数理逻辑第五次作业

姓名	谢宇航	班级	5	学号	200110505
第 1 题					
第 2 题					
第 3 题					
总分					
备注	1. 作业提交邮箱：hitsz_logic_2022@163.com。作业提交截止时间：2022-06-30-24:00，超过提交截止时间的作业视为无效。 2. 确因网络等特殊原因无法及时提交作业的学生，应至少提前 1 小时与助教联系沟通（徐朕燃，QQ：1319282215，电话：13713994811 许天骁，QQ：1140931320，电话：18800415868）。 3. 作业文件名命名方式：第 x 次-学号-姓名-x 班（例：第 5 次-180110504-张三-5 班.pdf）；邮件主题为：第 x 次-学号-姓名-x 班（例：第 5 次-180110504-张三-5 班）。缺少这些信息的作业将被酌情扣分。注意作业次数以阿拉伯数字命名。 4. 可手写拍照转为 PDF 格式。				

1. P138 1. 设有如下推理语句：
   (1) 没有无知的教授
   (2) 所有无知者均爱虚荣
   (3) 则没有爱虚荣的教授

   试问由(1)和(2)能否推出(3)?

解：

令$P(x)$: x是教授

$Q(x)$: x是无知的

$R(x)$: x爱虚荣

（1）$\neg(\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$

（2）$(\forall x)\big(Q(x) \rightarrow R(x)\big)$

（3）$\neg(\exists x)\big(P(x) \wedge R(x)\big)$

不能由(1)和(2)推出(3)

2. P138 3.

P138 3. 设 A, B 为FC中的任意公式，变元 v 在 A 中无自由出现，试证：

(1) $\vdash (A \to \exists vB) \to \exists v(A \to B)$

(2) $\vdash \exists v(A \to B) \to (A \to \exists vB)$

(3) $\vdash (\forall vB \to A) \to \exists v(B \to A)$

(4) $\vdash \exists v(B \to A) \to (\forall vB \to A)$

(1)

1. $\neg(A \to B) \to A$	PC 定理 6 逆否
2. $\neg(A \to B) \to \neg B$	PC 公理 1 逆否
3. $\forall v(\neg(A \to B) \to A)$	(1)全称推广定理 4
4. $\forall v(\neg(A \to B) \to \neg B)$	(2)全称推广定理 4
5. $\forall v(\neg(A \to B) \to A) \to (\forall v\neg(A \to B) \to \forall vA)$	公理 5
6. $\forall v(\neg(A \to B) \to \neg B) \to (\forall v\neg(A \to B) \to \forall v\neg B)$	公理 5
7. $\forall v\neg(A \to B) \to \forall vA$	(3)(5) rmp 分离规则
8. $\forall v\neg(A \to B) \to \forall v\neg B$	(4)(6) rmp 分离规则
9. $A \to \exists vB$	假设
10. $\forall vA \to A$	定理 1
11. $\forall vA \to \exists vB$	(10)(9) rmp 分离规则
12. $\forall v\neg(A \to B) \to \exists vB$	(7)(11) rmp 分离规则
13. $A \to \exists vB, \forall v\neg(A \to B) \vdash \forall v\neg B(\neg\exists vB)$	(8)演绎定理 6
14. $A \to \exists vB, \forall v\neg(A \to B) \vdash \exists vB$	(12)演绎定理 6
15. $A \to \exists vB \vdash \neg\forall v\neg(A \to B)$	(13)(14)定理 8
16. $\vdash (A \to \exists vB) \to \neg\forall v\neg(A \to B)$	$(\to +)$
17. $\vdash (A \to \exists vB) \to \exists v(A \to B)$	定义式

(2)

1. $\exists v(A \to B), A \vdash \exists v(A \to B)$	$(\in)$
2. $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash A \to B$	$(\in)$
3. $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash A$	$(\in)$
4. $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash B$	(2)(3)$(\to -)$
5. $B \to \exists vB$	定理 2
6. $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash \exists vB$	(4)(5) rmp 分离规则
7. $\exists v(A \to B), A \vdash \exists vB$	(1)(6)定理 10
8. $\exists v(A \to B) \vdash A \to \exists vB$	演绎定理 6
9. $\vdash \exists v(A \to B) \to (A \to \exists vB)$	演绎定理 6

(3)

1. $\neg(B \to A) \to B$	PC 定理 6 逆否
2. $\neg(B \to A) \to \neg A$	PC 公理 1 逆否
3. $\forall v(\neg(B \to A) \to B)$	(1)全称推广定理 4
4. $\forall v(\neg(B \to A) \to \neg A)$	(2)全称推广定理 4
5. $\forall v(\neg(B \to A) \to B) \to (\forall v\neg(B \to A) \to \forall vB)$	(3)公理 5
6. $\forall v(\neg(B \to A) \to \neg A) \to (\forall v\neg(B \to A) \to \forall v\neg A)$	(4)公理 5

7. $\forall v\neg(B\to A)\to\forall vB$ (3)(5) rmp 分离规则
8. $\forall v\neg(B\to A)\to\forall v\neg A$ (4)(6) rmp 分离规则
9. $\forall v\neg A\to\neg A$ 定理 1
10. $\forall\neg(B\to A)\to\neg A$ (8)(9) rmp 分离规则
11. $\forall vB\to A$ 已知假设
12. $\forall v\neg(B\to A)\to A$ (7)(11) rmp 分离规则
13. $\forall vB\to A,\forall v\neg(B\to A)\vdash\neg A$ (10)演绎定理 6
14. $\forall vB\to A,\forall v\neg(B\to A)\vdash A$ (12)演绎定理 6
15. $\forall vB\to A\vdash\neg\forall v\neg(B\to A)$ (13)(14)定理 8
16. $\forall vB\to A\vdash\exists v(B\to A)$ 定义式
17. $\vdash(\forall vB\to A)\to\exists v(B\to A)$ $(\to+)$

（4）

1. $\exists v(B\to A),\forall vB\vdash\exists v(B\to A)$ $(\in)$
2. $\exists v(B\to A),\forall vB,B\to A\vdash B\to A$ $(\in)$
3. $\exists v(B\to A),\forall vB,B\to A\vdash\forall vB$ $(\in)$
4. $\forall vB\to B$ 定理 1
5. $\exists v(B\to A),\forall vB,B\to A\vdash B$ (3)(4) rmp 分离规则
6. $\exists v(B\to A),\forall vB,B\to A\vdash A$ (5)(2)$(\to-)$
7. $\exists v(B\to A),\forall vB\vdash A$ (1)(6)定理 10
8. $\exists v(B\to A)\vdash\forall vB\to A$ $(\to+)$
9. $\vdash\exists v(B\to A)\to(\forall vB\to A)$ $(\to+)$

3. P138 4.

P138 4. 在FC中证明：

（1） $\forall x(A\to B)\vdash\dashv A\to\forall xB$ x 在 A 中无自由出现
（2） $\forall x(A\to B)\vdash\dashv\exists xA\to B$ x 在 B 中无自由出现
（3） $\forall x(A\wedge B)\vdash\dashv\forall xA\wedge\forall xB$
（4） $\exists x(A\vee B)\vdash\dashv\exists xA\vee\exists xB$

（1）

先证$\forall x(A\to B)\vdash A\to\forall xB$

1. $\forall x(A\to B),A\vdash\forall x(A\to B)$ $(\in)$
2. $\forall x(A\to B),A\vdash A$ $(\in)$
3. $\forall x(A\to B)\to(A\to B)$ 定理 1
4. $\forall x(A\to B),A\vdash A\to B$ (1)(3) rmp 分离规则
5. $\forall x(A\to B),A\vdash B$ (2)(4) $(\to-)$
6. $\forall x(A\to B),A\vdash\forall xB$ (5)全称推广定理 5
7. $\forall x(A\to B)\vdash A\to\forall xB$ (6)演绎定理 6

再证$A\to\forall xB\vdash\forall x(A\to B)$

1. $\forall xB\to B$ 定理 1
2. $(\forall xB\to B)\to((A\to\forall xB)\to(A\to B))$ PC 加前件定理 4

3. $(\boldsymbol{A} \to \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{B}) \to (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})$ (1)(2) rmp 分离规则
4. $(\boldsymbol{A} \to \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{B}) \vdash (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})$ (3)演绎定理 6
5. $(\boldsymbol{A} \to \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{B}) \vdash \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})$ (4)全称推广定理 5

(2)

先证$\forall x(A \to B) \vdash \exists xA \to B$

1. $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \vdash \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})$ (∈)
2. $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \to (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})$ 定理 1
3. $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \vdash \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ (1)(2) rmp 分离规则
4. $(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \to (\neg \boldsymbol{B} \to \neg \boldsymbol{A})$ PC 定理 13
5. $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \vdash \neg \boldsymbol{B} \to \neg \boldsymbol{A}$ (3)(4) rmp 分离规则
6. $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}), \neg \boldsymbol{B} \vdash \neg \boldsymbol{A}$ (5)演绎定理 6
7. $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}), \neg \boldsymbol{B} \vdash \forall \boldsymbol{x} \neg \boldsymbol{A}$ (6)全称推广定理 5
8. $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \vdash \neg \boldsymbol{B} \to \forall \boldsymbol{x} \neg \boldsymbol{A}$ (7)演绎定理 6
9. $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \vdash \neg \boldsymbol{B} \to \neg \exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{A}$ 定义式
10. $(\neg \boldsymbol{B} \to \neg \exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{A}) \to (\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})$ PC 公理 3
11. $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \vdash \exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ (9)(10) rmp 分离规则

再证$\exists xA \to B \vdash \forall x(A \to B)$

1. $\boldsymbol{A} \to \exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{A}$ 定理 2
2. $(\boldsymbol{A} \to \exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{A}) \to ((\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \to (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}))$ PC 加后件定理 5
3. $(\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \to (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})$ (1)(2)rmp 分离规则
4. $\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \vdash \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ (3)演绎定理 6
5. $\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \vdash \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})$ (4)全称推广定理 5

(3)

先证$\forall x(A \wedge B) \vdash \forall xA \wedge \forall xB$

1. $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \to (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})$ 定理 1
2. $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \vdash (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})$ $(\to -)$
3. $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \vdash \boldsymbol{A}$ (2)$(\wedge -)$
4. $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \vdash \boldsymbol{B}$ (2)$(\wedge -)$
5. $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \vdash \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{A}$ (3)全称推广定理 5
6. $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \vdash \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{B}$ (4)全称推广定理 5
7. $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \vdash \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{A} \wedge \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{B}$ (5)(6)$(\wedge +)$

再证$\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall x(A \wedge B)$

1. $\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{A} \wedge \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{B} \vdash \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{A} \wedge \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{B}$ (∈)
2. $\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{A} \wedge \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{B} \vdash \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{A}$ $(\wedge -)$
3. $\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{A} \wedge \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{B} \vdash \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{B}$ $(\wedge -)$
4. $\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{A} \vdash \boldsymbol{A}$ 定理 1
5. $\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{B} \vdash \boldsymbol{B}$ 定理 1
6. $\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{A} \wedge \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{B} \vdash \boldsymbol{A}$ (2)(4) rmp 分离规则

7. $\forall x A \wedge \forall x B \vdash B$ (3)(5) rmp 分离规则
8. $\forall x A \wedge \forall x B \vdash A \wedge B$ (6)(7) $(\wedge +)$
9. $\forall x A \wedge \forall x B \vdash \forall x(A \wedge B)$ (8)全称推广定理 5

(4)

先证$\exists x(A \vee B) \vdash \exists x A \vee \exists x B$

1. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \forall x \neg A \wedge \forall x \neg B$ $(\in)$
2. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \forall x \neg A$ $(\wedge -)$
3. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \forall x \neg B$ $(\wedge -)$
4. $\forall \neg A \vdash \neg A$ 定理 1
5. $\forall \neg B \vdash \neg B$ 定理 1
6. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \neg A$ (2)(4) rmp 分离规则
7. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \neg B$ (3)(5) rmp 分离规则
8. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \neg A \wedge \neg B$ (6)(7)$(\wedge +)$
9. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \neg(A \vee B)$ (8)德摩根定理
10. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \forall x \neg(A \vee B)$ (9)全称推广定理 5
11. $\forall x \neg(A \vee B) \vdash \neg \exists x(A \vee B)$ 定理 13
12. $\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B \vdash \neg \exists x(A \vee B)$ (10)(11) rmp 分离规则
13. $\exists x(A \vee B) \vdash \neg(\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B)$ (12)定理 7
14. $\exists x(A \vee B) \vdash (\neg \forall x \neg A \vee \neg \forall x \neg B)$ (13)德摩根定理
15. $\exists x(A \vee B) \vdash \exists x A \vee \exists x B$ (14)定义式

再证$\exists x A \vee \exists x B \vdash \exists x(A \vee B)$

1. $\forall x \neg(A \vee B) \rightarrow \neg(A \vee B)$ 定理 1
2. $\forall x \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ (1)德摩根定理
3. $\forall x \neg(A \vee B) \vdash (\neg A \wedge \neg B)$ (2)演绎定理 6
4. $\forall x \neg(A \vee B) \vdash \neg A$ (3)$(\wedge -)$
5. $\forall x \neg(A \vee B) \vdash \neg B$ (3)$(\wedge -)$
6. $\forall x \neg(A \vee B) \vdash \forall x \neg A$ (4)全称推广定理 5
7. $\forall x \neg(A \vee B) \vdash \forall x \neg B$ (5)全称推广定理 5
8. $\forall x \neg(A \vee B) \vdash \forall x \neg A \wedge \forall x \neg B$ (6)(7)$(\wedge +)$
9. $\neg(\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B) \vdash \neg \forall x \neg(A \vee B)$ 定理 7
10. $(\neg \forall x \neg A \vee \neg \forall x \neg B) \vdash \neg \forall x \neg(A \vee B)$ (9)德摩根定律
11. $\exists x A \vee \exists x B \vdash \exists x(A \vee B)$ 定义式