

# 数理逻辑第三次作业

姓名	谢宇航	班级	5 班	学号	200110505
第 1 题					
第 2 题					
总分					
备注	1. 作业提交邮箱: hitsz_logic_2022@163.com。作业提交截止时间: 2022-06-20-24:00, 超过提交截止时间的作业视为无效。 2. 确因网络等特殊原因无法及时提交作业的学生, 应至少提前 1 小时与助教联系沟通 (徐朕燃, QQ: 1319282215, 电话: 13713994811; 许天骁, QQ: 1140931320, 电话: 18800415868)。 3. 作业文件名命名方式: 第 x 次-学号-姓名-x 班 (例: 第 3 次-180110504-张三-5 班.pdf); 邮件主题为: 第 x 次-学号-姓名-x 班 (例: 第 3 次-180110504-张三-5 班)。缺少这些信息的作业将被酌情扣分。注意作业次数以阿拉伯数字命名。 4. 可手写拍照转为 PDF 格式。				

1. 利用演绎定理在 PC 中证明:

- (1)  $\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$
- (2)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (3)  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
- (4)  $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

1.

(1)

$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$

1.  $B \rightarrow A$

假设

2.  $\neg A$

假设

3.  $\neg\neg B \rightarrow B$

定理 10

4.  $(\neg\neg B \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (\neg\neg B \rightarrow A))$

加后件定理

5.  $(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg\neg B \rightarrow A)$

3 和 4 rmp 分离规则

6.  $A \rightarrow \neg\neg A$

定理 12

7.  $(A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow ((\neg\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg\neg B \rightarrow \neg\neg A))$

加前件定理

8.  $(\neg\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg\neg B \rightarrow \neg\neg A)$

6 和 7 rmp 分离规则

9.  $(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg\neg B \rightarrow \neg\neg A)$

5 和 8 三段论

10.  $\neg\neg B \rightarrow \neg\neg A$

1 和 9 rmp 分离规则

11.  $(\neg\neg B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$

公理 3

12.  $\neg A \rightarrow \neg B$

10 和 11 rmp 分离规则

13.  $\neg B$

2 和 12 rmp 分离规则

14.  $B \rightarrow A, \neg A \vdash \neg B$

15.  $B \rightarrow A \vdash \neg A \rightarrow \neg B$

16.  $\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$

(2)

$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

1.  $A \rightarrow B$

假设

2.  $B \rightarrow C$

假设

3.  $A \rightarrow C$

1 和 2 三段论定理

4.  $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$

5.  $A \rightarrow B \vdash ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

6.  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(3)

$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

1.  $(A \rightarrow B) \rightarrow A$

假设

2.  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$

定理 13

3.  $\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$

1 和 2 rmp 分离规则

4.  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

定理 6

5.  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow B)) \rightarrow A)$

定理 16

6.  $(\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow B)) \rightarrow A$

4 和 5 rmp 分离规则

7.  $A$

3 和 6 rmp 分离规则

8.  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \vdash A$

9.  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

(4)

$\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

1.  $\neg(A \rightarrow B)$

假设

2.  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

定理 6

3.  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$

定理 14

4.  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$

2 和 3 rmp 分离规则

5.  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

公理 1

6.  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

4 和 5 三段论定理

7.  $B \rightarrow A$

1 和 6 rmp 分离规则

8.  $\neg(A \rightarrow B) \vdash (B \rightarrow A)$

9.  $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

2. 将 PC 中公理 3 改成

$$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$$

记所得系统为 PC1。证明：

- (1)  $\vdash_{PC} (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$   
(2)  $\vdash_{PC1} (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

(1)

- |   |                |  |
|---|----------------|--|
| 1. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$  | 公理 3           |  |
| 2. $B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$  | 前件互换定理         |  |
| 3. $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$   | 定理 13          |  |
| 4. $B \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$   | 2 和 3 三段论      |  |
| 5. $\neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$   | 前件互换定理         |  |
| 6. $(\neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B)))$ | 公理 2           |  |
| 7. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$  | 5 和 6 rmp 分离规则 |  |
| 8. $(\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$   | 公理 3           |  |
| 9. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$   | 7 和 8 三段论定理    |  |

(2)

证明：使用**演绎定理**进行证明

- |   |                |
|---|----------------|
| 1. $\neg A \rightarrow \neg B$  | 假设             |
| 2. $B$  | 假设             |
| 3. $B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$   | 公理 1           |
| 4. $\neg A \rightarrow B$   | 2 和 3 rmp 分离规则 |
| 5. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ | PC1 系统公理 3     |
| 6. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A$                                      | 4 和 5 rmp 分离规则 |
| 7. $A$  | 1 和 6 rmp 分离规则 |
| 8. $\neg A \rightarrow \neg B, B \vdash_{PC1} A$                                    |                |
| 9. $\neg A \rightarrow \neg B \vdash_{PC1} (B \rightarrow A)$                       |                |
| 10. $\vdash_{PC1} (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$        |                |