# Assignment 2:Translation of chapters in *An Introduction to Scientific Computing: Twelve Computational Projects Solved with MATLAB* by Ian Gladwell

Xu Yang
3220102703 Computer Science

2023 年 7 月 5 日

作业 2：完成《An Introduction to Scientific Computing: Twelve Computational Projects Solved with MATLAB》12.2 和 12.4 的翻译 [1]

## 1 12.2 二维不可压缩情形的 Navier-Stokes 方程

由不可压缩的液体形成的二维流场可以由速度向量 $q = (u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2$ 和压强函数 $p(x, y) \in \mathbb{R}$ 完全地描述。这些函数是一个下述守恒定律的解（比如说，Hirsch [1988]）：

- 质量守恒：

$$div(q) = 0, \tag{1}$$

或者，把散度算子[1]写成显式的形式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

[1]我们在此回忆微分算子（散度、梯度以及 Laplacian 算子）：如果 $v = (v_x, v_y) : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ 且 $\phi : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$，那么 $div(v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}, \mathcal{G}\phi = (\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}), \Delta\phi = div(\mathcal{G}\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2})$ 且 $\Delta v = (\Delta v_x, \Delta v_y)$

- 动量守恒方程（写成紧凑形式[2]）：

$$\frac{\partial q}{\partial t} + div(q \otimes q) = -\mathcal{G}p + \frac{1}{Re}\Delta q, \tag{3}$$

或者，写成显式形式：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{uv}{x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \end{cases} \tag{4}$$

前述的方程是没有量纲的形式（采用下述的标度变换后的变量）：

$$x = \frac{x^*}{L}, y = \frac{y^*}{L}, u = \frac{u^*}{V_0}, v = \frac{v^*}{V_0}, t = \frac{t^*}{L/V_0}, p = \frac{p^*}{(\rho_0 V_0^2)} \tag{5}$$

其中，上标（star）表示含有物理单位的变量。常数 $L, V_0$ 分别是参考长度和速度。无量纲数 $Re$ 是 $Reynolds$ 数，它量化了流场中惯性（或对流）的相对重要性的项和粘度（或扩散）[3]的项：

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu} \tag{6}$$

其中 $\nu$ 表示运动粘性系数。总结一下,在本项目中可以被数值求解的 Navier-Stokes 偏微分方程系统是由 2和 4确定的；初始条件（在 $t = 0$ 时）和边界条件将会在接下来的小节中讨论。

## 2 12.4 计算域，交错格子以及边界条件

如果我们考虑一个带有处处具有周期边界条件的长方形的域 $L_x \times L_y$，(见图像 1)，那么数值求解 Navier-Stokes 方程将会被极大的简化。速度 $q(x, y)$ 和压强 $p(x, y)$ 场的周期性在数学上被表示为

$$q(0, y) = q(L_x, y), p(0, y) = p(L_x, y), \forall y \in [0, L_y] \tag{7}$$

$$q(x, 0) = q(x, L_y), p(x, 0) = p(x, L_y), \forall x \in [0, L_x] \tag{8}$$

会被计算的点分布在域内的均匀分布的交错网格上。由于在我们的方法中，不是所有的变量都分布在同一个格子内，我们首先定义一个*初级*格子（见

[2]我们用 $\bigotimes$ 表示张量乘积

[3]描述对流和扩散的模型标量方程在第一章有作讨论

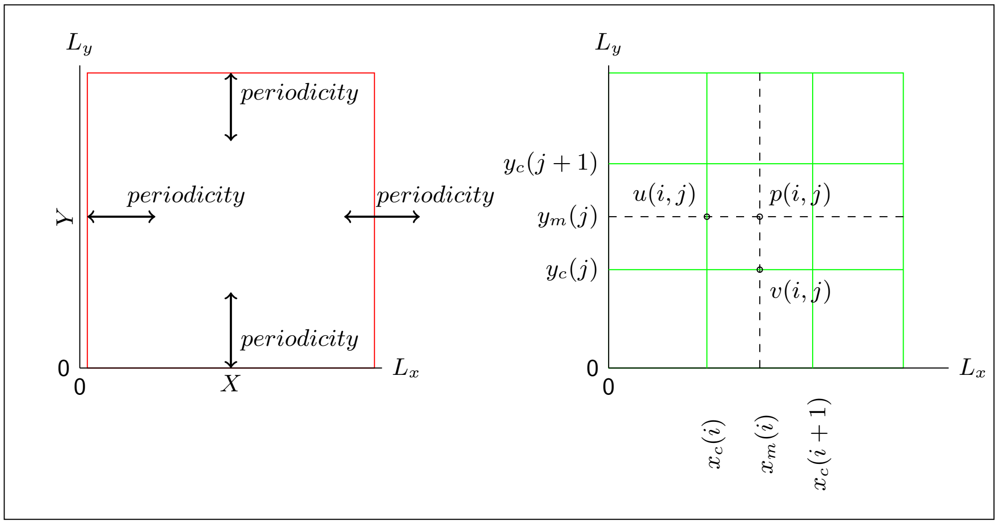


图 1: 图计算域、交错网和边界条件

1)，通过选取 $x$ 方向的 $n_x$ 个计算点（$y$ 方向同理, 选取 $n_y$ 个）:

$$x_c(i) = (i-1)\delta x, \delta x = \frac{L_x}{n_x - 1}, i = 1, 2, ..., n_x, \tag{9}$$

$$y_c(j) = (j-1)\delta y, \delta y = \frac{L_y}{n_y - 1}, j = 1, 2, ..., n_y. \tag{10}$$

一个二阶的格子由初级格子的中心点确定:

$$x_m(i) = (i - \frac{1}{2})\delta x, i = 1, 2, ..., n_x m, \tag{11}$$

$$y_m(j) = (j - \frac{1}{2})\delta y, j = 1, 2, ..., n_y m. \tag{12}$$

这里我们用到了缩写记号 $n_{xm} = n_x - 1, n_{ym} = n_y - 1$。在一个计算单元（定义为长方形 $[x_c(i), x_c(i+1)] \times [y_c(i), y_c(i+1)]$）中，未知变量 u,v,p 将会被计算为空间中的近似解:

- $u(i,j) \approx u(x_c(i), y_m(j))$（单元的西面），
- $v(i,j) \approx v(x_m(i), y_c(j))$（单元的南面），
- $p(i,j) \approx p(x_m(i), y_m(j))$（单元的中心）。

这样交错的分布的变量具有将压强和速度强耦合的优势。它也有助于（请见章末的参考文献）减少稳定性问题以及收敛中的一致分配（因为速度和压强的数值解在同一个单元被计算）

# 参考文献

[1] *An Introduction to Scientific Computing.*