作业五

2.

根据$Euler$法求解过程

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h\lambda y_n = (1+h\lambda)y_n$$

根据$y(0)=1$，不妨令$y_0=1$，故利用$Euler$法求得的数值解$y_n=(1+h\lambda)^n$

收敛性证明:

固定x，取$h=\frac{x}{n}$，根据题意得$y=e^{\lambda x}$是其精确解，

$$\lim_{h\to 0}(1+h\lambda)^n = \lim_{h\to 0}(1+h\lambda)^{\frac{x}{h}} = \lim_{h\to 0}\left((1+h\lambda)^{\frac{1}{h\lambda}}\right)^{\lambda x} = e^{\lambda x}$$

故当$h\to 0$时，$y_n=(1+h\lambda)^n$**一阶收敛于精确解**

5.

证明:

①取$y(x)=1$，左式=1，右式=$\frac{1}{2}\times 2+\frac{h}{4}\times 0=1$，左式=右式

②取$y(x)=x$，左式=x_{n+1}，右式=$\frac{1}{2}(x_n+x_{n-1})+\frac{h}{4}(4-1+3)=\frac{1}{2}(x_{n+1}-3h)+\frac{3}{2}h=x_{n+1}$，

$\therefore$左式=右式

③取$y(x)=x^2$，左式=x_{n+1}^2

右式= $\frac{1}{2}(x_n^2+x_{n-1}^2)+\frac{h}{4}(8x_{n+1}-2x_n+6x_{n-1})$

$= \frac{1}{2}(2x_{n+1}^2-6hx_{n+1}+5h^2)+\frac{h}{4}(12x_{n+1}) == x_{n+1}^2$

$\therefore$左式=右式

④取$y(x)=x^3$，左式=x_{n+1}^3

右式= $\frac{1}{2}(x_n^3+x_{n-1}^3)+\frac{h}{4}(12x_{n+1}^2-3x_n^2+9x_{n-1}^2)$

$= \frac{1}{2}(2x_{n+1}^3-9hx_{n+1}^2+15h^2x_{n+1}-9h^3)+\frac{h}{4}(18x_{n+1}^2-30hx_{n+1}+33h^2)$

$= x_{n+1}^3-\frac{9}{2}hx_{n+1}^2+\frac{15}{2}(h^2-h)x_{n+1}+\frac{15}{4}h^3 \neq$ 左式

$\therefore$**该 2 步法是 2 阶方法**

根据局部截断误差系数$C_3=\frac{1}{3!}\{1-[\sum_{i=0}^{1}(-i)^3 a_i+3\sum_{i=-1}^{1}(-i)^2 b_i]\}$

代入$a_0=\frac{1}{2}, a_1=\frac{1}{2}, b_{-1}=1, b_0=-\frac{1}{4}, b_1=\frac{3}{4}$，得$C_3=-\frac{5}{8}$

$\therefore$其**局部截断误差首项**为$-\frac{5}{8}h^3y^{(3)}(x_n)$

6.

(1)根据题意有$b_{-1}=0$，取a_0为自由参数，求解 3 个未知数a_1,b_0,b_1，可由$C_0=C_1=C_2=0$得到三个方程

$$1-(a_1+a_0)=0$$
$$1+a_1-(b_{-1}+b_0+b_1)=0$$
$$1-a_1-2(b_{-1}-b_1)=0$$

解得$\boldsymbol{a_1=1-a_0,b_0=2-\frac{a_0}{2},b_1=-\frac{a_0}{2}}$，此方法**<u>至少是 2 阶的</u>**

(2)考察试验方程，代入$y'=\lambda y$

$$y_{n+1}=a_o y_n+(1-a_0)y_{n-1}+\frac{h}{2}[(4-a_0)y_n'-a_0y_{n+1}']$$

令$\overline{h}=h\lambda$得

$$y_{n+1}=\left[a_0+\frac{\overline{h}}{2}(4-a_0)\right]y_n+\left[1-a_0-\frac{\overline{h}}{2}a_0\right]y_{n-1}$$

设解为$y=r^n$，得到其第一特征方程$\rho(r)=r^2-a_0r-(1-a_0)=(r-1)\big(r+(1-a_0)\big)$

若使其满足根条件，则$|r_1|=|a_0-1|<1$，即$\boldsymbol{0<a_0<2}$

(3)

当$a_0=0$时，$y_{n+1}=y_{n-1}+2hy_n'$，为 **<u>2 步$\boldsymbol{Euler}$格式的$\boldsymbol{Euler}$方法</u>**

当$a_0=1$时，$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(3y_n'-y_{n-1}')$，为**<u>显式 2 步$\boldsymbol{Adams}$方法</u>**

(4)

当$C_3=0$时$1+a_1-3(b_{-1}+b_1)=0$，代入$a_1=1-a_0,b_{-1}=0,b_1=-\frac{a_0}{2}$

解得$a_0=-4$

此时不满足$0<a_0<2$，故不能满足根条件

11.

根据 4 阶$Runge-Kutta$方法，令$\lambda=-20$，可列出以下方程

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)$$
$$K_1=f(x_n,y_n)=\lambda y_n$$
$$K_2=f\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1\right)=\left(1+\frac{h}{2}\lambda\right)\lambda y_n$$
$$K_3=f\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_2\right)=\left(1+\frac{h}{2}\lambda+\frac{(h\lambda)^2}{4}\right)\lambda y_n$$
$$K_4=f(x_n+h,y_n+hK_3)=\left(1+h\lambda+\frac{(h\lambda)^2}{2}+\frac{(h\lambda)^3}{4}\right)\lambda y_n$$

根据初值条件$y(0)=1$，分别取$h=0.1$和$h=0.2$可以得到如下结果

当$h=0.1$时

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	0.3333	0.1111	0.0370	0.01235	0.00412	0.00137	0.00046	0.00015	0.00005	0.00002

$h=0.1$

当$h=0.2$时

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y	5.0000	25.0000	125.0000	625.0000	3125.0000

$h=0.2$

令$\overline{h}=h\lambda$可得$y_{n+1}=\left(1+\overline{h}+\frac{\overline{h}^2}{2}+\frac{\overline{h}^3}{3!}+\frac{\overline{h}^4}{4!}\right)y_n$

由此递推可以得到$y_{n+1}=\left(1+\overline{h}+\frac{\overline{h}^2}{2}+\frac{\overline{h}^3}{3!}+\frac{\overline{h}^4}{4!}\right)^n y_n=\left(1+\overline{h}+\frac{\overline{h}^2}{2}+\frac{\overline{h}^3}{3!}+\frac{\overline{h}^4}{4!}\right)^n y_0$

当$h=0.1$时，$\overline{h}=\lambda h=-2$，$1+\overline{h}+\frac{\overline{h}^2}{2}+\frac{\overline{h}^3}{3!}+\frac{\overline{h}^4}{4!}=0.3333<1$，所以是稳定的

当$h=0.2$时，$\overline{h}=\lambda h=-4$，$1+\overline{h}+\frac{\overline{h}^2}{2}+\frac{\overline{h}^3}{3!}+\frac{\overline{h}^4}{4!}=5>1$，所以是不稳定的