**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №3

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: 7

Преподаватель:
Малышева Татьяна Алексеевна

Выполнил: Жук И. А.
Группа: P3215

Цель работы

Найти приближённое значение определённого интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

1. Вычислительная реализация задачи

1.1. 1. Вычислить интеграл из таблицы 1 точно

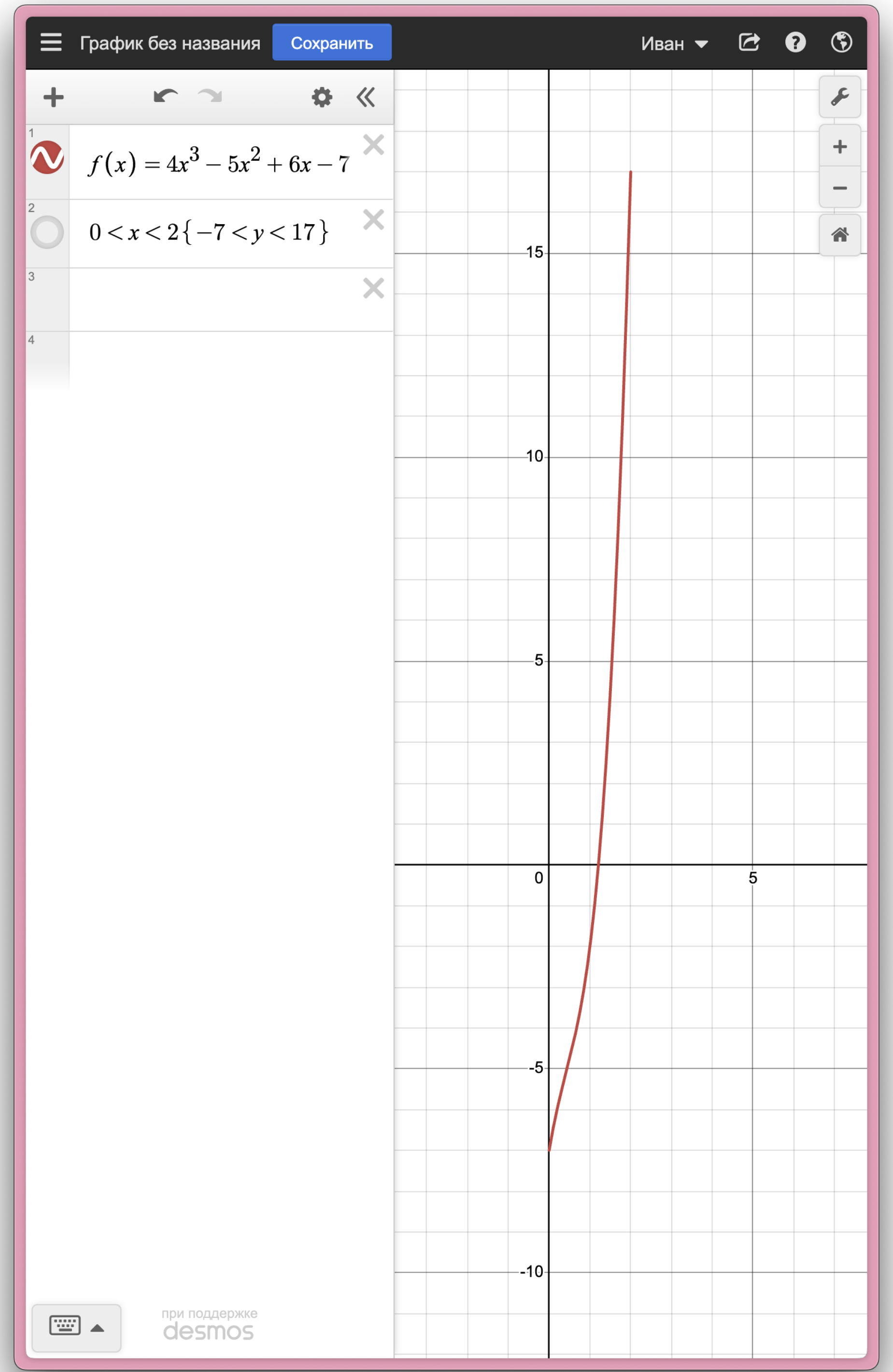
$$\int_0^2 \left(4x^3 - 5x^2 + 6x - 7\right) dx.$$

Первообразная:

$$F(x) = x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 - 7x, \quad F(2) = \frac{2}{3}, \quad F(0) = 0.$$

Следовательно,

$$I_{\text{точн}} = F(2) - F(0) = \frac{2}{3}.$$



1.2. 2. Формула Ньютона–Котеса при $n = 6$

Шаг разбиения:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Узлы интегрирования (равноотстоящие):

$$x_i = a + i\,h, \quad i = 0, 1, \ldots, 6: \quad x_0 = 0,\ x_1 = \tfrac{1}{3},\ x_2 = \tfrac{2}{3},\ x_3 = 1,\ x_4 = \tfrac{4}{3},\ x_5 = \tfrac{5}{3},\ x_6 = 2.$$

Подынтегральная функция:

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7.$$

Значения в узлах:

$$f(x_0) = 4 \cdot 0^3 - 5 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 7 = -7,$$
$$f(x_1) = -\frac{146}{27}, \qquad f(x_2) = -\frac{109}{27}, \qquad \text{и т. д.}$$

Коэффициенты Котеса для $n = 6$ (симметричные):

$$c_6^0 = c_6^6 = \frac{41(b-a)}{840} = \frac{41 \cdot 2}{840} = \frac{41}{420},$$
$$c_6^1 = c_6^5 = \frac{216(b-a)}{840} = \frac{216 \cdot 2}{840} = \frac{18}{35},$$
$$c_6^2 = c_6^4 = \frac{27(b-a)}{840} = \frac{27 \cdot 2}{840} = \frac{9}{140},$$
$$c_6^3 = \frac{272(b-a)}{840} = \frac{272 \cdot 2}{840} = \frac{68}{105}.$$

Последовательность:

$$\left[\frac{41}{420}, \frac{18}{35}, \frac{9}{140}, \frac{68}{105}, \frac{9}{140}, \frac{18}{35}, \frac{41}{420}\right].$$

Приближённая квадратурная формула:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{6} c_i\, f(x_i) = \frac{41}{420}(-7)+\frac{18}{35}\left(-\frac{146}{27}\right)+\frac{9}{140}\left(-\frac{109}{27}\right)+\frac{68}{105}(-2)+\frac{9}{140}\left(\frac{43}{27}\right)+\frac{18}{35}\left(\frac{206}{27}\right)+\frac{41}{420}$$

Результат не отличается от точного.
Ссылка на расчёт: WolframAlpha.

1.3. 3. Формулы средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 10$

3.1. Прямоугольники. Для правых прямоугольников:

$$f(x_i) = y_i, \quad f(a) = y_0, \quad f(b) = y_n, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = h_i,$$
$$I_{\text{прав}} = \int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

где

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{10} = 0.2, \quad x_i = a + i\,h, \quad x_1 = 0.2, \ldots, x_{10} = 2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_{\text{прав}} &= 0.2 \sum_{i=1}^{10} y_i \\ &= 0.2\Big(-\tfrac{746}{125} - \tfrac{643}{125} - \tfrac{542}{125} - \tfrac{419}{125} - 2 - \tfrac{11}{125} + \tfrac{322}{125} + \tfrac{773}{125} + \tfrac{1336}{125} + 17\Big) \\ &= 3.112. \end{aligned}$$

Для левых прямоугольников:

$$I_{\text{лев}} = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i = 0.2 \sum_{i=0}^{9} y_i = -1.64.$$

Метод средних прямоугольников:

$$I_{\text{ср}} = h \sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) \approx 3.1.$$

Код (средние прямоугольники):

```
h = 0.2
a = 0
n = 10
def f(x):
    return 4*x**3 - 5*x**2 + 6*x - 7
summ = 0
for i in range(n):
    mid = a + i*h + h/2
    summ += f(mid)
I = h * summ
print(I)
```

Результат отличается на $\left|0.62 - \frac{2}{3}\right| \approx 0.04(6)$.

3.2. Трапеции.

$$I_{\text{трап}} = \int_0^2 x^2\,dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right),$$

$$h = 0.2,\ a = 0,\ b = 2,\ x_0 = \dots$$

$$I_{\text{трап}} = 0.2\left(\frac{f(0) + f(2)}{2} + \sum_{i=1}^{9} f(a + i\,h)\right) = 0.76.$$

Отклонение: $\left|0.76 - \frac{2}{3}\right| = 0.09(3)$. Код:

```
a = 0
b = 2
n = 10
h = (a + b) / n  # = 0.2
def f(x):
    return 4 * x ** 3 - 5 * x ** 2 + 6 * x - 7
summ = (f(0) + f(2)) / 2
for i in range(1, n):
    x = a + i * h
    summ += f(x)
print(summ * h)
```

3.3. Симпсон.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4\sum_{i=1,\,\text{неч}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,\,\text{чёт}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\Big],$$

$$\frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4\big(f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_9)\big) + 2\big(f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_8)\big) + f(x_{10})\Big) = 0.\overline{6}.$$

Значение по Симпсону не отличается от точного. Код:

```python
h = 0.2
a = 0
n = 10

def f(x):
    return 4*x**3 - 5*x**2 + 6*x - 7

y = [f(a + i*h) for i in range(n+1)]
S_odd  = sum(y[i] for i in range(1, n, 2))
S_even = sum(y[i] for i in range(2, n, 2))

I_simpson = h/3 * (y[0] + 4*S_odd + 2*S_even + y[n])
print(I_simpson)
```