# 作业四

1、

(1)

分别代入$f(x)=1,x,x^2$得

$$\begin{cases} H_{-1}+H_0+H_1=2h \\ -hH_{-1}+0+hH_1=0 \\ h^2H_{-1}+0+h^2H_1=\dfrac{2}{3}h^3 \end{cases}$$

解得$\boldsymbol{H_{-1}=H_1=\frac{1}{3}h,H_0=\frac{4}{3}h}$

令$f(x)=x^3$，左边=$\int_{-h}^{h}x^3\,dx=0$，右边=$H_{-1}f(-h)+H_0f(0)+H_1f(h)=0$，左边=右边

令$f(x)=x^4$，左边=$\int_{-h}^{h}x^4\,dx=\frac{2}{5}h^5$，右边=$H_{-1}f(-h)+H_0f(0)+H_1f(h)=\frac{2}{3}h^5$，故左边≠右边

综上所述，**该求积公式的精度为 3**，精度不能提高的原因是若代入$f(x)=x^n(n\geq 4)$时，令其系数矩阵为$A$，则当$h\neq 0,R(A)<R(A,b)$，方程无解，即系数无解

(2)

分别代入$f(x)=1,x,x^2$得

$$\begin{cases} H_{-1}+H_0+H_1=4h \\ -hH_{-1}+0+hH_1=0 \\ h^2H_{-1}+0+h^2H_1=\dfrac{16}{3}h^3 \end{cases}$$

解得$\boldsymbol{H_{-1}=H_1=\frac{8}{3}h,H_0=-\frac{4}{3}h}$

令$f(x)=x^3$，左边=$\int_{-2h}^{2h}x^3\,dx=0$，右边=$H_{-1}f(-h)+H_0f(0)+H_1f(h)=0$，左边=右边

令$f(x)=x^4$，左边=$\int_{-2h}^{2h}x^4\,dx=\frac{64}{5}h^5$，右边=$H_{-1}f(-h)+H_0f(0)+H_1f(h)=\frac{16}{3}h^5$，故左边≠右边

综上所述，**该求积公式的精度为 3**，精度不能提高的原因是若代入$f(x)=x^n(n\geq 4)$时，令其系数矩阵为$A$，则当$h\neq 0,R(A)<R(A,b)$，方程无解，即系数无解

(3)

分别代入$f(x)=1,x,x^2$得

$$\begin{cases} -1+2x_1+3x_2=0 \\ \dfrac{1}{3}(1+2x_1^2+3x_2^2)=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

解得$\boldsymbol{x_1=\frac{1-\sqrt{6}}{5},x_2=\frac{3+2\sqrt{6}}{15}}$或$\boldsymbol{x_1=\frac{1+\sqrt{6}}{5},x_2=\frac{3-2\sqrt{6}}{15}}$

令$f(x)=x^3$，左边=$\int_{-1}^{1}x^3\,dx=0$，

当$\boldsymbol{x_1}=\frac{\mathbf{1-\sqrt{6}}}{\mathbf{5}},\boldsymbol{x_2}=\frac{\mathbf{3+2\sqrt{6}}}{\mathbf{15}}$时，右边=$\frac{1}{3}\left(-1+2\times\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)^3+3\times\left(\frac{3-2\sqrt{6}}{15}\right)^3\right)\neq 0$

当$\boldsymbol{x_1}=\frac{\mathbf{1+\sqrt{6}}}{\mathbf{5}},\boldsymbol{x_2}=\frac{\mathbf{3-2\sqrt{6}}}{\mathbf{15}}$时，右边=$\frac{1}{3}\left(-1+2\times\left(\frac{1-\sqrt{6}}{5}\right)^3+3\times\left(\frac{3+2\sqrt{6}}{15}\right)^3\right)\neq 0$

故左边≠右边

综上所述，**该求积公式的精度为 2**，精度不能提高的原因是若代入$f(x)=x^n(n\geq 3)$时，令其系数矩阵为$A$，则当$h\neq 0,R(A)<R(A,b)$，方程无解，即系数无解

(4)

分别代入$f(x)=1,x$时，原式显然成立

代入$f(x)=x^2$时

$$\frac{h}{2}\cdot h^2+ah^2(2\times 0-2h)=\frac{1}{3}h^3$$

解得$\boldsymbol{a}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$

令$f(x)=x^3$，左边=$\int_0^h x^3\,dx=\frac{1}{4}h^4$，右边=$\frac{h}{2}h^3+\frac{h^2}{12}(0-3h^2)=\frac{1}{4}h^4$，左边=右边

令$f(x)=x^4$，左边=$\int_0^h x^4\,dx=\frac{1}{5}h^5$，右边=$\frac{h}{2}h^4+\frac{h^2}{12}(0-4h^3)=\frac{1}{6}h^5$，故左边≠右边

综上所述，**该求积公式的精度为 3**，精度不能提高的原因是若代入$f(x)=x^n(n\geq 4)$时，令其系数矩阵为$A$，则当$h\neq 0,R(A)<R(A,b)$，方程无解，即系数无解

9、

(1)

根据$Romberg$递推公式$T_{m,k}=\frac{4^m T_{m-1,k+1}-T_{m-1,k}}{4^m-1}$以及误差终止公式$\left|T_{i,0}-T_{i-1,0}\right|\leq\varepsilon$，可得如下$Romberg$积分表

| $\boldsymbol{T_{i,0}}$ | $\boldsymbol{T_{i,1}}$ | $\boldsymbol{T_{i,2}}$ | $\boldsymbol{T_{i,3}}$ |
|---|---|---|---|
| 0.77174333 | 0.72806995 | 0.71698276 | 0.71420017 |
| 0.71351215 | 0.71328703 | 0.71327264 | |
| 0.71327203 | 0.71327168 | | |
| 0.71327167 | | | |

故利用$Romberg$积分法求得$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x}\,dx=0.71327167$

(2)

根据$Romberg$递推公式$T_{m,k}=\frac{4^m T_{m-1,k+1}-T_{m-1,k}}{4^m-1}$以及误差终止公式$\left|T_{i,0}-T_{i-1,0}\right|\leq\varepsilon$，可得如下$Romberg$积分表

| $T_{i,0}$ | $T_{i,1}$ | $T_{i,2}$ | $T_{i,3}$ |
|---|---|---|---|
| 0.61091697 | 0.646316 | 0.65485115 | 0.6569664 |
| 0.65811568 | 0.6576962 | 0.65767148 | |
| 0.65766824 | 0.65766983 | | |
| 0.65766985 | | | |

故利用$Romberg$积分法求得$\int_0^{0.8} e^{-x^2}\,dx = 0.65766985$