

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего
образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №6

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: 7

Преподаватель:
Малышева Татьяна Алексеевна

Выполнил: Жук И. А.
Группа: Р3215

Цель работы

Численно решить задачу Коши для выбранного ОДУ на $[x_0, x_n]$ методами Эйлера, Эйлера с пересчётом (Heun) и Милна; привести формулы и табличные результаты.

Постановка задачи

ОДУ первого порядка (на выбор пользователя):

$$(1) y' = x + y, \quad (2) y' = x y, \quad (3) y' = \sin x - y,$$

начальное условие $y(x_0) = y_0$, равномерная сетка $x_i = x_0 + i h$ ($i = 0..n$), точность ε .

Рабочие формулы

Эйлер: $y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$.

Эйлер с пересчётом (Heun):

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad k_2 = f(x_i + h, y_i + h k_1), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2),$$

оценка Рунге: $\delta \approx \frac{|y_h - y_{h/2}|}{2^2 - 1} \leq \varepsilon$.

Милн (предиктор–корректор):

$$\tilde{y}_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i), \quad y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})),$$

итерации до $|y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}| \leq \varepsilon$. Инициализация: три шага Рунге–Кутты 4-го порядка.

Краткое описание алгоритма

Пользователь выбирает ОДУ и вводит $y_0, x_0, x_n, h, \varepsilon, n$. Программа строит сетку, считает и печатает таблицы (i, x_i, y_i) для трёх методов.

Результаты

Тест 1: $y' = x + y$

Ввод: ОДУ = (1) $y' = x + y$; $y_0 = 1$; $x_0 = 0$; $x_n = 1$; $h_{\text{нач}} = 1 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$; $n = 10$.
Шаг сетки: $h_{\text{сетка}} = (x_n - x_0)/n = 0.1$.

Метод

Эйлера шаг (= 0.1):

i	x_i	y_i
0	0,00000	1,000000000
1	0,10000	1,100000000
2	0,20000	1,220000000
3	0,30000	1,362000000
4	0,40000	1,528200000
5	0,50000	1,721020000
6	0,60000	1,943122000
7	0,70000	2,197434200

8	0,80000	2,48717762
9	0,90000	2,81589538
10	1,00000	3,18748492

метод Эйлера адаптивный(шаг, eps = 1.0E-5):

i	x_i	y_i
0	0,00000	1,00000000
1	0,10000	1,05250000
2	0,20000	1,11281563
3	0,30000	1,18134743
4	0,40000	1,25851648
5	0,50000	1,34476545
6	0,60000	1,44055968
7	0,70000	1,54638836
8	0,80000	1,66276577
9	0,90000	1,79023251
10	1,00000	1,92935693

Милна шаг(= 1.0E-4, ерскоррекции- = 1.0E-5):

i	x_i	y_i
0	0,00000	1,00000000
1	0,10000	1,11034167
2	0,20000	1,24280514
3	0,30000	1,39971699
4	0,40000	1,58364897
5	0,50000	1,79744188
6	0,60000	2,04423710
7	0,70000	2,32750471
8	0,80000	2,65108129
9	0,90000	3,01920546
10	1,00000	3,43656303

Тест 2: $y' = x y$

Ввод: ОДУ = (2) $y' = x y$; $y_0 = 1$; $x_0 = 0$; $x_n = 1$; $h_{нач} = 1 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$; $n = 10$.
Шаг сетки: $h_{сетка} = 0.1$.

Метод

Эйлера шаг(= 0.1):

i	x_i	y_i
0	0,00000	1,00000000
1	0,10000	1,00000000
2	0,20000	1,01000000
3	0,30000	1,03020000
4	0,40000	1,06110600
5	0,50000	1,10355024
6	0,60000	1,15872775
7	0,70000	1,22825142
8	0,80000	1,31422902
9	0,90000	1,41936734
10	1,00000	1,54711040

метод Эйлера адаптивный(шаг, eps = 1.0E-5):

i	x_i	y_i
0	0,00000	1,000000000
1	0,10000	1,00125000
2	0,20000	1,00752659
3	0,30000	1,01892423
4	0,40000	1,03561548
5	0,50000	1,05785533
6	0,60000	1,08598767
7	0,70000	1,12045420
8	0,80000	1,16180596
9	0,90000	1,21071799
10	1,00000	1,26800765

Метод

Милна шаг(= 1.0E-4, ерскоррекции- = 1.0E-5):

i	x_i	y_i
0	0,00000	1,000000000
1	0,10000	1,00501252
2	0,20000	1,02020134
3	0,30000	1,04602786
4	0,40000	1,08328749
5	0,50000	1,13314902
6	0,60000	1,19721849
7	0,70000	1,27762275
8	0,80000	1,37712995
9	0,90000	1,49930522
10	1,00000	1,64872495

BUILD SUCCESSFUL in 1s

2 actionable tasks: 1 executed, 1 up-to-date

Configuration cache entry reused.

Тест 3: $y' = \sin x - y$

Ввод: ОДУ = (3) $y' = \sin x - y$; $y_0 = 0$; $x_0 = 0$; $x_n = \pi \approx 3.1415926535$; $h_{\text{нач}} = 1 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$; $n = 20$.

Шаг сетки: $h_{\text{сетка}} = (\pi - 0)/20 \approx 0.157079632675$.

Метод

Эйлера шаг(= 0.157079632675):

i	x_i	y_i
0	0,00000	0,000000000
1	0,15708	0,000000000
2	0,31416	0,02457267
3	0,47124	0,06925308
4	0,62832	0,12968749
5	0,78540	0,20164532
6	0,94248	0,28104302
7	1,09956	0,36397698
8	1,25664	0,44676259
9	1,41372	0,52597689
10	1,57080	0,59850236
11	1,72788	0,66156946
12	1,88496	0,71279609

13	2,04204	0,75022195
14	2,19911	0,77233634
15	2,35619	0,77809812
16	2,51327	0,76694683
17	2,67035	0,73880420
18	2,82743	0,69406576
19	2,98451	0,63358245
20	3,14159	0,55863222

Усовершенствованный

метод Эйлера адаптивный(шаг, eps = 1.0E-5):

i	x_i	y_i
0	0,00000	0,00000000
1	0,15708	0,00308108
2	0,31416	0,01767666
3	0,47124	0,04255278
4	0,62832	0,07628835
5	0,78540	0,11730513
6	0,94248	0,16390200
7	1,09956	0,21429260
8	1,25664	0,26664535
9	1,41372	0,31912496
10	1,57080	0,36993421
11	1,72788	0,41735512
12	1,88496	0,45978838
13	2,04204	0,49579006
14	2,19911	0,52410470
15	2,35619	0,54369397
16	2,51327	0,55376012
17	2,67035	0,55376370
18	2,82743	0,54343504
19	2,98451	0,52277920
20	3,14159	0,49207437

Метод

Милна шаг(= 1.0E-4, epsкоррекции- = 1.0E-5):

i	x_i	y_i
0	0,00000	0,00000000
1	0,15708	0,01169170
2	0,31416	0,04418262
3	0,47124	0,09360744
4	0,62832	0,15612972
5	0,78540	0,22797094
6	0,94248	0,30544868
7	1,09956	0,38501981
8	1,25664	0,46332743
9	1,41372	0,53724884
10	1,57080	0,60394309
11	1,72788	0,66089544
12	1,88496	0,70595799
13	2,04204	0,73738387
14	2,19911	0,75385473
15	2,35619	0,75449952
16	2,51327	0,73890464
17	2,67035	0,70711408

18	2,82743	0,65962017
19	2,98451	0,59734399
20	3,14159	0,52160685

BUILD SUCCESSFUL in 1s
2 actionable tasks: 1 executed, 1 up-to-date
Configuration cache entry reused.

Вывод

Реализованы методы Эйлера, Эйлера с пересчётом и Милна; получены табличные решения на заданных интервалах при допуске ε .