ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

<u>Определитель</u> – это число, характеризующее квадратную матрицу.

Обозначается:

$$|A| \qquad \Delta \qquad \det A$$

Определителем первого порядка матрицы

$$A = (a_{11})$$

называется число a_{11}

То есть:

$$\boxed{|A| = |a_{11}| = a_{11}}$$

Определителем второго порядка называется число, которое определяется по правилу:

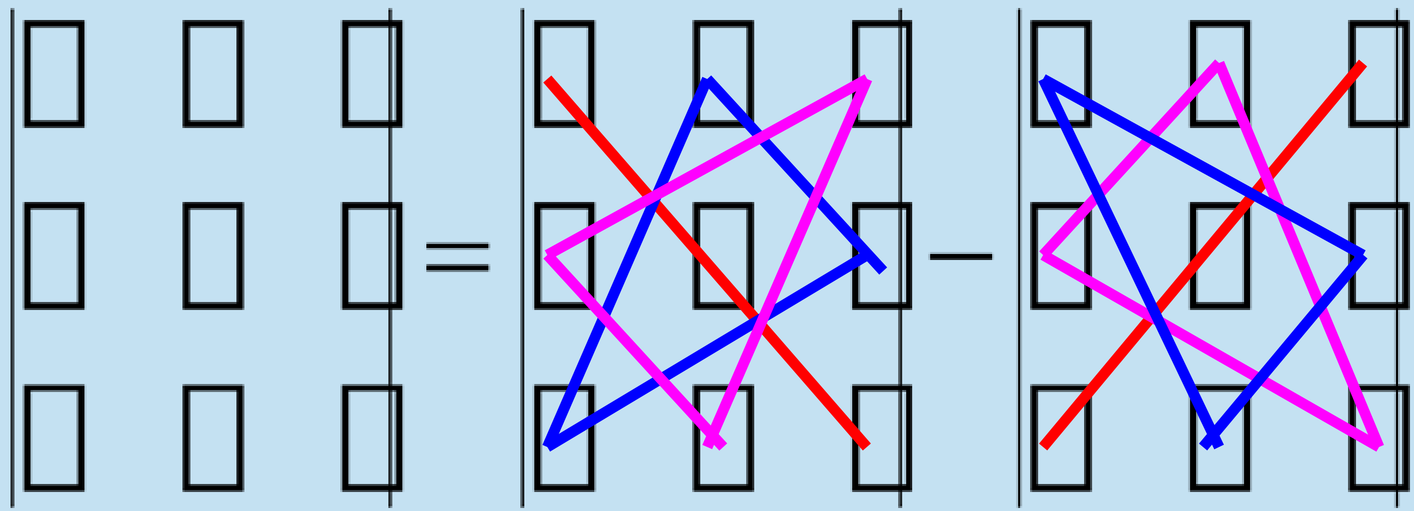
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

<u>Определителем третьего порядка</u> называется число, которое определяется по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} -$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$

Для вычисления определителей третьего порядка удобно пользоваться <u>правилом треугольников:</u>



Пример.

Вычислить определители матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-3) \cdot 2 = 11$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 5$$

Минором ***некоторого элемента определителя называется определитель, полученный из исходного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.***

Минор элемента определителя a_{ij}

обозначается как M_{ij}

Алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^S$, где S – сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

$$A_{ij} = (-1)^S M_{ij}$$

$$S = i + j$$

В частности, минор элемента a_{11}

определителя третьего порядка найдется по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Его алгебраическое дополнение:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$$

Свойства определителей

1

Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

$$|A| = \left|A^T\right|$$

Например:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$|B^T| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 1 - 1 + 4 - 1 = 5$$

2

Перестановка двух строк или столбцов определителя эквивалентна умножению его на (-1).

Например:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Меняем местами первую и вторую строки:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 1 + 1 + 1 - 2 - 2 = -5$$

3

Если определитель имеет две одинаковые строки или столбца, то он равен нулю.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 + 12 - 12 - 4 + 4 = 0$$

4

Общий множитель строки или столбца можно выносить за знак определителя.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 2 - 2 + 4 - 2 = 4$$

Выносим из второй строки множитель 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 - 1 + 1 - 1 + 2 - 1) = 2 \cdot 2 = 4$$

5

Определитель не изменится, если к элементам одной строки или столбца прибавить соответственные элементы другой строки или столбца, умноженные на одно и то же число.

Например:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Первую строку умножаем на 2 и складываем со второй:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3 + 4 + 1 + 8 - 3 = 5$$

6

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}$$

Пример.

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение:

Раскладываем определитель по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{32} + 1 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} = A_{32} + A_{33}$$

=

Находим алгебраические дополнения:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3+6+16-24-3-4) = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2+4+12-16-2-3 = -3$$

Подставляем полученный результат:

= $6 + (-3) = 3$

Задание. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ методом треугольников.

Решение. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) +$

$$+3 \cdot 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 54$$

Ответ. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 54$

Задание. Разложив по первой строке, вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \leftarrow = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$

$$1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0$$

Ответ. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

Задание. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Решение. Выполним следующие преобразования над строками определителя: из второй строки отнимем четыре первых, а из третьей первую строку, умноженную на семь, в результате, согласно свойствам определителя, получим определитель, равный данному.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4-4\cdot 1 & 5-4\cdot 2 & 6-4\cdot 3 \\ 7-7\cdot 1 & 8-7\cdot 2 & 9-7\cdot 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2\cdot(-3) & 2\cdot(-6) \end{vmatrix} = 0$$

Определитель равен нулю, так как вторая и третья строки являются пропорциональными.

Ответ. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

Задание. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам какой-то строки или какого-то столбца.

Решение. Предварительно выполним элементарные преобразования над строками определителя, сделав как можно больше нулей либо в строке, либо в столбце. Для этого вначале от первой строки отнимем девять третьих, от второй - пять третьих и от четвертой - три третьих строки, получаем:

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-1 & 8-0 & 7-9 & 6-18 \\ 5-5 & 4-0 & 3-5 & 2-10 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & -2 & -12 \\ 0 & 4 & -2 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Полученный определитель разложим по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 0 & 8 & -2 & -12 \\ 0 & 4 & -2 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & -2 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 0$$

Полученный определитель третьего порядка также разложим по элементам строки и столбца, предварительно получив нули, например, в первом столбце. Для этого от первой строки отнимаем две вторые строки, а от третьей - вторую:

$$\begin{vmatrix} 8 & -2 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & -8 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (2 \cdot 8 - 4 \cdot 4) = 0$$

Ответ. $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$

Задание. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ приведением его к треугольному виду.

Решение. Сначала делаем нули в первом столбце под главной диагональю. Все преобразования будет выполнять проще, если элемент a_{11} будет равен 1. Для этого мы поменяем местами первый и второй столбцы определителя, что, согласно свойствам определителя, приведет к тому, что он сменит знак на противоположный:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Далее получим нули в первом столбце, кроме элемента a_{11} , для этого из третьей строки вычтем две первых, а к четвертой строке прибавим первую, будем иметь:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Далее получаем нули во втором столбце на месте элементов, стоящих под главной диагональю. И снова, если диагональный элемент будет равен ± 1 , то вычисления будут более простыми. Для этого меняем местами вторую и третью строки (и при этом меняется на противоположный знак определителя):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Далее делаем нули во втором столбце под главной диагональю, для этого поступаем следующим образом: к третьей строке прибавляем три вторых, а к четвертой - две вторых строки, получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{vmatrix}$$

Далее из третьей строки выносим (-10) за определитель и делаем нули в третьем столбце под главной диагональю, а для этого к последней строке прибавляем третью:

$$\Delta = -10 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= -10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = (-10) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-8) = -80$$

Ответ. $\Delta = -80$

Теорема

Пусть Δ - определитель n-го порядка. Выберем в нем произвольные k строк (или столбцов), причем $k \leq n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров k-го порядка, которые содержатся в выбранных k строках (столбцах), на их алгебраические дополнения равна определителю.

Задание. Используя теорему Лапласа, вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

Решение. Выберем в данном определителе пятого порядка две строки - вторую и третью, тогда получаем (слагаемые, которые равны нулю, опускаем):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+2+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+2+5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -23 + 128 + 90 = 195$$

Ответ. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 195$