作业五

2.

根据$Euler$法求解过程

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda)y_n$$

根据$y(0) = 1$，不妨令$y_0 = 1$，故利用$Euler$法求得的数值解$y_n = (1 + h\lambda)^n$

收敛性证明：

固定x，取$h = \frac{x}{n}$，根据题意得$y = e^{\lambda x}$是其精确解，将$y_n = (1 + h\lambda)^n$与$y = e^{\lambda x}$进行泰勒展开

$$(1 + h\lambda)^n = 1 + nh\lambda + \frac{f_1''(\varepsilon_1)}{2}(h\lambda)^2 \quad \varepsilon_1 \in (0, x)$$

$$e^{\lambda nh} = 1 + nh\lambda + \frac{f_2''(\varepsilon_2)}{2}(h\lambda)^2 \quad \varepsilon_2 \in (0, x)$$

两式相减得$e^{\lambda nh} - (1 + h\lambda)^n = \frac{f_2''(\varepsilon_2) - f_1''(\varepsilon_1)}{2}(h\lambda)^2 = O(h^2)$

故当$h \to 0$时，$y_n = (1 + h\lambda)^n$**一阶收敛于精确解**

5.

证明：

①取$y(x) = 1$，左式=1，右式=$\frac{1}{2} \times 2 + \frac{h}{4} \times 0 = 1$，左式=右式

②取$y(x) = x$，左式=x_{n+1}，右式=$\frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}) + \frac{h}{4}(4 - 1 + 3) = \frac{1}{2}(x_{n+1} - 3h) + \frac{3}{2}h = x_{n+1}$，

∴左式=右式

③取$y(x) = x^2$，左式=x_{n+1}^2

右式= $\frac{1}{2}(x_n^2 + x_{n-1}^2) + \frac{h}{4}(8x_{n+1} - 2x_n + 6x_{n-1})$

= $\frac{1}{2}(2x_{n+1}^2 - 6hx_{n+1} + 5h^2) + \frac{h}{4}(12x_{n+1}) == x_{n+1}^2$

∴左式=右式

④取$y(x) = x^3$，左式=x_{n+1}^3

右式= $\frac{1}{2}(x_n^3 + x_{n-1}^3) + \frac{h}{4}(12x_{n+1}^2 - 3x_n^2 + 9x_{n-1}^2)$

= $\frac{1}{2}(2x_{n+1}^3 - 9hx_{n+1}^2 + 15h^2x_{n+1} - 9h^3) + \frac{h}{4}(18x_{n+1}^2 - 30hx_{n+1} + 33h^2)$

= $x_{n+1}^3 - \frac{9}{2}hx_{n+1}^2 + \frac{15}{2}(h^2 - h)x_{n+1} + \frac{15}{4}h^3 \neq$ 左式

∴**该 2 步法是 2 阶方法**

根据局部截断误差系数$C_3 = \frac{1}{3!}\{1 - [\sum_{i=0}^{1}(-i)^3 a_i + 3\sum_{i=-1}^{1}(-i)^2 b_i]\}$

代入$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2}, b_{-1} = 1, b_0 = -\frac{1}{4}, b_1 = \frac{3}{4}$，得$C_3 = -\frac{5}{8}$

∴其**局部截断误差首项**为$-\frac{5}{8}h^3y^{(3)}(x_n)$

6.

(1)根据题意有$b_{-1}=0$，取a_0为自由参数，求解 3 个未知数a_1,b_0,b_1，可由$C_0=C_1=C_2=0$得到三个方程

$$1-(a_1+a_0)=0$$
$$1+a_1-(b_{-1}+b_0+b_1)=0$$
$$1-a_1-2(b_{-1}-b_1)=0$$

解得$\boldsymbol{a_1=1-a_0,b_0=2-\frac{a_0}{2},b_1=-\frac{a_0}{2}}$，此方法**至少是 2 阶的**

(2)考察试验方程，代入$y'=\lambda y$

$$y_{n+1}=a_o y_n+(1-a_0)y_{n-1}+\frac{h}{2}[(4-a_0)y_n'-a_0 y_{n+1}']$$

令$\overline{h}=h\lambda$得

$$y_{n+1}=\left[a_0+\frac{\overline{h}}{2}(4-a_0)\right]y_n+\left[1-a_0-\frac{\overline{h}}{2}a_0\right]y_{n-1}$$

设解为$y=r^n$，得到其第一特征方程$\rho(r)=r^2-a_0r-(1-a_0)=(r-1)\big(r+(1-a_0)\big)$
若使其满足根条件，则$|r_1|=|a_0-1|<1$，即$\boldsymbol{0<a_0<2}$

(3)

当$a_0=0$时，$y_{n+1}=y_{n-1}+2hy_n'$，为 **2 步$\boldsymbol{Euler}$格式的$\boldsymbol{Euler}$方法**

当$a_0=1$时，$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(3y_n'-y_{n-1}')$，为**显式 2 步$\boldsymbol{Adams}$方法**

(4)

当$C_3=0$时$1+a_1-3(b_{-1}+b_1)=0$，代入$a_1=1-a_0,b_{-1}=0,b_1=-\frac{a_0}{2}$

解得$a_0=-4$
此时不满足$0<a_0<2$，故不能满足根条件