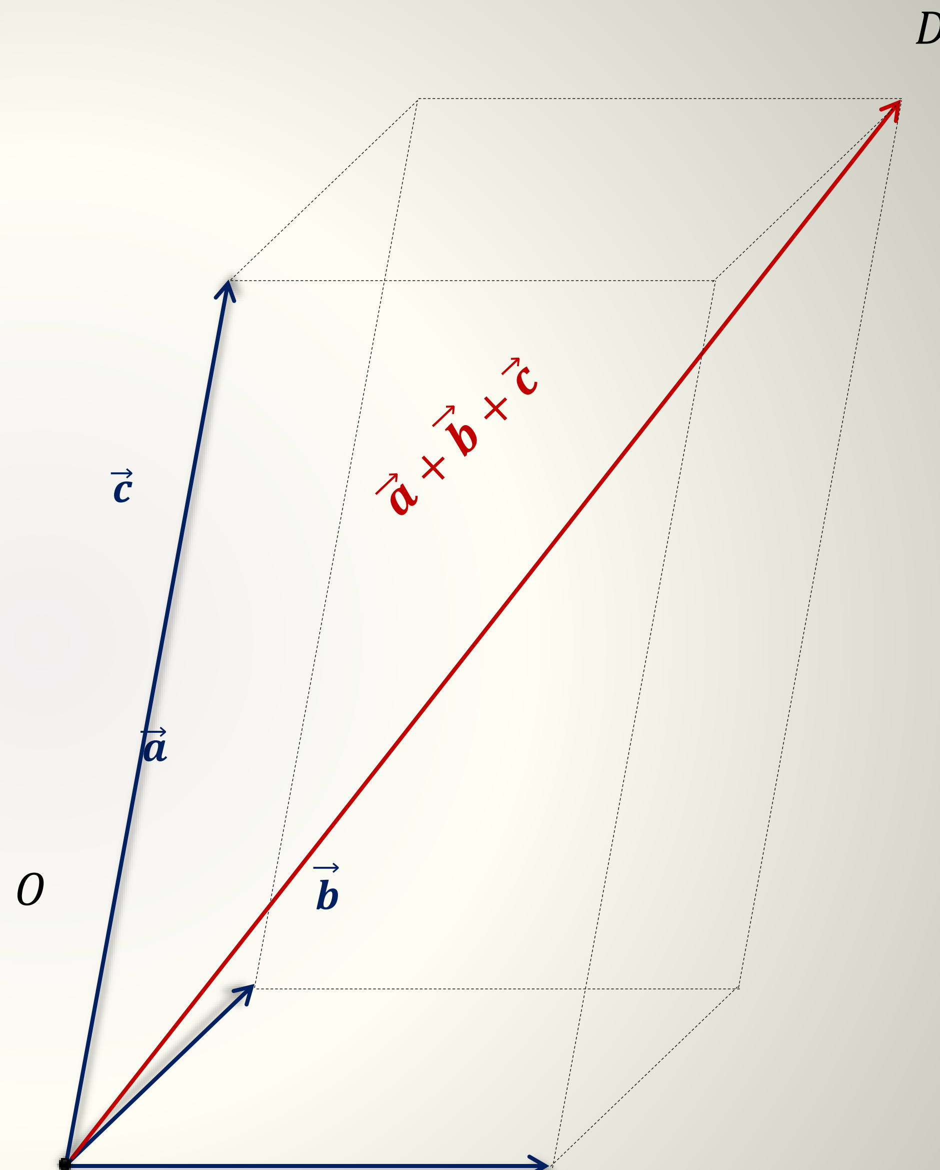


Правило параллелепипеда

$\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – не компланарные

$\boldsymbol{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OD}}$

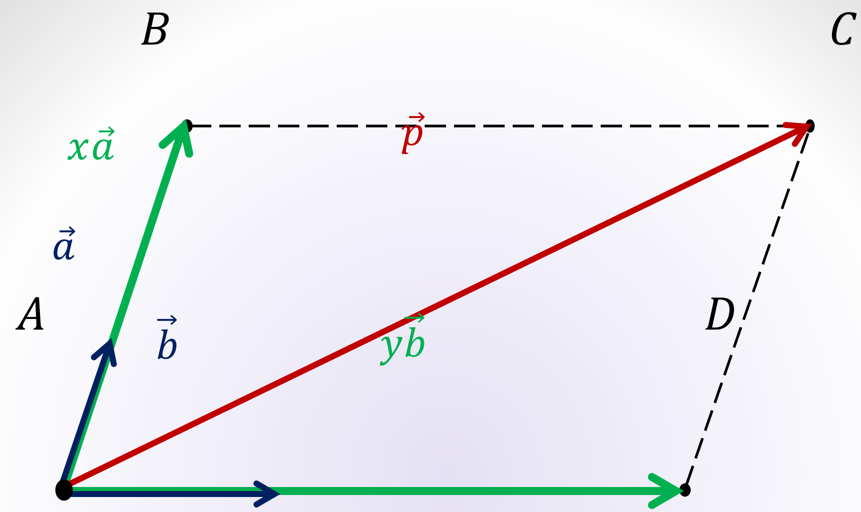




Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Вектор $\vec{p}$ разложен по неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
x, y – коэффициентыразложения.

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$$



Теорема
На плоскости любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом

Прямоугольная система координат в пространстве

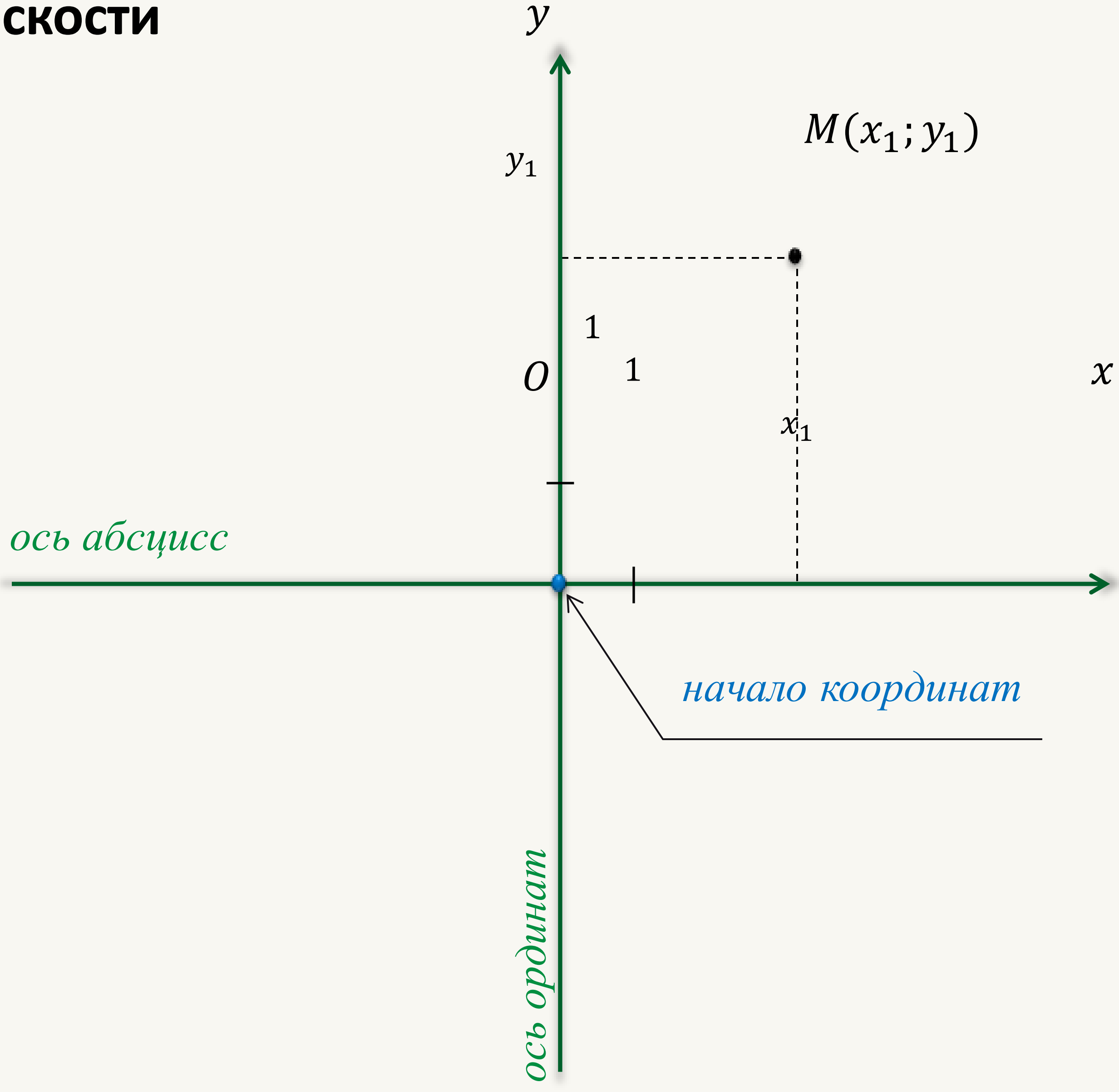
Рене Декарт

Французский философ, математик, механик, физик и физиолог

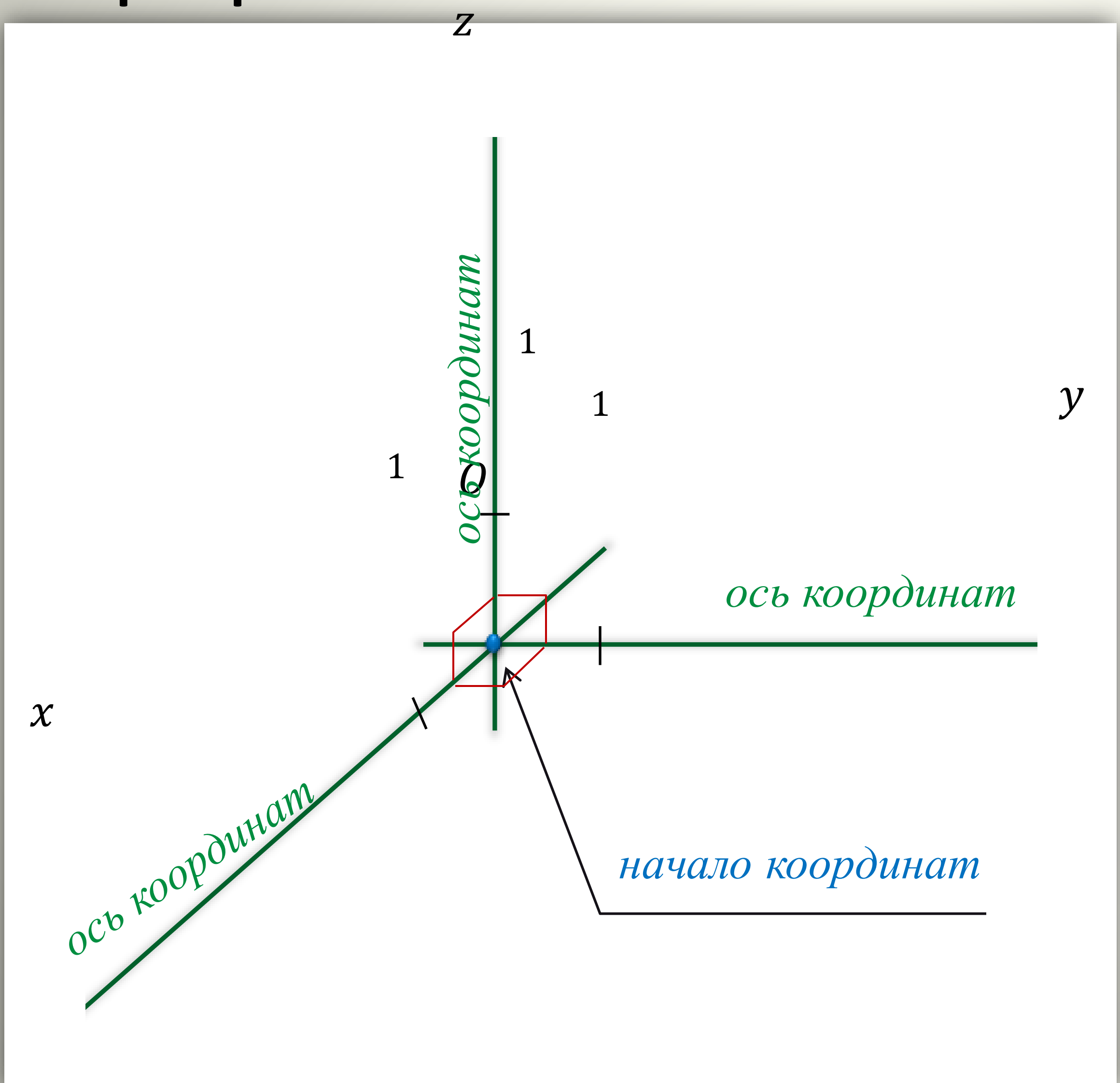
Создатель **аналитической геометрии** и современной алгебраической символики

1596 - 1650

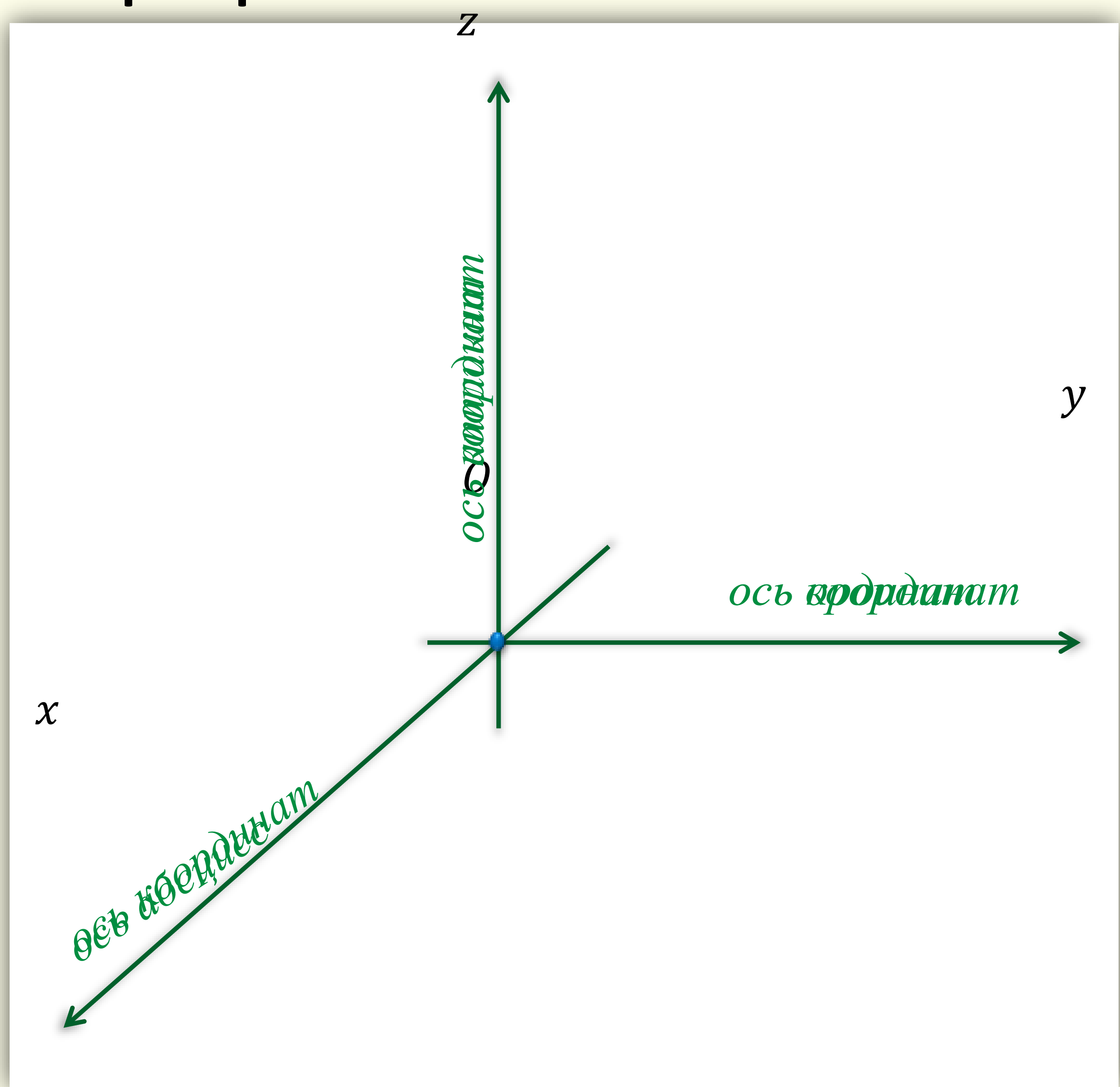
Декартова прямоугольная система координат на плоскости



Декартова прямоугольная система координат в пространстве



Декартова прямоугольная система координат в пространстве *OXYZ*



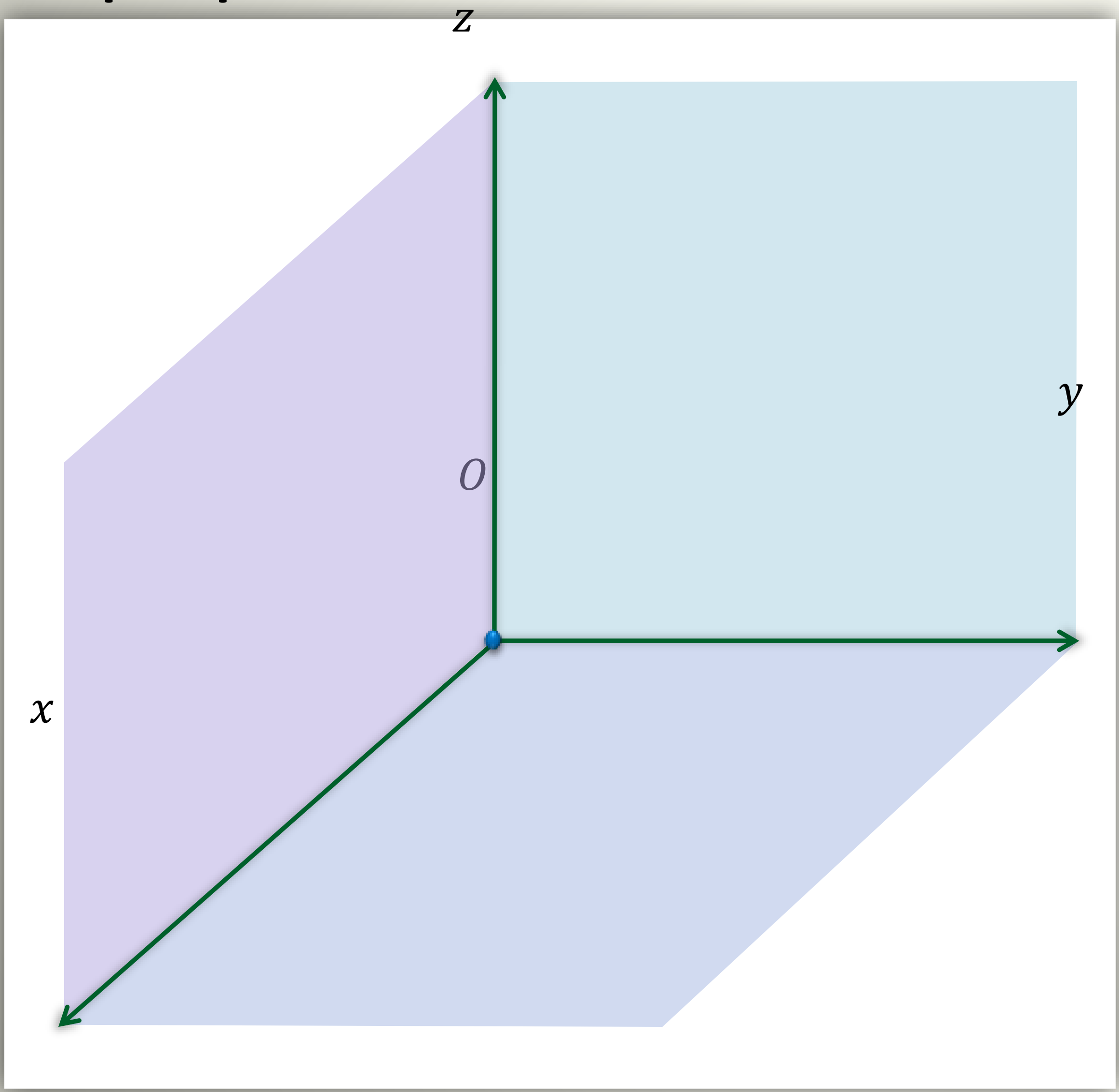
Координатные оси:

Ox − ось абсцисс

Oy −ось ординат

Oz

Декартова прямоугольная система координат в пространстве *OXYZ*



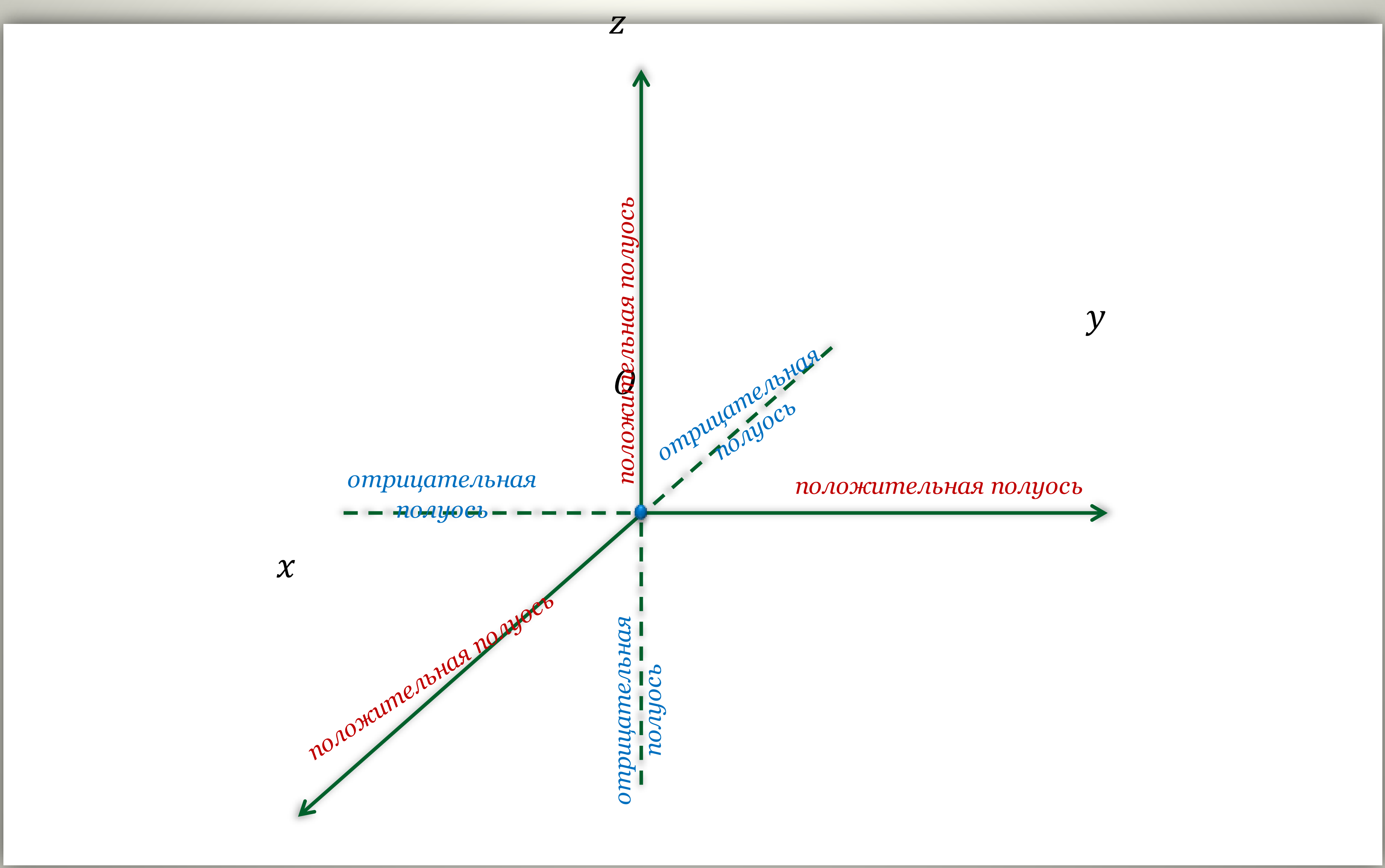
Координатные оси:

Ox – ось абсцисс
Oy –ось ординат
Oz – ось аппликат

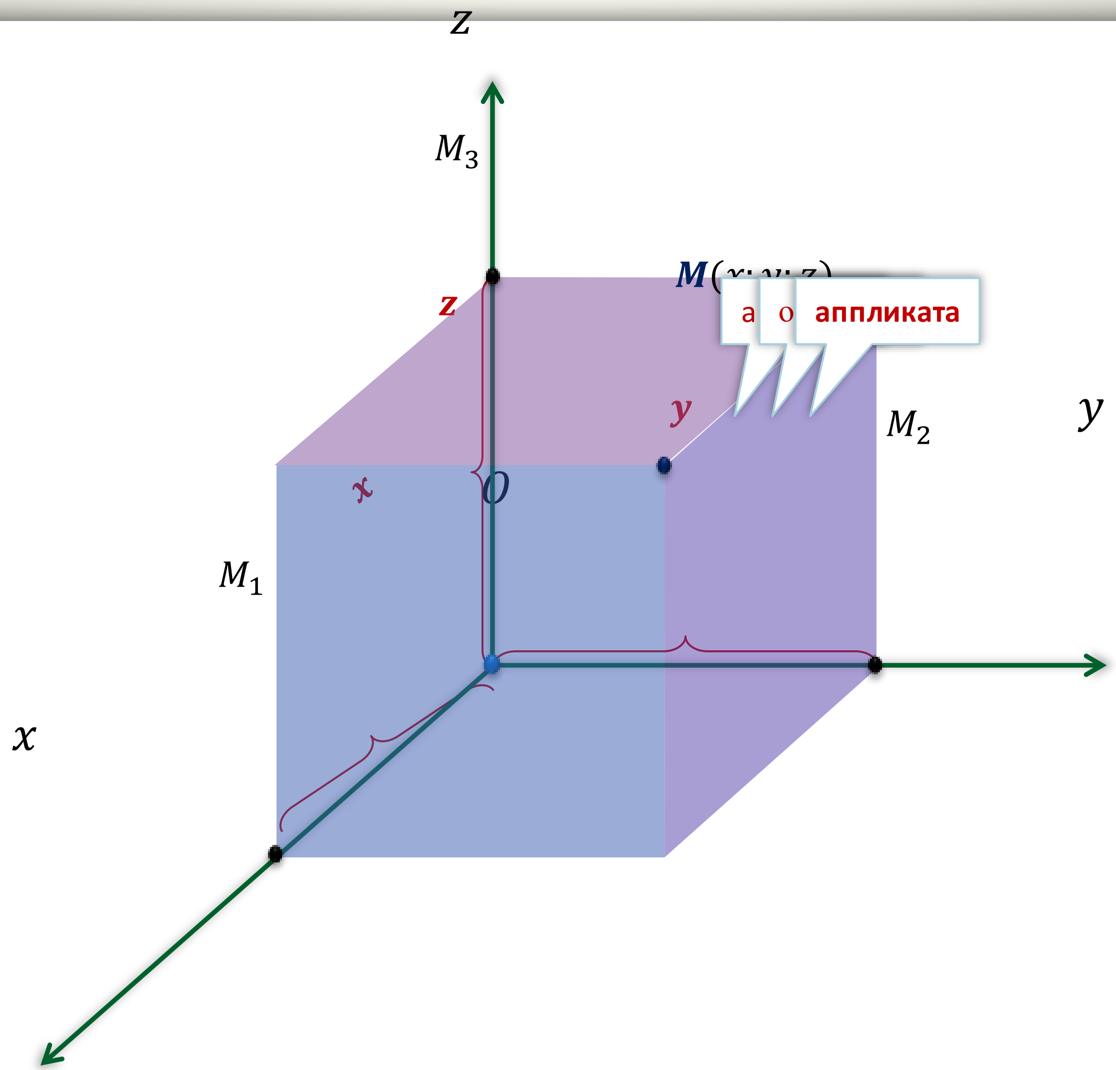
Координатные плоскости:

Oxy
Oyz
Oxz

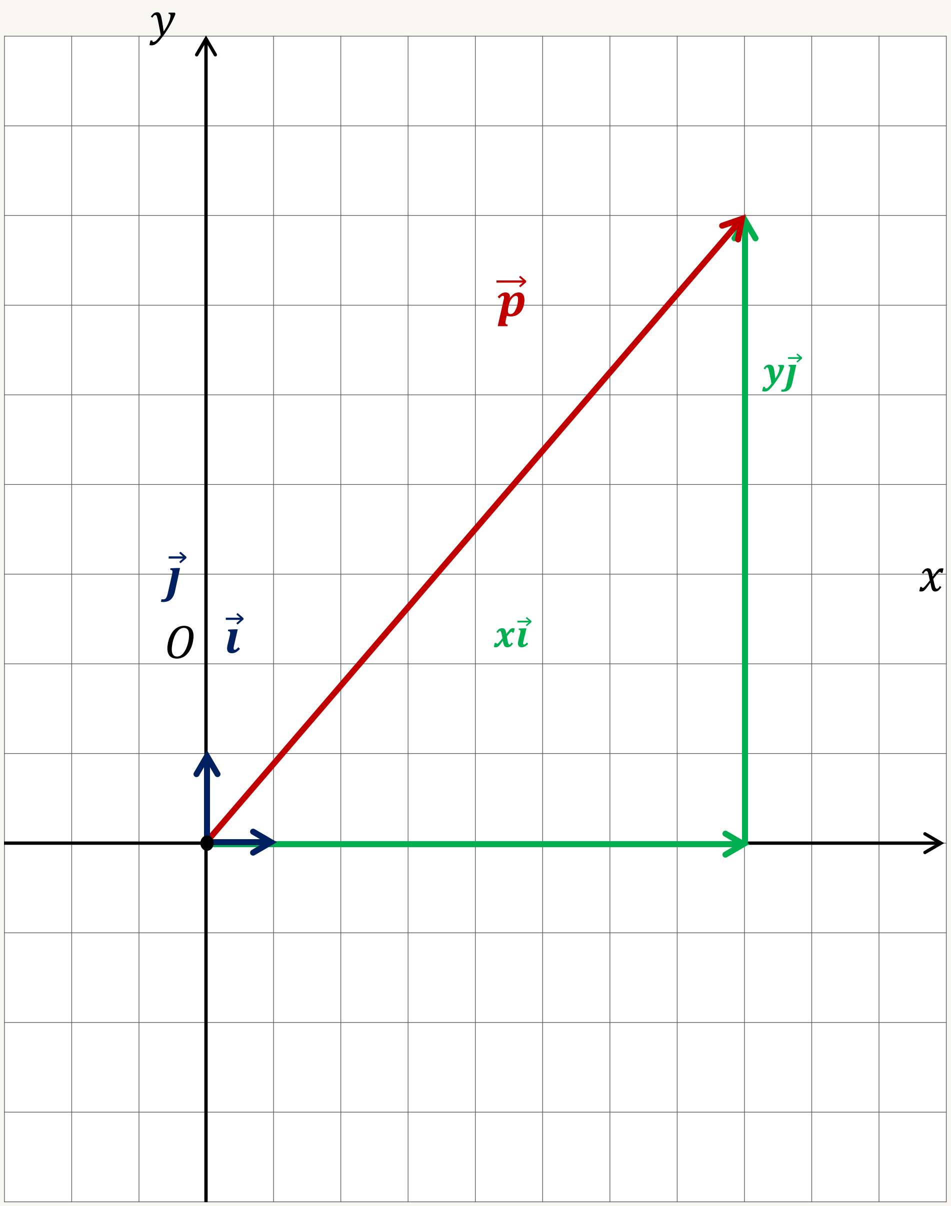
Декартова прямоугольная система координат в пространстве *OXYZ*



Декартова прямоугольная система координат в пространстве *OXYZ*



Координаты вектора



$|\vec{\imath}| = 1, |\vec{\jmath}| = 1$

единичные векторы

$\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ $-$координатные векторы

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{j}}$$

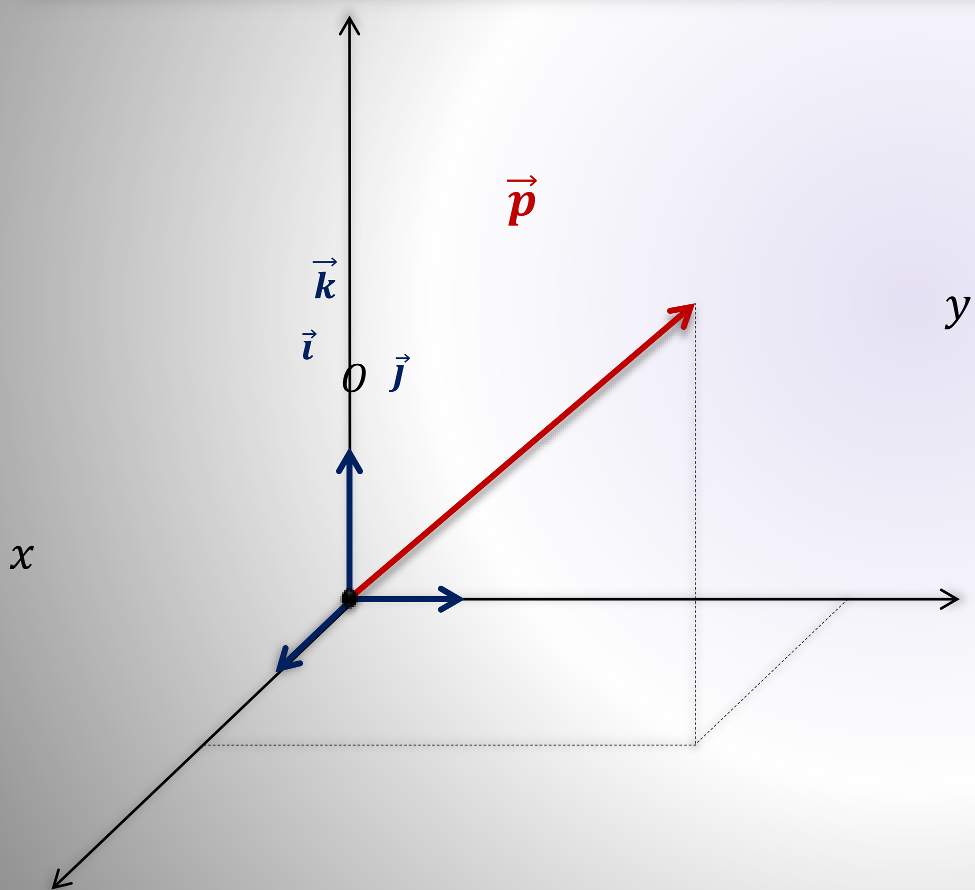
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ $-$*координаты*вектора $\vec{\boldsymbol{p}}$

$\vec{\boldsymbol{p}}\ \{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}\}$

Теорема

Любой вектор можно разложить по трём некомпланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – координатные векторы



$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$\{x; y; z\}$

координаты вектора $\vec{p}$

Пользуясь разложениями векторов по координатным векторам, записать их координаты

$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ $\vec{a}\,\{3; 2; -5\}$

$\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ $\vec{b}\,\{-5; 3; -1\}$

$\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$ $\vec{c}\,\{1; -1; 0\}$

$\vec{d} = \vec{j} + \vec{k}$ $\vec{d}\,\{0; 1; 1\}$

$\vec{m} = -\vec{i} + \vec{k}$ $\vec{m}\,\{-1; 0; 1\}$

$\vec{n} = 7\vec{k}$ $\vec{n}\,\{0; 0; 7\}$

Пользуясь координатами векторов, запишем их разложения по координатным векторам

$\vec{a}\,\{5; -1; 2\}$ $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{b}\,\{-3; -1; 0\}$ $\vec{b} = -3\vec{i} - \vec{j}$

$\vec{c}\,\{0; 1; 0\}$ $\vec{c} = \vec{j}$

$\vec{d}\,\{0; 0; 0\}$ $\vec{d} = \vec{0}$

Координаты вектора

$\vec{a}\{x_1;\ y_1; z_1\}\vec{b}\{x_2;\ y_2; z_2\}$

$\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$

$\vec{a}\{x_1;\ y_1; z_1\}\vec{b}\{x_2;\ y_2; z_2\}$

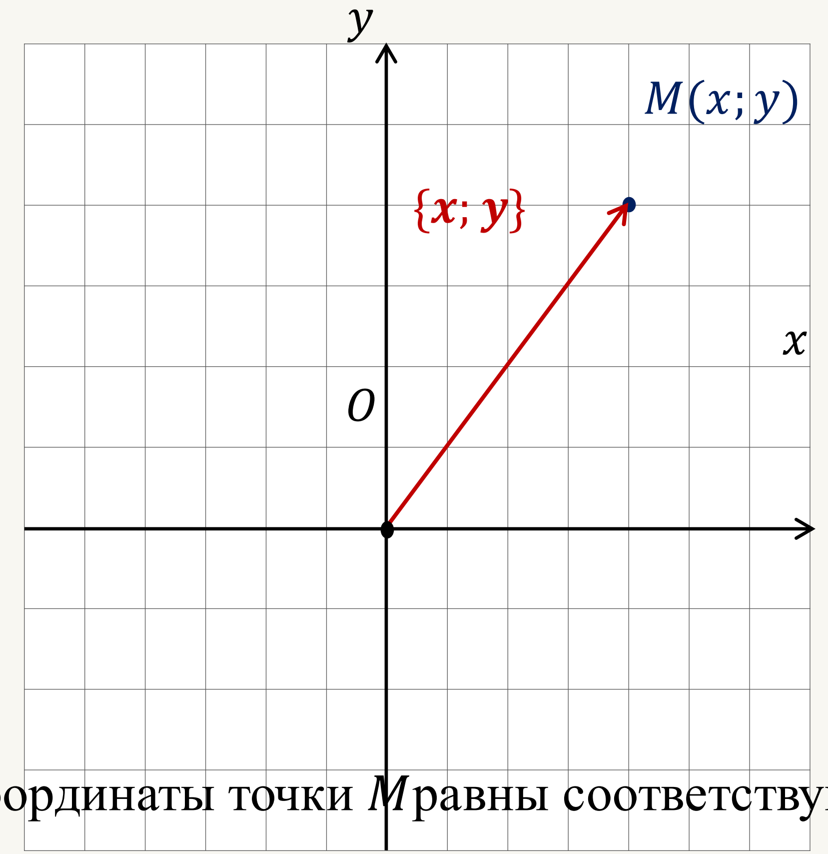
$\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}}\{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$

$\vec{a}\{x_1;\ y_1; z_1\}k$

$\boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{a}}\{kx_1; ky_1; kz_1\}$

Позволяют определять координаты любого вектора, представленного в виде алгебраической суммы данных векторов с известными координатами

Связь между координатами векторов и координатами точек



$\overrightarrow{OM}$

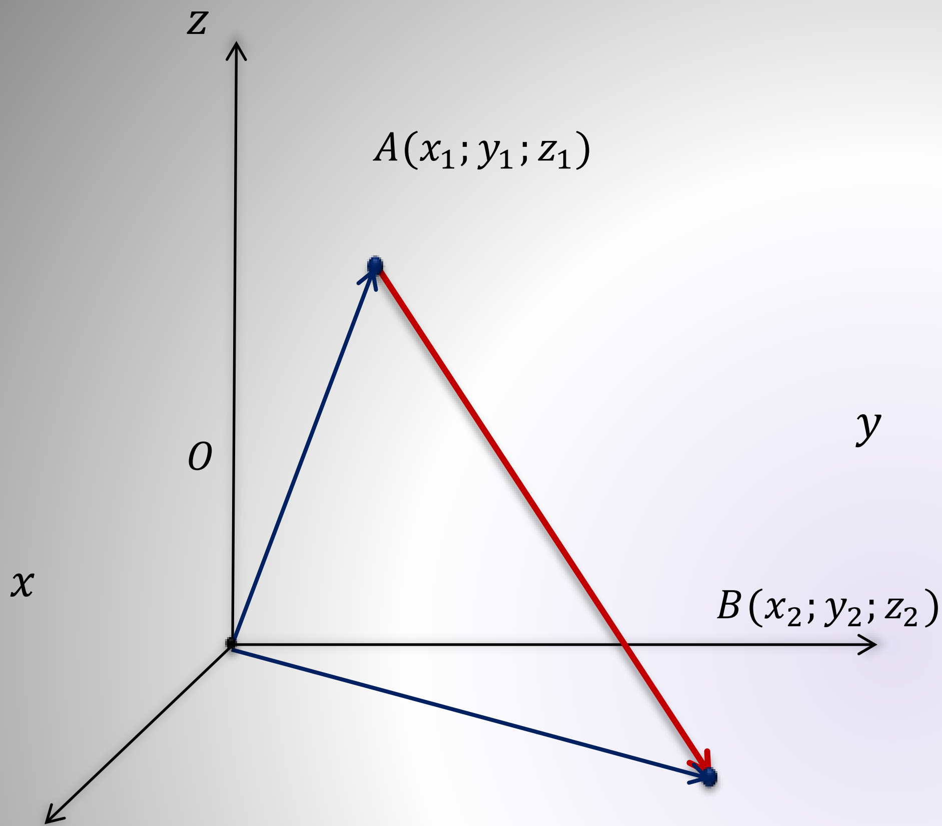
радиус-вектор точки M

$M(x; y)$

$\Downarrow$

$\overrightarrow{OM}\ \{x; y\}$

Координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора.



$\overrightarrow{OA}\ \{x_1; y_1; z_1\}$

$\overrightarrow{OB}\ \{x_2; y_2; z_2\}$

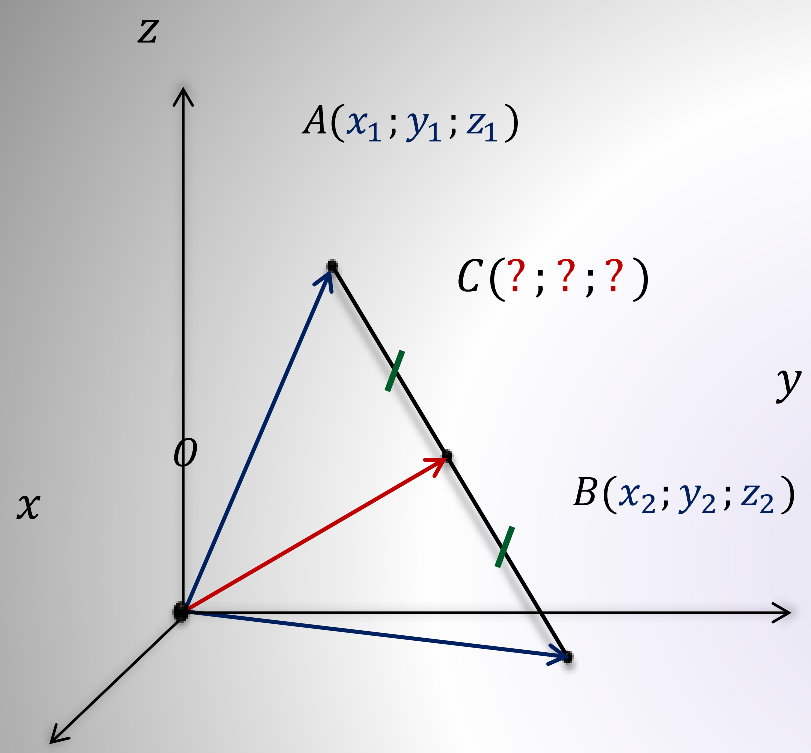
$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\ \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала

Простейшие задачи в координатах

1. Определение координат середины отрезка



$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

$\overrightarrow{OA}$ –радиус-вектор точки A

$\overrightarrow{OB}$ –радиус-вектор точки B

$\overrightarrow{OA}\ \{x_1; y_1; z_1\}$

$\overrightarrow{OB}\ \{x_2; y_2; z_2\}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\ \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$

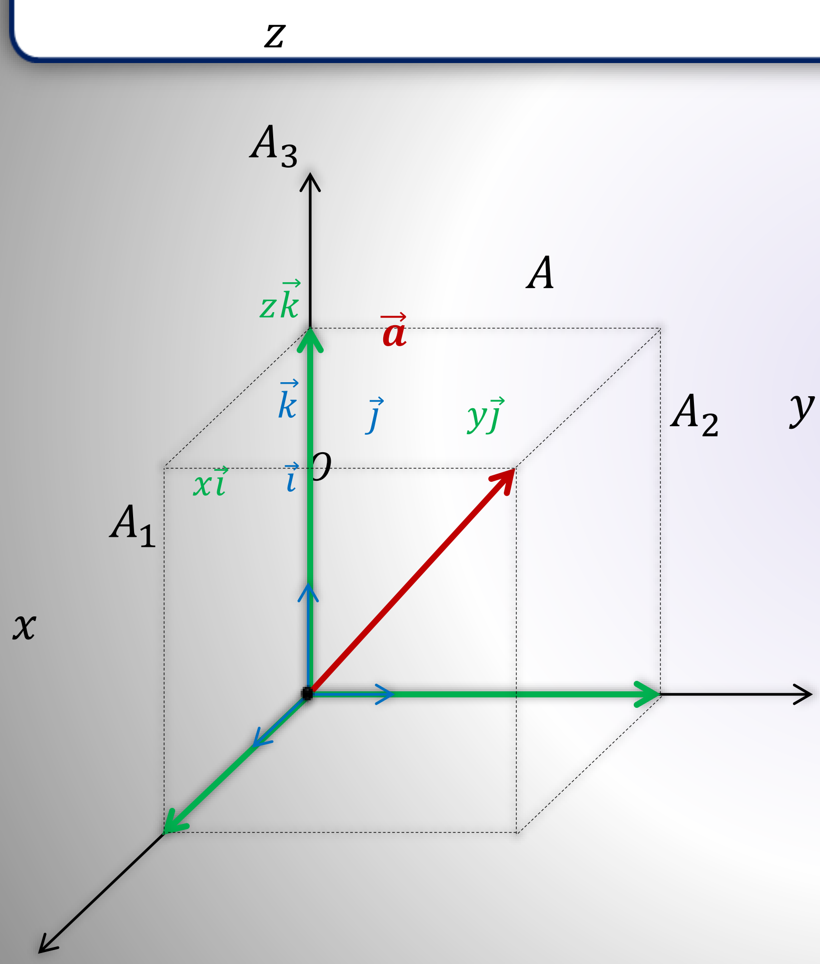
$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) \left\{\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right\}$$

$$\overrightarrow{OC} \left\{\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right\}$$

Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов

2. Вычисление длины вектора по его координатам

Длина вектора $\vec{a}\,\{x; y; z\}$равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.



$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Задача. Вычислить длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

а) $A(-1;0;2)$, $B(1;-2;3)$;
б) $A(-35;-17;20)$, $B(-34;-5;8)$.

$\vec{a}\,\{x;y;z\}$

$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Решение:

а) $A(-1;0;2)$, $B(1;-2;3)$

$\overrightarrow{AB}\,\{1-(-1);-2-0;3-2\}$

$\overrightarrow{AB}\,\{2;-2;1\}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4+4+1}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{9}$

$|\overrightarrow{AB}|=3$

б) $A(-35;-17;20)$, $B(-34;-5;8)$

$\overrightarrow{AB}\,\{-34-(-35);-5-(-17);8-20\}$

$\overrightarrow{AB}\,\{1;12;-12\}$

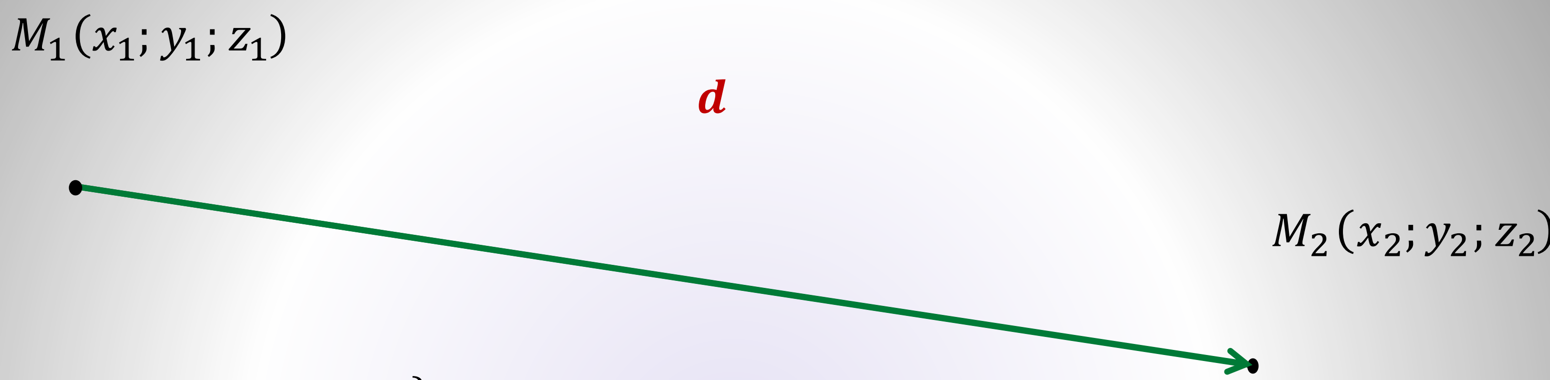
$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+12^2+(-12)^2}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+144+144}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{289}$

$|\overrightarrow{AB}|=17$

3. Определение расстояния между двумя точками



$\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

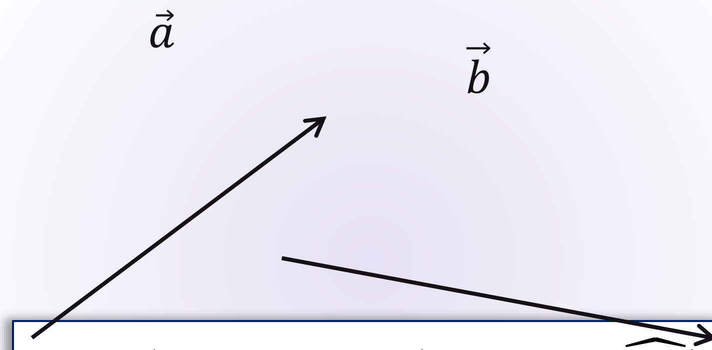
$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = M_1M_2 = d$

$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух векторов – произведение их длин на косинус угла между ними



$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}}$$

Скалярное произведение векторов **в координатах**

$\vec{a}\,\{x_1; y_1\}$

$\vec{b}\,\{x_2; y_2\}$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}$$

Скалярное произведение векторов **в координатах**

$\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$

$\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}$$

$\vec{\boldsymbol{a}}\,\{\mathbf{1}; -\mathbf{1}; \mathbf{2}\}$ $\vec{\boldsymbol{b}}\,\{-\mathbf{1}; \mathbf{1}; \mathbf{1}\}$ $\vec{\boldsymbol{c}}\,\{\mathbf{5}; \mathbf{6}; \mathbf{2}\}$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 5 - 6 + 4 = 3$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = -1 - 1 + 2 = 0$

$\vec{b} \cdot \vec{c}$ 3

$\vec{a} \cdot \vec{a}$ $+ 4)^2 = (\sqrt{6})^2 = 6$

$\sqrt{\vec{b} \cdot}$ $\sqrt{3}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \boldsymbol{\cos\alpha}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

$$\boldsymbol{\cos\alpha} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\boldsymbol{\cos\alpha} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой: $\boldsymbol{\cos\alpha} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$.

Свойства скалярного произведения векторов

1. $\vec{a}^2 \geq 0$; $\vec{a}^2 \neq 0$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон)

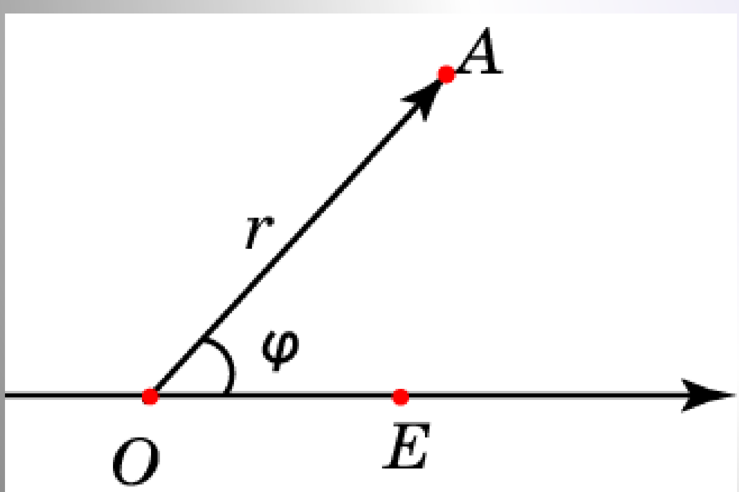
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон)

4. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательный закон)

Полярные координаты

Пусть на плоскости задана координатная прямая с выделенной точкой *O* и единичным отрезком *OE*. Эта прямая в данном случае будет называться полярной осью. Точка *O* называется полюсом.

Полярными координатами точки *A* на плоскости с заданной полярной осью называется пара (r, φ), где r - расстояние от точки *A* до точки *O*, φ - угол между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый в направлении против часовой стрелки, если $\varphi > 0$ и по часовой стрелке, если $\varphi < 0$.

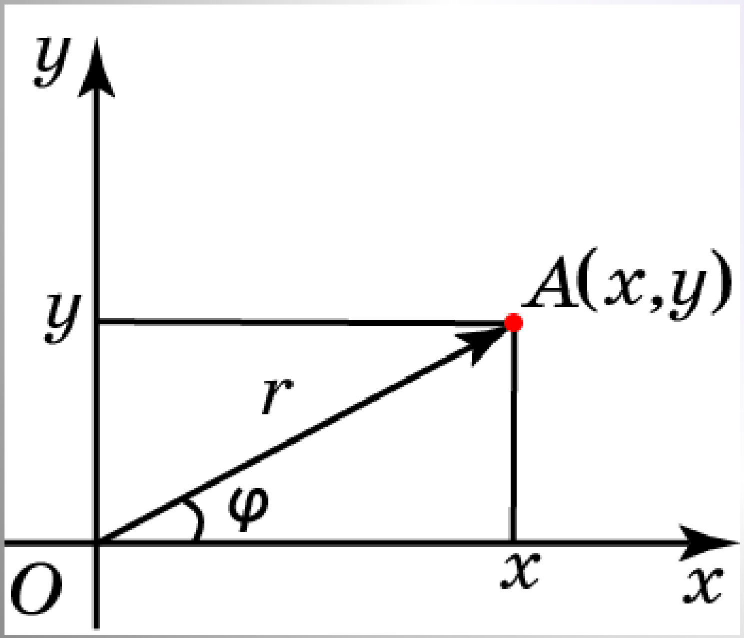


При этом первая координата r называется полярным радиусом, а вторая φ - полярным углом. Полярный угол можно задавать в градусах или радианах.

Полярные координаты

Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полюс принимается начало координат и за полярную ось – ось *Ox*. В этом случае каждой точке плоскости с декартовыми координатами (*x*, *y*) можно сопоставить полярные координаты (*r*, φ). При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$



Наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам:

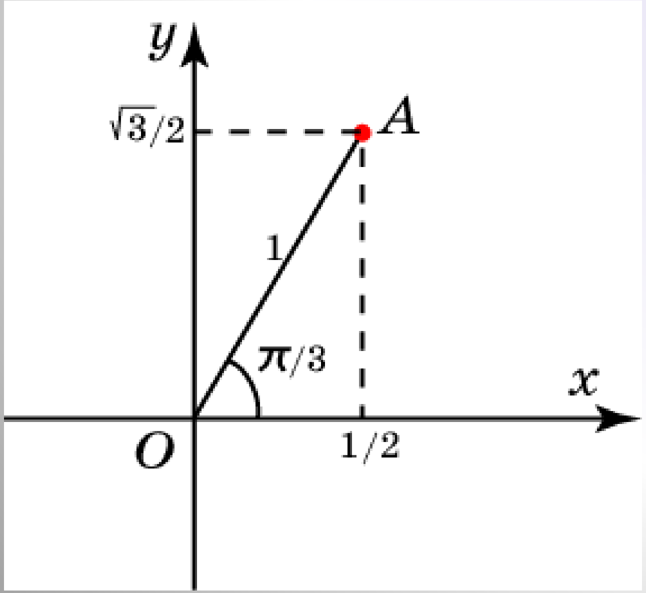
$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

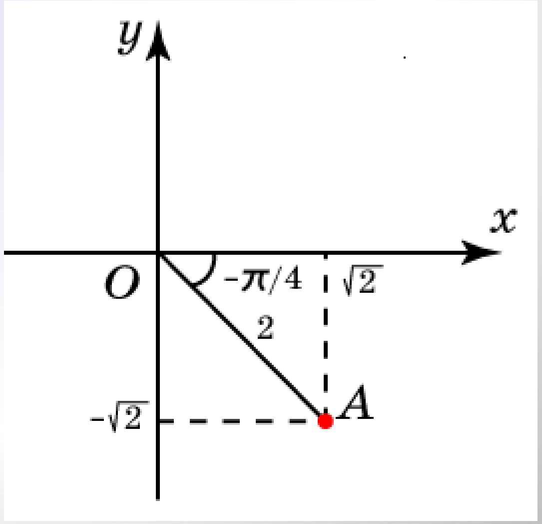
$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Упражнение 1

Для следующих точек с заданными полярными координатами найдите их декартовы координаты: а) $(1, \frac{\pi}{3})$; б) $(2, -\frac{\pi}{4})$.

Ответ: а) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; б) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.





Упражнение 2

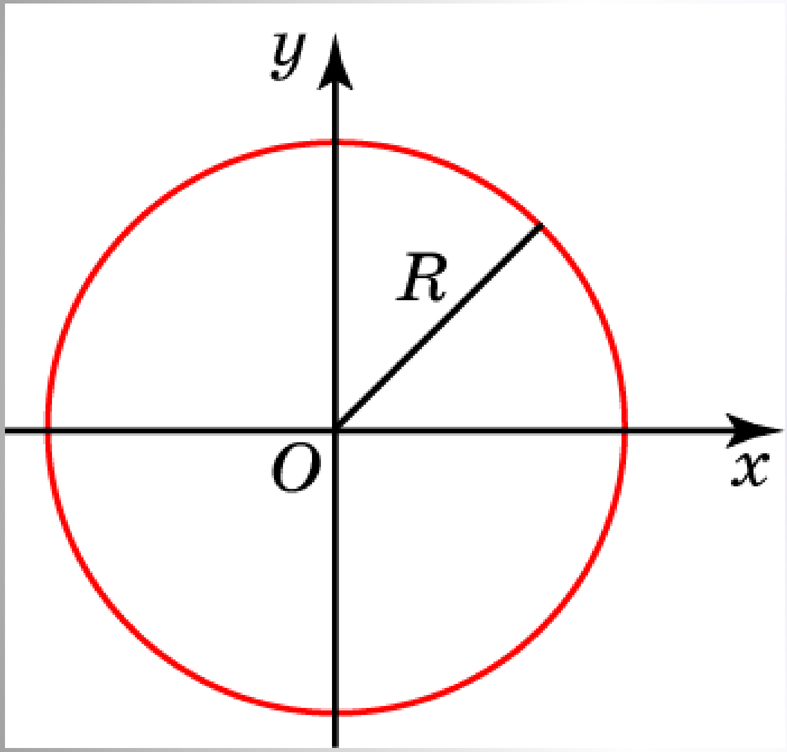
Для следующих точек с заданными декартовыми координатами найдите их полярные координаты:

а) ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$); б) (-10, 0); в) (1, - $\sqrt{3}$); г) (- $\sqrt{3}$, 1).

Ответ: а) (2, $\frac{\pi}{4}$); б) (10, π); в) (2, - $\frac{\pi}{3}$); г) (2, $\frac{5\pi}{6}$).

Окружность

Окружность радиуса *R* с центром в точке *O* задается уравнением $r = R$.

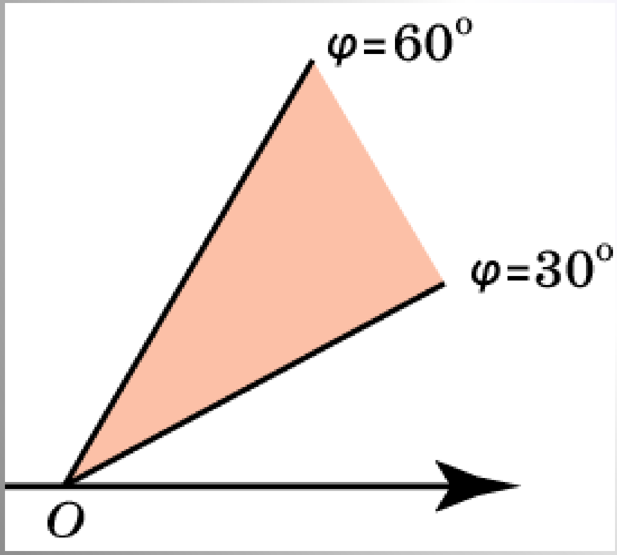


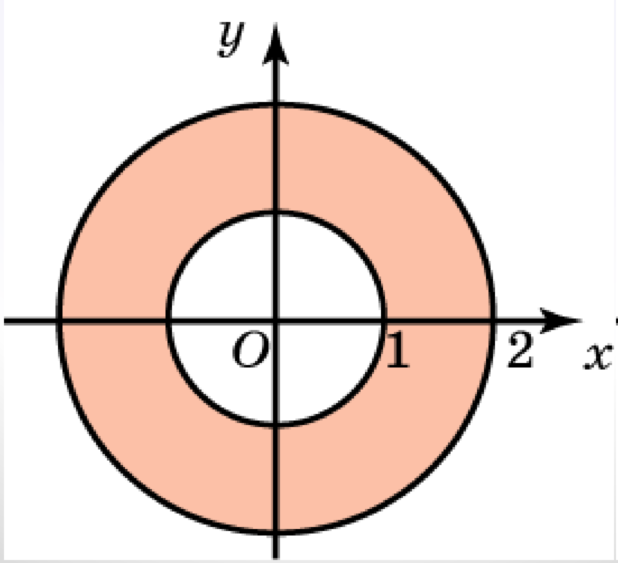
Действительно, окружность является геометрическим местом точек, удаленных от точки *O* на расстояние *R*. Все такие точки удовлетворяют равенству *r* = *R*. При этом, если угол увеличивается, то соответствующая точка на окружности движется в направлении против часовой стрелки, описывая круги. Если же угол уменьшается, то соответствующая точка описывает круги в направлении по часовой стрелке.

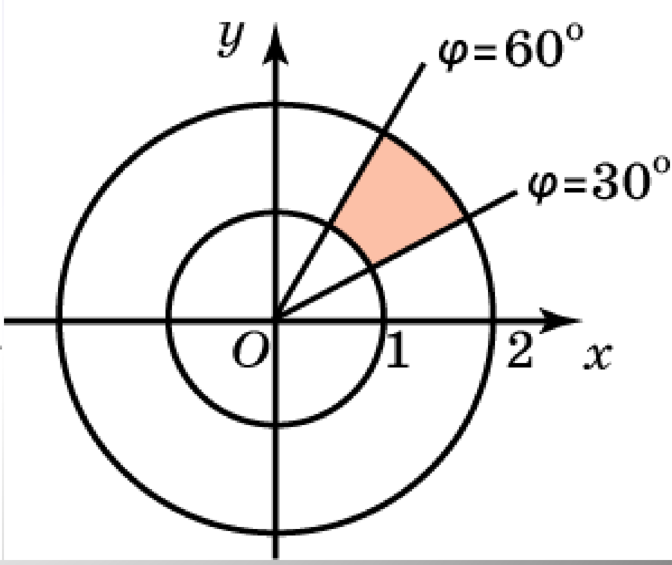
Упражнение 3

Нарисуйте геометрическое место точек на плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют неравенствам: а) $30^o < \varphi < 60^o$; б) $1 < r < 2$; в) $30^o < \varphi < 60^o$, $1 < r < 2$.

Ответ: а) б) в)

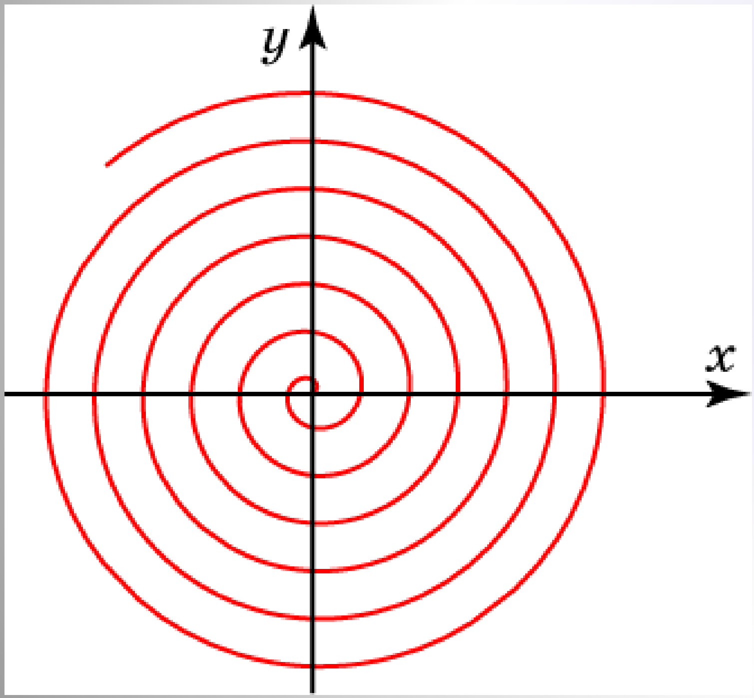






Спираль Архимеда

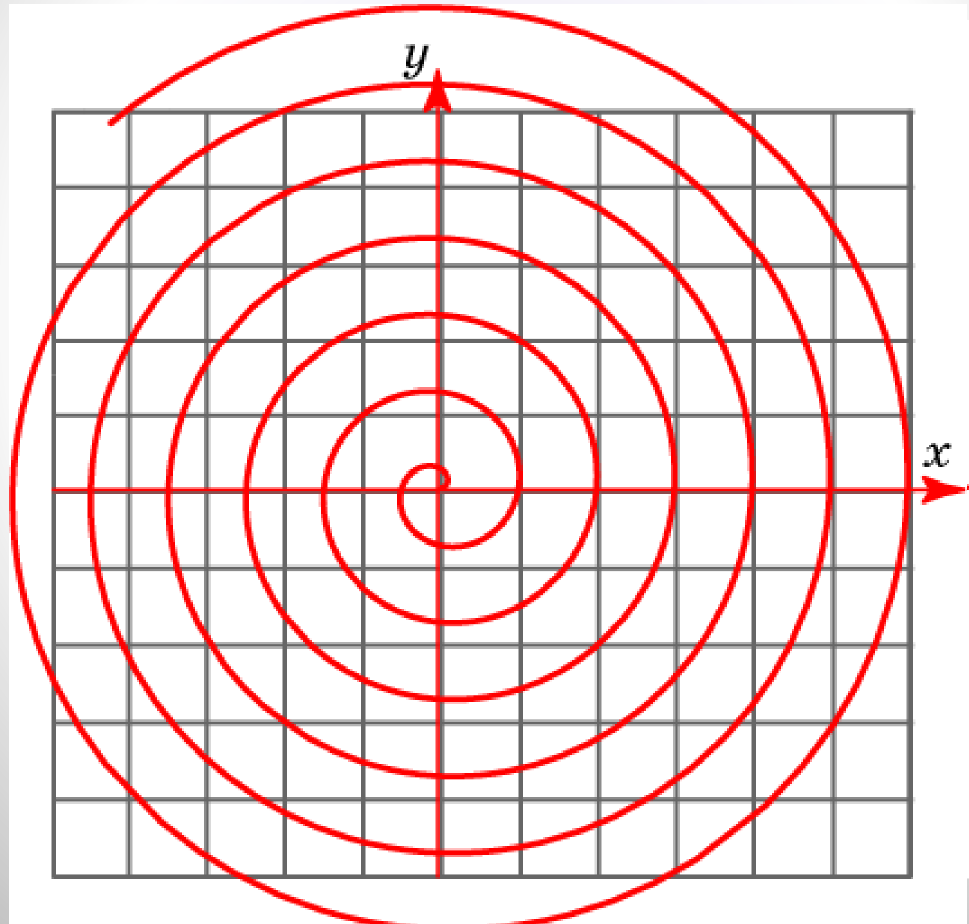
Спираль Архимеда - кривая, задаваемая уравнением $r = a\varphi$, где a - некоторое фиксированное число, угол φ задается в радианах.



Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между соседними витками, каждое из них равно $2\pi a$. Действительно, если угол увеличивается на 2π, т.е. точка делает один, то радиус увеличивается на $2\pi a$, что и составляет расстояние между соседними витками.

Упражнение 4

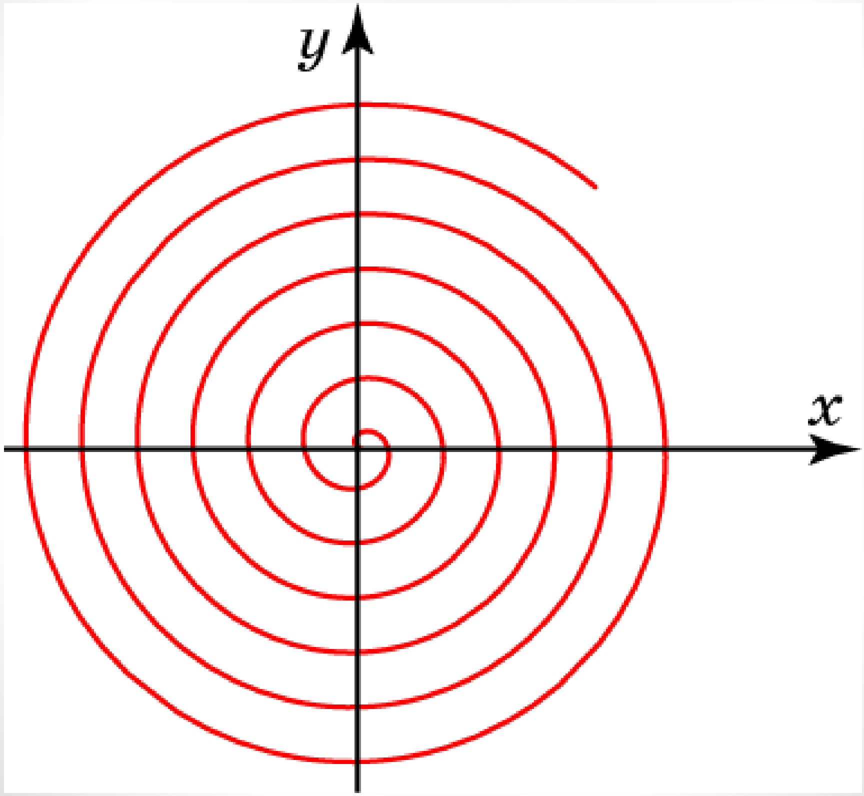
На клетчатой бумаге постройте спираль Архимеда, заданную уравнением $r = \frac{\varphi}{2\pi}$.



Упражнение 5

Нарисуйте спираль Архимеда, заданную уравнением $r = a\varphi$, $a < 0$.

Ответ:



Упражнение 6

Человек идет с постоянной скоростью вдоль радиуса вращающейся карусели. Какой будет его траектория относительно земли?

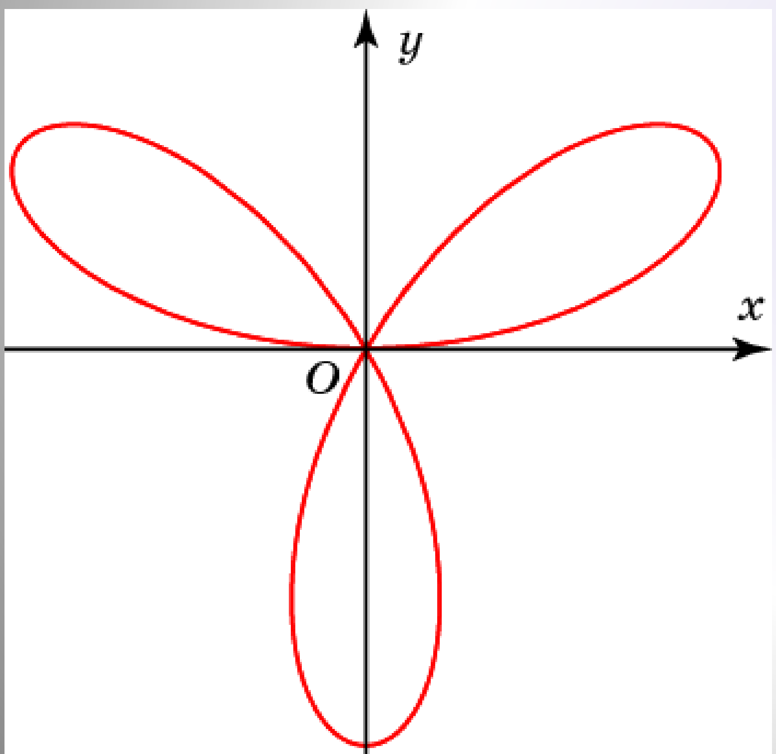
Ответ: Спираль Архимеда.

Трилистник

Трилистник – кривая, задаваемая уравнением $r = \sin 3\varphi$.

Для построения этой кривой сначала заметим, что, поскольку радиус неотрицателен, должно выполняться неравенство $\sin 3\varphi \geq 0$, решая которое находим область допустимых значений углов :

$$0^o \leq \varphi \leq 60^o;\ 120^o \leq \varphi \leq 180^o;\ 240^o \leq \varphi \leq 300^o.$$



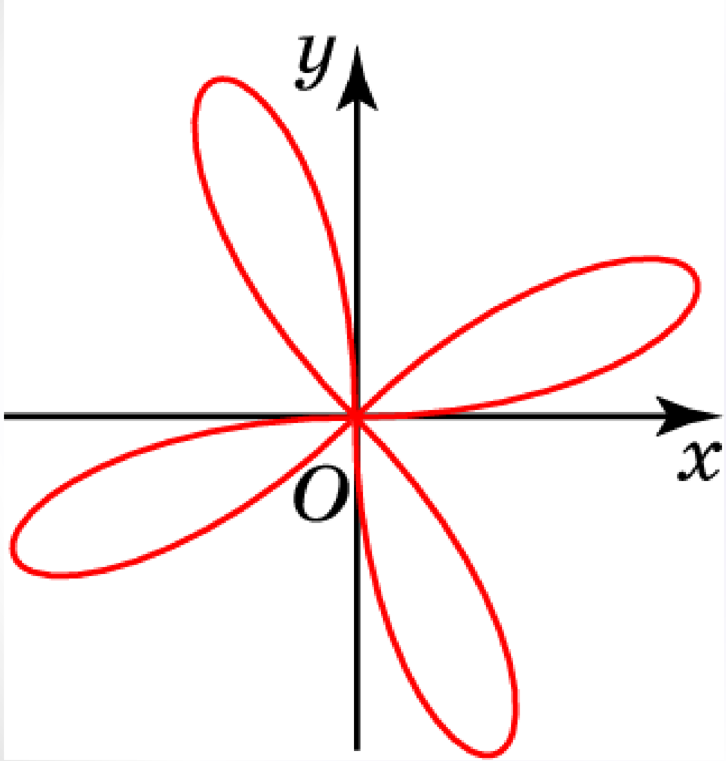
Если угол φ изменяется от нуля до 30^o, то радиус r изменяется от нуля до единицы. Если угол φ изменяется от 30^o до 60^o, то радиус изменяется от единицы до нуля. Таким образом, при изменении угла от 0^o до 60^o точка описывает кривую, похожую на очертания лепестка. Такие же лепестки получаются когда угол изменяется в пределах от 120^o до 180^o и от 240^o до 300^o.

Упражнение 7

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением

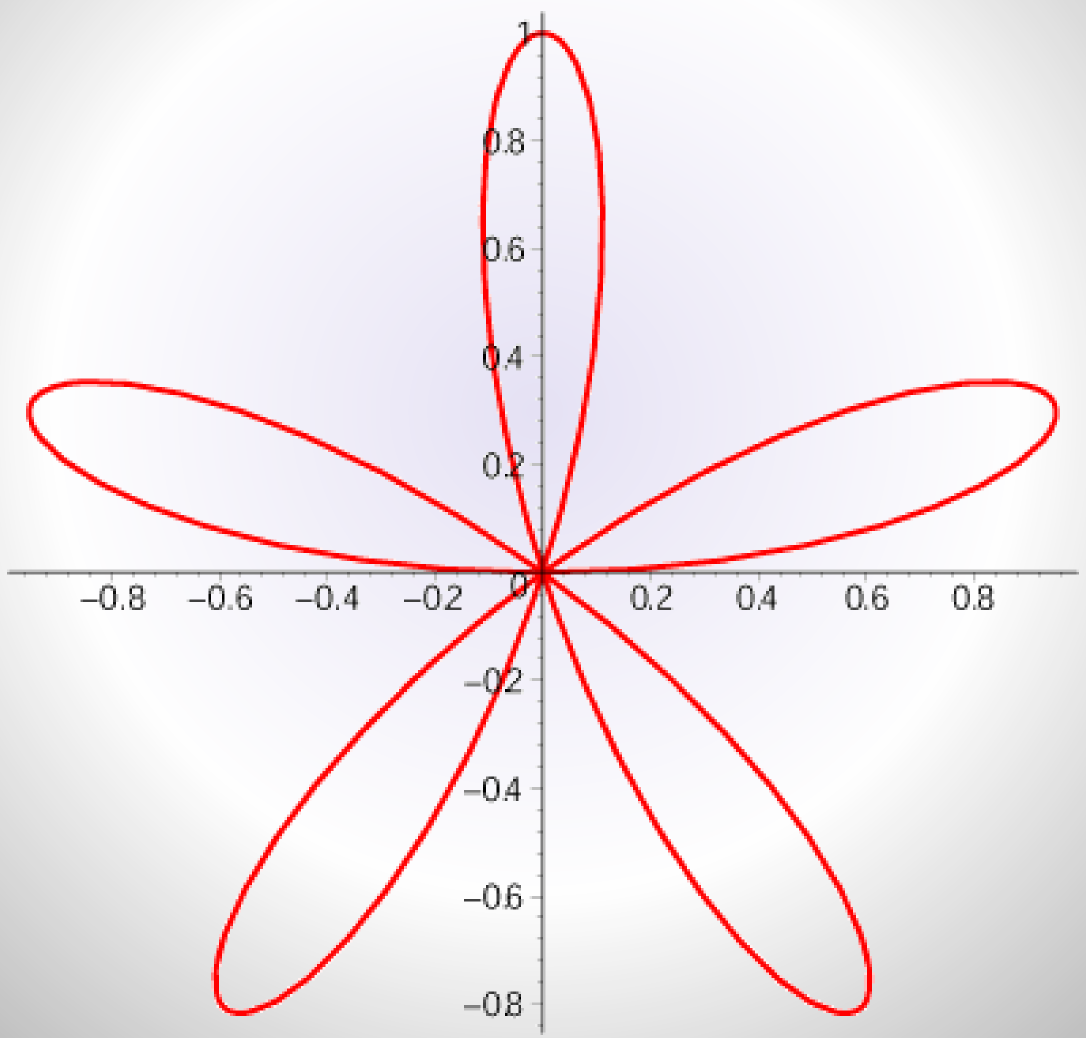
$$r = \sin 4\varphi\ .$$

Ответ:



Упражнение 8

Нарисуйте пятилепестковую розу - кривую, задаваемую уравнением $r = \sin 5\varphi$.



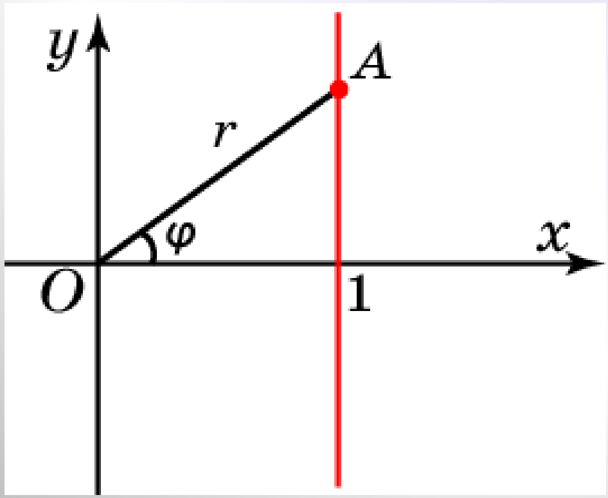
Ответ:

Упражнение 9

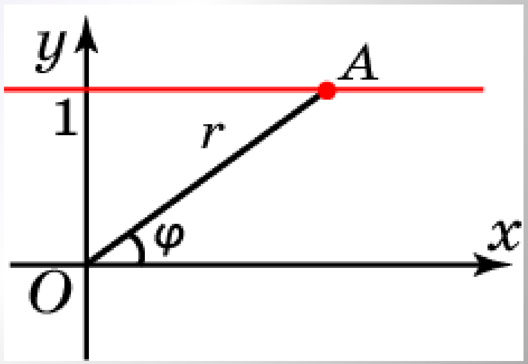
Найдите геометрическое место точек, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $r = \dfrac{1}{\cos\varphi}$; б) $r = \dfrac{1}{\sin\varphi}$.

Ответ: а)



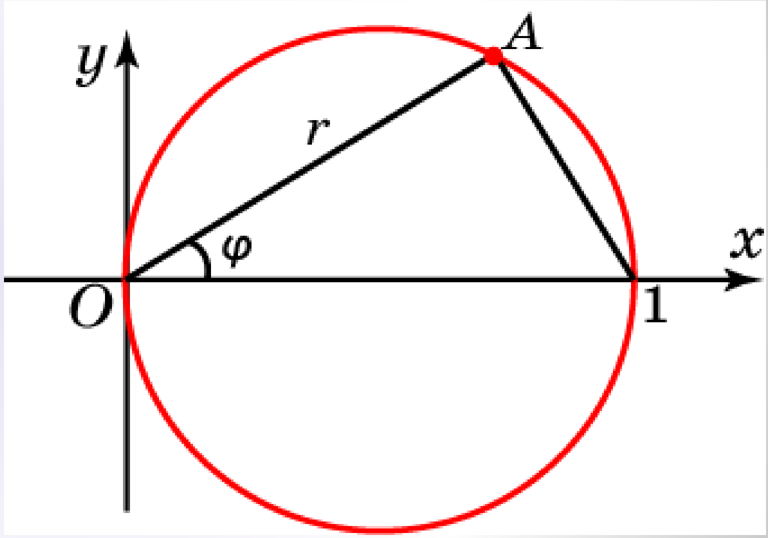
б)



Упражнение 10

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением

$r = \cos \varphi$.



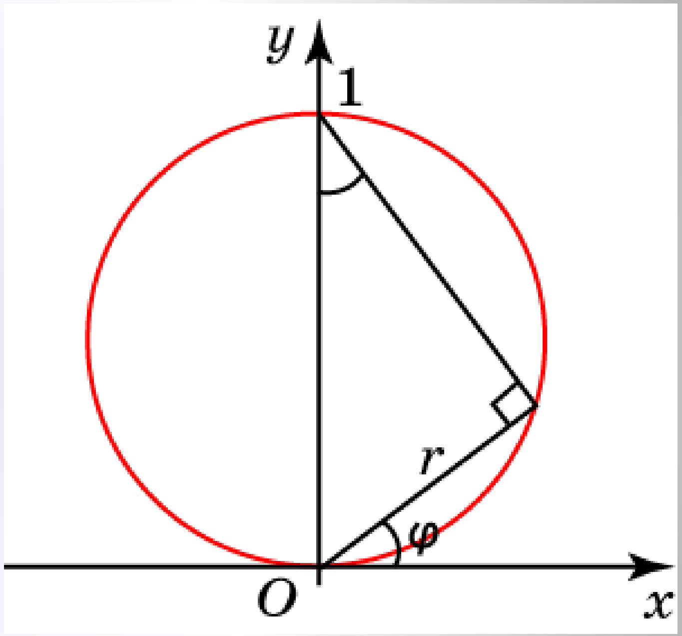
Ответ: Окружность.

Упражнение 11

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением

$r = \sin\varphi$.

Ответ: Окружность.

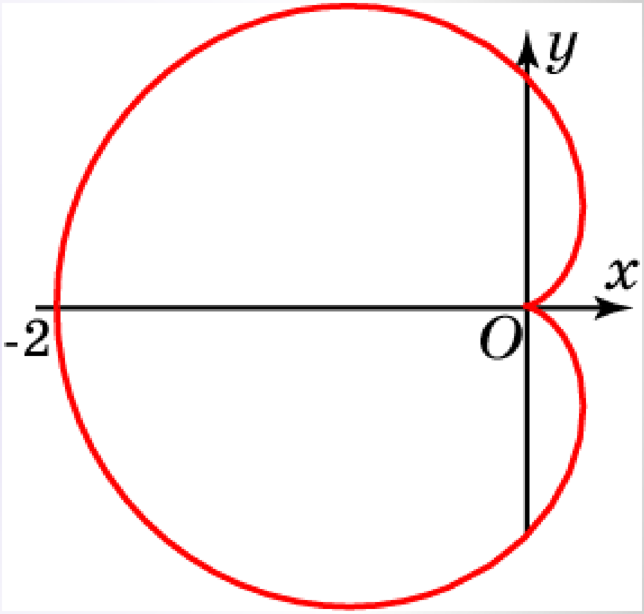


Упражнение 12

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением

$r = 1 - \cos \varphi$.

Ответ: Кардиоида.

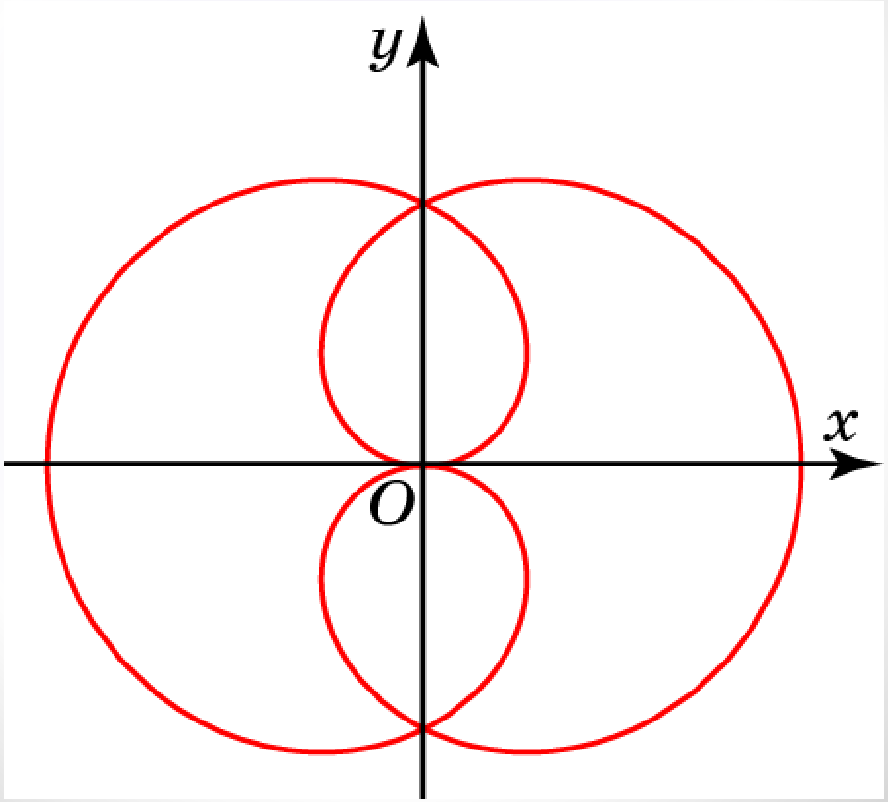


Упражнение 13

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением

$$r = \left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Ответ:

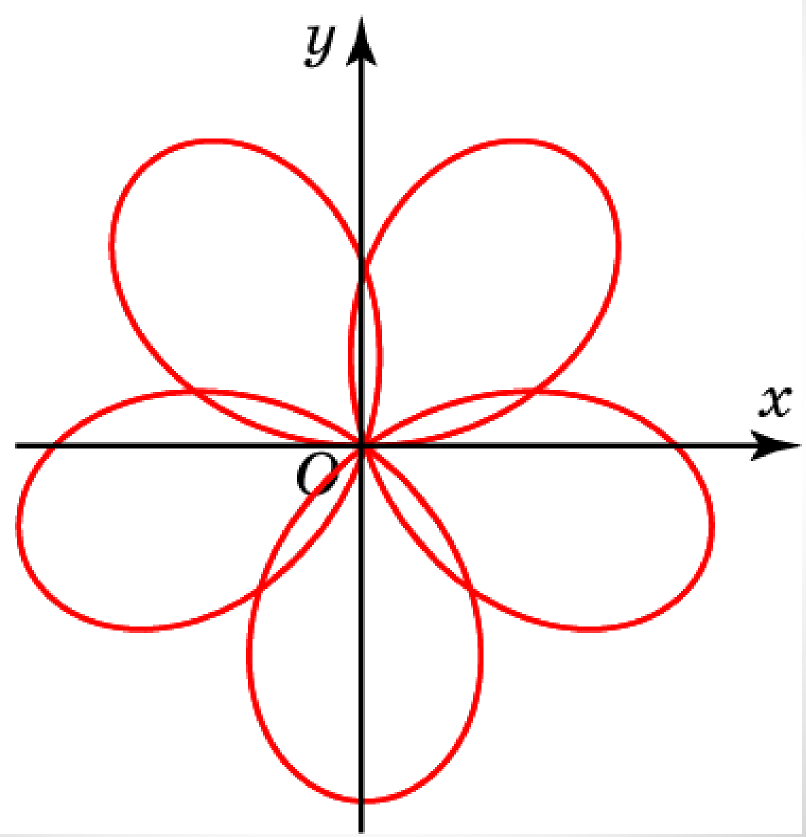


Упражнение 14

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением

$$r = \sin\frac{5\varphi}{3}.$$

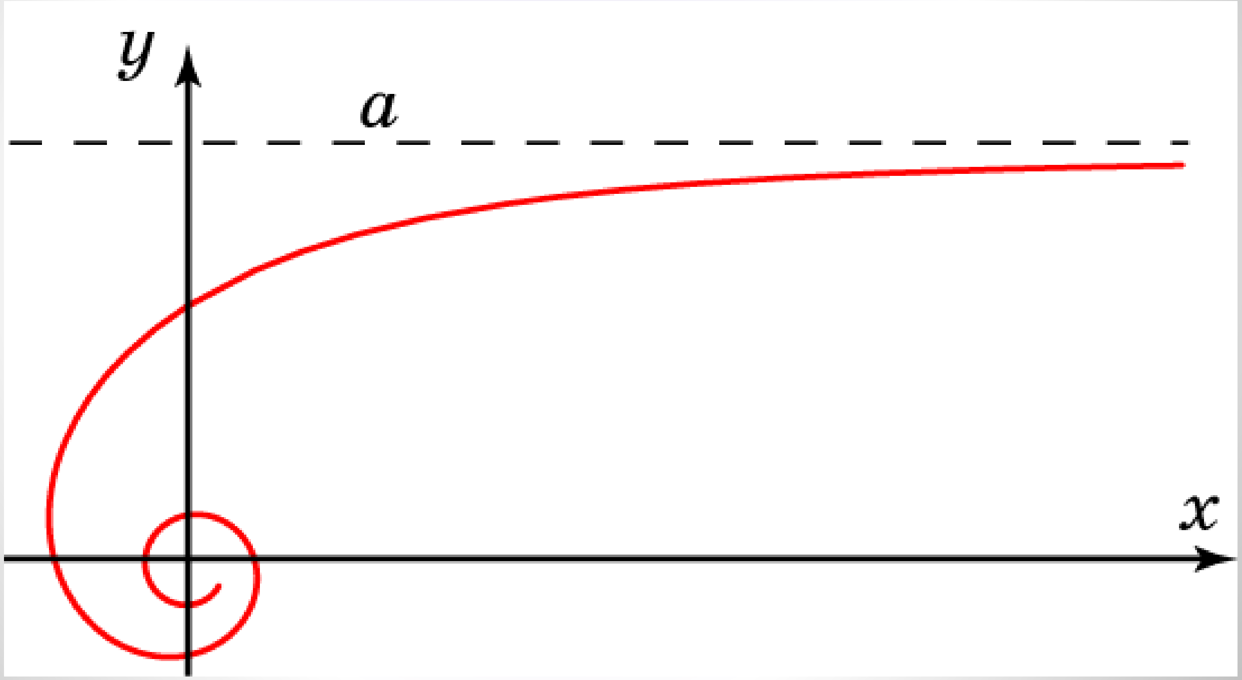
Ответ:



Упражнение 15

Нарисуйте гиперболическую спираль – кривую, задаваемую уравнением $r = a/\varphi$.

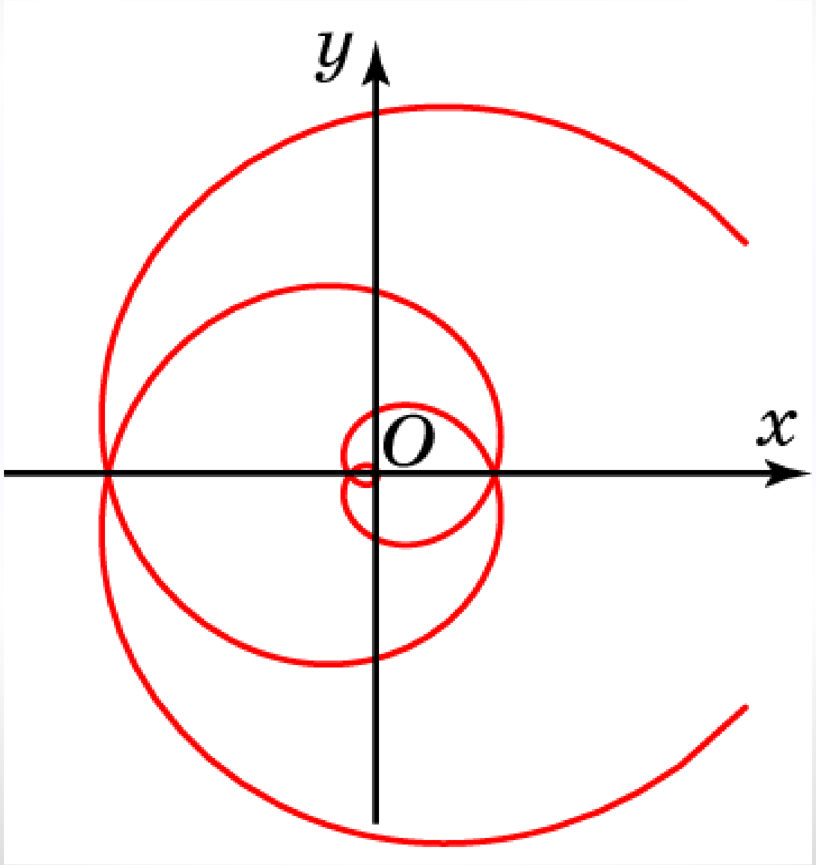
Ответ:



Упражнение 16

Нарисуйте спираль Галилея – кривую, задаваемую уравнением $r = a\varphi^2$.

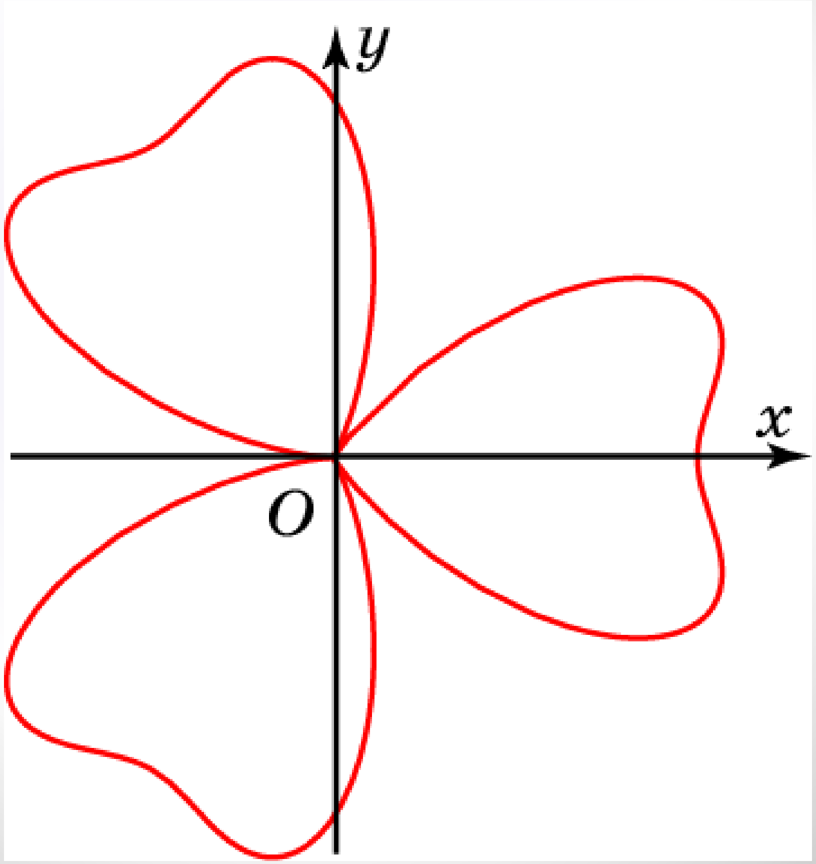
Ответ:



Упражнение 17

Нарисуйте кривую, напоминающую лист клевера и задаваемую уравнением $r = 1 + \cos 3\varphi + \sin^2 3\varphi$.

Ответ:



	$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$; $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$; $\vec{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$; $(\widehat{\vec{a};\vec{b}})=\varphi$		
Обозначение	**Скалярное**	**Векторное**	**Смешанное**
	$(\vec{a};\vec{b})=\vec{a}\vec{b}$ –число	$[\vec{a},\vec{b}]=\vec{a}\times\vec{b}$ – вектор	$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ –число
Определение	$\vec{a}\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cos\varphi$	1) $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ и $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$ 2) $\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\sin\varphi$ 3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$ – правая тройка	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$
	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$	$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$	$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$
	Линейность по всем сомножителям		
Свойства	***Критерий ортогональности ненулевых векторов:*** $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$	***Критерий коллинеарности ненулевых векторов:*** $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$	***Критерий компланарности ненулевых векторов:*** $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$
	$\vec{a}\cdot\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert^2$; $\vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$	***Геометрический смысл:*** *вектор* $\vec{a}\times\vec{b}\perp$ параллелограмму со сторонами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и его модуль $\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert=S$ – площадь этого параллелограмма	***Геометрический смысл:*** $\lvert\vec{a}\vec{b}\vec{c}\rvert=V$ – объем параллелепипеда с ребрами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$
В координатах	$\vec{a}\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$	$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$	$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$