СЛАУ

Основные обозначения:

- система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_{m.} \end{cases}$$

- матричная запись СЛАУ: $A \cdot X = B$,

  где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} - \textit{основная матрица системы},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathrm{M} \\ x_n \end{pmatrix} - \textit{столбец неизвестных системы}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \mathrm{M} \\ b_m \end{pmatrix} - \textit{столбец свободных членов}$$

- расширенная матрица системы: $\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right);$

- однородная СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0\,; \end{cases}$$

- Сначала немного систематизируем знания о системах линейных уравнений. Система линейных уравнений может:
- 1) Иметь единственное решение.
- 2) Иметь бесконечно много решений.
- 3) Не иметь решений (быть *несовместной*).

Общая схема исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений

1. Записываем СЛАУ в ***матричном виде.***
2. Выписываем ***расширенную матрицу*** системы.
3. Находим ***ранг основной и расширенной матриц*** системы:

а) если ***ранги*** матриц ***различны***, то система ***несовместна***;

б) если ***ранги*** матриц ***равны***, причем $\boldsymbol{r = n}$, где n – число неизвестных, то система ***совместна***, имеет ***единственное решение***, которое может быть найдено с помощью методов: <u>правила Крамера, матричного метода, метода Гаусса;</u>

в) если ***ранги*** матриц ***равны***, но $\boldsymbol{r < n}$, то система ***совместна***, имеет ***множество решений***, которое можно найти <u>только методом Гаусса</u>, вводя r – базисных переменных и n – свободных переменных.

Матричный метод

Алгоритм решения СЛАУ матричным методом:

1. Вычисляем главный определитель Δ системы, убеждаемся, что он отличен от нуля.
2. Находим матрицу A^{-1}, обратную основной матрице системы.
3. Находим решение системы по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B \ .$$

Делаем проверку, подставляя полученное решение в исходную систему.

Метод обратной матрицы решения систем линейных уравнений

Метод обратной матрицы рассмотрим на примере решения квадратной системы 3 порядка.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Запишем эту систему в матричном виде. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Основная матрица системы

Матрица - столбец свободных членов

Матрица - столбец неизвестных

Метод обратной матрицы решения систем линейных уравнений

Тогда систему можно записать так:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot X = B$$

Найдем решение системы в матричном виде.

Предположим, что *det A* отличен от нуля и, следовательно, существует обратная матрица A^{-1}.

Умножим слева матричную запись системы на обратную матрицу:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\Rightarrow\; E \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\Rightarrow\; \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Метод обратной матрицы применим для решения квадратных систем с невырожденной основной матрицей.

ПРИМЕР 1

Задание Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение Данная система уравнений может быть записана матричным уравнением

$$A \cdot X = B$$

где $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Выразив из этого уравнения X, получим

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Найдем определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 5 + 3 \cdot (-4) \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot 3 -$$

$$-1 \cdot (-4) \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot (-1) = -20 - 48 - 3 + 18 + 20 + 8 = -25 \neq 0.$$

Так как $\det A \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое можно найти методом обратной матрицы.

Найдем обратную матрицу A^{-1} с помощью союзной матрицы. Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} к соответствующим элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -10+4 = -6; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(5-12) = 7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1+6 = 5; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -(-20+3) = 17;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10-9 = 1; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2+12) = -10$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -16+6 = -10;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8-3) = -5; \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4+4 = 0.$$

Запишем союзную матрицу A^*, составленную из алгебраических дополнений элементов матрицы A:

$$A^* = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 5 \\ 17 & 1 & -10 \\ -10 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Далее запишем обратную матрицу согласно формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$. Будем иметь:

$$A^{-1} = -\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножая обратную матрицу A^{-1} на столбец свободных членов B, получим искомое решение исходной системы:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -6 + 51 - 20 \\ 7 + 3 - 10 \\ 5 - 30 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$

Решить систему уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Матрица А невырожденная $\Rightarrow$ обратная матрица A^{-1} существует !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0-4) = -4;$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \big(0-(-8)\big) = -8;$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3-4) = -7;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (0-3) = 3;$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \big(0-(-6)\big) = 6;$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1-4) = 5;$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \big(-8-(-6)\big) = -2;$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -1 \cdot \big(-4-(-9)\big) = -5;$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2-6) = -4;$

3) $\overline{A} = \begin{pmatrix} -4 & -8 & -7 \\ 3 & 6 & 5 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix};$

4) $\overline{A} = \begin{pmatrix} -4 & -8 & -7 \\ 3 & 6 & 5 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$; $A^* = \left(\overline{A}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$;

5) $|A| = 1$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$;

Вычислим X по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$;

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

ОТВЕТ

$$= \begin{pmatrix} (-4)\cdot 1 + 3\cdot 0 + (-2)\cdot(-1) \\ (-8)\cdot 1 + 6\cdot 0 + (-5)\cdot(-1) \\ (-7)\cdot 1 + 5\cdot 0 + (-4)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2 \\ -8+5 \\ -7+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ПРОВЕРКА: $A \cdot X = B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot(-2) + 2\cdot(-3) + (-3)\cdot(-3) \\ 3\cdot(-2) + 2\cdot(-3) + (-4)\cdot(-3) \\ 2\cdot(-2) + (-1)\cdot(-3) + 0\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -2-6+9 \\ -6-6+12 \\ -4+3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ ВЕРНО

Метод Крамера

Правило Крамера

- Решает системы n – линейных алгебраических уравнений с n – неизвестными общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

причем определитель основной матрицы системы отличен от нуля.

Определение. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы называется ***главным определителем системы***, обозначается Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Правило Крамера

Вспомогательный определитель Δi получается из определителя Δ путем замены соответствующего i-го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 & ... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема (*правило Крамера*)

- ✓ Если главный определитель Δ системы размерности $n \times n$ отличен от нуля, то система имеет решение, и притом, единственное. Это решение можно найти по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad \ldots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

Пример. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение. 1)Определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

2) Вычислим определители $\boldsymbol{\Delta_1}, \boldsymbol{\Delta_2}, \boldsymbol{\Delta_3}$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

3) Подставим полученные значения в формулу Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{-5} = \boxed{-1,} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = \boxed{1,} \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = \boxed{1}$$

Метод Гаусса

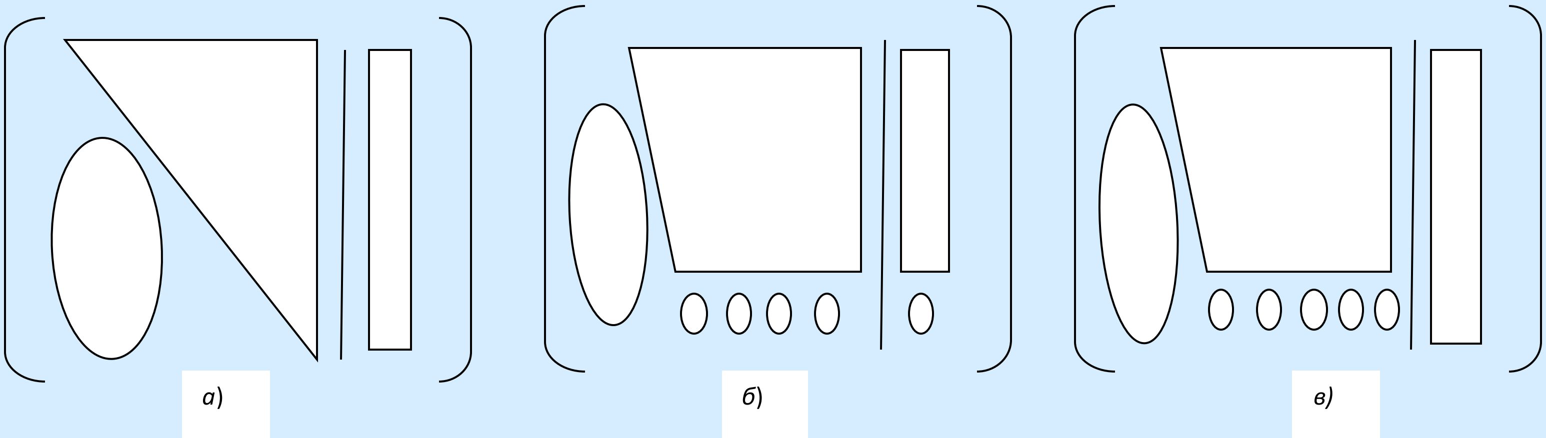
Суть метода Гаусса

Чтобы решить систему m – линейных алгебраических уравнений с n – неизвестными методом Гаусса, необходимо записать расширенную матрицу системы и, используя элементарные преобразования расширенной матрицы системы, привести ее к трапециевидной форме.

Элементарные преобразования расширенной матрицы системы :

1. перестановка строк (столбцов) матрицы;
2. умножение строки матрицы на действительное число отличное от нуля и сложение с другой строкой;
3. вычеркивание строки матрицы, все элементы которой равны нулю;
4. вычеркивание одной из пропорциональных строк матрицы;
5. умножение строки матрицы на число отличное от нуля.

В результате этих преобразований матрица примет один их трех видов:



✓ Если матрицу можно свести к виду ***а)*** , то система совместна и имеет ***единственное решение***.

✓ Если матрицу можно свести к виду ***б) ,*** то система совместна и имеет ***множество решений.***

✓ Если матрицу можно свести к виду ***в)*** , то система ***несовместна.***

Элементарные преобразования

К элементарным преобразованиям системы отнесем следующее:

1. перемена местами двух любых уравнений;
2. умножение обеих частей любого из уравнений на произвольное число, отличное от нуля;
3. прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое действительное число.

Метод Гаусса – ***это метод последовательного исключения переменных***

- Систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей. *Это называется прямым ходом.*
- Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок. *Это называется обратным ходом.*

Рассмотрим на примере

1. Покажем последовательность решения системы из трех уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16 \\ x_1 + 2{,}5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$$

2. Поделим первое уравнение на 2, затем вычтем его из второго (a_{21}=1, поэтому домножение не требуется) и из третьего, умножив предварительно на a_{31}=3

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_2 + 4x_3 = 16 \\ 4{,}5x_2 - 5x_3 = -6 \end{cases}$$

3. Поделим второе уравнение полученной системы на 2, а затем вычтем его из третьего, умножив предварительно на 4,5 (коэффициент при x_2)

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 + 2x_3 = 8 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 8 \\ \qquad\quad -14x_3 = -42 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} x_3=-42/(-14)=3; \\ x_2=8-2x3=2 \\ x_1=8-0,5x2-2x3=1 \end{cases}$$

При выполнении прямого хода используют следующие преобразования (повторно!!!):

1. Умножение или деление коэффициентов свободных членов на одно и то же число;
2. Сложение и вычитание уравнений;
3. Перестановка уравнений системы;
4. Исключение из системы уравнений, в которых все коэффициенты при неизвестных и свободные члены равны нулю.

Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$$

Нужно записать ***расширенную матрицу*** *системы*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$$

Вертикальная черта внутри матрицы не несёт никакого математического смысла – ***это просто отчеркивание для удобства оформления.***

Матрица системы *– это матрица, составленная только из коэффициентов при неизвестных.*

Расширенная матрица системы *– это та же матрица системы плюс столбец свободных членов, в данном случае.*

Решение.

Умножим первую строку на (-2)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$$

ко второй строке прибавим первую строку умноженную на -2

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Разделим опять первую строку на (-2)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

строка, которую *ПРИБАВЛЯ**ЛИ*** – **<u>не изменилась</u>**.

Всегда *меняется строка, К КОТОРОЙ ПРИБАВЛЯ**ЮТ**.*

Цель элементарных преобразований –

привести матрицу к ступенчатому виду. Сам термин «ступенчатый вид» не вполне теоретический, в научной и учебной литературе он часто называется ***трапециевидный вид*** или ***треугольный***

В результате элементарных преобразований получена ***эквивалентная*** исходной система уравнений

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x - y = -5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Выполняем обратный ход, т.е. подстановку в первое уравнение вместо y,

x =-5+y

x=-5+1

x=-4

Ответ: (-4; 1)

Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

Решение.

Переставим третье уравнение на место первого и запишем расширенную матрицу:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 9 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

Чтобы в первом столбце получить $\mathbf{a_2=a_3=0}$, умножим 1-ю строку сначала на 3, а затем на 2 и вычтем результаты из 2-й и 3-й строк

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Разделим 2-ю строку на 8, полученные результаты умножим на 3 и вычтем из 3-й строки

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -\frac{21}{8} & -\frac{15}{8} \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -\frac{21}{8} & -\frac{15}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{8} & \frac{39}{8} \end{array}\right)$$

Запишем новую эквивалентную систему с учетом расширенной матрицы

$$\begin{cases} x-2y+2z=3 \\ y-\dfrac{7}{8}z=-\dfrac{5}{8} \\ \dfrac{13}{8}z=\dfrac{39}{8} \end{cases}$$

Выполняем обратный ход, с помощью последовательных подстановок находим неизвестные

$$\begin{cases} x-2y+2z=3 \\ y-\dfrac{7}{8}z=-\dfrac{5}{8} \\ \dfrac{13}{8}z=\dfrac{39}{8} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{13}{8}z=\frac{39}{8} \quad z=3$$

$$y-\frac{7}{8}\cdot 3=-\frac{5}{8} \quad y=-\frac{5}{8}+\frac{21}{8}=\frac{16}{8}=2$$

$$x-2\cdot 2+2\cdot 3=3 \quad x=3+4-6=1$$

Ответ: (1; 2; 3)

Пример.

Решить СЛАУ методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы, составленную из коэффициентов системы и свободных слагаемых.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

С помощью элементарных преобразований сведем расширенную матрицу к подобной матрице ступенчатого вида:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Получаем систему линейных уравнений, эквивалентную исходной системе уравнений.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ y - z = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Ответ: $x = 3, y = 5, z = 4$

Пример

Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

- Сначала смотрим на левое верхнее число:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

- Почти всегда здесь должна находиться **единица**. Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец – готовая единица у нас есть! Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

- Теперь нужно получить нули вот местах:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

- Нужно **ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на –2**. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –2: (–2, –4, 2, –18). И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, **ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на –2**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

- Аналогично разбираемся с третьей строкой (3, 2, –5, –1). Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно **к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на –3**.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

- **Не нужно считать всё сразу и одновременно**. Порядок вычислений и «вписывания»
  результатов **последователен** и обычно такой: сначала переписываем первую строку, и пыхтим себе потихонечку – ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО
  и **ВНИМАТЕЛЬНО**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

- Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

- В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на –5 (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на –2, ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

- Для этого **к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на –2**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

- В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ \qquad y - z = 1 \\ \qquad\quad z = 4 \end{cases}$$

- Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу вверх.
- В третьем уравнении у нас уже готовый результат: $z=4$
- Смотрим на второе уравнение: $y-z=1$.

  $Y-4=1$

  $Y=5$
- Значение «зет» уже известно, таким образом: $X+2*5-4=9$

  $X=3$

Ответ: (3;5;4)

Пример.

Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x - 2y + 4z = 5 \\ 2x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

Пример.

Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x-2y+4z=5 \\ 2x+3y-\ z=7 \\ 3x-\ y+2z=3 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}+\mathrm{II}\times(-2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{II}+\mathrm{I}\times(-2) \\ \mathrm{III}+\mathrm{I}\times(-3)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & 19 & -13 & 25 \\ 0 & 23 & -16 & 30 \end{array}\right)$$

Римскими цифрами I, II, III обозначим номера строк системы

$$\overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & 19 & -13 & 25 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}+\mathrm{III}\times(-5)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}+\mathrm{II}\times 4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

Восстановим систему:

$$\begin{cases} x-8y+6z=-9 \\ y-2z=0 \\ 5z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-9+8y-6z \\ y=2z=2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-9+16-6=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

$$\boxed{x=1 \quad y=2 \quad z=1}$$