Основы математического анализа I

Содержание

§1. Введение в математический анализ

1.1. Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел

Понятие вещественных (действительных) чисел, их свойства, слушателю хорошо известны еще со школы. В то же время четкого определения такого объекта как число, скорее всего, не было. Оказывается, что многие результаты классического анализа опираются на так называемое свойство **полноты** множества вещественных чисел. Что это такое, откуда это свойство произрастает и чем оно мотивировано и будет обсуждаться в данном разделе.

Определение 1.1 (Понятие множества вещественных чисел). *Множество $\mathbb{R}$ называется множеством вещественных (или действительных) чисел, а его элементы – вещественными (или действительными) числами, если выполнен набор аксиом, приведенный ниже.*

1. Аксиомы сложения

Определено отображение $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, называемое операцией сложения, сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый суммой x и y, обладающее свойствами:

(а) Операция $+$ коммутативна, то есть для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$x + y = y + x.$$

(б) Операция $+$ ассоциативна, то есть для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

(в) Существует нейтральный элемент $0 \in \mathbb{R}$ (называемый нулем), такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$x + 0 = x.$$

(г) Для каждого элемента $x \in \mathbb{R}$ существует противоположный элемент $-x$ такой, что

$$x + (-x) = 0.$$

Замечание 1.1. *Итак, первая группа аксиом устанавливает существование операции сложения, а также привычные для нас свойства этой операции. Подытоживая, приходим к тому, что $\mathbb{R}$ – коммутативная группа по сложению.*

2. Аксиомы умножения

Определено отображение $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, называемое операцией умножения, сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый произведением элементов x и y, обладающее свойствами:

(а) Операция $\cdot$ коммутативна, то есть для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(б) Операция $\cdot$ ассоциативна, то есть для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(в) Существует нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (называемый единицей), такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$x \cdot 1 = x.$$

(г) Для каждого элемента $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ существует обратный элемент x^{-1} такой, что

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

Замечание 1.2. *Вторая группа аксиом вводит операцию умножения. Полезно отметить, что свойства операции умножения практически в точности вторят свойствам операции сложения, за исключением отсутствия элемента 0^{-1}. Последнее же вторит известному со школы тезису «на ноль делить нельзя». Итак, с точки зрения алгебраических структур, $\mathbb{R}$ – коммутативная группа по умножению.*

Замечание 1.3. *Условие, что $1 \neq 0$, чрезвычайно важно. Без него мы бы могли построить $\mathbb{R}$, состоящее лишь из одного элемента – из нуля.*

Замечание 1.4. *На данный момент введенные операции (сложения и умножения) никак не связаны. Интересующая нас связь – это правило раскрытия скобок, его-то мы и введем.*

3. Связь сложения и умножения

Умножение дистрибутивно по отношению к сложению, то есть $\forall x, y, z, \in \mathbb{R}$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Замечание 1.5. *Первые три группы аксиом устанавливают, что $\mathbb{R}$ – поле. В то же время, введенные операции не исчерпывают ни наших, ни сугубо математических потребностей в свойствах множества $\mathbb{R}$. Например, мы так и не научились сравнивать элементы из $\mathbb{R}$.*

4. Аксиомы порядка

Между элементами $\mathbb{R}$ введено отношение порядка $\leqslant$, то есть для элементов $x, y \in \mathbb{R}$ установлено: справедливо $x \leqslant y$, или нет. При этом выполняются следующие условия:

(а) Отношение $\leqslant$ рефлексивно, то есть

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ x \leqslant x.$$

(б) Отношение $\leqslant$ антисимметрично, то есть

$$(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x) \ \Rightarrow \ (x = y).$$

(в) Отношение $\leqslant$ транзитивно, то есть

$$(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \ \Rightarrow \ (x \leqslant z).$$

(г) Для любых двух элементов $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$.

Замечание 1.6. *Само отношение, обозначенное нами как $\leqslant$, и первые три рассмотренных пункта устанавливают общее понятие «порядка» на множестве (конечно, лишь математического :)). Последний же пункт наделяет порядок на множестве $\mathbb{R}$ свойством полной (линейной) упорядоченности: любые два элемента из $\mathbb{R}$ сравнимы между собой.*

Замечание 1.7. *Отметим на наш взгляд не излишнее замечание. Рассмотрим множество натуральных чисел и отношение делимости на нем. Точнее, для натуральных чисел a, b будем писать*

$$a \,\vdots\, b$$

в случае, когда a делится на b нацело. Легко видеть, что введенное отношение – отношение порядка. Однако, таким образом введенный порядок не устанавливает полную (линейную) упорядоченность так как, например, числа 2 и 3 оказываются несравнимыми.

Все это должно наводить на мысль, что «порядок» — весьма общее понятие, впрочем, все равно пытающееся установить что-то вроде свойств больше-меньше и, вообще говоря, на множествах разной природы и структуры.

Замечание 1.8. *Введя новое отношение, его стоит «подружить» с объектами, введенными ранее.*

5. Связь сложения и порядка

Если $x, y, z \in \mathbb{R}$, то

$$(x \leqslant y) \ \Rightarrow \ (x + z \leqslant y + z).$$

Замечание 1.9. *Итак, перед нами постулируется хорошо известное со школы свойство: к обеим частям неравенства можно, с сохранением справедливости последнего, прибавлять одно и то же число.*

6. Связь умножения и порядка

Если $x, y \in \mathbb{R}$, то

$$(0 \leqslant x) \ \wedge \ (0 \leqslant y) \ \Rightarrow \ (0 \leqslant x \cdot y).$$

Замечание 1.10. *Введенный только что факт опять-таки известен: произведение неотрицательных чисел неотрицательно.*

Замечание 1.11. *Интересно задаться вопросом: все ли это? Хватает ли приведенного списка?*

И правда, мы умеем теперь складывать, умножать, сравнивать вещественные числа, а также как-то комбинировать эти операции и согласовывать их действия. Может быть, это все?

На самом деле нет. Если мы остановимся на введенной группе аксиом, то в качестве $\mathbb{R}$ прекрасно бы подошло множество рациональных чисел (дробей). Но мы-то со школы знаем, что среди вещественных чисел есть и еще какие-то загадочные иррациональные числа, которых, кстати, куда больше, чем рациональных.

Для тех, кто не помнит о чем мы говорим, тут же приведем соответствующее утверждение.

Лемма 1.1. *Если существует $c \in \mathbb{R}$, что $c^2 = 2$, то c – не рациональное число*

Доказательство. Предположим противное. Пусть

$$c = \frac{m}{n},$$

n – натуральное, m – целое, и последняя дробь несократима. Тогда, если $c^2 = 2$, то

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \ \Rightarrow \ m^2 = 2n^2 \ \Rightarrow \ m \ \vdots \ 2 \ \Rightarrow \ m = 2k,$$

где k – натуральное. Но тогда

$$(2k)^2 = 2n^2 \ \Rightarrow \ 2k^2 = n^2 \ \Rightarrow \ n \ \vdots \ 2 \ \Rightarrow \ n = 2p,$$

где p – целое. Но тогда дробь, соответствующая числу c, сократима на 2, что противоречит предположению. $\square$

Замечание 1.12. *Последняя лемма показывает, что на данный момент в множестве $\mathbb{R}$ как будто бы есть дыры. Например, в нем явно не хватает элемента c из предыдущей леммы. Исправим это, введя в рассмотрение так называемую аксиому непрерывности.*

7. Аксиома непрерывности (полноты)

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$, причем $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$. Тогда

$$(\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x \leqslant y)\ \Rightarrow\ (\exists c \in \mathbb{R}:\ x \leqslant c \leqslant y\ \forall x \in X\ \forall y \in Y).$$

Замечание 1.13. *Введенная аксиома, если думать геометрически, как будто бы нам подходит. Она утверждает, что если некоторое (непустое) подмножество* $\mathbb{R}$ *находится «левее» некоторого (непустого) подмножества* $\mathbb{R}$*, то между элементами этих подмножеств всегда существует элемент из* $\mathbb{R}$*.*

Покажем, что при помощи введенной аксиомы и правда можно доказать существование числа, квадрат которого равен 2.

Лемма 1.2.

$$\exists c \in \mathbb{R} : c^2 = 2.$$

Доказательство. Рассмотрим множества

$$X = \{x > 0 : x^2 < 2\}, \quad Y = \{y > 0 : y^2 > 2\}.$$

Рассматриваемые множества не пусты. И правда, $1 \in X$, ведь $1^2 < 2$ и $1 > 0$, а $2 \in Y$, так как $2^2 > 2$ и $2 > 0$. Кроме того, так как при $x, y > 0$

$$(x < y)\ \Leftrightarrow\ (x^2 < y^2),$$

то

$$\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x < y.$$

На самом деле справедливость всех написанных высказываний (хорошо известных из школы) нужно доказывать. Все это можно сделать, используя следствия из аксиоматики множества $\mathbb{R}$*, разговор о которых пойдет в следующем разделе.*

Итак, мы попадаем в рамки аксиомы непрерывности. Согласно ее утверждению,

$$\exists c \in \mathbb{R}:\ x \leqslant c \leqslant y\ \forall x \in X\ \forall y \in Y.$$

Покажем, что $c \notin X$. От противного, если $c^2 < 2$, то число

$$c + \frac{2 - c^2}{3c},$$

большее c, тоже лежит в X. Действительно, так как $c > 1$, то и $c^2 > 1$, а значит $2 - c^2 \leqslant 1$ и

$$\left(c + \frac{2 - c^2}{3c}\right)^2 = c^2 + 2 \cdot \frac{2 - c^2}{3} + \left(\frac{2 - c^2}{3c}\right)^2 < c^2 + 2 \cdot \frac{2 - c^2}{3} + \frac{2 - c^2}{3} = 2.$$

Но это приводит к противоречию, так как полученное неравенство несовместимо с тем, что

$$\forall x \in X\ \ x \leqslant c.$$

Аналогичным образом показывается, что $c \notin Y$, откуда $c^2 = 2$. □

Замечание 1.14. *Важно понять, что только что доказанная лемма 1.2 устанавливает существование числа $c \in \mathbb{R}$, что $c^2 = 2$. То, что c оказывается не рациональным, или как мы дальше скажем, иррациональным, доказывалось отдельно в лемме 1.1*

Теперь перейдем к рассмотрению свойств элементов множества $\mathbb{R}$.

1.2. Следствия из аксиоматики $\mathbb{R}$

Полезно отметить, что все стандартные свойства, которые присущи операциям над числами, можно вывести из той аксиоматики, что была приведена нами в предыдущем пункте. Давайте это объясним, пройдя прямо по пунктам. Целью же будет установление такого, в общем-то известного факта, что $1 > 0$.

Замечание 1.15. *Предвосхищая некоторое недоумение, отметим, что ввести привычную нам геометрическую модель множества $\mathbb{R}$ как числовой прямой без установления факта $1 > 0$ невозожно.*

1. Следствия из аксиом сложения

Начнем с единственности нулевого элемента.

Лемма 1.3. *В множестве $\mathbb{R}$ ноль единственен.*

Доказательство. Пусть 0_1 и 0_2 – нули в $\mathbb{R}$. Тогда, используя свойство (a) в блоке аксиом 1 и определение нуля, имеем

$$0_1 \overset{1(c)}{=} 0_1 + 0_2 \overset{1(a)}{=} 0_2 + 0_1 \overset{1(c)}{=} 0_2.$$

□

Теперь обсудим единственность противоположного элемента.

Лемма 1.4. *В множестве $\mathbb{R}$ каждый элемент имеет единственный противоположный.*

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 – противоположные к $x \in \mathbb{R}$ элементы. Тогда,

$$x_1 \overset{1(c)}{=} x_1 + 0 \overset{1(d)}{=} x_1 + (x + x_2) \overset{1(b)}{=} (x_1 + x) + x_2 \overset{1(d)}{=} 0 + x_2 \overset{1(a)}{=} x_2 + 0 \overset{1(c)}{=} x_2.$$

□

В заключение, обсудим решение уравнения $x + a = b$ относительно x.

Лемма 1.5. *В множестве $\mathbb{R}$ уравнение $x+a = b$ имеет единственное решение $x = b + (-a)$.*

Доказательство. Добавляя к обеим частям равенства $-a$, получаем (проследите использование аксиом самостоятельно)

$$(x + a + (-a) = b + (-a)) \Leftrightarrow (x + 0 = b + (-a)) \Leftrightarrow (x = b + (-a)).$$

Единственность решения следует из (уже доказанной в предыдущей лемме) единственности противоположного элемента. □

2. Следствия аксиом умножения

Следствия аксиом умножения, как и их доказательства, вторят (с естественными ограничениями) уже рассмотренным следствиям аксиом сложения. Ниже мы приводим их списком, доказательства остаются на откуп читателю.

Лемма 1.6. *В множестве $\mathbb{R}$ единица единственна.*

Лемма 1.7. *В множестве $\mathbb{R} \setminus 0$ каждый элемент имеет единственный обратный.*

Лемма 1.8. *В множестве $\mathbb{R}$ уравнение $a \cdot x = b$ при $a \neq 0$ имеет единственное решение $x = b \cdot a^{-1}$.*

3. Следствия аксиом связи сложения и умножения

Теперь выведем те факты, которые следуют из аксиомы связи сложения и умножения. Например, что $(-x) = (-1) \cdot x$. Впрочем, начнем с еще с нескольких известных, но любопытных моментов.

Лемма 1.9. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$x \cdot 0 = 0.$$

Доказательство.

$$(x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0)) \Leftrightarrow (x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-x \cdot 0)) \Leftrightarrow 0 = x \cdot 0$$

□

Теперь покажем, что множество вещественных чисел является, как говорят, областью целостности.

Следствие 1.0.1.

$$(x \cdot y = 0) \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0).$$

Доказательство. Если и x, и y равны нулю, то утверждение следует из предыдущей леммы.

Если хотя бы одно из чисел x, y не равно нулю, то утверждение следует из предыдущей леммы и третьей леммы из следствий аксиом умножения. □

Теперь докажем, что противоположный элемент $(-x)$ к элементу x получается в результате умножения (-1) на x.

Лемма 1.10. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$-x = (-1) \cdot x.$$

Доказательство. Так как

$$x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0,$$

то, в силу единственности противоположного элемента,

$$-x = (-1) \cdot x.$$

□

Из предыдущего следствия выводится и правило «двойного отрицания».

Следствие 1.0.2. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$(-1) \cdot (-x) = x.$$

Теперь легко получить и следующее следствие.

Следствие 1.0.3. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$(-x) \cdot (-x) = x \cdot x.$$

Доказательство. Доказательство следует из следующей цепочки равенств:

$$(-x) \cdot (-x) = (-1) \cdot x \cdot (-x) = x \cdot (-1) \cdot (-x) = x \cdot x.$$

□

4. Следствия аксиом порядка

Для начала договоримся об общепринятых обозначениях. Отношение $x \leqslant y$ на практике часто записывают как $y \geqslant x$. При этом условие, что $x \leqslant y$ и $x \neq y$ записывают как $x < y$ или как $y > x$. Неравенства $\geqslant$ и $\leqslant$ называют нестрогими, а неравенства $<$ и $>$ – строгими. Отсюда сразу вытекает нижеуказанное следствие.

Следствие 1.0.4. *Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ всегда имеет место ровно одно из соотношений:*

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Теперь отметим следствие о строгих неравенствах.

Лемма 1.11. *Для любых чисел* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *выполняется*

$$(x < y) \;\wedge\; (y \leqslant z) \;\Rightarrow\; (x < z),$$

$$(x \leqslant y) \;\wedge\; (y < z) \;\Rightarrow\; (x < z).$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Из свойства транзитивности для отношения порядка получаем, что

$$(x < y) \;\wedge\; (y \leqslant z) \;\Rightarrow\; (x \leqslant z).$$

Покажем, что $x \neq z$. От противного, если $x = z$, то

$$(x < y) \;\wedge\; (y \leqslant z) \;\Leftrightarrow\; (z < y) \;\wedge\; (y \leqslant z) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (z \leqslant y) \;\wedge\; (y \leqslant z) \;\wedge\; (z \neq y) \;\Leftrightarrow\; (z = y) \;\wedge\; (z \neq y).$$

Второе утверждение доказывается аналогичным образом. □

5. Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением

Теперь отметим стандартные свойства, связанные с арифметическими операциями и неравенствами.

Лемма 1.12. *Для любых чисел* $x, y, z, k \in \mathbb{R}$ *справедливо*

$$(x < y) \;\Rightarrow\; (x + z) < (y + z),$$

$$(0 < x) \;\Rightarrow\; (-x < 0),$$

$$(x \leqslant y) \;\wedge\; (z \leqslant k) \;\Rightarrow\; (x + z) \leqslant (y + k),$$

$$(x < y) \;\wedge\; (z \leqslant k) \;\Rightarrow\; (x + z) < (y + k),$$

$$(0 < x) \;\wedge\; (0 < y) \;\Rightarrow\; (0 < xy),$$

$$(0 > x) \;\wedge\; (0 > y) \;\Rightarrow\; (0 < xy),$$

$$(0 > x) \;\wedge\; (0 < y) \;\Rightarrow\; (0 > xy),$$

$$(x < y) \;\wedge (z > 0) \;\Rightarrow\; (xz < yz),$$

$$(x < y) \;\wedge\; (z < 0) \;\Rightarrow\; (xz > yz).$$

Доказательство. Эти свойства предлагается доказать самостоятельно. □

Теперь докажем утверждение, к которому мы все это время шли.

Лемма 1.13.

$$0 < 1.$$

Доказательство. Согласно аксиоме умножения, $0 \neq 1$. Предположим, что $1 < 0$, тогда, по свойствам неравенств,

$$(1 < 0) \wedge (1 < 0) \Rightarrow (1 \cdot 1 > 0) \Rightarrow (1 > 0).$$

Так как одновременно не может выполняться $1 < 0$ и $1 > 0$, приходим к противоречию. □

Определение 1.2. *По традиции числа, которые больше нуля, называются положительными, а которые меньше нуля – отрицательными.*

Замечание. *Множество вещественных чисел удобно изображать в виде числовой прямой, а сами числа – точками на этой прямой. Поэтому числа часто еще называют точками.*

Замечание. *Следствия аксиомы непрерывности мы получим немного позже (принцип Архимеда и другие).*

1.3. Важнейшие типы подмножеств $\mathbb{R}$. Индукция

В этом разделе мы изучим важнейшие типы подмножеств $\mathbb{R}$, которые уже упоминали в дальнейшем, и дадим намек на то, как показать, что все операции с элементами этих подмножеств справедливы при введенной нами аксиоматике.

1.3.1 Натуральные числа

Всем известно, что числа вида 1, $(1+1)$, $((1+1)+1)$, и так далее обозначают $1, 2, 3$, и так далее, соответственно. Продолжение какого-то процесса далеко не всегда однозначно, поэтому слова «и так далее» нуждаются в пояснении. Для этого введем следующее определение.

Определение 1.3 (Понятие индуктивного множества). *Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется индуктивным, если*

$$\forall x \in X \quad (x+1) \in X.$$

Итак, индуктивное множество – это то, которое вместе с каждым элементом содержит «следующий» (с точки зрения натуральных чисел). Из опыта мы знаем, что множество натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел являются индуктивными. В то же время кажется, что множество натуральных чисел – это наименьшее из индуктивных множеств, содержащих 1.

Для того чтобы строго определить понятие множества натуральных чисел, докажем следующую лемму.

Лемма 1.14. *Пересечение*

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$$

любого семейства X_α, $\alpha \in A$, индуктивных множеств, если оно не пусто, является индуктивным множеством.

Доказательство. Действительно,

$$\left(x \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha\right) \Rightarrow (x \in X_\alpha \quad \forall \alpha \in A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((x+1) \in X_\alpha \quad \forall \alpha \in A) \Rightarrow \left((x+1) \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha\right),$$

где переход с первой на вторую строчку справедлив в силу индуктивности всех множеств семейства X_α. ☐

Теперь можно дать определение множеству натуральных чисел как наименьшему индуктивному множеству, содержащему 1.

Определение 1.4 (Понятие множества натуральных чисел). *Множеством натуральных чисел называется пересечение всех индуктивных множеств, содержащих число* 1. *Обозначается множество натуральных чисел, как* $\mathbb{N}$.

Еще раз отметим, что из этого определения, в частности, следует, что множество натуральных чисел – наименьшее индуктивное множество, содержащее единицу. Наши обозначения для натуральных чисел

$$1, 2, \ ..., \ 100, \ 101, \ ...,$$

– это лишь договоренности.

1.3.2 Принцип математической индукции

Из определения множества натуральных чисел сразу следует важный принцип, называемый принципом математической индукции. Именно он часто обосновывает слова «и так далее».

Теорема 1.1 (Принцип математической индукции). *Если множество* $X \subset \mathbb{N}$ *таково, что* $1 \in X$ *и* $\forall x \in X \quad (x+1) \in X$*, то* $X = \mathbb{N}$.

Доказательство. Действительно, X – индуктивное множество. Так как $X \subset \mathbb{N}$, а $\mathbb{N}$ – наименьшее индуктивное множество, то $X = \mathbb{N}$. ☐

С помощью принципа математической индукции можно доказать, например, что сумма и произведение натуральных чисел есть число натуральное, а также другие известные из школы свойства. Приведем пример.

Теорема 1.2. *Сумма натуральных чисел – натуральное число.*

Доказательство. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $m + n \in \mathbb{N}$. Пусть X – множество таких натуральных чисел k, что $m + k \in \mathbb{N}$ при любом $m \in \mathbb{N}$. Ясно, что $1 \in X$, так как если $m \in \mathbb{N}$, то $(m+1) \in \mathbb{N}$ в силу индуктивности множества натуральных чисел. Если теперь $k \in X$, то есть $m+k \in \mathbb{N}$, то и $(k+1) \in X$, так как $m+(k+1) = (m+k)+1 \in \mathbb{N}$. Согласно принципу индукции заключаем, что $X = \mathbb{N}$. $\square$

Следующий пример показывает, как на практике часто применяется (и оформляется) метод математической индукции.

Лемма 1.15 (Неравенство Бернулли).

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx, \quad x > -1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. База индукции. Пусть $n = 1$, тогда

$$1 + x \geqslant 1 + x,$$

что верно при всех $x \in \mathbb{R}$. Допустим, что при $n = k$ выполнено

$$(1+x)^k \geqslant 1 + kx.$$

Покажем, что при $n = k+1$ выполняется

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)x.$$

Действительно,

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geqslant (1+x)(1+kx) =$$

$$= 1 + kx + x + kx^2 = 1 + (k+1)x + kx^2.$$

Так как $k \in \mathbb{N}$, то $kx^2 \geqslant 0$, а значит

$$1 + (k+1)x + kx^2 \geqslant 1 + (k+1)x,$$

откуда и следует требуемое. $\square$

Отметим и следующее замечание.

Замечание 1.16. *Проверка всех условий теоремы 1.1 очень важна. Например, покажем, что без проверки «базы» результат «доказательства» может быть смешным.*

Итак, мы «докажем», что все натуральные числа равны между собой. Действительно, если при некотором k выполняется $k = k+1$, то

$$k + 1 = (k+1) + 1 = k + (1+1) = k + 2.$$

Проблема в рассуждении заключается в том, что мы не проверили, что существует k, для которого $k = k+1$, а последнее, конечно, неверно ни при каких k.

1.3.3 Целые, рациональные и иррациональные числа

Теперь строго введем (или напомним) понятия целых, рациональных и иррациональных чисел.

Определение 1.5 (Понятие множества целых чисел). *Множеством целых чисел называется объединение множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных натуральным, и нуля. Обозначается множество целых чисел, как $\mathbb{Z}$.*

Как было отмечено при построении множества натуральных чисел, сумма и произведение натуральных чисел есть число натуральное. В частности поэтому сумма и произведение целых чисел есть число целое.

Определение 1.6 (Понятие множества рациональных чисел). *Числа вида $m \cdot n^{-1}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, называются рациональными. Обозначается множество рациональны чисел, как $\mathbb{Q}$.*

Отметим и формальное, хорошо нам известное замечание.

Замечание 1.17. *Число $m \cdot n^{-1}$ как правило записывают в виде отношения $\dfrac{m}{n}$, которое называют рациональной дробью.*

Правила действий с рациональными дробями, подробно изученные в школе, сразу вытекают из соответствующих свойств и аксиом множества вещественных чисел.

Пример 1.1. *В качестве примера докажем, что*

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}.$$

Действительно,

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \left(m_1 \cdot n_1^{-1}\right) \cdot \left(m_2 \cdot n_2^{-1}\right) = (m_1 \cdot m_2) \cdot (n_1 \cdot n_2)^{-1} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}.$$

Предлагаем проследить использование аксиом читателю самостоятельно, а также вывести правило сложения рациональных дробей:

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2},$$

или его аналог с наименьшим общим кратным знаменателей.

Замечание 1.18. *Снова отметим, что множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ удовлетворяет первым шести аксиомам множества вещественных чисел. Однако, именно седьмая аксиома, аксиома непрерывности, устанавливает, что кроме рациональных чисел существуют так называемые иррациональные.*

Определение 1.7 (Понятие множества иррациональных чисел). *Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными. Обозначается множество иррациональных чисел как $\mathbb{I}$.*

Замечание 1.19. *При обсуждении аксиомы непрерывности мы доказали существование иррациональных чисел. Оказывается, несмотря на то, что рациональными числами в жизни мы пользуемся значительно чаще, иррациональных чисел оказывается значительно больше, нежели рациональных. Заинтересованный читатель может обратиться к сторонней литературе и понятию мощности множества.*

1.4. Расширение множества вещественных чисел

Часто бывает удобным добавить к множеству $\mathbb{R}$ два формальных элемента: символы $+\infty$ и $-\infty$. Чтобы дальнейшая работа с этим множеством была разумной (кончено, с точки зрения дальнейшего использования внутри математики), требуется установить правила работы с добавленными элементами.

Определение 1.8. *Множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ называется расширенным множеством вещественных чисел, а символы $-\infty, +\infty$ – минус и плюс бесконечностями, соответственно, причем для вновь введенных символов постулируются следующие возможные операции:*

$$x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty, & x > 0 \\ \mp\infty, & x < 0 \end{cases},$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty,$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Мотивировка написанных равенств, наверное, интуитивно понятна. В то же время, истинная природа именно таких равенств откроется нам в разделе теории пределов.

Замечание 1.20. *Важно отметить, что все свойства, указанные выше, постулируются, и никаких других «естественных» свойств множества $\mathbb{R}$ на множество $\overline{\mathbb{R}}$ не переносится. Более того, их перенесение оказалось бы вредным. Например, если допустить, что*

$$x = (+\infty) \cdot 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

то мы получаем «абсурдное» равенство, ведь слева – множество, а справа – как будто бы один элемент.

Сказанное выше объединим в еще одно, в некотором смысле обобщающее, замечание.

Замечание 1.21. *Выражениям*

$$(+\infty)+(-\infty), \quad (+\infty)-(+\infty), \quad (-\infty)-(-\infty), \quad 0\cdot(\pm\infty), \quad (\pm\infty)\cdot 0,$$

не приписывается никакого значения. Такие выражения называются неопределенностями.

Кроме данных неопределенностей, в дальнейшем нам встретятся неопределенности вида

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 1^{\pm\infty}, \quad (\pm\infty)^0, \quad 0^0.$$

В теории пределов, как уже отмечалось, мы поймем, почему операции и правда называются неопределенностями. В то же время отметим (на уровне махания руками), что многие неопределенности сводятся друг к другу , например:

$$\frac{0}{0}=\frac{1/(+\infty)}{1/(+\infty)}=\frac{+\infty}{+\infty},$$

или

$$1^{+\infty}=e^{(+\infty)\ln 1}=e^{(+\infty)\cdot 0},$$

и так далее. Конечно, к написанным «равенствам» нужно подходить со здравым багажом скептицизма :)

Отметим и еще одно техническое замечание.

Замечание 1.22. *Если не важен знак бесконечности, то часто пишут ∞ – бесконечность без знака.*

1.5. Модуль вещественного числа

В теории предела функции одной переменной модуль занимает особое положение. Причина в том, что именно модуль позволяет вычислить (привычное нам) расстояние между двумя точками. В этом разделе мы вспомним некоторые свойства модуля, а также докажем важнейшие для дальнейшего неравенства – неравенства треугольника.

Определение 1.9 (Понятие модуля). *Модулем вещественного числа x называется число, равное x, если оно положительно или равно нулю, и равное $-x$, если оно отрицательно. Иными словами,*

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

Теорема 1.3. *Справедливы следующие свойства:*

(а) $|x| \geqslant 0$, *причем* $|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$.

(б) $|x| = |-x|$.

(в) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

(г) $|x| = |y| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right.$.

(д) $|xy| = |x||y|$.

(е) $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$.

(ж) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

(з) $|x - y| \geqslant ||x| - |y||$.

Доказательство. Свойства 1 - 6 сразу следуют из определения и остаются в качестве упражнения.
7. Для доказательства этого свойства достаточно сложить неравенства

$$\pm x \leqslant |x| \quad \text{и} \quad \pm\, y \leqslant |y|,$$

верные для любых x, y. Тем самым, придем к неравенствам

$$\pm(x + y) \leqslant |x| + |y|,$$

которые совместно эквивалентны доказываемому.
8. Для доказательства данного пункта удобно воспользоваться свойством 7.

$$|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y| \;\Rightarrow\; |x - y| \geqslant |x| - |y|.$$

Поменяв числа x и y местами, получим

$$|x - y| \geqslant |y| - |x|.$$

Совместно полученные неравенства эквивалентны доказываемому. □

Замечание 1.23. *Отметим, что два последних неравенства (7-ое – чаще) часто называют неравенствами треугольника. Они имеют простой геометрический смысл. Представим, что рассматривается два вектора* x, y, *а* $|x|, |y|$ *обозначают длины соответствующих векторов. Если сложить векторы* x, y *по правилу треугольника, то вектор* $x + y$ *будет отвечать третьей стороне этого треугольника. Обозначив через* $|x + y|$ *длину этой (третьей стороны), неравенство*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

– алгебраический аналог теоремы планиметрии: «длина стороны треугольника не больше суммы длин двух других сторон».

Советуем провести толкование 8-ого свойства аналогичным образом.

1.6. Промежутки числовой прямой. Окрестности

В этом разделе мы обсудим важное понятие окрестности, именно на нем в дальнейшем будет строиться теория предела.

Определение 1.10 (Понятия промежутков). *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$.*

Множество

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$$

при $a \leqslant b$ называется отрезком.

Множество

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

при $a < b$ называется интервалом.

Множества

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$$

при $a < b$ называются полуинтервалами.

Множества

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

$$[a, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x \geqslant a\}, \quad (a, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x > a\}$$

и

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\},$$

$$[-\infty, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x \leqslant b\}, \quad [-\infty, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < b\},$$

называются лучами.

Еще одно популярное обозначение отметим в качестве замечания.

Замечание 1.24. *Часто множество $\mathbb{R}$ еще обозначают как $(-\infty, +\infty)$.*

Теперь дадим понятие окрестности точки x_0 – порции множества рядом (и даже с двух сторон) с точкой x_0.

Определение 1.11. *Окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется произвольный интервал, содержащий x_0.*

Еще одно важное понятие анализа – понятие ε-окрестности или просто-напросто симметричной окрестности точки x_0.

Определение 1.12. *Эпсилон-окрестностью (или ε-окрестностью) точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется интервал*

$$(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Замечание 1.25. *Еще раз отметим, что ε-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$ – это симметричный интервал, ее содержащий. При помощи понятия модуля, он может быть записан следующим образом:*

$$(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} :\ |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

Мы неоднократно будем пользоваться этим в дальнейшем.

Для элементов $\pm\infty, \infty$ понятия окрестности и ε-окрестности вводятся отдельно.

Определение 1.13. *Окрестностью элемента $+\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество вида*

$$(a,\ +\infty], \quad a \in \mathbb{R}.$$

ε-окрестностью элемента $+\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество

$$\left(\frac{1}{\varepsilon},\ +\infty\right], \quad \varepsilon > 0.$$

Окрестностью элемента $-\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество вида

$$[-\infty,\ a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

ε-окрестностью элемента $-\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество вида

$$\left[-\infty,\ -\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Замечание 1.26. *Полезно пояснить, почему при определении ε-окрестностей элементов $\pm\infty$ рассматривается величина $\dfrac{1}{\varepsilon}$.*

Если $x_0 \in \mathbb{R}$, то при уменьшении ε, окрестность $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ тоже уменьшается. Аналогично, при уменьшении ε величина $\dfrac{1}{\varepsilon}$ увеличивается, а значит окрестности элементов $\pm\infty$ уменьшаются.

В итоге приходим к полной аналогии: чем меньше ε, меньше и окрестность.

Замечание 1.27. *Обычно окрестности точек $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ обозначаются заглавными латинскими буквами $U(x_0), V(x_0)$. Например,*

$$U(3) = (-7,\ 5), \quad V(+\infty) = (\pi,\ +\infty].$$

ε-окрестности точек $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ обычно обозначаются заглавными латинскими буквами с индексом ε, то есть $U_\varepsilon(x_0), V_\varepsilon(x_0)$. Например,

$$U_2(3) = (1,\ 5), \quad V_\pi(+\infty) = \left(\frac{1}{\pi},\ +\infty\right].$$

Кроме понятия окрестности точки x_0, вводят еще и понятие проколотой окрестности – окрестности без самой точки x_0. Это понятие будет мотивировано уже в понятии предела.

Определение 1.14. *Проколотой окрестностью точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ называется множество $U(x_0) \setminus \{x_0\}$, то есть произвольная окрестность точки x_0 без самой этой точки.*

Аналогично, проколотой ε-окрестностью точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ называется множество $U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Замечание 1.28. *Проколотая окрестность и ε-окрестность точек $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ обычно обозначаются заглавными латинскими буквами с кружочком наверху и индексом ε, соответственно, то есть $\overset{o}{U}(x_0), \overset{o}{V}_\varepsilon(x_0)$. Например,*

$$\overset{o}{U}(3) = (-7,\ 3); (3, 5), \quad \overset{o}{V}_\pi(+\infty) = \left(\frac{1}{\pi},\ +\infty\right).$$

Отметим в заключение одно важное свойство окрестностей: у двух разных точек из $\overline{\mathbb{R}}$ всегда найдутся непересекающиеся окрестности.

Лемма 1.16. *Пусть $A_1, A_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда существуют окрестности $U(A_1)$, $U(A_2)$, что*

$$U(A_1) \cap U(A_2) = \varnothing.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$. Положим $\varepsilon = \dfrac{|A_1 - A_2|}{2}$, тогда, как легко проверить,

$$U_\varepsilon(A_1) \cap U_\varepsilon(A_2) = \varnothing.$$

Другие случаи остаются в качестве упражнения. ☐

1.7. Ограниченность числовых множеств. Супремум и инфимум

Одно из ключевых свойств, связанных с упорядоченными множествами – их ограниченность. Определим эти понятия лишь для $\mathbb{R}$ и $\overline{\mathbb{R}}$, то есть, на самом дле, для линейно упорядоченных множеств.

Определение 1.15 (Понятие границы множества). *Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется ограниченным сверху, если*

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad x \leqslant M.$$

Найденное число M называется верхней границей для X.
Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется ограниченным снизу, если

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad x \geqslant m.$$

Найденное число m называется нижней границей для X.

Итак, верхняя граница множества X – это, во-первых, число, то есть элемент $\mathbb{R}$. Во-вторых, – это не абы какое число, а число, большее любого элемента из X. То же самое, с необходимыми изменениями, можно сказать про нижнюю границу.

Объединим два введенных понятия в одно.

Определение 1.16 (Понятие ограниченности множества). *Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется ограниченным, если оно ограничено как сверху, так и снизу, то есть*

$$\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad m \leqslant x \leqslant M.$$

Приведем некоторые примеры.

Пример 1.2. *Рассмотрим множество*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 \leqslant x < 1\}.$$

Ясно, что это множество ограничено как сверху, например, числом 1, так и снизу, например, числом 0.

Множество

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leqslant 3\}$$

оказывается ограниченным сверху, например, числом 3. Ограниченным снизу это множество не является, что очевидно, ведь предположение, что m – нижняя граница для A, сразу рушится, так как $(m-1) \in A$.

Отметим следующую простую, но часто используемую в дальнейшем лемму.

Лемма 1.17. *Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ ограничено тогда и только тогда, когда*

$$\exists C \in \mathbb{R}, C \geqslant 0 : \forall x \in X \quad -C \leqslant x \leqslant C.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть множество X ограничено, то есть

$$\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad m \leqslant x \leqslant M.$$

Положив $C = \max\{|m|, |M|\}$, согласно свойствам модуля приходим к тому, что

$$\forall x \in X \quad -C \leqslant x \leqslant C.$$

Достаточность очевидна, так как можно положить $m = -C$, $M = C$. ☐

Если множество ограничено, то разумно его границы как-то назвать. Оказывается, имеет смысл различать две качественно разные ситуации.

Определение 1.17 (Понятие максимального элемента). *Элемент $M \in X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется максимальным (наибольшим) элементом множества X, если*

$$\forall x \in X \quad x \leqslant M.$$

Обозначают это так: $M = \max X$.
Элемент $m \in X \subset \overline{\mathbb{R}}$ *называется минимальным (наименьшим) элементом множества* X, *если*
$$\forall x \in X \quad x \geqslant m.$$
Обозначают это так: $m = \min X$.

Замечание 1.29. *Отметим, и это очень важно, что как максимальный, так и минимальный элементы* X, *если только они существуют, принадлежат* X.

Сразу приведем пример.

Пример 1.3. *Пусть*
$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x < 1\}.$$
Легко понять, что $\min A = 0$. *Однако, множество* A *не имеет максимального элемента, что легко доказывается, например, от противного. Если* $M = \max A$, *то* $M < 1$, *а значит*
$$M = \frac{M+M}{2} < \frac{M+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1,$$
что противоречит предположению.

Замечание 1.30. *Кажется, что положение дел в предыдущем примере просто какое-то «идиотическое». Ведь очень хочется связать максимум* A *с единицей, но беда в том, что* $1 \notin A$.

Сложившееся положение дел исправят понятия супремума и инфимума.

Определение 1.18 (Понятие точной грани). *Пусть* $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ *ограничено сверху и не пусто. Наименьший элемент множества верхних границ называется супремумом (или точной верхней гранью) множества* X *и обозначается* $\sup X$.

В свою очередь, наибольший элемент множества нижних границ называется инфимумом (или точной нижней гранью) множества X *и обозначается* $\inf X$.

Сразу же приведем пример.

Пример 1.4. *Пусть*
$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x < 1\}.$$
Множество верхних границ A *– это множество* $[1, +\infty)$. *Значит,* $\sup A = 1$. *Множество нижних границ* $(-\infty, 0]$, *значит,* $\inf A = 0$.

Что мы видим? Конечно, мы видим, что если у множества существует максимум (минимум), то он и будет супремумом (инфимумом), но, как показывает приведенный пример, не наоборот. Зафиксируем сказанное в виде леммы.

Лемма 1.18. *Пусть существует* $\max X$*, тогда* $\sup X = \max X$*. Аналогично, если существует* $\min X$*, то* $\inf X = \min X$*.*

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение. Пусть $M = \max X$, тогда M – верхняя граница множества X. Кроме того, M, очевидно, наименьшая верхняя граница. Значит, $M = \sup X$. Второе утверждение доказывается аналогичным образом. $\square$

А чего мы добивались? Добивались мы того, чтобы при рассмотрении (непустого) ограниченного множества, супремум и инфимум существовали всегда. Что же, добились, и об этом говорит следующая теорема.

Теорема 1.4 (Принцип точной грани). *Пусть* $X \subset \overline{\mathbb{R}}$*, не пусто и ограничено сверху (снизу). Тогда существует единственный* $\sup X$ $(\inf X)$*.*

Доказательство. Пусть множество X ограничено сверху. Тогда множество его верхних границ B не пусто. В силу определения верхней границы,

$$\forall b \in B \; \forall x \in X \quad x \leqslant b.$$

Согласно аксиоме непрерывности,

$$\exists c : x \leqslant c \leqslant b, \quad \forall x \in X \; \forall b \in B.$$

Ясно, что $c \in B$. С другой стороны, в силу неравенства $c \leqslant b$ для всех $b \in B$, получается, что $c = \min B$. Тем самым, $c = \sup X$. Доказательство единственности остается в качестве упражнения.

Случай, когда множество X ограничено снизу, рассматривается аналогично. $\square$

Замечание 1.31. *Полезно заметить, что для доказательства существования супремума у непустого ограниченного множества нам пришлось воспользоваться аксиомой непрерывности. Давайте вспомним и нашу возню с доказательством того, что существует* $c \in \mathbb{R}$*, что* $c^2 = 2$ *(лемма 1.2). Проводя доказательство, мы рассмотрели множества*

$$X = \{x > 0 : x^2 < 2\}, \quad Y = \{y > 0 : y^2 > 2\}.$$

Обратите внимание, рассматриваемые множества не имеют ни максимального, ни минимального элемента. При этом легко понять что c*, даваемое нам аксиомой непрерывности, и есть* $\sup X$ *и* $\inf Y$*.*

Можно доказать, что аксиома непрерывности эквивалентна сформулированному принципу точной грани. Мы ограничимся доказательством, проведенным в одну сторону.

Доопределим понятия супремума и инфимума и в случае, когда рассматриваемые множества не ограничены.

Замечание 1.32. *Если множество X не ограничено сверху (снизу), то полагают* $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$).

Тем самым, мы приходим к следующему следствию.

Следствие 1.4.1. *У любого непустого множества $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ существуют супремум и инфимум (может быть, равные $\pm\infty$).*

В теории часто бывает удобно использовать следующие равносильные определения супремума и инфимума.

Лемма 1.19. *Для супремума и инфимума можно дать следующие эквивалентные определения:*

$$s = \sup X \ \Leftrightarrow \ (\forall x \in X \quad s \geqslant x) \ \wedge \ (\forall s' < s \ \exists x \in X : x > s'),$$

$$i = \inf X \ \Leftrightarrow \ (\forall x \in X \quad i \leqslant x) \ \wedge \ (\forall i' > i \ \exists x \in X : x < i').$$

Доказательство. Доказательство остается в качестве упражнения. □

Замечание 1.33. *Полезно отметить, что написанные строчки ни в коем случае не нужно запоминать, а всего-навсего нужно понимать. Что такое супремум X?*

Во-первых, это элемент s, больший любого элемента из X. Во-вторых, это минимальный такой элемент, то есть если от s отойти немного «влево», то сразу найдется элемент множества X, находящийся правее.

1.8. Принцип Архимеда

Данный раздел вводит, с одной стороны, достаточно очевидные, но с другой стороны чрезвычайно важные свойства множества натуральных и целых чисел, связанные с ограниченностью.

Теорема 1.5. *Пусть $X \subset \mathbb{N}$ – непустое ограниченное множество. Тогда $\exists \max X$.*

Доказательство. Согласно принципу точной грани, существует $s = \sup X < +\infty$. Согласно эквивалентному определению супремума,

$$\exists k \in X : s - 1 < k \leqslant s,$$

что означает, что $k = \max X$. Действительно, во-первых $k \in X$. Во-вторых, так как любые натуральные числа, большие k, не меньше $(k+1)$, а по установленному неравенству (левая часть)

$$s < k + 1,$$

получаем, что k – верхняя грань для X. Эти два наблюдения устанавливают требуемое. □

Замечание 1.34. *Заметим, что установленное свойство – совсем не естественное. Например, как мы видели, у ограниченного подмножества множества рациональных или вещественных чисел, вообще говоря, может не существовать максимального элемента. Все дело в том, что точки множества натуральных чисел являются, как говорят, изолированными: существуют их окрестности, не содержащие других точек из* $\mathbb{N}$. *Такого нет ни у множества рациональных чисел* $\mathbb{Q}$, *ни у множества вещественных чисел* $\mathbb{R}$.

Из доказанной теоремы легко выводится следующее следствие.

Следствие 1.5.1. *Множество натуральных чисел* $\mathbb{N}$ *не ограничено сверху.*

Доказательство. Доказательство предлагается в качестве упражнения. □

Из полученных результатов для множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ можно сразу получить результаты как для подмножеств множества целых чисел $\mathbb{Z}$, так и для самого $\mathbb{Z}$.

Следствие 1.5.2.

(а) Пусть $X \subset \mathbb{Z}$ *— непустое ограниченное сверху множество. Тогда существует* $\max X$.

(б) Пусть $X \subset \mathbb{Z}$ *— непустое ограниченное снизу множество. Тогда существует* $\min X$.

(в) $\mathbb{Z}$ *– неограниченное ни сверху, ни снизу множество.*

Теперь установим важный для дальнейшего принцип Архимеда.

Теорема 1.6 (Принцип Архимеда). *Пусть* $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. *Для любого* $y \in \mathbb{R}$ *существует единственное целое* $k \in \mathbb{Z}$ *такое, что*

$$(k-1)x \leqslant y < kx.$$

Доказательство. Пусть

$$T = \left\{ l \in \mathbb{Z} : \ \frac{y}{x} < l \right\}.$$

Это множество не пусто, так как множество $\mathbb{Z}$ не ограничено сверху. Кроме того, T ограничено снизу. Тогда, по доказанному, существует $k = \min T$. Значит,

$$k - 1 \leqslant \frac{y}{x} < k$$

и, в силу положительности x, мы получаем требуемое. □

Приведем и геометрическую трактовку принципа Архимеда.

Замечание 1.35. *Пусть, например,* $y > 0$. *Представим себе две «палки»: одну — длиной* x, *другую — длиной* y. *Принцип Архимеда говорит о том, что палку длиной игрек можно «замостить» палками длиной* x, *причем для этого потребуется не меньше* $(k-1)$*-ой палки, но меньше* k *палок.*

Получим и важные следствия из принципа Архимеда.

Следствие 1.6.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число n такое, что $0 < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.*

Доказательство. Достаточно положить в принципе Архимеда $y = 1$, $x = \varepsilon$. □

Еще одно следствие – признак нуля.

Следствие 1.6.2. *Пусть $x \in \mathbb{R}$. Если $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $0 \leqslant x < \varepsilon$, то $x = 0$.*

Доказательство. От противного, пусть $x > 0$. Тогда, по предыдущему следствию найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\dfrac{1}{n} < x$. Но тогда, положив $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, получим, что $x > \varepsilon$, что противоречит условию. □

Принцип Архимеда позволяет ввести понятие целой и дробной частей числа.

Следствие 1.6.3. *Для любого числа $x \in \mathbb{R}$ существует единственное $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $k \leqslant x < k + 1$.*

Доказательство. Это сразу следует из принципа Архимеда, если положить в нем $x = 1$. □

Определение 1.19. *Указанное в следствии число k называется целой частью числа x и обозначается $[x]$. Величина $\{x\} = x - [x]$ называется дробной частью числа x.*

Итак, целая часть числа x – это наименьшее целое число, не превосходящее x. Приведем какой-нибудь пример.

Пример 1.5. *Например,*

$$[5.7] = 5, \quad \{5.7\} = 0.7, \quad [-3.2] = -4, \quad \{-3.2\} = 0.8.$$

§2. Предел последовательности

В этом разделе мы подробно обсудим понятие предела последовательности.

2.1. Понятие предела последовательности

Для начала дадим определение тому, что такое последовательность.

Определение 2.1. *Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется последовательностью.*

Развернуто, но не менее точно можно сказать, что последовательность – это функция, областью определения которой является множество натуральных чисел.

Замечание 2.1. *Обычно последовательности обозначают маленькими латинскими буквами, например $x(n)$, $y(n)$, причем чаще всего аргумент n пишется снизу, например x_n, y_n.*

Приведем какие-нибудь примеры использования новых обозначений.

Пример 2.1. *Пусть, например,*

$$x_n = \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{1}{1} = 1,\ x_5 = \frac{1}{5},\ x_{100} = \frac{1}{100}.$$

Если $x_n = (-1)^n$, то

$$x_1 = -1,\ x_{10} = 1,$$

и вообще

$$x_{2k} = 1,\ x_{2k-1} = -1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Как мы убедились, вычислить значение какого-либо члена последовательности – не очень сложная и захватывающая задача. Но как понять, есть ли у последовательности какая-то тенденция, какой-то тренд, возникающий при неограниченном увеличении n? Частично отвечая на этот вопрос, мы приходим к понятию предела последовательности.

Определение 2.2 (Предел последовательности через $\varepsilon - n$). *Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности x_n, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad |x_n - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A, \quad x_n \longrightarrow A.$$

Приведем и словесную формулировку того, что написано.

Замечание 2.2. *Число A называется пределом последовательности x_n, если для любого положительного числа ε существует натуральное число n_0, зависящее от ε такое, что какое бы ни взять натуральное число n, большее n_0, будет выполняться неравенство*

$$|x_n - A| < \varepsilon.$$

Определение предела – сложное понятие. Кажется важным уяснить ту геометрию, что за ним прячется.

Замечание 2.3. *Геометрически определение предела последовательности означает, что какую бы полосу шириной 2ε вокруг точки A ни взять, найдется номер n_0, что все члены последовательности с номерами, большими n_0, лежат в этой полосе. Ясно, что при уменьшении ε, уменьшается ширина полосы и номер n_0, вообще говоря, увеличивается.*

Тем самым, предел – это то, к чему «неограниченно приближаются» члены нашей последовательности с ростом их номеров.

Отметим и следующее, чисто техническое замечание.

Замечание 2.4. *Используя понятие ε-окрестности, определение предела 2.2 можно переписать в следующем виде:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad x_n \in U_\varepsilon(A).$$

Теперь можно дать и такую трактовку понятию предела. Число A – предел последовательности x_n, если какую бы ни выбрать (сколь угодно малую) окрестность точки A, начиная с какого-то момента, все члены последовательности лежат в этой окрестности.

Приведем пример.

Пример 2.2. *Доказать, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно определению, нужно найти такое натуральное число n_0, что при всех натуральных $n > n_0$ будет выполняться

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Решая последнее неравенство относительно n, получаем

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Значит, если положить

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

то при $n > n_0$ заведомо выполняется

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

В силу произвольности числа ε утверждение доказано.

Замечание 2.5. *Еще раз отметим несколько важных моментов. Во-первых, номер n_0 из определения должен найтись для каждого ε, а не для какого-то конкретного. Во-вторых, если нашелся какой-то номер n_0, то любой больший номер тоже годится, тем самым $n_0 = n_0(\varepsilon)$ можно считать функцией от ε. В-третьих, никто не просит нас найти наименьший из возможных номеров n_0, начиная с которого $x_n \in U_\varepsilon(A)$. Последнее дает нам право не решать неравенство на номер точно.*

Приведем пример.

Пример 2.3. *Доказать, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n}{2n^2+4} = \frac{3}{2}.$$

Выполним предварительные преобразования:

$$\left| \frac{3n^2+2n}{2n^2+4} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{4n-12}{2(2n^2+4)} \right|.$$

Легко видеть, что решать «в лоб» неравенство из определения предела несколько громоздко. Поступим иначе. Можно считать, что $n > 3$, тогда

$$\left| \frac{4n-12}{2(2n^2+4)} \right| < \left| \frac{4n}{4n^2} \right| = \frac{1}{n}.$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Положив

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

получим, что при

$$n > n_0 = \max\left(3, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)$$

будет выполнено

$$\left| \frac{3n^2+2n}{2n^2+4} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

Последовательность не обязана иметь предел. Приведем соответствующий пример.

Пример 2.4. *Доказать, что последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.*

Запишем отрицание того факта, что число A является пределом последовательности x_n:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 : |x_n - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Положим $\varepsilon_0 = 1$ *и* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Если* $A < 0$, *то возьмем* $n = 2n_0$. *Если же* $A \geqslant 0$, *то возьмем* $n = 2n_0 + 1$. *Тогда в любом случае*

$$|x_n - A| = |(-1)^n - A| \geqslant 1,$$

то есть никакое число A *пределом последовательности* x_n *не является.*

Понятно, что рассмотрение ε-окрестности в определении предела – весьма несущественная деталь. Дадим, тем самым, следующее определение.

Определение 2.3 (Предел последовательности через окрестности). *Число* A *называется пределом последовательности* x_n, *если*

$$\forall U(A)\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ \ x_n \in U(A).$$

Естественно, было бы странно называть разные вещи одним и тем же именем, так что следующая лемма вряд ли вызовет удивление.

Лемма 2.1. *Определения 2.2 и 2.3 эквиваленты.*

Доказательство. Сначала докажем, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ в смысле определения 2.2, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и в смысле определения 2.3.

Пусть $U(A) = (\alpha, \beta)$ – произвольная окрестность точки A. Положим $\varepsilon = \min(A-\alpha, \beta-A)$, тогда $U_\varepsilon(A) \subset U(A)$. Согласно определению 2.2, по выбранному ε

$$\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ \ x_n \in U_\varepsilon(A) \subset U(A),$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ в смысле определения 2.3.

Тот факт, что из определения 2.3 следует определение 2.2, моментально следует из того, что ε-окрестность является частным случаем окрестности. $\square$

Введем часто используемое понятие сходящейся последовательности.

Определение 2.4 (Понятие сходящейся последовательности). *Если последовательность* x_n *имеет предел* $A \in \mathbb{R}$ *(число!), то говорят, что она сходится. Иначе говорят, что она расходится.*

Определение предела последовательности оказывается полезным расширить на случай «бесконечных пределов». Понятно, что алгебраически достаточно поменять выражения для окрестностей, что мы и сделаем.

Определение 2.5 (Понятия бесконечных пределов). *Элемент* $+\infty$ *называется пределом последовательности* x_n, *если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ \ x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Элемент $-\infty$ *называется пределом последовательности* x_n, *если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ \ x_n < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Обозначают это так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty, \quad x_n \longrightarrow \pm\infty.$$

Замечание 2.6. *Введенные определения можно переписать через ε-окрестности $U_\varepsilon(\pm\infty)$ и через окрестности $U(\pm\infty)$ ровно также, как это сделано в определениях 2.2 и 2.3. Утверждение леммы 2.1 сохраняется и в этом случае. Читателю предлагается самостоятельно заполнить данный пробел по аналогии со сделанным выше.*

Отметим следующее важное замечание.

Замечание 2.7. *Последовательности, имеющие пределом $+\infty$, $-\infty$, все равно называются расходящимися.*

Приведем пример.

Пример 2.5. *Доказать, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-5}{2n+4} = +\infty.$$

При $n \in \mathbb{N}$ справедлива цепочка преобразований

$$\left|\frac{3n^2-5}{2n+4}\right| \geqslant \left|\frac{3n^2-5n}{2n+4n}\right| = \left|\frac{3n-5}{6}\right|.$$

При $n > 1$ выражение под модулем положительно и

$$\frac{3n-5}{6} > \frac{1}{\varepsilon} \ \Leftrightarrow \ n > \frac{\frac{6}{\varepsilon}+5}{3}.$$

Положив

$$n_0 = \left[\frac{\frac{6}{\varepsilon}+5}{3}\right],$$

получим, что при $n > \max(n_0, 1) = n_0$ выполняется

$$\left|\frac{3n-5}{6}\right| > \frac{1}{\varepsilon},$$

а значит и

$$\left|\frac{3n^2-5}{2n+4}\right| > \frac{1}{\varepsilon},$$

что доказывает требуемое.

В заключение, отметим еще несколько важных замечаний.

Замечание 2.8. *Запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ будет всегда снабжена уточнением: либо $A \in \mathbb{R}$, либо $A \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Замечание 2.9. *При записи определения предела в дальнейшем для краткости часто опускается тот факт, что $n_0 = n_0(\varepsilon)$, а так же то, что $n_0 \in \mathbb{N}$.*

2.2. Свойства последовательностей, имеющих предел

Введя понятие предела последовательности, хочется узнать свойства, которыми обладают имеющие предел последовательности. Часть из этих (локальных) свойств совершенно не удивительна.

Например, как вы думаете, может ли у последовательности быть два различных предела? Вряд ли, ведь тогда члены последовательности одновременно должны быть сколь угодно близки как к одному числу, так и к другому, но если числа разные, то такого, конечно, быть не может.

А что можно сказать про сходящуюся последовательность? Например то, что она обязательно ограничена, ведь с какого-то момента все члены этой последовательности находятся внутри полосы конечной ширины, окружающей предел, а до этого «момента» всего-навсего конечное число членов.

Все эти соображения мы сформулируем в виде леммы, а словесные наметки доказательств переложим на математический язык. Обратите внимание, и это важно: мы все уже доказали, теперь же просто аккуратно это оформим.

Лемма 2.2 (Свойства последовательностей, имеющих предел). *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, *тогда:*

- *(а) При* $A \in \overline{\mathbb{R}}$ *предел единственен.*
- *(б) При* $A \in \mathbb{R}$ *последовательность* x_n *ограничена.*
- *(в) В любой окрестности* $A \in \overline{\mathbb{R}}$ *содержатся все элементы последовательности* x_n, *за исключением не более чем конечного числа.*

Доказательство. 1. Будем доказывать от противного. Пусть A_1 и A_2 – пределы последовательности x_n, причем $A_1 \neq A_2$. Пусть $U(A_1), U(A_2)$ – окрестности точек A_1 и A_2 такие, что

$$U(A_1) \cap U(A_2) = \varnothing,$$

см. лемму 1.16. По определению предела, для окрестности $U(A_1)$

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \;\; x_n \in U(A_1),$$

а для окрестности $U(A_2)$

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \;\; x_n \in U(A_2).$$

Пусть $n_2 = \max(n_0, n_1)$, тогда

$$\forall n > n_2 \;\; (x_n \in U(A_1)) \wedge (x_n \in U(A_2)) \;\Leftrightarrow\; x_n \in U(A_1) \cap U(A_2),$$

что невозможно, так как последнее пересечение пусто.
2. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \;\; |x_n - A| < 1 \;\Leftrightarrow\; (A-1) < x_n < (A+1)$$

и все элементы последовательности, начиная с номера n_0+1, ограничены по модулю числом

$$\max(|A+1|, |A-1|).$$

До члена последовательности с номером n_0+1 имеется ровно n_0 членов последовательности, а значит, положив

$$C = \max(|x_0|, |x_1|, \ \ldots, |x_{n_0}|, |A+1|, |A-1|),$$

приходим к тому, что

$$|x_n| \leqslant C \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то есть к тому, что x_n ограничена.
3. Пусть $U(A)$ – произвольная окрестность точки A. Согласно определению предела,

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ x_n \in U(A),$$

а значит вне окрестности $U(A)$ содержится не более n_0 членов.

□

2.3. Арифметические свойства пределов в $\mathbb{R}$

Теперь обсудим арифметические операции над последовательностями, имеющими предел. Следующая теорема, скорее всего, напрашивается.

Теорема 2.1 (Арифметические свойства пределов). *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A, B \in \mathbb{R}$, *тогда:*

(а) Предел суммы равен сумме пределов, то есть

$$x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A+B.$$

(б) Предел произведения равен произведению пределов, то есть

$$x_n y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} AB.$$

(в) Предел частного равен (при естественных ограничениях) частному пределов, то есть

$$\frac{x_n}{y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{A}{B}, \quad y_n \neq 0, \quad B \neq 0.$$

Доказательство. 1. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \quad |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, используя неравенство треугольника и свойства модуля (теорема 1.3), при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ имеем

$$|x_n + y_n - (A + B)| = |(x_n - A) + (y_n - B))| \leqslant |x_n - A| + |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \in \mathbb{R}$, то y_n ограничена (лемма 2.2), а значит

$$\exists C > 0 : |y_n| \leqslant C.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \quad |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A| + 1)}.$$

Тогда, используя неравенство треугольника (теорема 1.3), при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ имеем

$$|x_n y_n - AB| = |x_n y_n + A y_n - A y_n - AB| \leqslant |x_n y_n - A y_n| + |A y_n - AB| =$$

$$= |y_n| \cdot |x_n - A| + |A| \cdot |y_n - B| \leqslant C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{|A|\varepsilon}{2(|A| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. Достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{B},$$

так как тогда, по доказанному в пункте 2,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$, то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad |y_n - B| < \frac{|B|}{2},$$

откуда

$$B - \frac{|B|}{2} < y_n < B + \frac{|B|}{2}.$$

Если положить
$$C = \min\left(\left|B - \frac{|B|}{2}\right|, \left|B + \frac{|B|}{2}\right|\right),$$
то
$$|y_n| \geqslant C \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{|y_n|} \leqslant \frac{1}{C}.$$
Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, пользуясь определением предела,
$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \;\; |y_n - B| < \varepsilon C B.$$
Значит, при $n > \max(n_0, n_1)$
$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - y_n}{B y_n}\right| \leqslant \frac{|B - y_n|}{C|B|} < \varepsilon.$$

□

Замечание 2.10. *Обсудим более детально приведенное доказательство, особенно обратив внимание на те «подгоны», которые сделаны при выборе «эпсилонов».*

Сначала прокомментируем то, почему справедлива хотя бы первая строчка в доказателстве первого пункта. Вот она.

Пусть $\varepsilon > 0$. *Так как* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, *то*
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \;\forall n > n_0 \;\; |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Откуда взялось значение $\frac{\varepsilon}{2}$*? А ниоткуда, оно просто нам удобно. Согласно определению предела, начиная с некоторого момента значение* $|x_n - A|$ *может быть сделано меньше любого положительного числа. Значит, и меньше* $\frac{\varepsilon}{2}$, *если* $\varepsilon > 0$. *Удобно же такое число нам потому, что все «эпсилоны» в итоге сложились в определение предела. Обязательно ли это? Вовсе нет.*

Замечание 2.11. *Давайте приведем менее искусственное доказательство, например, второго пункта теоремы.*

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \in \mathbb{R}$, *то* y_n *ограничена (лемма 2.2), а значит*
$$\exists C > 0 : |y_n| \leqslant C.$$
Пусть $\varepsilon > 0$. *Так как* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, *то*
$$\exists n_0 : \;\forall n > n_0 \;\; |x_n - A| < \varepsilon.$$
Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, *то*
$$\exists n_1 : \;\forall n > n_1 \;\; |y_n - B| < \varepsilon.$$

Тогда, так как при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ выполняются все выведенные выше соотношения, используя неравенство треугольника, получаем:

$$|x_n y_n - AB| = |x_n y_n + Ay_n - Ay_n - AB| \leqslant |x_n y_n - Ay_n| + |Ay_n - AB| =$$

$$= |y_n||x_n - A| + |A||y_n - B| \leqslant C\varepsilon + |A|\varepsilon = (C + |A|)\varepsilon.$$

Можно ли считать доказательство законченным, или нет? Конечно, можно. Обратите внимание на то, что ни C, ни A от n не зависят. Это значит, что, в силу произвольности положительного числа ε, число $(C + |A|)\varepsilon$ тоже произвольно и положительно. Обозвав его, например, $\widetilde{\varepsilon}$, приходим к определению предела.

Пример ниже иллюстрирует, как с помощью доказанной теоремы можно вычислять некоторые пределы.

Пример 2.6. *Вычислить предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{2n^2 + n + 1}.$$

Обратим внимание, что применить теорему «в лоб» не получится: и числитель, и знаменатель имеют пределом $+\infty$, а значит мы получаем уже упомянутую ранее неопределенность. Раскроем ее. Вынося в числителе и знаменателе старшие степени за скобку, получается

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{2n^2 + n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(3 + \dfrac{5}{n} + \dfrac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \dfrac{5}{n} + \dfrac{4}{n^2}}{2 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}.$$

Пределы последовательностей

$$\frac{5}{n},\ \frac{4}{n^2},\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n^2}$$

равны нулю, что легко показать по определению предела, значит предел числителя равен 3, а предел знаменателя равен 2. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{2n^2 + n + 1} = \frac{3}{2}.$$

На самом деле, справедлива более общая теорема, чем теорема 2.1. Сформулируем ее.

Теорема 2.2 (Арифметические свойства пределов в $\overline{\mathbb{R}}$). *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда, если определена соответствующая операция (сложения, умножения или деления) в $\overline{\mathbb{R}}$, то:*

(а) Предел суммы равен сумме пределов, то есть

$$x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A + B.$$

(б) Предел произведения равен произведению пределов, то есть

$$x_n y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} AB.$$

(в) Предел частного равен частному пределов, то есть

$$\frac{x_n}{y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{A}{B}, \quad y_n \neq 0.$$

Доказательство. Докажем, например, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \neq 0$, $B \in \mathbb{R}$, то

$$x_n y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty, & B > 0 \\ -\infty, & B < 0 \end{cases}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \;\; x_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

и

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \;\; B - \frac{|B|}{2} < y_n < B + \frac{|B|}{2}.$$

Значит, при $n > \max(n_0, n_1)$

$$\begin{cases} x_n y_n > \dfrac{1}{\varepsilon}\left(B - \dfrac{|B|}{2}\right), & B > 0 \\ x_n y_n < \dfrac{1}{\varepsilon}\left(B + \dfrac{|B|}{2}\right), & B < 0 \end{cases},$$

что и доказывает утверждение.

Остальные случаи остаются в качестве упражнения. □

Замечание 2.12. *Справедливость именно этой, только что сформулированной теоремы, и мотивирует введенные нами ранее операции в расширенном множестве вещественных чисел $\overline{\mathbb{R}}$.*

2.4. Предельный переход в неравенствах

Обсудим теперь вопросы, которые связывают предельный переход и порядок. Сначала докажем, что если есть неравенство для пределов, то это же неравенство с какого-то момента справедливо и для членов последовательностей.

Теорема 2.3. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A < B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда*

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \;\; x_n < y_n.$$

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathbb{R}$ и пусть $\varepsilon = \dfrac{B-A}{2}$. Тогда, так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ |x_n - A| < \frac{B-A}{2} \ \Rightarrow \ x_n < A + \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \ \ |y_n - B| < \frac{B-A}{2} \ \Rightarrow \ y_n > B - \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

Значит, при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ выполняется

$$x_n < \frac{A+B}{2} < y_n,$$

откуда и следует требуемое.

Остальные случаи остаются в качестве упражнения. □

Замечание 2.13. *Важно отметить геометрический смысл приведенного доказательства: мы строим вокруг пределов, опять-таки, непересекающиеся «полосы» (окрестности), одну над другой, и дальше пользуемся тем, что с какого-то момента все члены последовательности оказываются в соответствующей полосе.*

Из доказанной теоремы выведем следствие, часто называемое «предельный переход в неравенствах». Смысл его прост: неравенство для последовательностей переносится на неравенство для пределов в случае существования последних.

Следствие 2.3.1 (Предельный переход в неравенствах). *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$.

(а) Если $x_n > y_n$ *начиная с какого-либо номера* n_0, *то* $A \geqslant B$.

(б) Если $x_n \geqslant y_n$ *начиная с какого-либо номера* n_0, *то* $A \geqslant B$.

Доказательство. 1. От противного, пусть $A < B$. Согласно теореме 2.3

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ x_n < y_n.$$

Это противоречит условию.
2. Второй пункт доказывается аналогично и остается в качестве упражнения. □

Отметим и следующее замечание.

Замечание 2.14. *Важно отметить, что в 1 пункте следствия 2.3.1 нельзя написать строгое неравенство* $A > B$. *Например, для последовательностей* $x_n = \dfrac{1}{n}$ *и* $y_n = 0$ *выполняется неравенство* $x_n > y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *однако* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

2.5. Теорема о сжатой переменной

Теорема о сжатой переменной – теорема, устанавливающая существование предела последовательности, зажатой между двумя другими.

Теорема 2.4 (О сжатой переменной). *Пусть начиная с какого-то номера n_0 выполняется $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{R}$ и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \;\; |x_n - A| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon,$$

$$\exists n_2 : \forall n > n_2 \;\; |y_n - A| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon.$$

Тогда при $n > n_2 = \max(n_0, n_1, n_2)$ выполняется

$$A - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < A + \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |z_n - A| < \varepsilon.$$

Случаи $A = \pm\infty$ остаются в качестве упражнения. $\square$

Замечание 2.15. *Отметим, что доказать эту теорему, опираясь на предельный переход в неравенствах (2.3.1), нельзя, так как по условию про наличие предела последовательности z_n ничего неизвестно.*

Замечание 2.16. *В случае, когда $A = \pm\infty$, условия теоремы можно ослабить, «подпирая» z_n лишь с одной стороны.*

2.6. Теорема Вейерштрасса

Некоторое достаточное условие существования предела последовательности было только что получено в теореме 2.4 о сжатой переменной. В этом разделе мы установим критерий сходимости так называемой монотонной последовательности. Для начала введем понятие монотонности.

Определение 2.6. *Говорят, что последовательность x_n возрастает, если*

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \;\; x_{n_1} \geqslant x_{n_2}.$$

Говорят, что последовательность x_n строго возрастает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \;\; x_{n_1} > x_{n_2}.$$

Говорят, что последовательность x_n убывает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \;\; x_{n_1} \leqslant x_{n_2}.$$

Говорят, что последовательность x_n строго убывает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \;\; x_{n_1} < x_{n_2}.$$

Определение 2.7. *Про возрастающую (не убывающую, убывающую, не возрастающую) последовательность также говорят, что она монотонна.*

Замечание 2.17. *Отметим, что на практике мы часто используем другие, но равносильные введенным выше определения. Например, строгое возрастание последовательности означает, что*

$$x_n < x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

а убывание последовательности, что

$$x_{n+1} \leqslant x_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

и так далее.

Из геометрических соображений понятно, что у монотонной последовательности всегда есть предел. Теорема Вейерштрасса говорит о том, что для сходимости монотонной последовательности не только необходима (лемма 2.2), но и достаточна ограниченность этой последовательности.

Теорема 2.5 (Вейерштрасса). *Возрастающая последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху, причем*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n.$$

Убывающая последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она ограничена снизу, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n.$$

Доказательство. Пусть последовательность возрастает.
Как уже отмечалось, необходимость следует из того факта, что сходящаяся последовательность ограничена (лемма 2.2).
Докажем достаточность. Так как x_n ограничена сверху, то существует $A = \sup x_n < +\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$. По свойству супремума (лемма 1.19),

$$\exists n_0 : A - \varepsilon < x_{n_0} \leqslant A.$$

Так как последовательность x_n возрастает, то

$$\forall n > n_0 \quad A - \varepsilon < x_{n_0} \leqslant x_n \leqslant A < A + \varepsilon \;\Rightarrow\; A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

Случай убывающей последовательности рассматривается аналогично. □

Теорема Вейерштрасса может быть дополнена следующим образом.

Лемма 2.3 (Дополнение к теореме Вейерштрасса). *Если последовательность x_n возрастает и не ограничена сверху, то ее предел равен $+\infty$, то есть*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n.$$

Если последовательность x_n убывает и не ограничена снизу, то ее предел равен $-\infty$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n.$$

Доказательство. Докажем первый пункт. Так как последовательность не ограничена сверху, то по $\varepsilon > 0$ найдется n_0 такой, что

$$x_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как последовательность возрастает, то при $n > n_0$ выполнено

$$x_n \geqslant x_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Тем самым установлено, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Второй пункт доказывается аналогично. □

Объединяя полученные факты, приходим к такой «обобщенной теореме Вейерштрасса.

Теорема 2.6 (Обобщенная теорема Вейерштрасса). *Возрастающая последовательность x_n имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, причем*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n.$$

Убывающая последовательность x_n имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n.$$

2.7. Второй замечательный предел

Пришла пора поговорить о таинственной неопределенности вида 1^∞. Бороться с ней помогает так называемый второй замечательный предел. Значение же этого предела нельзя переоценить – именно сейчас мы и определим число e – хорошо известное из школы, но непонятно откуда берущееся, иррациональное число.

Начнем сразу с основного утверждения.

Теорема 2.7. *Существует предел (в $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную последовательность

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

и докажем, что она строго убывает. Действительно, используя неравенство Бернулли (1.15) в последнем переходе, при $n \geqslant 2$ имеем:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > \frac{n}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \geqslant \frac{n}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

откуда, в силу положительности y_n при всех n,

$$y_{n-1} > y_n \quad \forall n \geqslant 2,$$

что и означает строгое убывание y_n.

Поскольку члены последовательности y_n положительны и последовательность строго убывает то, согласно теореме Вейерштрасса (2.5), существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

где предел в правой части цепочки равенств существует по только что доказанному. Это доказывает и существование предела в левой части, что и требуется. □

Теперь можно определить число e.

Определение 2.8 (Понятие второго замечательного предела). *Рассмотренный выше предел называют вторым замечательным пределом, а его значение – числом e, то есть*

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Замечание 2.18. *Как уже было вскользь отмечено, число $e \approx 2.71828182845$ оказывается иррациональным. Доказательство этого факта не сложно, но весьма бесполезно для дальнейшего в курсе, поэтому мы его не приводим.*

Отметим и следующие обобщения написанного равенства, которые мы докажем позже.

Замечание 2.19. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$, тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} (1 + x_n)^{1/x_n} = e.$$

Понятно, что одно соотношение переводится в другое практически моментально, если учесть теорему о расширенных арифметических свойствах пределов.

Приведем пример использования полученных знаний для раскрытия неопределенностей.

Пример 2.7. *Вычислить предел*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + 2}\right)^{2n+3}.$$

Легко заметить, что перед нами неопределенность вида 1^∞. Преобразуем основание следующим образом:

$$\frac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + 2} = 1 + \frac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + 2} - 1 = 1 - \frac{3n + 1}{n^2 + 2}.$$

Пусть

$$x_n = -\frac{3n + 1}{n^2 + 2},$$

тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$, а значит, согласно озвученному выше обобщению,

$$\lim_{n\to\infty} (1 + x_n)^{1/x_n} = e.$$

В то же время, используя свойства степеней,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + 2}\right)^{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \left\{(1 + x_n)^{1/x_n}\right\}^{(2n+3)x_n},$$

где фигурные скобки стоят «для красоты». Так как

$$\lim_{n\to\infty}(2n+3)x_n = -\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(3n+1)}{n^2+2} = -6,$$

то хочется сказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+1}{n^2+2}\right)^{2n+3} = e^{-6}.$$

В общем-то, так и есть, но последний переход мы пока что объяснить не в силах.

2.8. Сравнение скорости роста некоторых функций

При вычислении пределов часто оказывается полезным сравнивать скорости роста функций разной природы. В этом разделе мы попробуем разобраться в том, какие функции быстрее растут, а также в том: а что значит — «быстрее»?

Замечание 2.20. *Данный пункт, как окажется, опережает «свое время», а точнее — наше развитие на текущий момент. Мы пока не ввели ни понятия корня, ни понятие показательной или логарифмической функций. Однако, эти понятия (как и функции, и правила работы с ними) нам хорошо знакомы из школы. На данный момент мы будем пользоваться школьным пониманием происходящего, что, впрочем, не помешает в дальнейшем вернуться к строгим определениям.*

Сравним между собой поведение показательной функции и факториала. Оказывается, факториал растет «быстрее», и вот что это значит.

Лемма 2.4.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0, \quad a \geqslant 0.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{a^n}{n!}.$$

Понятно, что при $n \geqslant 2$ справедливо равенство

$$x_n = \frac{a}{n}x_{n-1}.$$

Так как $\dfrac{a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то, взяв $\varepsilon = 1$,

$$\exists n_0: \ \forall n > n_0 \quad \frac{a}{n} < 1.$$

Значит, при $n > n_0$ выполняется $x_n < x_{n-1}$, и, тем самым, последовательность строго убывает. Так как к тому же $x_n > 0$, то, согласно теореме Вейерштрасса (2.5), существует предел x_n. Назовем его A. Переходя к пределу в равенстве

$$x_n = \frac{a}{n} x_{n-1}$$

получаем, что

$$A = 0 \cdot A \;\Rightarrow\; A = 0,$$

что и требовалось. □

Естественно, справедливо и вот какое следствие.

Следствие 2.7.1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Данное утверждение вытекает из теоремы 2.4 о сжатой переменной и неравенства

$$-\frac{|a|^n}{n!} \leqslant \frac{a^n}{n!} \leqslant \frac{|a|^n}{n!},$$

верного в силу свойств модуля (теорема 1.3). □

Следующая в иерархии по скорости роста (известная) функция – степенная. Результат дается следующей теоремой.

Лемма 2.5.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{a^n} = 0, \quad |a| > 1,\; s \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{n^s}{a^n}$$

при $a > 1$. Понятно, что при $n \geqslant 2$ справедливо равенство

$$x_n = \frac{n^s}{(n-1)^s a} x_{n-1}.$$

Так как $\dfrac{n^s}{(n-1)^s a} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{a} < 1$, то (лемма 2.3)

$$\exists n_0 : \;\forall n > n_0 \quad \frac{n^s}{(n-1)^s a} < 1.$$

Значит, при $n > n_0$ выполняется $x_n < x_{n-1}$, и, тем самым, последовательность строго убывает. Так как к тому же $x_n > 0$, то, согласно теореме Вейерштрасса (2.5), существует предел x_n. Назовем его A. Переходя к пределу в равенстве

$$x_n = \frac{n^s}{(n-1)^s a} x_{n-1}$$

получаем, что

$$A = \frac{1}{a} \cdot A \;\Rightarrow\; A = 0,$$

что и требовалось.

Случай, когда $a < -1$ рассматривается также, как и в доказанном ранее следствии. $\square$

Итак, мы получили, что любая степенная функция растет медленнее, чем любая (растущая) показательная.

Для степенной функции n^s характерной особенностью является то, что s — это число. В других случаях теорема, вообще говоря, может носить и противоположный характер.

Лемма 2.6.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^n} = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{a^n}{n^n}.$$

Понятно, что при $n \geqslant 2$ справедливо равенство

$$x_n = \frac{a(n-1)^{n-1}}{n^n} x_{n-1}.$$

Так как

$$\frac{a(n-1)^{n-1}}{n^n} = \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{a}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \cdot e^{-1} = 0,$$

то (лемма 2.3)

$$\exists n_0 : \; \forall n > n_0 \;\; \frac{a(n-1)^{n-1}}{n^n} < 1.$$

Значит, при $n > n_0$ выполняется $x_n < x_{n-1}$, и, тем самым, последовательность строго убывает. Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, что проводились в предыдущих доказательствах, и остаются в качестве упражнения. $\square$

Теперь сравним логарифмическую и степенную функции.

Лемма 2.7.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a^\alpha n}{n^s} = 0, \quad s > 0, \; \alpha \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Этот факт, на самом деле, почти эквивалентен предыдущему (например, можно сделать что-то вроде замены переменной). Однако, чтобы не зарываться в сугубо технические детали, строгое его доказательство мы отложим до будущих времен. $\square$

Итак, сделаем важный вывод: из рассмотренных (семейств) функций быстрее всего «растет» факториал. Затем, конечно, показательная функция с показателем большим 1, затем любая степенная функция и, в конце концов, логарифм.

Докажем также следующую полезную для практики теорему, касающуюся корней n-ой степени.

Теорема 2.8. *Справедливы следующие утверждения:*

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ *при* $a > 0.$

(в) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = A$, *где* $\alpha_n > 0$ *и* $A > 0$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1.$

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как, по доказанному в лемме 2.5,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0,$$

то

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \quad \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1 \ \Rightarrow \ n < (1+\varepsilon)^n.$$

В частности, при $n > n_0$

$$1 \leqslant n < (1+\varepsilon)^n \ \Leftrightarrow \ 1 \leqslant \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

2. Докажем второй пункт. Пусть $a \geqslant 1$ и $\varepsilon > 0$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\varepsilon)^n} = 0,$$

то

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \quad \frac{a}{(1+\varepsilon)^n} < 1 \ \Rightarrow \ a < (1+\varepsilon)^n.$$

В частности, при $n > n_0$

$$1 \leqslant a < (1+\varepsilon)^n \ \Leftrightarrow \ 1 \leqslant \sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

Если $a \in (0,1)$, то утверждение следует из следующих выкладок:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

Последнее равенство верно в силу уже доказанного и того, что если $a \in (0,1)$, то $\dfrac{1}{a} > 1$.

3. Докажем третий пункт. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = A$ и $A > 0$, то по $\varepsilon = \dfrac{A}{2}$

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ |\alpha_n - A| < \frac{A}{2} \ \Leftrightarrow \ \frac{A}{2} < \alpha_n < \frac{3A}{2}.$$

Тогда, при $n > n_0$

$$\sqrt[n]{\frac{A}{2}} < \sqrt[n]{\alpha_n} < \sqrt[n]{\frac{3A}{2}},$$

и утверждение теоремы следует из теоремы 2.4 о сжатой переменной и результата предыдущего пункта. □

2.9. Подпоследовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы

Все это время мы занимаемся, по сути, теоремами, обеспечивающими существование предела при тех или иных условиях: арифметические свойства, теорема о сжатой переменной, теорема Вейерштрасса. Между тем, например, издавна знакомая нам последовательность $x_n = (-1)^n$ предела не имеет. А почему? Все потому, что в ней как будто бы переплетены две сходящиеся к совершенно разным числам последовательности: из единиц и из минус единиц. Обсудим это формально.

Определение 2.9 (Понятие подпоследовательности). *Пусть дана последовательность x_n и возрастающая последовательность*

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$$

натуральных чисел.

Последовательность $y_k = x_{n_k}$ называется подпоследовательностью последовательности x_n.

Замечание 2.21. *Отметим отдельно, что при формировании подпоследовательности мы вольны вычеркивать какие-то члены исходной последовательности, но не вольны менять их порядок. Последнее диктуется требованием в определении: последовательность номеров n_k должна быть возрастающей.*

Приведем пример.

Пример 2.8. *Пусть рассматривается последовательность $x_n = (-1)^n$. Тогда из нее можно выделить, например, такие подпоследовательности:*

$$x_{2k} = (-1)^{2k} \equiv 1, \quad x_{2k-1} = (-1)^{2k-1} \equiv -1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Выделенные в примере подпоследовательности являются сходящимися. Введем следующее определение.

Определение 2.10. *Пределы (имеющих предел) подпоследовательностей последовательности x_n называются частичными пределами этой последовательности.*

Рассмотрим примеры.

Пример 2.9. *Множество частичных пределов уже рассмотренной последовательности $x_n = (-1)^n$ состоит из двух элементов: ± 1.*

Множество частичных пределов последовательности $x_n = n^{(-1)^n}$ тоже состоит из двух элментов: 0 и $+\infty$.

Множество частичных пределов последовательности не всегда конечно. Легко проверить, что множество частичных пределов последовательности

$$\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ \ldots\}$$

совпадает с множеством $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Более того, множество частичных пределов может быть даже очень бесконечным. Например, можно показать, что множество частичных пределов последовательности $x_n = \sin n$ – это отрезок $[-1, 1]$.

Естественно задаться следующими вопросами: во-первых, какого множество частичных пределов последовательности, имеющей предел; во-вторых, правда ли, что из каждой последовательности можно выделить имеющие предел подпоследовательности?

На первый вопрос ответить не сложно.

Лемма 2.8. *Пусть последовательность x_n имеет предел. Тогда любая ее подпоследовательности имеет тот же самый предел.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ x_n \in U_\varepsilon(A).$$

Пусть теперь x_{n_k} – подпоследовательность x_n. Так как $n_k \to +\infty$ (кстати, почему?), то

$$\exists k_0 : \ \forall k > k_0 \ \ n_k > n_0,$$

а значит $x_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$, что и доказывает утверждение. □

Замечание 2.22. *Итак, предыдущая лемма и ее доказательство не должны шокировать. Действительно, в случае наличия предела все члены последовательности, начиная с какого-то момента, лежат в произвольно выбранной окрестности вокруг предела. Значит, это же верно и с какого-то момента, но уже в подпоследовательности.*

Интересно, что в отличие от первого вопроса, второй оказывается намного более хитрым. Все потому, что ответ на второй вопрос не решается без аксиомы непрерывности и, на самом деле, эквивалентен ей.

Теорема 2.9 (Теорема Больцано–Вейерштрасса). *У любой ограниченной последовательности x_n существует сходящаяся подпоследовательность.*

Доказательство. Введем в рассмотрение множество

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < x_n \text{ для бесконечного числа членов } x_n\}.$$

Так как последовательность x_n ограничена, то S непусто и ограничено сверху, а значит, согласно принципу точной грани (1.4), существует $s = \sup S$. Согласно свойству супремума (1.19), если $k \in \mathbb{N}$, то

$$\exists s' \in S : \ s - \frac{1}{k} < s' \leqslant s.$$

В частности, в силу транзитивности отношения $<$, справедливо высказывание

$$s - \frac{1}{k} < x_n \text{ для бесконечного числа членов } x_n.$$

Так как

$$s + \frac{1}{k} \notin S,$$

то аналогичным образом устанавливается справедливость высказывания

$$s + \frac{1}{k} < x_n \text{ для конечного числа членов } x_n,$$

а значит для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо высказывание

$$s - \frac{1}{k} < x_n < s + \frac{1}{k} \text{ для бесконечного числа членов } x_n.$$

Теперь будем строить сходящуюся подпоследовательность. Пусть $k = 1$, выберем

$$x_{n_1} \in \{x_n : \ s - 1 < x_n < s + 1\}.$$

Далее, пусть построены члены с номерами $n_1, n_2, \ \dots, n_p$. В качестве n_{p+1}-ого члена подпоследовательности выберем

$$x_{n_{p+1}} \in \left\{x_n : \ s - \frac{1}{p+1} < x_n < s + \frac{1}{p+1}\right\}$$

так, чтобы $n_{p+1} > n_p$. Последнее всегда возможно в силу доказанной бесконечности множества членов последовательности, удовлетворяющих выписанному неравенству. Продолжая по индукции, получаем подпоследовательность x_{n_p}, причем для всех $p \in \mathbb{N}$

$$s - \frac{1}{p+1} < x_{n_p} < s + \frac{1}{p+1}.$$

Согласно теореме 2.4 о сжатой переменной, $x_{n_p} \xrightarrow[p\to\infty]{} s$. $\square$

Итак, теорема Вейерштрасса устанавливает непустоту множества частичных пределов (в $\mathbb{R}$) в случае, когда рассматриваемая последовательность ограничена. Эту теорему можно расширить и на случай неограниченности, причем абсолютно естественно.

Лемма 2.9 (Дополнение теоремы Больцано–Вейерштрасса). *Если последовательность x_n не ограничена сверху (снизу), то из нее можно выделить сходящуюся к $+\infty$ $(-\infty)$ подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть последовательность не ограничена сверху. Тогда найдется номер n_1 такой, что $x_{n_1} > 1$. Далее будем действовать по индукции. Если уже выбран номер $n_k > n_{k-1}$ такой, что $x_{n_k} > k$, то выбирается номер $n_{k+1} > n_k$ так, что $x_{n_{k+1}} > k+1$. Такое построение возможно, так как иначе последовательность x_n была бы ограничена сверху числом $\max(x_1, \ \ldots, x_{n_k}, k+1)$. Тем самым, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

Для неограниченной снизу последовательности доказательство аналогично. $\square$

Отметим некоторый итог в следующем замечании.

Замечание 2.23. *У любой последовательности существует подпоследовательность, имеющая предел в $\overline{\mathbb{R}}$. Для существования сходящейся (то есть имеющей предел в $\mathbb{R}$) подпоследовательности приходится накладывать какие-то дополнительные условия на исходную последовательность, например, ограниченность последней.*

Говоря о множестве частичных пределов, важным оказывается выделить два: наибольший и наименьший из множества частичных пределов. Их мы будем называть верхним и нижними пределами. В этом пункте мы займемся изучением свойств этих объектов.

Определение 2.11 (Понятия верхнего и нижнего пределов). *Пусть E — (непустое) множество частичных пределов последовательности x_n.*

Верхним пределом последовательности x_n называется $\sup E$ и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ или $\limsup\limits_n x_n$.

Нижним пределом последовательности x_n называется $\inf E$ и обозначается $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ или $\liminf\limits_n x_n$.

Приведем некоторые примеры.

Пример 2.10. *Найдем верхний и нижний пределы у уже рассматриваемых ранее последовательностей.*

Так как множество частичных пределов последовательности $x_n = (-1)^n$ состоит из двух элементов – ± 1, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -1.$$

Так как множество частичных пределов последовательности

$$\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ \dots\}$$

совпадает с множеством $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, *то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1.$$

Так как множество частичных пределов последовательности $x_n = \sin n$ – *это отрезок* $[-1, 1]$, *то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -1.$$

Хорошо бы теперь ответить на вопрос: всегда ли верхний или нижний предел последовательности являются ее частичными пределами, ведь супремум или инфимум не обязаны принадлежать рассматриваемому множеству. Оказывается, ответ положителен.

Лемма 2.10. *Верхний и нижний пределы последовательности* x_n *являются ее частичными пределами.*

Доказательство. Проведем доказательство конструктивно, например, для верхнего предела. Сначала рассмотрим случай, когда x_n ограничена сверху. Пусть

$$y_k = \sup_n \{x_n, \ n \geqslant k\}.$$

Легко понять, что y_k – убывающая последовательность. Значит, по обобщенной теореме Вейерштрасса (2.6), она имеет предел. Кроме того, если x_{n_k} – подпоследовательность последовательности x_n, имеющая предел, то

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ x_{n_k} \leqslant y_{n_k} \ \Rightarrow \ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leqslant \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

где последнее равенство верно в силу леммы (2.8). Если мы построим подпоследовательность x_n, сходящуюся к $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то теорема будет доказана. Для чисел $n \in \mathbb{N}$, используя свойства (1.19) верхней грани, подберем числа k_n так, что

$$y_n - \frac{1}{n} < x_{k_n} \leqslant y_n, \quad k_n > k_{n-1}.$$

Теперь утверждение следует из теоремы о сжатой переменной.

Если x_n не ограничена сверху, то доказательство вытекает из дополнения к теореме Больцано–Вейерштрасса (2.9). □

Замечание 2.24. *Отметим, что в доказательстве есть пояснение к тому, почему верхний предел часто обозначают как* $\limsup$, *а нижний как* $\liminf$. *Мы показали, что, например, в случае ограниченности* x_n *сверху*

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} \sup_n \{x_n, \ n \geqslant k\},$$

что и есть верхний предел. Даже больше, можно написать в этом случае, опираясь на убывание y_k, что

$$\lim_{k\to\infty}\sup_n\{x_n,\ n\geqslant k\} = \inf_k \sup_n\{x_n,\ n\geqslant k\}.$$

Такие же формулы (с естественными изменениями) можно написать и в случае ограниченности x_n снизу, проделайте это самостоятельно.

Замечание 2.25. *В качестве заключительного замечания отметим без доказательства, наверное, интуитивно понятный, но не потребующийся нам в дальнейшем критерий существования предела последовательности.*

Последовательность x_n имеет предел (может быть, равный $\pm\infty$) тогда и только тогда, когда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Заинтересованные читатели могут попробовать доказать этот критерий самостоятельно.

2.10. Критерий Коши

В этом, заключительном разделе, касающемся предела последовательности, мы обсудим важнейший критерий существования конечного предела – критерий Коши. В тех или иных нотациях он будет встречаться нам во время всего курса анализа.

Сначала разберемся с интуицией. Что можно сказать про сходящуюся последовательность? Согласно определению предела, задавшись произвольной окрестностью предела, начиная с какого-то момента все члены последовательности находятся внутри этой окрестности, то есть все они находятся равномерно близко друг к другу. Дадим этому формальное определение.

Определение 2.12 (Понятие фундаментальной последовательности). *Последовательность x_n называется фундаментальной, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \ \forall n > n_0\ \forall p\in\mathbb{N}\ \ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Итак, вроде бы понятно, что сходящаяся последовательность оказывается фундаментальной, а наоборот? А наоборот, как оказывается, нет.

Пример 2.11. *Рассмотрим последовательность*

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Мы знаем, что ее пределом является число e, а значит (это пока не доказано, но все же) рассматриваемая последовательность фундаментальна. Однако, e – иррациональное число, хотя рассматриваемая последовательность – это последовательность рациональных чисел.

Значит, с тем же успехом мы могли бы рассматривать не множество $\mathbb{R}$, а множество $\mathbb{Q}$. И в последнем множестве наша последовательность бы тоже была фундаментальной, но предела, из-за дырявости, не имела бы.

Итак, мы снова натыкаемся на то, что многое завязано на аксиоме непрерывности (полноты) множества $\mathbb{R}$.

Теорема 2.10 (Критерий Коши). *Последовательность x_n сходится (в $\mathbb{R}$) тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$, тогда $n + p > n_0$ и

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - A) + (A - x_n)| \leqslant |x_{n+p} - A| + |A - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

то есть x_n – фундаментальная последовательность.

Достаточность. Пусть x_n – фундаментальная последовательность, $\varepsilon = 1$, тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < 1.$$

В частности, при $n = n_0 + 1$

$$-1 + x_{n_0+1} < x_{n_0+p+1} < 1 + x_{n_0+1},$$

откуда члены последовательности x_n при $n > n_0 + 1$ ограничены числом

$$\max(|-1 + x_{n_0+1}|, |1 + x_{n_0+1}|).$$

Тогда, положив

$$C = \max(|x_1|, |x_2|, \ \ldots, |x_{n_0+1}|, |-1 + x_{n_0+1}|, |1 + x_{n_0+1}|)$$

получаем, что

$$|x_n| \leqslant C,$$

то есть фундаментальная последовательность ограничена. По теореме Больцано–Вейерштрасса (2.9) из последовательности x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а значит

$$\exists x_{n_k} : \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = A.$$

Докажем, что пределом последовательности x_n является число A. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, в силу фундаментальности x_n,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = A$, то

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \quad |x_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $k_1 > k_0$ таково, что $n_{k_1} > n_0$, тогда при $n > n_0$ имеем

$$|x_n - A| = |(x_n - x_{n_{k_1}}) + (x_{n_{k_1}} - A)| \leqslant |x_n - x_{n_{k_1}}| + |x_{n_{k_1}} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение. $\square$

Замечание 2.26. *Как полезно проследить, в доказательстве необходимости мы не пользовались никакими отсылками к аксиоме непрерывности. Наши нестрогие рассуждения ранее полностью подтвердились.*

Что касается доказательства достаточности, то мы явно воспользовались теоремой Больцано–Вейерштрасса, которая, как обсуждалось ранее, эквивалентна аксиоме непрерывности.

На практике Критерий Коши часто используется для доказательства того, что предела не существует. Приведем соответствующие примеры.

Пример 2.12. *Важную роль в математическом анализе играет последовательность*

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Оказывается, что она не имеет конечного предела. Согласно отрицанию критерия Коши:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0\ \exists p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| \geqslant \varepsilon_0.$$

Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, $p = n$, тогда

$$|x_{2n} - x_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right| > \left|\frac{1}{2n} \cdot n\right| = \frac{1}{2}.$$

Это значит, что для $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ выполнено отрицание критерия Коши, откуда следует, что последовательность предела не имеет.

Можно заметить, что данная последовательность монотонна и имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, равный $+\infty$.

Вернемся к уже обсуждаемому ранее примеру.

Пример 2.13. *Докажем, что последовательность $x_n = \sin n$ не имеет предела. Предположим противное, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = A \in \mathbb{R}$. Так как*

$$|\sin(n+2) - \sin n| = 2|\sin 1 \cdot \cos(n+1)|$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+2) = A$ *(лемма 2.8), а также так как* $\sin 1 \neq 0$, *то, переходя к пределу в полученном равенстве получаем, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n+1) = 0$. *Значит, аналогично,*

$$\lim_{n\to\infty} \cos n = \lim_{n\to\infty} \cos(n+2) = 0.$$

Так как

$$|\cos(n+2) - \cos n| = 2|\sin 1 \cdot \sin(n+1)|,$$

то, аналогично, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+1) = 0$, *а значит* $A = 0$. *Но это невозможно, ведь*

$$\sin^2 n + \cos^2 n = 1.$$

§3. Предел и непрерывность функции

В этом разделе мы обобщим все то, что получено в предыдущем разделе для последовательности, на произвольные функции, а также разовьем полученный аппарат, применив его к изучению понятия непрерывности функции.

3.1. Определение предела функции по Коши

Перед тем как дать определение предела функции, нам потребуется ввести понятие предельной точки – точки, в которой мы сможем выяснять что-то про предел. Точки, «рядом» с которой есть еще много точек.

Определение 3.1 (Понятие предельной точки). *Точка* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *называется предельной для множества* $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, *если в любой окрестности* x_0 *содержится бесконечное число элементов множества* E, *то есть*

$$\forall U(x_0) \quad U(x_0) \cap E \quad \textit{бесконечно}.$$

Приведем примеры.

Пример 3.1. *Пусть* $E = [a, b]$. *Множество предельных точек* E *– это весь отрезок* $[a, b]$.

Пусть $E = (a, b)$. *Множество предельных точек* E *– это снова отрезок* $[a, b]$.

Пусть $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$. *Множество предельных точек* E *– это множество, состоящее лишь из одного элемента – нуля.*

Замечание 3.1. *Из примеров видно, что предельная точка может как принадлежать рассматриваемому множеству, так и не принадлежать. Более того, без рассмотрения конкретного множества понятие предельной точки бессмысленно. Для нас множеством* E *как правило будет выступать область определения рассматриваемой функции.*

Теперь наша цель – научиться характеризовать поведение функции сколь угодно близко к интересующей нас точке. Дадим основное определение.

Определение 3.2 (**ε–δ определение предела функции**)**.** *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная точка для E. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции f в точке x_0, если*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \qquad f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A.$$

Снова попробуем пояснить геометрическую подоплеку происходящего.

Замечание 3.2. *Геометрически определение предела функции означает, что какую бы полосу шириной 2ε ни взять, найдется δ, что при всех x из области определения функции, лежащих в проколотой окрестности $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ точки x_0, значения функции $f(x)$ лежат в этой полосе. При уменьшении ε ширина рассматриваемой полосы тоже уменьшается, а значение δ, вообще говоря, уменьшается.*

Итак, предел – это то значение, к которому «неограниченно приближаются» значения функции при «неограниченном приближении» аргумента к x_0.

Замечание 3.3. *Здесь же отметим, почему важно, чтобы x_0 была предельной точкой для E. Если это не так, то значение δ можно взять настолько малым, что множество $\{x \in E :\ \ 0 < |x - x_0| < \delta\}$ будет пустым, а значит никакого «сравнения» значения функции $f(x)$ и A и просто не может быть. Кроме того, это рушит и всю идеологию понятия предела: изучать поведение функции сколь угодно близко к интересующей точке.*

Отметим еще один момент, достойный отдельного замечания.

Замечание 3.4. *Обратите внимание, что при изучении предела само значение $f(x_0)$ никак не участвует, ведь сама точка x_0 в функцию «не подставляется». В частности, значение $f(x_0)$ может и вовсе быть не определено.*

Перед тем, как рассмотреть примеры, приведем уже, в некотором смысле, знакомое нам замечание.

Замечание 3.5. *Используя понятия окрестности и проколотой окрестности, введенное определение предела можно переписать следующим образом:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

или

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : f\left(\overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E\right) \subset U_\varepsilon(A).$$

Теперь можно дать и такую трактовку понятию предела. Число A – предел функции f в точке x_0, если какую бы ни выбрать (сколь угодно малую) окрестность точки A, найдется проколотая окрестность точки x_0, что все (допустимые) значения функции в точках этой окрестности лежат в окрестности A.

Начнем со стандартного примера.

Пример 3.2. *Доказать, что*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Нужно найти те x, при которых выполняется неравенство

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon.$$

Так как $x \neq 2$, то

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = |x + 2 - 4| = |x - 2| < \varepsilon.$$

Значит, если положить $\delta = \varepsilon$, то при $0 < |x - 2| < \delta$ выполняется

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon.$$

Замечание 3.6. *Снова отметим несколько важных моментов. Во-первых, δ должна найтись для каждого наперед заданного числа ε, а не для какого-то конкретного. Во-вторых, если нашлась какая-то $\delta(\varepsilon)$, то меньшее значение тоже подойдет в качестве δ. Ну и в-третьих, нам не нужно находить максимально возможное число δ, нам достаточно найти какое-нибудь.*

Поясним сказанное на следующем примере.

Пример 3.3. *Доказать, что*

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - x) = 6.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Заметим, что

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

Можно предполагать, что $x \in (2, 4)$, $x \neq 3$. Тогда

$$|(x - 3)(x + 2)| \leqslant 6|x - 3|.$$

Если теперь потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$6|x-3| < \varepsilon,$$

то, выбрав $\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{6}\right)$, *при всех* x *таких, что* $0 < |x-3| < \delta$, *будет выполняться*

$$|x^2 - x - 6| \leqslant 6|x-3| < \varepsilon.$$

Конечно, не каждая функция имеет предел.

Пример 3.4. *Рассмотрим функцию*

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Докажем, что у этой функции нет предела в точке 0. *Запишем отрицание того факта, что число* A *является пределом введенной функции в нуле:*

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x \in E : 0 < |x - 0| < \delta \quad |\operatorname{sign} x - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Пусть $\varepsilon_0 = 1$ *и* $x_\delta = -\dfrac{\delta}{2}$, *если* $A \geqslant 0$, *и* $x_\delta = \dfrac{\delta}{2}$, *если* $A < 0$. *Тогда, в любом из двух случаев,*

$$|\operatorname{sign} x - A| \geqslant 1.$$

В то же время легко показать, что, например,

$$\lim_{x \to 0} |\operatorname{sign} x| = 1.$$

Еще раз обратите внимание на то, что значение предела функции оказалось никак не связанным со значением функции в точке, где вычисляется предел.

Аналогично тому, как было в последовательностях, введем топологическое определение предела или определение через окрестности.

Определение 3.3 (Определение предела через окрестности). *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *– предельная точка для* E. *Число* $A \in \mathbb{R}$ *называется пределом функции* f *в точке* x_0, *если*

$$\forall V(A) \ \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(A),$$

или, что то же самое,

$$\forall V(A) \ \exists \overset{o}{U}(x_0) : f\left(\overset{o}{U}(x_0) \cap E\right) \subset V(A).$$

Конечно, как и при рассмотрении предела последовательности, справедлива следующая лемма.

Лемма 3.1. *Определения 3.2 и 3.3 эквивалентны.*

Доказательство. Доказательство вторит доказательству леммы 2.1 и остается в качестве упражнения. $\square$

Конечно, определение предела функции необходимо расширить: как на случай бесконечных пределов, так и на случай бесконечной точки. Все это, конечно, делается также, как делалось ранее: определение через окрестности не меняется, а определение через $\varepsilon - \delta$ переписывается лишь с оговоркой на «правильные» алгебраические выражения для окрестностей бесконечности. Приведем лишь некоторые варианты, остальные введите самостоятельно.

Определение 3.4 (Понятие бесконечных пределов). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная для E.*

Элемент $-\infty$ называется пределом функции f в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Элемент $+\infty$ называется пределом функции f в точке $x_0 = -\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : x < -\frac{1}{\delta} \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Число A называется пределом функции f в точке $x_0 = +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : x > \frac{1}{\delta} \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это, соответственно, так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty, \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A, \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} A.$$

Как и ранее, отметим следующее замечание.

Замечание 3.7. *Введенные определения можно переписать через ε-окрестности $U_\varepsilon(\pm\infty)$ и через окрестности $U(\pm\infty)$, в том числе проколотые, ровно также, как это сделано в определениях 3.2 и 3.3. Утверждение леммы 3.1 сохраняется и в этом случае. Читателю предлагается самостоятельно заполнить данный пробел по аналогии со сделанным выше.*

Вместо того, чтобы приводить очередной счетный пример, отметим вот такое связующее замечание.

Замечание 3.8. *Важно понимать, что определение предела последовательности – это частный случай определения предела функции. Так как для последовательности $E = \mathbb{N}$, а элемент $+\infty$ – единственная предельная точка для E, то*

$$\left\{x \in E : x > \frac{1}{\delta}\right\} = \left\{n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{\delta}\right\} = \{n \in \mathbb{N} : n > n_0\},$$

где $n_0 = \min\left(\left\{n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{\delta}\right\}\right) - 1$, *а последний существует в силу следствия* 1.5.2.

В заключение, отметим еще несколько важных замечаний.

Замечание 3.9. *Запись* $\lim\limits_{x \to x_0} x_n = A$ *будет всегда снабжена уточнением: либо* $A \in \mathbb{R}$, *либо* $A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Замечание 3.10. *При записи определения предела в дальнейшем для краткости часто опускается тот факт, что* $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Замечание 3.11. $\varepsilon - \delta$ *определение предела* 3.2 *часто называют определением «по Коши», отсюда и название пункта*

3.2. Определение предела по Гейне

Несмотря на то, что, как мы выяснили в предыдущем пункте, определение предела последовательности – это частный случай определения предела функции, оказывается, что предел функции можно определить через предел последовательности. Такой подход называется определением предела по Гейне.

Определение 3.5 (Определение предела по Гейне). *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ — *предельная точка для* E. *Элемент* $A \in \overline{\mathbb{R}}$ *называется пределом функции* f *в точке* x_0, *если* ***для любой*** *последовательности* x_n *такой, что:*

(а) $x_n \in E$.

(б) $x_n \neq x_0$.

(в) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

выполняется равенство

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Конечно, было бы неловко называть разные вещи одним и тем же именем, поэтому докажем следующую теорему.

Теорема 3.1 (Об эквивалентности определений предела). *Определения предела по Коши и Гейне эквивалентны.*

Доказательство. Остановимся подробно на случае, когда $x_0, A \in \mathbb{R}$, остальные случаи оставим в качестве упражнения.

Сначала докажем, что если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Коши, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и в смысле определения по Гейне. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, согласно определению по Коши,

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in V_\varepsilon(A).$$

Пусть последовательность x_n из условия. Тогда, по ранее найденному числу $\delta > 0$,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0).$$

Значит, при $n > n_0$

$$f(x_n) \in V_\varepsilon(A),$$

что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. В силу произвольности x_n, утверждение доказано.

Теперь докажем, что если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Гейне, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Коши. Пойдем от противного, пусть не выполнено определение по Коши, то есть

$$\exists \varepsilon_0 : \forall \delta > 0 \ \exists x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E : |f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Пусть $\delta_n = \dfrac{1}{n}$. Тогда, согласно написанному выше, для каждого δ_n

$$\exists x_n \in \overset{o}{U}_{\delta_n}(x_0) \cap E : |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Построенная последовательность x_n удовлетворяет (по построению) всем условиям, озвученным в теореме. В то же время, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, однако, так как

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$, то есть не выполнено определение по Гейне. Это противоречие завершает доказательство. □

Определение предела по Гейне часто применяется на практике для доказательства того, что предела не существует. Приведем пример.

Пример 3.5. *Докажем, что не существует предела* $\sin x$ *при* $x \to +\infty$. *Рассмотрим две последовательности:*

$$x_n^1 = 2\pi n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad x_n^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Обе они удовлетворяют требованиям определения предела по Гейне. В то же время,

$$f(x_n^1) = \sin(2\pi n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad f(x_n^2) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

и, так как пределы между собой не равны, мы делаем вывод, что предела не существует.

3.3. Свойства функций, имеющих предел

Для функций, конечно, справедливы теоремы, аналогичные теоремам для последовательностей. Начнем с локальных свойств: единственность предела, ограниченность в случае конечного предела (правда, теперь лишь в окрестности точки) и сохранение знака. Геометрические подводки остаются ровно такими же, как и в случае последовательностей.

Теорема 3.2 (Локальные свойства функций, имеющих предел). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, тогда:*

(а) При $A \in \overline{\mathbb{R}}$ предел единственен.

(б) При $A \in \mathbb{R}$ существует окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что в $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ функция $f(x)$ ограничена.

(в) Если $A \neq 0$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$, то существует окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что в $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ знаки $f(x)$ и A совпадают.

Доказательство. Докажем первый пункт. От противного, пусть существует два предела $A_1 \neq A_2$ и пусть последовательность x_n удовлетворяет условиям определения по Гейне. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A_2$. Однако, в силу единственности предела последовательности (теорема 2.2) $A_1 = A_2$. Приходим к противоречию.

Докажем второй пункт. Пусть $\varepsilon = 1$. Согласно определению предела функции,

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad |f(x) - A| < 1 \;\Leftrightarrow\; (A-1) < f(x) < (A+1),$$

что и означает ограниченность.

Докажем третий пункт. Пусть $A \in \mathbb{R}$ и пусть $\varepsilon = \dfrac{|A|}{2}$. Тогда, согласно определению предела,

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad |f(x) - A| < \frac{|A|}{2} \;\Leftrightarrow\; A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2},$$

откуда и следует требуемое. Случай $A \in \overline{\mathbb{R}}$ остается в качестве упражнения. □

Отметим одно замечание.

Замечание 3.12. *В рамках условий доказанной теоремы, в пункте б) можно выдвинуть и следующее утверждение:*

При $A \in \mathbb{R}$ существует окрестность $U(x_0)$ такая, что в $U(x_0) \cap E$ функция $f(x)$ ограничена.

Справедливость этого высказывания предлагается проверить самостоятельно.

3.4. Арифметические свойства пределов

Теорема об арифметических свойствах пределов и мотивируется, и поясняется ровно также, как это было сделано в последовательностях. Приведем сразу ее расширенный вариант.

Теорема 3.3 (Арифметические свойства пределов в $\overline{\mathbb{R}}$). *Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда, если определена соответствующая операция (сложения, умножения или деления) в $\overline{\mathbb{R}}$, то:*

(а) Предел суммы равен сумме пределов, то есть

$$f(x) + g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A + B.$$

(б) Предел произведения равен произведению пределов, то есть

$$f(x)g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} AB.$$

(в) Если $g(x) \neq 0$ в некоторой $\overset{o}{U}(x_0)$, то предел частного равен частному пределов, то есть

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \frac{A}{B}.$$

Доказательство. Используя определение предела по Гейне, доказательство этой теоремы сводится к применению соответствующей теоремы (2.2) для последовательностей.

Докажем первое утверждение. Пусть последовательность x_n удовлетворяет условиям определения предела по Гейне. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$. Значит, по уже упомянутой теореме (2.2) для последовательностей,

$$f(x_n) + g(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A + B.$$

В силу произвольности x_n это означает, что

$$f(x) + g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A + B.$$

Доказательство остальных пунктов остается в качестве упражнения. $\square$

3.5. Предельный переход в неравенствах

Аналогично тому, как было сделано в случае последовательностей, изучим двусторонние связи: как неравенство между функциями влияет на неравенство между пределами, и наоборот. Следуя уже известной логике, сначала разберемся со вторым вопросом.

Теорема 3.4. *Пусть* $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ *и* $A < B$. *Тогда*

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) < g(x).$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы (2.3) для последовательностей и остается в качестве упражнения. $\square$

Из этой теоремы моментально получается интересующее нас следствие – предельных переход в неравенствах.

Следствие 3.4.1 (Предельный переход в неравенствах). *Пусть* $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$.

- *(а) Если* $f(x) > g(x)$ *на* E, *то* $A \geqslant B$.
- *(б) Если* $f(x) \geqslant g(x)$ *на* E, *то* $A \geqslant B$.

Доказательство. Доказательство этого следствия можно либо провести непосредственно, как в случае последовательностей (следствие 2.3.1), либо воспользоваться тем же самым следствием и определением предела по Гейне. $\square$

Конечно, нельзя не отметить следующее замечание.

Замечание 3.13. *В первом пункте следствия нельзя утверждать, что* $A > B$. *Например, для функций* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *и* $g(x) = 0$ *при* $x > 0$ *выполняется* $f(x) > g(x)$, *однако* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ *и* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

3.6. Теорема о сжатой переменной

Теорема о сжатой переменной – удобное достаточное условие существование предела. Естественно, оно переносится и на функции.

Теорема 3.5 (Теорема о сжатой переменной). *Пусть* $f, g, h : E \to \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ *на* E *и* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$. *Тогда* $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$.

Доказательство. Пусть последовательность x_n удовлетворяет условиям определения по Гейне. Согласно последнему, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A$. По теореме о сжатой переменной для последовательностей (2.4) получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = A.$$

В силу произвольности последовательности x_n, теорема доказана. $\square$

3.7. Предел монотонной функции

Аналогично теореме Вейерштрасса для последовательностей и всему вокруг нее (см. соответствующий пункт), можно доказать аналогичную теорему и для функций. Перед этим, однако, введем необходимые определения.

Определение 3.6 (Понятия возрастания и убывания функции). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что функция f возрастает на E, если*

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

Говорят, что функция f строго возрастает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Говорят, что что функция f убывает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

Говорят, что функция f строго убывает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Определение 3.7. *Про возрастающую (строго возрастающую, убывающую, строго убывающую) функцию также говорят, что она монотонна.*

Теперь докажем теорему о пределе монотонной функции. Так как рассматривая предел функции в точке x_0 нам, вообще говоря, можно по-разному подбираться к x_0 (в отличие от предела последовательности на бесконечности), формулировка теоремы станет более тяжеловесной, но не менее геометричной.

Теорема 3.6 (О пределе монотонной функции). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ – возрастающая (на E) функция, $s = \sup E$ – предельная для E. Тогда*

$$\lim_{x\to s} f(x) = \sup_{x\in E} f(x).$$

Конечность последнего предела равносильна ограниченности f (на E) сверху.

Доказательство. Пусть написанный предел конечен. Согласно локальным свойствам функций, имеющих предел (3.2), f ограничена в $U(s) \cap E$. Поскольку f – возрастающая на E функция, то это влечет ограниченность f сверху (на E).

Пусть теперь f ограничена сверху и $A = \sup\limits_{x \in E} f(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, согласно свойству (1.19) супремума,

$$\exists x_0 \in E : \ A - \varepsilon < f(x_0) \leqslant A.$$

В силу неубывания f на E, при $x > x_0$, $x \in E$, имеем

$$A - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant A,$$

что и доказывает утверждение (сравните с доказательством теоремы Вейерштрасса 2.5).

Случай, когда f не ограничена сверху, остается в качестве упражнения. □

Замечание 3.14. *Понятно, что аналогичная теорема справедлива для убывающей функции при $x \to i$, где $i = \inf E$ – предельная для E. Настоятельно советуем эту теорему аккуратно сформулировать и доказать.*

Закинем якорь и немного на будущее.

Замечание 3.15. *Разговоры о супремуме и инфимуме E можно заменить на разговоры об одностороннем пределе в любой точке E. Уже сейчас полезно подумать, что значат эти слова. Мы же к этому понятию вернемся через несколько пунктов.*

3.8. Критерий Коши

В этом пункте все, опять-таки, аналогично соответствующему пункту про последовательности. Мы докажем, как и ранее, что существование конечного предела функции в точке равносильно тому, что значения функции в малой окрестности интересующей этой точки лежат очень близко друг к другу. Сформулируем это строго.

Теорема 3.7 (Критерий Коши). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная точка для E. Тогда*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \ \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \ \ |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть теперь $x', x'' \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E$, тогда, используя неравенство треугольника,

$$|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - A) + (A - f(x''))| \leqslant |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Докажем достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \ \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Пусть x_n – последовательность, удовлетворяющая условиям определения предела по Гейне. Тогда, в частности,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E.$$

Значит при $n > n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ тем более

$$x_{n+p} \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E,$$

а значит

$$|f(x_n) - f(x_{n+p})| < \varepsilon,$$

что означает, что последовательность $f(x_n)$ фундаментальна и, тем самым, согласно критерию Коши для последовательностей (2.10), имеет конечный предел. Тем самым доказано, что для любой последовательности, удовлетворяющей условиям определения предела по Гейне, последовательность $f(x_n)$ сходится.

Осталось показать, что все эти пределы одинаковы. От противного, пусть есть две последовательности x_n^1 и x_n^2, удовлетворяющие условиям определения предела по Гейне, но такие, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^1) = A_1 \neq A_2 = \lim_{n\to\infty} f(x_n^2).$$

Составим смешанную последовательность

$$x_n^3 = \{x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2, \ \ldots, x_n^1, x_n^2, \ \ldots\},$$

которая, как легко понять, тоже удовлетворяет условиям определения предела по Гейне. С одной стороны, по только что доказанному выше, последовательность $f(x_n^3)$ сходится, а с другой стороны

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{2k-1}^3) = A_1 \neq A_2 = \lim_{k\to\infty} f(x_{2k}^3).$$

Это противоречит утверждению леммы 2.8. Тем самым, теорема доказана полностью. □

3.9. Односторонние пределы

В этом разделе мы обсудим понятие односторонних пределов. Косвенно эти понятия мы уже затрагивали, обсуждая пределы на бесконечностях или теорему о пределе монотонной функции (3.6), но теперь мы коснемся их намного детальнее.

Мотивация к введению понятия предела была такой: хотелось узнать поведение функции в окрестности той или иной точки. Односторонние пределы в некотором смысле обобщают и уточняют это желание. Приведем пример.

Пример 3.6. *Рассмотрим уже обсуждаемую ранее функцию*

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Понятно (пример 3.4), что у нее нет предела в точке ноль. Однако, если мы рассмотрим эту функцию лишь при $x > 0$, либо при $x < 0$, то ситуация изменится радикально: пределы будут 1 и -1, соответственно. Наверное, сложно не согласиться, что такая характеристика поведения функции куда более информативна, чем вывод, что предела в нуле нет. Аналогичные рассуждения применимы и к функции $\dfrac{1}{x}$, опять-таки, в нуле. Подумайте, что там так или не так.

Обозначив проблему, предложим и ее решение, введя понятия односторонних пределов.

Определение 3.8 (Понятие правостороннего предела). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная точка для множества $U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}$.*

Говорят, что элемент $A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом функции f в точке x_0 справа, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Обозначается это так: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$.

Определение 3.9 (Понятие левостороннего предела). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная точка для множества $U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}$.*

Говорят, что элемент $A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом функции f в точке x_0 слева, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

Обозначается это так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

Отметим и следующее замечание.

Замечание 3.16. *Мы видим, что здесь мы требуем, чтобы x_0 была «односторонней» предельной точкой для области определения функции. Это мотивируется теми же соображениями, что были выдвинуты нами ранее.*

Более того, мы допускаем, что A может быть элементом расширенного множества вещественных чисел $\overline{\mathbb{R}}$, но требуем, чтобы точка x_0 была числом, то есть элементом $\mathbb{R}$. Все дело в том, что понятие предела при $x \to \pm\infty$ и так, по сути, является понятием одностороннего предела (вспомните, как там определяется окрестность!).

Кроме того, понятия односторонних пределов могут быть переписаны и через произвольные окрестности, и через определение по Гейне (с необходимыми изменениями), и все это приведет к эквивалентным понятиям. Мы не будем останавливаться на этом детально, но предлагаем читателю восстановить канву и понять, что за необходимые изменения надо провести, чтобы все утверждения и определения были четкими.

Отметим и еще одно замечание, касающееся, скорее, жаргона, а не сути.

Замечание 3.17. *На практике и в текстах часто применяют следующие обозначения:*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0), \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0).$$

Более того, иногда пишут $x \to x_0\pm$ вместо $x \to x_0 \pm 0$.

Приведем примеры.

Пример 3.7. *Рассмотрим функцию*

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}.$$

Ясно, что

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{sign} x = 1, \quad \lim_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = -1.$$

Пример 3.8. *Рассмотрим функцию*

$$f(x) = 5^{\frac{1}{x}}.$$

Так как при $x \to 0+0$ имеет место равенство

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty,$$

то легко понять (из школьных соображений), что

$$\lim_{x\to 0+0} 5^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Аналогично, так как

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty,$$

то легко понять, что

$$\lim_{x\to 0-0} 5^{\frac{1}{x}} = 0.$$

В терминах односторонних пределов можно привести и следующий, напрашивающийся, критерий существования предела функции в точке.

Теорема 3.8 (Критерий существования предела через односторонние). *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}$ *— предельная точка для множеств*

$$U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}, \quad U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}.$$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = A, \quad A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

В частности,

$$\forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

то есть $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$. Аналогично,

$$\forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

то есть $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$.

Докажем достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta_1 \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Аналогично,

$$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta_2 \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда выполнены оба неравенства, а значит

$$\forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

что и доказывает утверждение. $\square$

Отметим и такое необременительное замечание.

Замечание 3.18. *Если* x_0 *– не предельная точка ровно для одного из множеств* U_- *или* U_+*, то теорема тоже остается верной. Просто понятие предела в точке* x_0 *само по себе становится понятием одностороннего предела. Это касается и пределов на бесконечностях.*

Если x_0 *– не предельная точка ни для одного из множеств* U_- *или* U_+*, то понятия предела в точке* x_0*, ровно как и понятий односторонних пределов, не существует и вовсе.*

3.10. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

В этом пункте мы не обсудим ничего нового, но введем некоторую порцию новых, полезных для дальнейшего понятий, а так же свойств, связанных с этими понятиями.

Начнем с понятия бесконечно малой функции.

Определение 3.10 (Понятие бесконечно малой функции). *Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если*

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Итак, бесконечно малая в точке x_0 функция – это та функция, предел которой (а не значение!) в этой точке равен нулю. Почти аналогичным образом вводится понятие бесконечно большой функции.

Определение 3.11 (Понятие бесконечно большой функции). *Функция $\beta(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если*

$$\lim_{x \to x_0} |\beta(x)| = +\infty.$$

Естественно задаться вопросом о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций. Он решается легко, при помощи следующей леммы.

Лемма 3.2 (О связи бесконечно большой и бесконечно малой функций). *Пусть $\beta(x)$ – бесконечно большая при $x \to x_0$. Тогда*

$$\alpha(x) = \frac{1}{\beta(x)}$$

– бесконечно малая при $x \to x_0$.

Обратно, пусть $\alpha : E \to \mathbb{R}$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ и

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad \alpha(x) \neq 0.$$

Тогда

$$\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$$

— бесконечно большая при $x \to x_0$.

Доказательство. Доказательство этих соотношений можно провести непосредственно (сделайте это!), а можно воспользоваться теоремой 3.3. ☐

Отметим теперь свойства бесконечно малых функций.

Лемма 3.3. *Пусть $\alpha, \beta : E \to \mathbb{R}$ — бесконечно малые при $x \to x_0$, тогда:*

(a) Функция $\alpha(x) + \beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

(б) *Функция* $\alpha(x)\beta(x)$ — *бесконечно малая при* $x \to x_0$.

(в) *Если функция* $\theta : E \to \mathbb{R}$ *ограничена в некоторой проколотой окрестности* $\overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E$, *то функция* $\alpha(x)\theta(x)$ — *бесконечно малая при* $x \to x_0$.

Доказательство. В силу арифметических свойств пределов (2.2), в доказательстве нуждается только третий пункт приведенной леммы.

Согласно условию,

$$\exists \overset{o}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad |\theta(x)| \leqslant C.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta_1 < \delta : \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta_1}(x_0) \cap E \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{C+1}.$$

Тогда, при $x \in \overset{o}{U}_{\delta_1}(x_0) \cap E$ выполняется

$$|\theta(x)\alpha(x)| < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство. □

Приведем пример.

Пример 3.9. *Вычислить предел*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$, *как мы знаем, не существует. В то же время,* $|\sin x| \leqslant 1$ *при* $x \in \mathbb{R}$, *а значит функция* $\sin x$ *является ограниченной. Кроме того,* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, *значит функция* $\dfrac{1}{x}$ *является бесконечно малой при* $x \to +\infty$. *Тогда, согласно доказанной лемме,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Отметим еще и один критерий существования конечного предела функции, полезный для нас в дальнейшем.

Теорема 3.9 (Критерий существования конечного предела в терминах б.м.). *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 — *предельная для* E, *тогда*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — *бесконечно малая при* $x \to x_0$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, значит

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначив $\alpha(x) = f(x) - A$ приходим к определению того, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$ и, в то же время, представление $f(x) = A + \alpha(x)$.

Докажем достаточность. Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (A + \alpha(x)) = \lim_{x\to x_0} A + \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A.$$

□

3.11. Понятие непрерывности функции

Понятие предела позволило понять что-то о поведении функции рядом с интересующей нас точкой. А что, если это поведение сравнить со значением функции в самой точке? Казалось бы, если рядом с точкой происходит то же самое, что в точке, то график функции можно рисовать, не отрывая карандаша от бумаги. Такое свойство называется свойством непрерывности, на нем основывается огромное количество наших дальнейших построений.

Дадим общее «топологическое» определение непрерывности.

Определение 3.12 (Понятие непрерывности функции). *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если*

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

Прежде чем пояснить данное определение еще раз, приведем следующее замечание.

Замечание 3.19. *Естественно, приведенное определение может быть переписано и на языке $\varepsilon - \delta$, и на языке соответствующих окрестностей.*

Предполагая, что $E \subset \mathbb{R}$, факт непрерывности функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке x_0 записывается так:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Или так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in V_\varepsilon(f(x_0))$$

Или, наконец, так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : f\left(U_\delta(x_0) \cap E\right) \subset V_\varepsilon(f(x_0))$$

Эквивалентность этих определений проверяется так же, как эквивалентность различных определений предела, и остается в качестве упражнения.

Теперь перейдем к пояснению введенного понятия.

Замечание 3.20. *Мы не зря в конце предыдущего определения уже заговорили про предел. Ведь то, что написано – ну очень на него похоже. И правда, мы хотим, чтобы, взяв сколь угодно малую окрестность вокруг значения $f(x_0)$ функции f в точке x_0, нашлась окрестность точки x_0, что все значения функции в (допустимых) точках из этой окрестности лежали в выбранной окрестности $f(x_0)$.*

Чем это отличается от предела? И мало, и много чем. Во-первых, теперь мы не требуем того, чтобы точка x_0 была предельной для области определения E. Это, как легко понять, дает нам автоматическую непрерывность функции во всех непредельных точках ее области определения. Во-вторых, окрестность точки x_0 теперь не проколотая. Но это не удивительно, ведь мы сравниваем значения f рядом с точкой x_0 со значением в точке x_0.

Итак, важно понять, что теперь, в отличие от наших предыдущих разговоров про предел, решается несколько иная задача. Правда, понятие предела здесь очень даже при чем.

Зафиксируем уже анонсированную ранее связь понятий предела и непрерывности.

Лемма 3.4 (Связь непрерывности и предела). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.*

Для того чтобы функция $f : E \to \mathbb{R}$ была непрерывной в точке x_0, предельной для E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Если точка x_0 не является предельной для E, то f непрерывна в x_0.

Доказательство. 1. Сначала рассмотрим первое утверждение. Докажем необходимость. Пусть функция f непрерывна в точке x_0, предельной для E, тогда

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)).$$

В частности,

$$\forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)).$$

Тем самым, мы пришли к тому, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Докажем достаточность. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, тогда

$$\forall V(f(x_0))\ \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)).$$

Так $f(x_0) \in V(f(x_0))$, то на самом деле выполняется и то, что

$$\forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)),$$

и мы приходим к факту непрерывности $f(x)$ в точке x_0.

2. Теперь докажем второе утверждение. Если x_0 не является предельной точкой для множества E, то существует окрестность $U(x_0)$, не содержащая других, кроме x_0, точек из E. А тогда если $\varepsilon > 0$, то

$$x \in U(x_0) \cap E \ \Rightarrow (x = x_0) \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство. □

Приведем примеры.

Пример 3.10. *Рассмотрим в качестве функции тождественную константу, то есть $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Докажем, что она непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда неравенство*

$$|c - c| < \varepsilon$$

справедливо для любого $\delta > 0$ и любой точки x_0, что и завершает доказательство.

Аналогичным образом можно показать, что функция $f(x) = x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$, ведь неравенство

$$|x - x_0| < \varepsilon$$

верно как только $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Обобщим теперь непрерывность функции в точке на непрерывность на множестве.

Определение 3.13 (Понятие функции, непрерывной на множестве). *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной на множестве $D \subset E$, если она непрерывна в каждой точке множества D.*

Обозначается это так: $f \in C(D)$.

Поясним введенное определение.

Замечание 3.21. *С точки зрения геометрии, непрерывность функции, например, на отрезке $[a, b]$ может трактоваться так: график функции на этом отрезке можно нарисовать не отрывая ручки от бумаги.*

Кстати, непрерывные функции, и только они перестановочны с операцией взятия предела, ведь только для них

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0),$$

где последний переход справедлив в силу доказанной выше непрерывности функции x.

Буква C в обозначении непрерывной функции идет от слова «continuous».

Конечно, не все функции являются непрерывными. Примерам и обсуждению «проблемных» функций и будет посвящен следующий блок.

3.12. Классификация точек разрыва

Рассмотрим ситуации, которые возможны в случае, когда функция не непрерывна. Для начала дадим «разумное» определение точке разрыва.

Определение 3.14. *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная для E и f не непрерывна в точке x_0, то точка x_0 называется точкой разрыва для функции f.*

Итак, точками разрыва функции $f : E \to \mathbb{R}$ мы будем называть даже те точки, в которых функция не определена, но только если они являются предельными для области определения E. Точки, в которых функция не определена «вообще» к точкам разрыва, конечно, не относятся.

Если в точке x_0 произошел разрыв, то интересным оказывается выяснить его причину, то есть посмотреть на то, что происходит слева и справа от x_0, конечно, по возможности. Значит, классификация разрывов опирается на поведение односторонних пределов. Чтобы дальнейший рассказ был логичным, сначала охарактеризуем непрерывность в терминах односторонних пределов.

Лемма 3.5 (Характеристика непрерывности в терминах односторонних пределов). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и x_0 — предельная для E. Если существуют (в смысле определения) односторонние пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$, то непрерывность функции f в точке равносильна равенству*

$$f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0).$$

Если существует (в смысле определения) лишь один из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$, то непрерывность функции f в точке равносильна равенству

$$f(x_0 \pm 0) = f(x_0)$$

Доказательство. Эта лемма – комбинация леммы 3.4 и теоремы 3.8. □

Замечание 3.22. *Хочется прокомментировать слова «в смысле определения» в формулировке предыдущей леммы. Напомним, что для того, чтобы можно было рассматривать, скажем, левосторонний предел функции* $f : E \to \mathbb{R}$ *в точке* x_0*, необходимо, чтобы* x_0 *была предельной для множества* $U_-(x_0) = \{x \in E : \ x < x_0\}$*. Последнее же выполнено не всегда.*

Например, область определения функции $f(x) = \ln x$ *– это интервал* $(0, +\infty)$*, и левосторонний предел в точке* 0 *не существует не как предел, а как объект как таковой. Правосторонний же предел как объект существует, хотя и равен* $-\infty$ *и не существует в* $\mathbb{R}$*, но уже как предел.*

В то же время, если x_0 *– предельная для* E*, то она предельная и хотя бы для одного из множеств:* $U_-(x_0)$ *или* $U_+(x_0) = \{x \in E : \ x > x_0\}$*.*

Приведенная лемма позволяет нам шаг за шагом ухудшать ситуацию с односторонними пределами, а значит и «увеличивать» градус (род) разрыва. Начнем с самой приятной ситуации, которую легко «исправить».

Определение 3.15 (Понятие устранимого разрыва). *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Если существует* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$*, но значение функции в точке* x_0 *либо не определено, либо отличается от* A*, то* x_0 *называется точкой устранимого разрыва функции* f*.*

Приведем пример.

Пример 3.11. *Рассмотрим функцию*

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

и точку $x = 3$*. Ясно, что* $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$*, но функция не определена в точке* $x = 3$*. Тем самым, точка* $x = 3$ *– это точка устранимого разрыва функции* f*.*

Рассмотрим функцию

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

и точку 0*. Тогда* $\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sign} x| = 1$ *и, так как* $|\operatorname{sign} 0| = 0$*, то точка* 0 *– точка устранимого разрыва функции* $|\operatorname{sign} x|$*.*

Замечание 3.23. *Понятно, что устранимым разрыв называется не просто так. Переопределив, или определив в условиях данного выше определения функцию* f *в точке* x_0 *значением* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *мы добьемся того, что* f *станет непрерывной в* x_0*.*

Ухудшим ситуацию и введем следующее определение.

Определение 3.16 (Понятие разрыва 1-ого рода (скачка)). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0) \in \mathbb{R}$, но*

$$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0),$$

то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода или скачком.

Приведем пример.

Пример 3.12. *Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{sign} x$. Точка $x_0 = 0$, очевидно, является точкой разрыва первого рода функции f, ведь, как мы знаем,*

$$\lim_{x \to 0-0} \operatorname{sign} x = -1, \qquad \lim_{x \to 0-0} \operatorname{sign} x = 1.$$

Замечание 3.24. *Понятно, что скачком точка x_0 в предыдущем определении названа не просто так. Геометрически, при переходе через точку x_0 значение функции меняется скачкообразно со значения $f(x_0 - 0)$ на значение $f(x_0 + 0)$. Естественно, для этого оба односторонних предела во-первых должны существовать как объекты, а во-вторых быть числами. Исправить разрыв первого рода, не меняя сильно функцию, нельзя. Само значение функции в точке x_0 ни на что не влияет.*

Максимально ухудшим ситуацию и введем теперь уже финальное определение.

Определение 3.17 (Понятие разрыва 2-ого рода). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная для E. Если не существует хотя бы одного из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$ в $\mathbb{R}$, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода.*

Приведем порцию примеров.

Пример 3.13. *Пусть $f(x) = \ln x$. Точка $x_0 = 0$ – точка разрыва второго рода, так как $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = -\infty$.*

Пусть $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$. Точка $x_0 = 0$, опять-таки, точка разрыва второго рода, ведь

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 0+0} f(x) = +\infty.$$

Во всех приведенных примерах односторонние пределы существуют в $\overline{\mathbb{R}}$. Это, конечно, не всегда так. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

Нетрудно понять, что односторонние пределы в нуле у этой функции не существуют вовсе, а значит $x_0 = 0$ – точка разрыва второго рода функции f.

Отметим следующее замечание.

Замечание 3.25. *Итак, разрыв второго рода – это либо уход функции на бесконечность, либо несуществование хотя бы одного из односторонних пределов даже в $\overline{\mathbb{R}}$. Конечно же, разрыв второго рода просто так не исправить.*

Дадим и еще такое непонятное, но далеко идущее замечание.

Замечание 3.26 (О непрерывности элементарных функций). *А что можно вообще-то сказать про непрерывность функций? Неужели ее надо проверять в каждой точке? Заглянем немного вперед.*

Синус, экспонента, аркфункции и все те стандартные функции, изучаемые в школе, часто называют простейшими. Их сумму, произведение, частное и композицию (в конечном числе) – элементарными. Так вот оказывается верной следующая теорема: все элементарные функции непрерывны на своей области определения. Тем самым, при исследовании функции на непрерывность, имеет смысл рассматривать только те точки, где либо рвется область определения (первый пример в примере 3.11), либо функция теряет элементарность (первый пример в примере 3.12).

Более строго обозначенные факты мы обсудим позже.

3.13. Локальные свойства непрерывных функций

В этом пункте мы снова обсудим локальные свойства. Только теперь не функций, имеющих предел, а непрерывных функций. Так как определение непрерывности функции в точке, предельной для области определения, опирается на понятие предела, то «глобально» ничего нового мы не узнаем, а просто переформулируем уже известные и доказанные факты.

Теорема 3.10 (Локальные свойства непрерывных функций). *Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0, тогда:*

(а) Функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности x_0.

(б) Если $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $U(x_0)$ такая, что в $U(x_0) \cap E$ знаки $f(x)$ и $f(x_0)$ совпадают.

Пусть, кроме того, $g : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0, тогда:

(в) Функция $f(x) + g(x)$ непрерывна в x_0.

(г) Функция $f(x)g(x)$ непрерывна в x_0.

(д) Функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в x_0, если $g(x_0) \neq 0$.

Доказательство. Первые два пункта доказывается также как соответствующие пункты в локальных свойствах (3.2) функций, имеющих предел, и остаются в качестве упражнения.

Докажем, например, третий пункт. Если x_0 – не предельная точка для E, то функция $f(x) + g(x)$, чья область определения – это множество E, автоматически непрерывна в точке x_0. Если же точка x_0 – предельная точка для E, то, используя определение непрерывности через предел, а также арифметические свойства пределов (3.3), имеем

$$f(x) + g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0) + g(x_0),$$

что и доказывает непрерывность суммы. Остальные пункты доказываются аналогично и остаются в качестве упражнения. $\square$

Богатейший источник функций – операция композиции. И здесь-то нас ждет что-то новое, но вряд ли удивительное. Коротко, но не совсем строго факт можно сформулировать так: композиция непрерывных функций – непрерывная функция. Приведем соответсвующую теорему.

Теорема 3.11 (О непрерывности композиции). *Пусть $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to \mathbb{R}$, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in E_1$, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0) \in E_2$. Тогда функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Так как $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то

$$\forall V(g(y_0))\ \exists U(y_0) : \forall y \in U(y_0) \cap E_2 \quad g(y) \in V(g(y_0)).$$

Так как $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f(x_0) = y_0$, то по $U(y_0)$

$$\exists W(x_0) : \forall x \in W(x_0) \cap E_1 \quad f(x) \in U(y_0),$$

и, так как $f : E_1 \to E_2$, то $f(x) \in U(y_0) \cap E_2$, откуда

$$\forall x \in W(x_0) \cap E_1 \quad g(f(x)) \in V(g(f(x_0))),$$

что и доказывает непрерывность $g(f(x))$ в точке x_0. $\square$

Интересно, что подобной теоремы о, например, пределе композиции, у нас не было. Более того, такой теоремы «напрямую» и не получится.

Замечание 3.27. *Пусть $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to \mathbb{R}$, функция $f(x)$ имеет предел в точке $x_0 \in E_1$, равный y_0, а функция $g(y)$ имеет предел в точке y_0. Верно ли, что функция $g(f(x))$ имеет предел в точке x_0?*

Оказывается, что требования только существования предела функции $g(y)$ в точке y_0 недостаточно. Приведем пример. Пусть

$$g(y) = |\operatorname{sign} y|, \qquad f(x) = x \sin \frac{1}{x}.$$

Тогда $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ как произведение бесконечно малой на ограниченную (3.3), а $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = 1$. В то же время, предела $\lim\limits_{x \to 0} g(f(x))$ не существует. Действительно, пусть

$$x_n^1 = \frac{1}{2\pi n},\ x_n^2 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n^1)) = 0$, *а* $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n^2)) = 1$, *что противоречит определению предела по Гейне.*

Исправить сложившуюся ситуацию можно, потребовав, чтобы функция $g(y)$ *была непрерывна в точке* y_0, *при этом дополнительных ограничений на функцию* f *можно не накладывать. Мы не будем останавливаться на этом подробнее, предложив доказать этот несложный факт в качестве упражнения.*

3.14. Глобальные свойства непрерывных функций

Данный пункт будет посвящен не локальным, точечным свойствам непрерывных функций, а глобальным. Эти свойства целиком и полностью опираются, опять-таки, на аксиому непрерывности, и мы постараемся понять почему.

Пример 3.14. *Рассмотрим функцию*

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

На множестве $(0,1)$ *эта функция, будучи непрерывной, не ограничена и не достигает ни наибольшего, ни наименьшего значений. При этом эта функция ограничена в окрестности каждой точки множества* $(0,1)$ *согласно локальным свойствам непрерывных функций (3.10).*

На множестве $(0.5, 1)$ *эта функция, опять-таки, непрерывна, теперь и ограничена, но все равно не достигает ни наибольшего, ни наименьшего значений.*

На множестве $[0.5, 1]$ *эта функция все также непрерывна, но теперь не только ограничена, но и достигает наибольшего и наименьшего значений.*

Отметим какие-то выводы.

Замечание 3.28. *Мы видим, что непрерывность – не достаточное условие для «хорошего» поведения функции. Кроме как о функции, нужно думать и о множестве, на котором она задана. Чем так сильно, спросите вы, отличается отрезок от интервала? Тем, что он, как говорят, компактен, а именно:*

(а) Он ограничен как подмножество $\mathbb{R}$.

(б) Если $x_n \in [a,b]$ *– сходящаяся к* x_0 *последовательность, то* $x_0 \in [a,b]$.

В итоге, отрезок «удерживает» в себе предел сходящейся последовательности его элементов. Это снова отсылает нас к вопросу полноты, который мы обсуждали при рассмотрении критерия Коши для последовательности, а значит и к аксиоме непрерывности.

У интервала ни того, ни другого свойства, вообще говоря, нет: интервал может быть неограниченным, но это ладно. Последовательность элементов интервала может сходиться к точке, не лежащей в интервале. Например, для интервала $(0, 2)$ *такой последовательностью будет последовательность* $x_n = \dfrac{1}{n}$.

Итак, сформулируем и докажем теорему Вейерштрасса.

Теорема 3.12 (Вейерштрасса). *Пусть* $f \in C[a, b]$. *Тогда:*

(а) f *ограничена на* $[a, b]$.

(б) f *достигает на* $[a, b]$ *наибольшего и наименьшего значений.*

Доказательство. Докажем первый пункт. От противного, пусть f, например, не ограничена сверху. Тогда существует (сродни доказательству леммы 2.9) последовательность $x_n \in [a, b]$, что

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Так как x_n ограничена, то, согласно теореме Больцано–Вейерштрасса (2.9),

$$\exists x_{n_k} : x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0.$$

Легко понять, что $x_0 \in [a, b]$. Действительно, если $x_0 \notin [a, b]$, то при $\varepsilon = \min(|a - x_0|, |b - x_0|)$ в ε-окрестности точки x_0 нет точек из отрезка $[a, b]$, а значит и членов последовательности x_{n_k}, что невозможно согласно, например, пункту 3 леммы 2.2. Теперь мы приходим к противоречию с непрерывностью f в точке $x_0 \in [a, b]$: с одной стороны, из непрерывности следует, что

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0) \in \mathbb{R},$$

а с другой стороны, из леммы 2.8,

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Случай неограниченности снизу рассматривается аналогично.

Докажем второй пункт. Снова будем доказывать от противного. Пусть, например, супремум не достигается:

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(x) \neq M \ \text{ при } \ x \in [a, b].$$

Тогда функция

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

положительна на $[a, b]$ и, кроме того, по теореме 3.10, непрерывна на $[a, b]$. Значит, по доказанному в первом пункте, функция $g(x)$ ограничена. Тогда существует число $M_1 > 0$, что $g(x) < M_1$ на $[a, b]$. В то же время, при $x \in [a, b]$

$$\frac{1}{M - f(x)} < M_1 \Leftrightarrow M - f(x) > \frac{1}{M_1} \Leftrightarrow f(x) < M - \frac{1}{M_1},$$

что противоречит тому, что $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. □

Замечание 3.29. *Не обойтись и без комментариев, конечно, к первому пункту. Если вдуматься в доказательство, то мы воспользовались всеми теми бонусами отрезка, о которых говорили. Ограниченность отрезка как подмножества $\mathbb{R}$ дает нам возможность воспользоваться теоремой Больцано–Вейерштрасса (2.9) и выделить сходящуюся подпоследовательность. Свойство «удержания» предела, присущее отрезку и попутно нами доказанное, позволило воспользоваться непрерывностью функции на отрезке, так как точка x_0 осталась в нем, а не сбежала.*

Теперь обсудим еще одно важное свойство непрерывных на отрезке функций: принимая на отрезке два любых значения, они принимают на этом отрезке и все промежуточные значения. Однако, сначала обсудим геометрически понятную теорему о корне: непрерывная на отрезке функция, принимающая на концах отрезка значения разных знаков, должна в какой-то точке отрезка обратиться в ноль.

Теорема 3.13 (Первая теорема Больцано–Коши). *Пусть $f \in C[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда*

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = 0.$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Обозначим $a_1 = a$, $b_1 = b$. Разделим отрезок $I_1 = [a_1, b_1]$ пополам точкой

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Если $f(c_1) = 0$, то доказательство закончено. Если $f(c_1) \neq 0$, то либо $f(c_1) > 0$, либо $f(c_1) < 0$. Из получившихся двух отрезков выберем тот, на концах которого значения функции все также имеют разный знак. Это значит, что в первом случае в качестве отрезка I_2 выберем отрезок $[c_1, b]$, а во втором случае в качестве отрезка I_2 выберем отрезок $[a, c_1]$. В любом из двух случаев концы нового отрезка обозначим a_2 и b_2.

Продолжаем по индукции. Если построен отрезок $I_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$, то на шаге $n \geqslant 2$ разделим отрезок I_{n-1} пополам точкой

$$c_{n-1} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}.$$

Если $f(c_{n-1}) = 0$, то доказательство закончено. Если $f(c_{n-1}) \neq 0$, то либо $f(c_{n-1}) > 0$, либо $f(c_{n-1}) < 0$. В первом случае в качестве отрезка I_n выберем отрезок $[c_{n-1}, b_{n-1}]$, а во втором случае в качестве отрезка I_2 выберем отрезок $[a_{n-1}, c_{n-1}]$. В любом из двух случаев концы нового отрезка обозначим a_n и b_n.

Так как $a_n, b_n \in [a, b]$, то по теореме Больцано–Вейерштрасса (2.9)

$$\exists a_{n_k} : a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a_0, \quad \exists b_{n_k} : b_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} b_0,$$

причем $a_0, b_0 \in [a, b]$, что доказывается также, как в доказательстве первого пункта теоремы Вейерштрасса. Так как длина отрезка I_1 на каждой итерации уменьшается в два раза, то

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

откуда $a_0 = b_0 = x_0 \in [a, b]$. Пользуясь непрерывностью f на $[a, b]$, имеем:

$$f(a_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0), \quad f(b_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0).$$

Так как, по построению, $f(a_{n_k}) > 0$, $f(b_{n_k}) < 0$, то, по теореме о предельном переходе в неравенствах (3.4.1),

$$(f(x_0) \geqslant 0) \ \wedge \ (f(x_0) \leqslant 0) \ \Rightarrow \ f(x_0) = 0,$$

и теорема доказана. □

Замечание 3.30. *Обратите внимание, как мы снова использовали все свойства, присущие отрезку.*

Доказательство теоремы оказалось весьма конструктивным. Предложенный метод поиска корня уравнения $f(x) = 0$ называется дихотомией или методом половинного деления.

Из доказанной теоремы легко получается интересующий нас, упомянутый ранее, факт – теорема о промежуточных значениях.

Теорема 3.14 (Вторая теорема Больцано–Коши). *Пусть $f \in C[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$. Тогда*

$$\forall C \in (A, B) \ \exists c \in (a, b) : f(c) = C.$$

Доказательство. Пусть $C \in (A, B)$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - C.$$

Во-первых, эта функция непрерывна на $[a, b]$ как разность непрерывных функций. Во-вторых,

$$g(a) = A - C < 0, \quad g(b) = B - C > 0.$$

Значит, согласно первой теореме Больцано–Коши (3.13),

$$\exists c \in (a, b) : g(c) = 0 \ \Leftrightarrow \ f(c) - C = 0 \ \Leftrightarrow \ f(c) = C,$$

что и доказывает теорему. □

Еще одна характерная особенность непрерывных функций – способность сохранять промежуток. Для начала разберемся с понятием последних.

Определение 3.18 (Понятие промежутка). *Отрезок, интервал, полуинтервал или луч с концами $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ называется промежутком и обозначается $\langle a, b \rangle$.*

Оказывается, на прямой промежуток характеризуется следующим образом: вместе с любыми двумя точками он содержит и отрезок, с концами в этих точках (иными словами – промежуток, и только он – выпуклое в $\overline{\mathbb{R}}$ множество).

Лемма 3.6 (Характеристика промежутка). *Следующие утверждения эквивалентны:*

(а) $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ *– промежуток.*

(б) Если $a, b \in E$, $a < b$, *то* $[a, b] \subset E$.

Доказательство. Второе утверждение моментально следует из первого, если только вспомнить определение промежутка. Докажем встречное утверждение.

Пусть $M = \sup E$, $m = \inf E$. Ясно, что $E \subset [m, M]$. Покажем, что $(m, M) \subset E$. Действительно, если $z \in (m, M)$, то, согласно определению точных граней,

$$\exists x, y \in E : \quad x < z < y.$$

Тогда, по условию, $[x, y] \subset E$, а значит $z \in E$, что и доказывает утверждение. □