

数理逻辑第五次作业

姓名	谢宇航	班级	5	学号	200110505
第 1 题					
第 2 题					
第 3 题					
总分					
备注	1. 作业提交邮箱: hitsz_logic_2022@163.com。作业提交截止时间: <u>2022-06-30-24:00</u> , 超过提交截止时间的作业视为无效。 2. 确因网络等特殊原因无法及时提交作业的学生, 应至少提前 1 小时与助教联系沟通 (徐朕燃, QQ: 1319282215, 电话: 13713994811 许天骁, QQ: 1140931320, 电话: 18800415868)。 3. 作业文件名命名方式: <u>第 x 次-学号-姓名-x 班</u> (例: 第 5 次-180110504-张三-5 班.pdf); 邮件主题为: <u>第 x 次-学号-姓名-x 班</u> (例: 第 5 次-180110504-张三-5 班)。缺少这些信息的作业将被酌情扣分。注意作业次数以阿拉伯数字命名。 4. 可手写拍照转为 PDF 格式。				

1. P138 1. 设有如下推理语句:

- (1) 没有无知的教授
- (2) 所有无知者均爱虚荣
- (3) 则没有爱虚荣的教授

试问由(1)和(2)能否推出(3)?

解:

令 $P(x)$: x 是教授

$Q(x)$: x 是无知的

$R(x)$: x 爱虚荣

(1) $\neg(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$

(2) $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$

(3) $\neg(\exists x)(P(x) \wedge R(x))$

不能由(1)和(2)推出(3)

2. P138 3.

P138 3. 设 A, B 为FC中的任意公式, 变元 v 在 A 中无自由出现, 试证:

- (1) $\vdash (A \rightarrow \exists v B) \rightarrow \exists v(A \rightarrow B)$
- (2) $\vdash \exists v(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \exists v B)$
- (3) $\vdash (\forall v B \rightarrow A) \rightarrow \exists v(B \rightarrow A)$
- (4) $\vdash \exists v(B \rightarrow A) \rightarrow (\forall v B \rightarrow A)$

(1)

- | | |
|---|-------------------|
| 1. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$ | PC 定理 6 逆否 |
| 2. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B$ | PC 公理 1 逆否 |
| 3. $\forall v(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$ | (1)全称推广定理 4 |
| 4. $\forall v(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B)$ | (2)全称推广定理 4 |
| 5. $\forall v(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (\forall v\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \forall vA)$ | 公理 5 |
| 6. $\forall v(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B) \rightarrow (\forall v\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \forall v\neg B)$ | 公理 5 |
| 7. $\forall v\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \forall vA$ | (3)(5) rmp 分离规则 |
| 8. $\forall v\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \forall v\neg B$ | (4)(6) rmp 分离规则 |
| 9. $A \rightarrow \exists v B$ | 假设 |
| 10. $\forall v A \rightarrow A$ | 定理 1 |
| 11. $\forall v A \rightarrow \exists v B$ | (10)(9) rmp 分离规则 |
| 12. $\forall v\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \exists v B$ | (7)(11) rmp 分离规则 |
| 13. $A \rightarrow \exists v B, \forall v\neg(A \rightarrow B) \vdash \forall v\neg B(\neg\exists v B)$ | (8)演绎定理 6 |
| 14. $A \rightarrow \exists v B, \forall v\neg(A \rightarrow B) \vdash \exists v B$ | (12)演绎定理 6 |
| 15. $A \rightarrow \exists v B \vdash \neg\forall v\neg(A \rightarrow B)$ | (13)(14)定理 8 |
| 16. $\vdash (A \rightarrow \exists v B) \rightarrow \neg\forall v\neg(A \rightarrow B)$ | $(\rightarrow +)$ |
| 17. $\vdash (A \rightarrow \exists v B) \rightarrow \exists v(A \rightarrow B)$ | 定义式 |

(2)

- | | |
|--|---------------------------|
| 1. $\exists v(A \rightarrow B), A \vdash \exists v(A \rightarrow B)$ | (ϵ) |
| 2. $\exists v(A \rightarrow B), A, A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B$ | (ϵ) |
| 3. $\exists v(A \rightarrow B), A, A \rightarrow B \vdash A$ | (ϵ) |
| 4. $\exists v(A \rightarrow B), A, A \rightarrow B \vdash B$ | (2)(3)($\rightarrow -$) |
| 5. $B \rightarrow \exists v B$ | 定理 2 |
| 6. $\exists v(A \rightarrow B), A, A \rightarrow B \vdash \exists v B$ | (4)(5) rmp 分离规则 |
| 7. $\exists v(A \rightarrow B), A \vdash \exists v B$ | (1)(6)定理 10 |
| 8. $\exists v(A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow \exists v B$ | 演绎定理 6 |
| 9. $\vdash \exists v(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \exists v B)$ | 演绎定理 6 |

(3)

- | | |
|---|-------------|
| 1. $\neg(B \rightarrow A) \rightarrow B$ | PC 定理 6 逆否 |
| 2. $\neg(B \rightarrow A) \rightarrow \neg A$ | PC 公理 1 逆否 |
| 3. $\forall v(\neg(B \rightarrow A) \rightarrow B)$ | (1)全称推广定理 4 |
| 4. $\forall v(\neg(B \rightarrow A) \rightarrow \neg A)$ | (2)全称推广定理 4 |
| 5. $\forall v(\neg(B \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow (\forall v\neg(B \rightarrow A) \rightarrow \forall v B)$ | (3)公理 5 |
| 6. $\forall v(\neg(B \rightarrow A) \rightarrow \neg A) \rightarrow (\forall v\neg(B \rightarrow A) \rightarrow \forall v\neg A)$ | (4)公理 5 |

- | | |
|---|---------------------|
| 7. $\forall v \neg(B \rightarrow A) \rightarrow \forall v B$ | (3)(5) rmp 分离规则 |
| 8. $\forall v \neg(B \rightarrow A) \rightarrow \forall v \neg A$ | (4)(6) rmp 分离规则 |
| 9. $\forall v \neg A \rightarrow \neg A$ | 定理 1 |
| 10. $\forall \neg(B \rightarrow A) \rightarrow \neg A$ | (8)(9) rmp 分离规则 |
| 11. $\forall v B \rightarrow A$ | 已知假设 |
| 12. $\forall v \neg(B \rightarrow A) \rightarrow A$ | (7)(11) rmp 分离规则 |
| 13. $\forall v B \rightarrow A, \forall v \neg(B \rightarrow A) \vdash \neg A$ | (10) 演绎定理 6 |
| 14. $\forall v B \rightarrow A, \forall v \neg(B \rightarrow A) \vdash A$ | (12) 演绎定理 6 |
| 15. $\forall v B \rightarrow A \vdash \neg \forall v \neg(B \rightarrow A)$ | (13)(14) 定理 8 |
| 16. $\forall v B \rightarrow A \vdash \exists v(B \rightarrow A)$ | 定义式 |
| 17. $\vdash (\forall v B \rightarrow A) \rightarrow \exists v(B \rightarrow A)$ | ($\rightarrow +$) |

(4)

- | | |
|--|---------------------------|
| 1. $\exists v(B \rightarrow A), \forall v B \vdash \exists v(B \rightarrow A)$ | (ϵ) |
| 2. $\exists v(B \rightarrow A), \forall v B, B \rightarrow A \vdash B \rightarrow A$ | (ϵ) |
| 3. $\exists v(B \rightarrow A), \forall v B, B \rightarrow A \vdash \forall v B$ | (ϵ) |
| 4. $\forall v B \rightarrow B$ | 定理 1 |
| 5. $\exists v(B \rightarrow A), \forall v B, B \rightarrow A \vdash B$ | (3)(4) rmp 分离规则 |
| 6. $\exists v(B \rightarrow A), \forall v B, B \rightarrow A \vdash A$ | (5)(2)($\rightarrow -$) |
| 7. $\exists v(B \rightarrow A), \forall v B \vdash A$ | (1)(6) 定理 10 |
| 8. $\exists v(B \rightarrow A) \vdash \forall v B \rightarrow A$ | ($\rightarrow +$) |
| 9. $\vdash \exists v(B \rightarrow A) \rightarrow (\forall v B \rightarrow A)$ | ($\rightarrow +$) |

3. P138 4.

P138 4. 在FC中证明:

- | | |
|---|------------------|
| (1) $\forall x(A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow \forall x B$ | x 在 A 中无自由出现 |
| (2) $\forall x(A \rightarrow B) \vdash \exists x A \rightarrow B$ | x 在 B 中无自由出现 |
| (3) $\forall x(A \wedge B) \vdash \forall x A \wedge \forall x B$ | |
| (4) $\exists x(A \vee B) \vdash \exists x A \vee \exists x B$ | |

(1)

先证 $\forall x(A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow \forall x B$

- | | |
|--|----------------------------|
| 1. $\forall x(A \rightarrow B), A \vdash \forall x(A \rightarrow B)$ | (ϵ) |
| 2. $\forall x(A \rightarrow B), A \vdash A$ | (ϵ) |
| 3. $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ | 定理 1 |
| 4. $\forall x(A \rightarrow B), A \vdash A \rightarrow B$ | (1)(3) rmp 分离规则 |
| 5. $\forall x(A \rightarrow B), A \vdash B$ | (2)(4) ($\rightarrow -$) |
| 6. $\forall x(A \rightarrow B), A \vdash \forall x B$ | (5) 全称推广定理 5 |
| 7. $\forall x(A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow \forall x B$ | (6) 演绎定理 6 |

再证 $A \rightarrow \forall x B \vdash \forall x(A \rightarrow B)$

- | | |
|--|------------|
| 1. $\forall x B \rightarrow B$ | 定理 1 |
| 2. $(\forall x B \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \forall x B) \rightarrow (A \rightarrow B))$ | PC 加前件定理 4 |

- | | |
|---|-----------------|
| 3. $(A \rightarrow \forall xB) \rightarrow (A \rightarrow B)$ | (1)(2) rmp 分离规则 |
| 4. $(A \rightarrow \forall xB) \vdash (A \rightarrow B)$ | (3)演绎定理 6 |
| 5. $(A \rightarrow \forall xB) \vdash \forall x(A \rightarrow B)$ | (4)全称推广定理 5 |

(2)

先证 $\forall x(A \rightarrow B) \vdash \exists xA \rightarrow B$

- | | |
|---|------------------|
| 1. $\forall x(A \rightarrow B) \vdash \forall x(A \rightarrow B)$ | (ϵ) |
| 2. $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ | 定理 1 |
| 3. $\forall x(A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow B$ | (1)(2) rmp 分离规则 |
| 4. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ | PC 定理 13 |
| 5. $\forall x(A \rightarrow B) \vdash \neg B \rightarrow \neg A$ | (3)(4) rmp 分离规则 |
| 6. $\forall x(A \rightarrow B), \neg B \vdash \neg A$ | (5)演绎定理 6 |
| 7. $\forall x(A \rightarrow B), \neg B \vdash \forall x\neg A$ | (6)全称推广定理 5 |
| 8. $\forall x(A \rightarrow B) \vdash \neg B \rightarrow \forall x\neg A$ | (7)演绎定理 6 |
| 9. $\forall x(A \rightarrow B) \vdash \neg B \rightarrow \neg \exists xA$ | 定义式 |
| 10. $(\neg B \rightarrow \neg \exists xA) \rightarrow (\exists xA \rightarrow B)$ | PC 公理 3 |
| 11. $\forall x(A \rightarrow B) \vdash \exists xA \rightarrow B$ | (9)(10) rmp 分离规则 |

再证 $\exists xA \rightarrow B \vdash \forall x(A \rightarrow B)$

- | | |
|--|-----------------|
| 1. $A \rightarrow \exists xA$ | 定理 2 |
| 2. $(A \rightarrow \exists xA) \rightarrow ((\exists xA \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B))$ | PC 加后件定理 5 |
| 3. $(\exists xA \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ | (1)(2) rmp 分离规则 |
| 4. $\exists xA \rightarrow B \vdash A \rightarrow B$ | (3)演绎定理 6 |
| 5. $\exists xA \rightarrow B \vdash \forall x(A \rightarrow B)$ | (4)全称推广定理 5 |

(3)

先证 $\forall x(A \wedge B) \vdash \forall xA \wedge \forall xB$

- | | |
|--|----------------------|
| 1. $\forall x(A \wedge B) \rightarrow (A \wedge B)$ | 定理 1 |
| 2. $\forall x(A \wedge B) \vdash (A \wedge B)$ | ($\rightarrow -$) |
| 3. $\forall x(A \wedge B) \vdash A$ | (2)($\wedge -$) |
| 4. $\forall x(A \wedge B) \vdash B$ | (2)($\wedge -$) |
| 5. $\forall x(A \wedge B) \vdash \forall xA$ | (3)全称推广定理 5 |
| 6. $\forall x(A \wedge B) \vdash \forall xB$ | (4)全称推广定理 5 |
| 7. $\forall x(A \wedge B) \vdash \forall xA \wedge \forall xB$ | (5)(6)($\wedge +$) |

再证 $\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall x(A \wedge B)$

- | | |
|---|-----------------|
| 1. $\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall xA \wedge \forall xB$ | (ϵ) |
| 2. $\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall xA$ | ($\wedge -$) |
| 3. $\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall xB$ | ($\wedge -$) |
| 4. $\forall xA \vdash A$ | 定理 1 |
| 5. $\forall xB \vdash B$ | 定理 1 |
| 6. $\forall xA \wedge \forall xB \vdash A$ | (2)(4) rmp 分离规则 |

- | | |
|--|---------------------|
| 7. $\forall xA \wedge \forall xB \vdash B$ | (3)(5) rmp 分离规则 |
| 8. $\forall xA \wedge \forall xB \vdash A \wedge B$ | (6)(7) $(\wedge +)$ |
| 9. $\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall x(A \wedge B)$ | (8)全称推广定理 5 |

(4)

先证 $\exists x(A \vee B) \vdash \exists xA \vee \exists xB$

- | | |
|---|----------------------|
| 1. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \forall x \neg A \wedge \forall x \neg B$ | (\in) |
| 2. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \forall x \neg A$ | $(\wedge -)$ |
| 3. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \forall x \neg B$ | $(\wedge -)$ |
| 4. $\forall x \neg A \vdash \neg A$ | 定理 1 |
| 5. $\forall x \neg B \vdash \neg B$ | 定理 1 |
| 6. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \neg A$ | (2)(4) rmp 分离规则 |
| 7. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \neg B$ | (3)(5) rmp 分离规则 |
| 8. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \neg A \wedge \neg B$ | (6)(7)($\wedge +$) |
| 9. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \neg(A \vee B)$ | (8)德摩根定理 |
| 10. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \forall x \neg(A \vee B)$ | (9)全称推广定理 5 |
| 11. $\forall x \neg(A \vee B) \vdash \neg \exists x(A \vee B)$ | 定理 13 |
| 12. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \neg \exists x(A \vee B)$ | (10)(11) rmp 分离规则 |
| 13. $\exists x(A \vee B) \vdash \neg(\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B)$ | (12)定理 7 |
| 14. $\exists x(A \vee B) \vdash (\neg \forall x \neg A \vee \neg \forall x \neg B)$ | (13)德摩根定理 |
| 15. $\exists x(A \vee B) \vdash \exists xA \vee \exists xB$ | (14)定义式 |

再证 $\exists xA \vee \exists xB \vdash \exists x(A \vee B)$

- | | |
|---|----------------------|
| 1. $\forall x \neg(A \vee B) \rightarrow \neg(A \vee B)$ | 定理 1 |
| 2. $\forall x \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ | (1)德摩根定理 |
| 3. $\forall x \neg(A \vee B) \vdash (\neg A \wedge \neg B)$ | (2)演绎定理 6 |
| 4. $\forall x \neg(A \vee B) \vdash \neg A$ | (3)($\wedge -$) |
| 5. $\forall x \neg(A \vee B) \vdash \neg B$ | (3)($\wedge -$) |
| 6. $\forall x \neg(A \vee B) \vdash \forall x \neg A$ | (4)全称推广定理 5 |
| 7. $\forall x \neg(A \vee B) \vdash \forall x \neg B$ | (5)全称推广定理 5 |
| 8. $\forall x \neg(A \vee B) \vdash \forall x \neg A \wedge \forall x \neg B$ | (6)(7)($\wedge +$) |
| 9. $\neg(\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B) \vdash \neg \forall x \neg(A \vee B)$ | 定理 7 |
| 10. $(\neg \forall x \neg A \vee \neg \forall x \neg B) \vdash \neg \forall x \neg(A \vee B)$ | (9)德摩根定律 |
| 11. $\exists xA \vee \exists xB \vdash \exists x(A \vee B)$ | 定义式 |