УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вычислительная математика

Малышева Татьяна Алексеевна, к.т.н., доцент
tamalysheva@itmo.ru

Санкт-Петербург, 2025

Аппроксимация функций
Постановка задачи

Задачи исследования в большинстве случаев требуют ***установить определенный вид функциональной зависимости*** между характеристиками изучаемого явления.

Аппроксимацией (приближением) функции называется нахождение такой функции (аппроксимирующей функции), которая была бы близка к заданной.

Задача аппроксимации функции состоит в том, чтобы ***данную функцию f(x) приближенно заменить (аппроксимировать) некоторой функцией φ(x), значения которой в заданной области мало отличались от опытных данных*** :

$$f(x) \approx \varphi(x).$$

Приближенная функциональная зависимость, полученная на основании экспериментальных данных, называется ***аппроксимирующей функцией.***

Аппроксимация функций. Постановка задачи

Аппроксимация может потребоваться в следующих случаях:

1. Например, из эксперимента, **известны значения функции** $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2 \dots f(x_n) = y_n$, т.е. функция $y = f(x)$ задана таблично. Требуется найти значение $f(x)$ при таком значении аргумента x^*, которого нет среди узлов $x_1, x_2, \dots, x_n$, но сделать это по каким-либо причинам затруднительно (экспериментальная установка, на которой выполнены измерения, уже разобрана или дорогостоящий эксперимент)

В таком случае можно найти аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$ и если она «близка» к $f(x)$ на множестве узлов $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то и в нужной точке x^*, вероятно, $f(x^*) \approx \varphi(x^*)$

2. **Функция $f(x)$ задана аналитически**, т. е. формулой, но эта формула слишком сложна для регулярного использования. И в этом случае выгодно аппроксимировать $f(x)$ более простой функцией $\varphi(x)$ и все расчеты выполнять с ней.

Какие функции наиболее «просты» и в силу этого удобны в качестве аппроксимирующих?

Чаще всего используются полиномы (многочлены), которые легко складывать, умножать , делить, дифференцировать и интегрировать:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Аппроксимация функций. Постановка задачи

В зависимости от специфики задачи можно выделить два способа определения аналитической функции:

1. С помощью построения интерполяционного многочлена n-степени, который проходит **непосредственно через все точки** заданного массива данных: $\varphi(x_i) = y_i$. В данном случае аппроксимирующая функция представляется в виде: ***интерполяционного многочлена Лагранжа или интерполяционного многочлена Ньютона (Гаусса, Бесселя, Стирлинга)***

2. С помощью построения аппроксимирующего многочлена n-степени, который проходит **в ближайшей близости от точек** из заданного массива данных: $\varphi(x_i) \approx y_i$. В данном случае аппроксимирующая функция определяется по ***методу наименьших квадратов.***

Аппроксимация функций

Если приближение строится на дискретном наборе точек $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, аппроксимацию называют ***точечной или дискретной.***

Наиболее часто встречающим видом точечной аппроксимации является интерполяция и среднеквадратичное приближение.

В том случае, когда аппроксимация проводится на непрерывном множестве точек, аппроксимация называется ***непрерывной или интегральной***. Примером такой аппроксимации может служить разложение функции в ряд Тейлора, то есть замена некоторой функции степенным многочленом.

Аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$строят таким образом, чтобы отклонения $\varphi(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим. Понятие “малого отклонения” зависит от того, каким способом оценивается близость двух функций, поэтому оно будет уточняться в дальнейшем при рассмотрении конкретных методов аппроксимации.

Аппроксимация функций

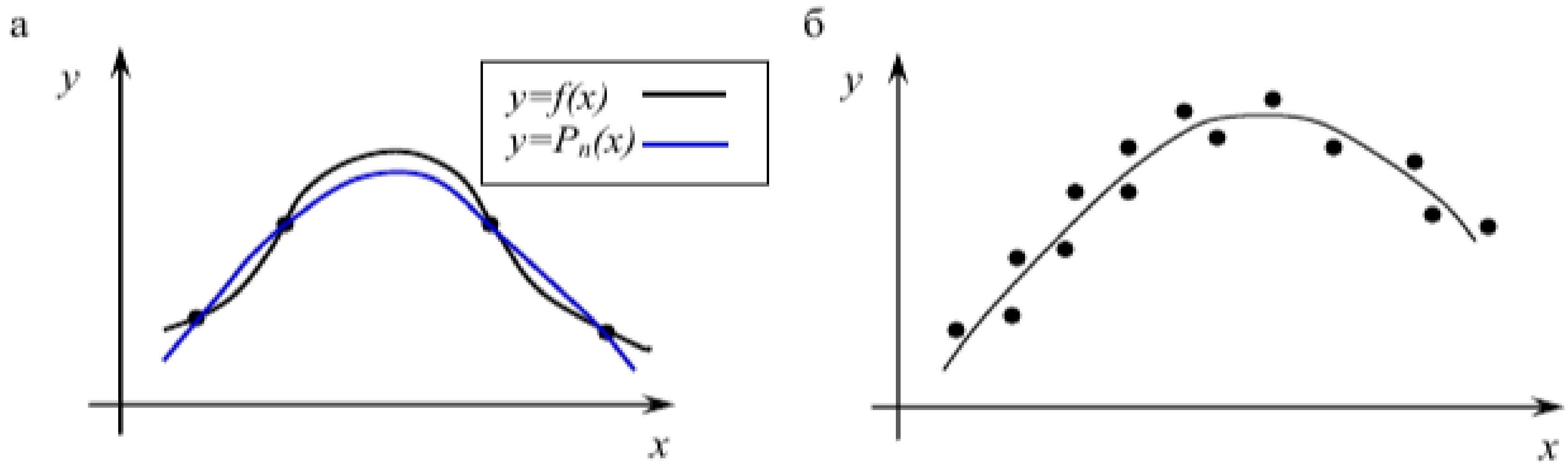


Рис. 1. Графическая интерпретация принципа построения интерполяционного полинома (а) и аппроксимирующей линии (б) для точечно заданной функции

Основная задача ***интерполяции*** — нахождение значения функции в тех точках внутри данного интервала, где она не задана, т.е. для промежуточных аргументов.

Основная задача ***аппроксимации*** — построение эмпирической формулы, для которой $f(x_i) \approx \varphi(x_i)$.

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ

Построение эмпирической формулы состоит из 2 этапов:

1. ***Подбор общего вида формулы.***

Иногда он известен из физических соображений.

Если характер зависимости неизвестен, то первоначально его выбирают геометрически: экспериментальные точки наносятся на график, и примерно угадывается общий вид зависимости путем сравнения полученной кривой с графиками известных функций (многочлена, логарифмической, показательной функций и т.п.).

Выбор вида эмпирической зависимости – наиболее сложная часть решения задачи, ибо класс известных аналитических зависимостей необъятен. Практика, однако, показывает, что при выборе аналитической зависимости достаточно ограничиться довольно узким кругом функций: линейные, степенные и показательные.

2. ***Определение значений параметров аппроксимирующей функции.***

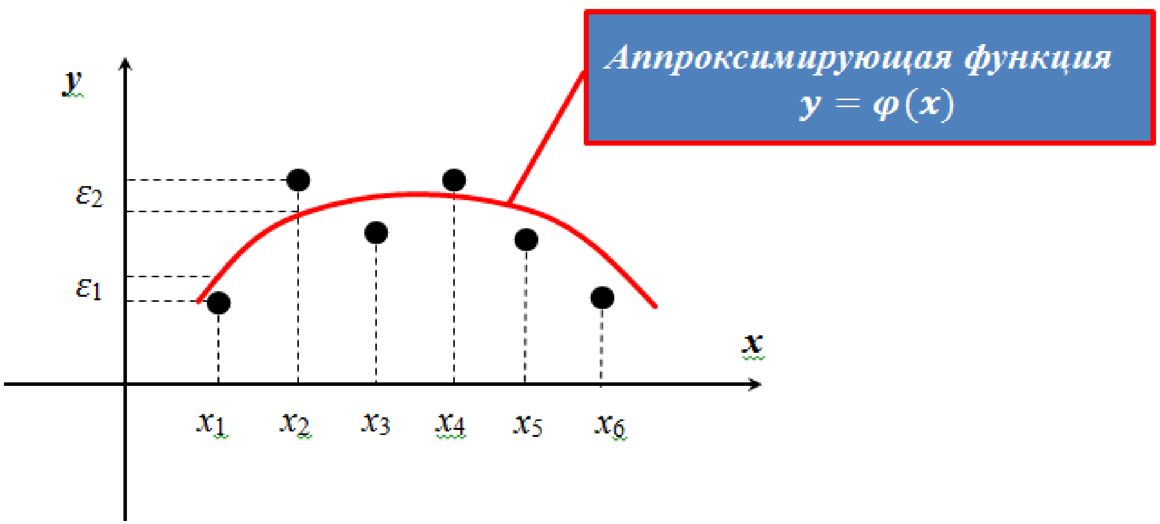
МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Будем считать, что вид аппроксимирующей функции или эмпирической формулы выбран и представлен в виде:

$$y = \varphi(x, a_0, a_1, a_2, \dots, a_m),$$

где φ – известная функция, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ – неизвестные параметры.

Требуется определить такие параметры, при которых значения аппроксимирующей функции приблизительно совпадали со значениями исследуемой функции в точках x_i, т.е. $y_i \approx \varphi(x_i)$. Разность между этими значениями (отклонения) обозначим через ε_i. Тогда $\varepsilon_i = \varphi(x, a_0, a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i$
$i = 1,2, \dots n$



МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Мерой отклонения многочлена $\varphi(x)$ от заданной функции *f(x)* на множестве точек $((x_i, y_i)$ является величина S (критерий минимизации), равная сумме квадратов разности между значениями многочлена и функции для всех точек $x_0, x_1, \ldots., x_n$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2 \rightarrow min$$

Задача нахождения наилучших значений параметров $a_0, a_1, \ldots., a_m$ сводятся к некоторой минимизации отклонений ε_i.

Параметры $a_0, a_1, \ldots., a_m$ эмпирической формулы находятся из условия минимума функции $S = S(a_0, a_1, a_2, \ldots., a_m),$.

Так как здесь параметры выступают в роли независимых переменных функции S, то ее минимум найдем, приравнивая к нулю частные производные по этим переменным (m – степень многочлена, n - число точек в таблице) :

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n} a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_{m-1} x_i^{m-1} + a_m x_i^m - y_i = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_{m-1} x_i^{m-1} + a_m x_i^m - y_i) x_i = 0$$

$$\ldots \ldots \ldots$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_m} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_{m-1} x_i^{m-1} + a_m x_i^m - y_i) x_i^m = 0$$

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Преобразуем полученную линейную систему уравнений: раскроем скобки и перенесем свободные слагаемые в правую часть выражения.

$$
\begin{cases}
a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + \dots + a_{m-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^{m-1} + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{m} = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \dots + a_{m-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^{m} + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
\dots\ \dots\ \dots \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + \dots + a_{m-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m-1} + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} = \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i
\end{cases}
$$

в матричном виде:

$$
\begin{vmatrix}
n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^m \\
\sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\
 & \dots\ \dots\ \dots & & \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^m & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m}
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_m
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
\sum_{i=1}^{n} y_i \\
\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
\dots \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i
\end{vmatrix}
$$

Линейная аппроксимация

Рассмотрим в качестве эмпирической формулы линейную функцию:

$$\varphi(x, a, b) = ax + b$$

Сумма квадратов отклонений запишется следующим образом:

$$S = S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \to min$$

Для нахождения *a* и *b* необходимо найти минимум функции $S(a, b)$.

Необходимое условие существования минимума для функции *S:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

Упростим полученную систему:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Линейная аппроксимация

Введем обозначения:

$SX = \sum_{i=1}^{n} x_i,\quad SXX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,\quad SY = \sum_{i=1}^{n} y_i\,,\quad SXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Получим систему уравнений для нахождения параметров *a* и *b:*

$$\begin{cases} aSXX + bSX = SXY \\ aSX + bn = SY \end{cases},$$

из которой находим (правило Крамера):

$$\Delta = SXX \cdot n - SX \cdot SX$$

$$\Delta_1 = SXY \cdot n - SX \cdot SY$$

$$\Delta_2 = SXX \cdot SY - SX \cdot SXY$$

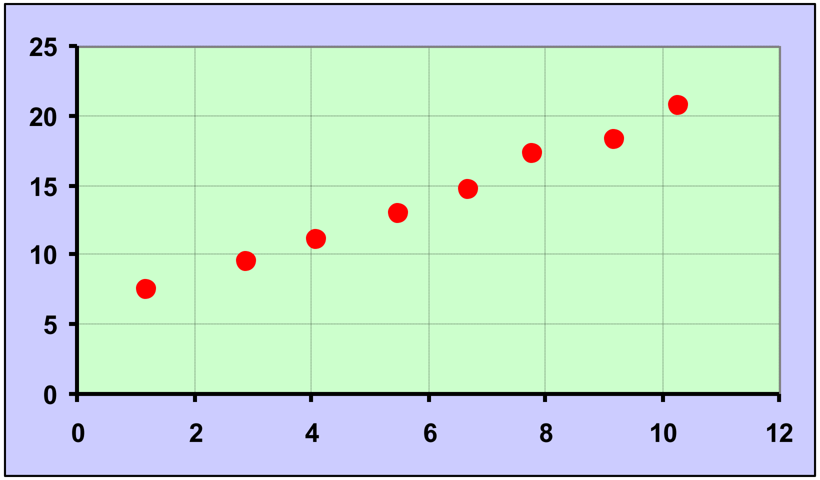
$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

Линейная аппроксимация

Пример 1. Пусть, изучая неизвестную функциональную зависимость между x и y, в результате серии экспериментов, была получена таблица значений. Необходимо найти приближенную функциональную зависимость и определить значения параметров аппроксимирующей функции.

X	1,2	2,9	4,1	5,5	6,7	7,8	9,2	10,3
Y	7,4	9,5	11,1	12,9	14,6	17,3	18,2	20,7

Для определения вида зависимости нанесем экспериментальные точки на график: в качестве аппроксимирующей функции выбираем многочлен первой степени и строим линейную модель $P_1(x) = ax + b$



Линейная аппроксимация

Вычисляем суммы: SX=47,7 SXX=353,37 SY=111,7 SXY=766,3

Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 353{,}37a + 47{,}7b = 766{,}3 \\ 47{,}7a + 8b = 111{,}7 \end{cases}$$

Решая систему, получим значения коэффициентов: *a*=1,4543 и *b*=5,2911.

Проверим правильность выбора линейной модели. Для этого вычислим значения аппроксимирующей функции $\boldsymbol{P_1(x) = 1{,}4543x + 5{,}2911}$

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8
X	1,2	2,9	4,1	5,5	6,7	7,8	9,2	10,3
Y	7,4	9,5	11,1	12,9	14,6	17,3	18,2	20,7
$P_1(x)$= ax +b	7,0363	9,5086	11,2538	13,2899	15,0351	16,6348	18,6709	20,2707
ε_i	-0,3637	0,0086	0,1538	0,3899	0,4351	-0,6652	0,4709	-0,4293

Вывод: исследуемая функциональная зависимость может быть приближенно описана линейной моделью $\boldsymbol{P_1(x)} = 1{,}4543\mathrm{x} + 5{,}2911$, т.к. $\boldsymbol{P_1(x_i) \approx Y_i}$ **,** $\boldsymbol{\varepsilon_i \to min}$

Определим меру отклонения: $S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = 1{,}3459$

Коэффициент корреляции

Коэффициент корреляции – это степень связи между двумя переменными.

Корреляция помогает найти ответ на два вопроса.

Во-первых, является ли связь между переменными положительной (прямо пропорциональная зависимость) или отрицательной (обратно пропорциональная зависимость).

Во-вторых, насколько сильна зависимость.

Коэффициент корреляции Пирсона позволяет определить наличие или отсутствие **линейной** связи между двумя переменными:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Средние значения *x* и *y:*

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

$$\boldsymbol{-1 \leq r \leq 1}$$

Например, при помощи критерия корреляции Пирсона можно ответить на вопрос о наличии связи между температурой тела и содержанием лейкоцитов в крови при острых респираторных инфекциях, между ростом и весом пациента, между содержанием в питьевой воде фтора и заболеваемостью населения кариесом.

Коэффициент корреляции

При $r = \pm 1$ - строгая линейная функциональная зависимость в зависимости от знака коэффициента *a* *(f = ax +b)*

При $r = 0$ - связь между переменными отсутствует (в данном случае линейная).

$r < 0{,}3$ - связь слабая

$r = 0{,}3 \div 0{,}5$ - связь умеренная

$r = 0{,}7 \div 0{,}7$ - связь заметная

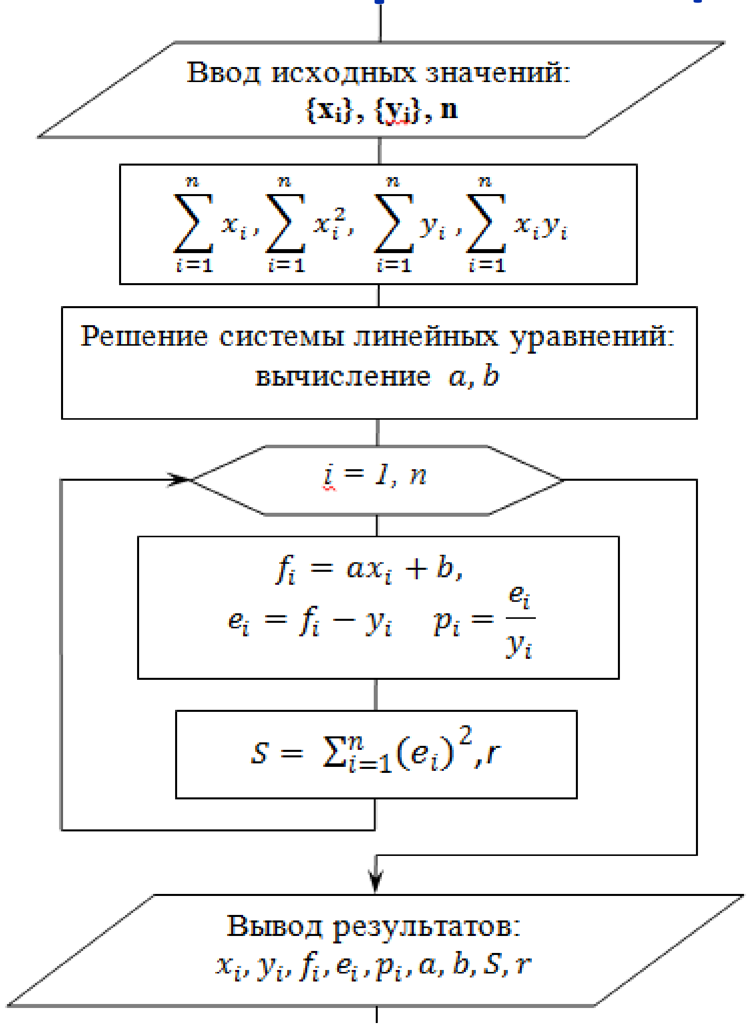
$r = 0{,}7 \div 0{,}9$ - связь высокая

$r = 0{,}9 \div 0{,}99$ - связь весьма высокая

Вычислим коэффициент корреляции для примера 1:

$\boldsymbol{r = 0,9909}$**, т.е. наличие линейной связи правомерно**

Блок-схема метода наименьших квадратов для линейной аппроксимации



КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Рассмотрим в качестве эмпирической формулы квадратичную функцию:

$$\varphi(x, a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Сумма квадратов отклонений запишется следующим образом:

$$S = S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2 \to min$$

Приравниваем к нулю частные производные *S* по неизвестным параметрам, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n} a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i) x_i = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_2} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i) x_i^2 = 0 \end{cases}$$

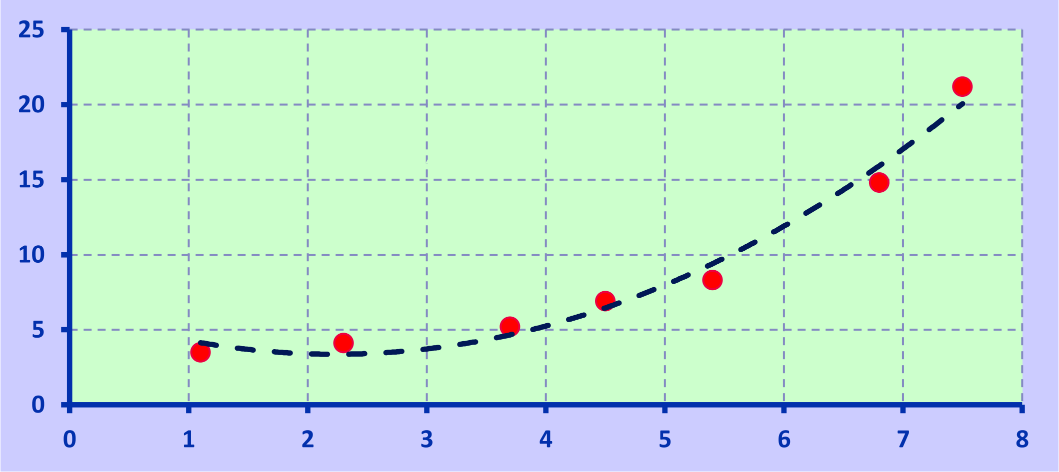
$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{cases}$$

КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Пример 2. Пусть в результате серии экспериментов была получена таблица значений:

X	1,1	2,3	3,7	4,5	5,4	6,8	7,5
Y	3,5	4,1	5,2	6,9	8,3	14,8	21,2

Необходимо найти приближенную функциональную зависимость и определить значения параметров аппроксимирующей функции. Для определения вида зависимости нанесем экспериментальные точки на график: в качестве аппроксимирующей функции выбираем многочлен второй степени и строим полиномиальную модель $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$



КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Сумма квадратов отклонений запишется следующим образом:

$$S = \sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2 \rightarrow min$$

Вычислим:

$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i} = 31{,}3$ $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i^2} = 172{,}09$ $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i^3} = 1049{,}05$ $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i^4} = 6779{,}43$

$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y_i} = 64$ $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i}\, \boldsymbol{y_i} = 368{,}03$ $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i^2}\, \boldsymbol{y_i} = 2355{,}72$

Получим систему линейных уравнений, решив которую, определим значения коэффициентов эмпирической формулы:

$$\begin{cases} 7a_0 + 31,3a_1 + 172,09a_2 = 64 \\ 31,3a_0 + 172,09a_1 + 1049,05a_2 = 368,03 \\ 172,09a_0 + 1049,05a_1 + 6779,43a_2 = 2355,72 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 6,365 \\ a_1 = -2,687 \\ a_2 = 0,602 \end{cases}$$

Проверим правильность выбора модели. Для этого вычислим значения аппроксимирующей функции $P_2(x) = 0{,}602x_i^2 - 2{,}687x_i + 6{,}365$

КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7
X	1,1	2,3	3,7	4,5	5,4	6,8	7,5
Y	3,5	4,1	5,2	6,9	8,3	14,8	21,2
$P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$	4,138	3,369	4,664	6,464	9,410	15,930	20,075
ε_i	0,638	-0,731	-0,536	-0,436	1,110	1,130	-1,125

Вывод: исследуемая функциональная зависимость может быть приближенно описана выбранной моделью, т.к.

$$P_2(x_i) \approx Y_i,\ \varepsilon_i \rightarrow min$$

Определим меру отклонения: $S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = 5{,}191$

Среднеквадратичное отклонение

В случае, когда экспериментальные данные могут быть описаны несколькими уравнениями, выбор наилучшего из них можно осуществить по величине среднеквадратичного отклонения:

$$\boldsymbol{\delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\varphi(x_i) - y_i)^2}{n}}$$

Наилучшим считается уравнение, для которого значение $\boldsymbol{\delta}$ минимально.

Аппроксимация с помощью других функций

Помимо линейных зависимостей для описания результатов эксперимента используют также показательные, степенные, логарифмические функции. Эти функции легко могут быть приведены к линейному виду, после чего для определения коэффициентов аппроксимирующей функции можно использовать описанный выше алгоритм.

Аппроксимирующая функция задана степенной функцией вида:

$$\boldsymbol{\varphi(x) = ax^b}$$

Для применения метода наименьших квадратов степенная функция ***линеаризуется***:

$$\ln\big(\varphi(x)\big) = \ln\big(ax^b\big) = \ln(a) + b\ln(x)$$

Введем обозначения: Y=$\ln\big(\varphi(x)\big)$; A=$\ln(a)$; B=b; X=$\ln(x)$

Получаем линейную зависимость: Y=A+BX.

После определения коэффициентов A и B вернемся к принятым ранее обозначениям:

$$\boldsymbol{a = e^{\mathrm{A}}} \qquad \boldsymbol{b = B}$$

Аппроксимация с помощью других функций

Аппроксимирующая функция задана экспоненциальной функцией вида:

$$\boldsymbol{\varphi(x) = ae^{bx}}$$

Для применения метода наименьших квадратов экспоненциальная функция линеаризуется:

$$\ln\big(\varphi(x)\big) = \ln\big(ae^{bx}\big) = \ln a + bx$$

Введем обозначения: Y=$\ln\big(\varphi(x)\big)$; A=$\ln(a)$; B=b

Получаем линейную зависимость: Y=A+Bx.

После определения коэффициентов A и B вернемся к принятым ранее обозначениям:

$$\boldsymbol{a = e^{\mathrm{A}} \quad b = B}$$

Аппроксимирующая функция задана логарифмической функцией вида:

$$\boldsymbol{\varphi(x) = aln(x) + b}$$

Аппроксимация с помощью других функций

Вид функции	Табличный X	Табличный Y
Степенная	Ln X	Ln Y
Экспоненциальная	X	Ln Y
Логарифмическая	Ln X	Y

Выбор аппроксимирующей функции

Достоверность аппроксимации (коэффициент детерминации):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \varphi_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{\varphi_i})^2} \qquad \overline{\varphi_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i$$

Чем ближе значение R^2 к единице ($R^2 \to 1$), тем надежнее функция φ аппроксимирует исследуемый процесс.

Если $R^2 \geq 0{,}95$,то говорят о высокой точности аппроксимации (модель хорошо описывает явление).

Если $0{,}75 \leq R^2 < 0{,}95$, то говорят об удовлетворительной аппроксимации (модель в целом адекватно описывает явление).

Если $0{,}5 \leq R^2 < 0{,}75$, то говорят о слабой аппроксимации (модель слабо описывает явление).

Если $R^2 < 0{,}5$, то говорят, что точность аппроксимации недостаточна и модель требует изменения.

Выбор аппроксимирующей функции

Пример 3. Найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции :

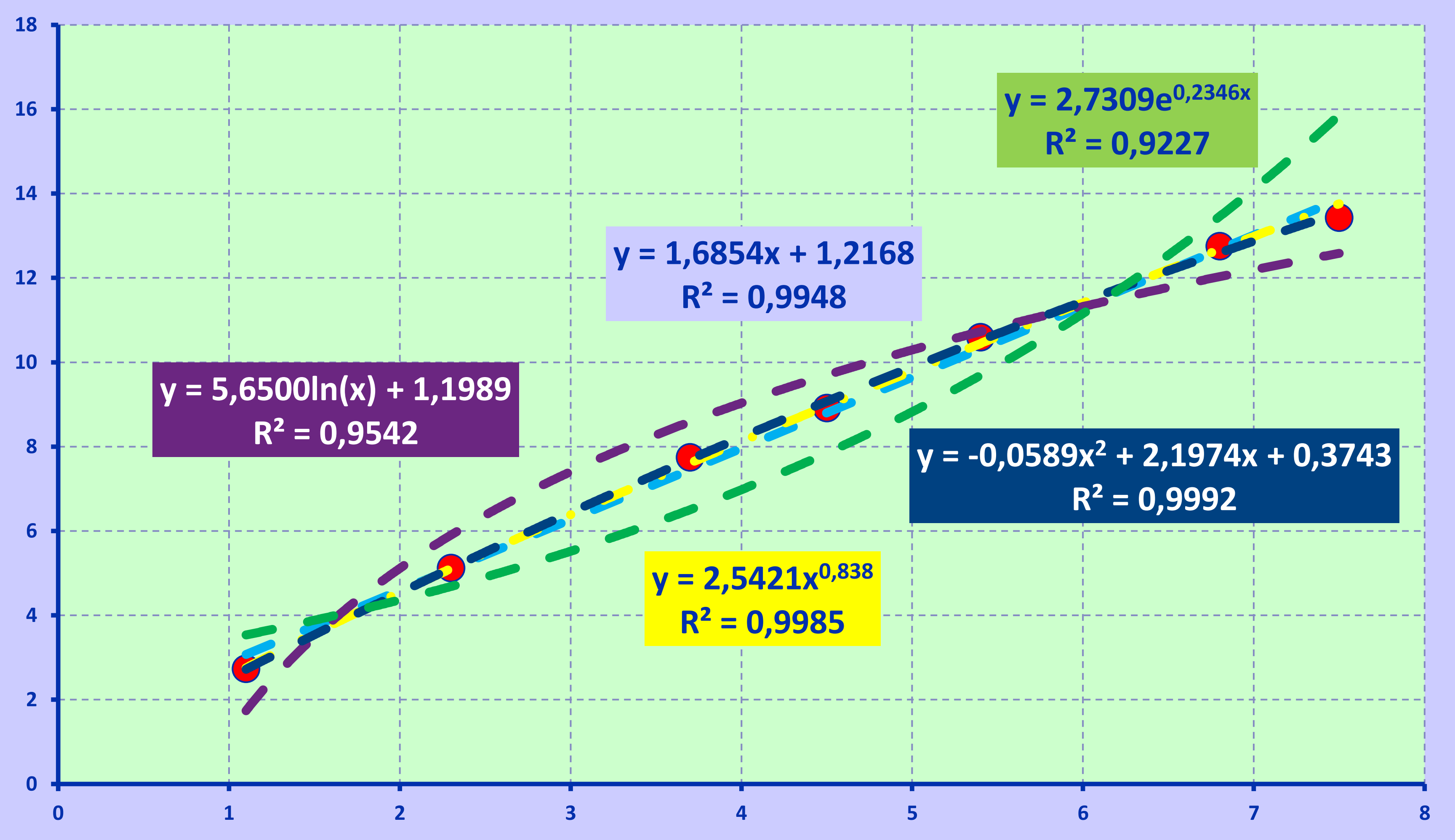
X	1,1	2,3	3,7	4,5	5,4	6,8	7,5
Y	2,73	5,12	7,74	8,91	10,59	12,75	13,43

Используя метод наименьших квадратов, вычислим коэффициенты различных аппроксимирующих функций, проанализируем меру отклонения S и среднеквадратичное отклонение $\boldsymbol{\delta}$. Результаты вычислений сведем в таблицу:

Выбор аппроксимирующей функции

Вид функции	a	b	c	Мера отклонения S	Среднеквадратичное отклонение δ	Достоверность аппроксимации R^2
$\varphi = ax + b$	1,6854	1,2168	-	0,47302	0,25995	0,9948
$\varphi = ax^b$	2,5421	0,8382	-	0,15412	0,14838	0,9985
$\varphi = ae^{bx}$	2,7309	0,2346	-	10,72993	1,23808	0,9172
$\varphi = a\ln x + b$	5,6500	1,1989	-	4,19977	0,77457	0,9542
$\varphi = ax^2 + bx + c$	-0,0589	2,1974	0,3743	0,06902	0,09929	0,9992

Выбор аппроксимирующей функции



Выбор аппроксимирующей функции

Выбор наилучшей аппроксимирующей функции определяется значением ***среднеквадратического отклонени***я. В связи с этим следует:

1. по методу наименьших квадратов определить несколько аппроксимирующих функций,
2. по критерию наименьшего среднеквадратического отклонения выбрать наиболее подходящую функцию.