数理逻辑第一次作业

姓名	谢宇航	班级	5	学号	200110505
第 1 题					
第 2 题					
第 3 题					
第 4 题					
总分					
备注	1. 作业提交邮箱：hitsz_logic_2022@163.com。作业提交截止时间：2022-05-21-24:00，超过提交截止时间的作业视为无效。 2. 确因网络等特殊原因无法及时提交作业的学生，应至少提前 1 小时与助教联系沟通（徐朕燃，QQ：1319282215，电话：13713994811）。 3. 作业文件名命名方式：第 x 次-学号-姓名-x 班（例：第 1 次-180110504-张三-5 班.pdf）； 邮件主题为：第 x 次-学号-姓名-x 班（例：第 1 次-180110504-张三-5 班）。缺少这些信息的作业将被酌情扣分。注意作业次数以阿拉伯数字命名。 4. 可手写拍照转为 PDF 格式。				

1.

解：

（1）令r =“A是大学里的学生”，p =“A是本科生”，q =“A是研究生”

“大学里的学生不是本科生就是研究生”可表示为$\boldsymbol{r \to p \vee q}$

（2）令p=“接到超速罚单”，q=“车速超过每小时 100 公里”

“只要你接到超速罚单，你的车速就超过每小时 100 公里”可表示为$\boldsymbol{p \to q}$

（3）令p=“年满 18 周岁”，q=“具有选举权”

“除非你年满 18 周岁，否则你没有选举权”可表示为$\boldsymbol{q \to p}$

2.

解：

（1）

对于v，st $A^v = 1, B^v = 0$

但是$B \to A = 0$

故该逻辑蕴含不成立

（2）

由逻辑等价的推论，对于任意赋值v均有$A^v = B^v$即可推出$A \Leftrightarrow B$

对于$\forall v$，$(\neg A \to \neg B)^v = 1 - (\neg A)^v + (\neg A)^v(\neg B)^v = 1 - (1 - A^v) + (1 - A^v)(1 - B^v) = 1 - B^v + A^v B^v$

又$\because (B \to A)^v = 1 - B^v + A^v B^v$

$\therefore$对于任意赋值v均有$(\neg A \to \neg B)^v = (B \to A)^v$，所以$\neg A \to \neg B \Leftrightarrow B \to A$

故该逻辑等价成立

（3）

对于$\forall v$，$\big(A \to (B \to C)\big)^v = 1 - A^v + A^v(B \to C)^v = 1 - A^v + A^v(1 - B^v + B^v C^v) = 1 - A^v B^v + A^v B^v C^v = 1$

而对于$\big((A \to B) \to (A \to C)\big)^v = \big((1 - A^v + A^v B^v) \to (1 - A^v + A^v C^v)\big)^v = 1 - (1 - A^v + A^v B^v) + (1 - A^v + A^v B^v)(1 - A^v + A^v C^v) = 1 - A^v B^v + A^v B^v C^v = 1$

故$\forall v$使得$\big(A \to (B \to C)\big)^v = 1$即可使得$\big((A \to B) \to (A \to C)\big)^v$为真

故该逻辑蕴含成立

（4）

由逻辑等价的推论，对于任意赋值v均有$A^v = B^v$即可推出$A \Leftrightarrow B$

对于$\forall v$，$\big(A \to (B \to C)\big)^v = 1 - A^v + A^v(B \to C)^v = 1 - A^v + A^v(1 - B^v + B^v C^v) = 1 - A^v B^v + A^v B^v C^v$

又$\because (A \wedge B \to C)^v = 1 - (A \wedge B)^v + (A \wedge B)^v C^v = 1 - A^v B^v + A^v B^v C^v$

$\therefore$对于任意赋值v均有$A \to (B \to C) \Leftrightarrow A \wedge B \to C$

故该逻辑等价成立

（5）

由逻辑等价的推论，对于任意赋值v均有$A^v = B^v$即可推出$A \Leftrightarrow B$

对于$\forall v$，$(A \vee B \to C)^v = 1-(A \vee B)^v + (A \vee B)^v C^v = 1-(A^v + B^v - A^v B^v) + (A^v + B^v - A^v B^v) C^v = 1 - A^v - B^v + A^v B^v + A^v C^v + B^v C^v - A^v B^v C^v$

对于$\forall v$, $\big((A \to C) \wedge (B \to C)\big)^v = (1 - A^v + A^v C^v)(1 - B^v + B^v C^v) = 1 - A^v - B^v + A^v C^v + A^v B^v + B^v C^v - A^v B^v C^v$

$\therefore$ 对于$\forall v$，均有$(A \vee B \to C)^v = \big((A \to C) \to (B \to C)\big)^v$

故该逻辑等价成立

（6）

对于指派v，$st\ A^v = 0, B^v = 0, C^v = 0, D^v = 0$

$\neg A \vee B = 1, A \to B \wedge C = 1, D \to B = 1$

但是$\neg B \to C = 0$

故该逻辑蕴含不成立

3.

解：

（1）根据题意

$\neg(q \to p) \wedge (r \to \neg s)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg q \vee p) \wedge (\neg r \vee \neg s)$

$\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg s)$

$\Leftrightarrow q \wedge \neg p \wedge (\neg r \vee \neg s)$ **（合取范式）**

$\Leftrightarrow (q \wedge \neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p \neg s)$ **（析取范式）**

（2）根据题意

$\neg p \wedge q \to r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge q) \vee r$

$\Leftrightarrow (p \vee \neg q) \vee r$

$\Leftrightarrow p \vee \neg q \vee r$ **（合取范式、析取范式）**

（3）根据题意

$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow p \wedge q$

$\Leftrightarrow \big((\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge q)\big) \vee \big((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)\big)$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ **（合取范式）**

$\Leftrightarrow \big((p \vee q) \wedge \neg p\big) \vee \big((p \vee q) \wedge \neg q\big)$

$\Leftrightarrow \big((p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge q)\big) \vee \big((\neg q \wedge p) \vee (q \wedge \neg q)\big)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$ **（析取范式）**

4.

（1）根据题意

$\neg p \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow \big(\neg p \wedge (q \vee \neg q)\big) \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ **（主析取范式）**

$\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee q$ **（主合取范式）**

（2）根据题意

$p \vee q \rightarrow (q \rightarrow r)$

$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (q \rightarrow r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee r)$

$\Leftrightarrow \big(\neg p \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r)\big) \vee \big(\neg q \wedge (p \vee \neg p)\big) \vee \big(r \wedge (p \vee \neg p)\big)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee \big(\neg q \wedge p \wedge (r \vee \neg r)\big) \vee \big(\neg q \wedge \neg p \wedge (r \vee \neg r)\big)$
$\qquad \vee \big(r \wedge p \wedge (q \vee \neg q)\big) \vee \big(r \wedge \neg p \wedge (q \vee \neg q)\big)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$ **（主析取范式）**

$\Leftrightarrow (\neg q \vee r \vee \neg p) \wedge \big(\neg q \vee r \vee (p \wedge \neg p)\big)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$ **（主合取范式）**

（3）根据题意

$(p \rightarrow p \wedge q) \vee r$

$\Leftrightarrow \big(\neg p \vee (p \wedge q)\big) \vee r$

$\Leftrightarrow \big((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)\big) \vee r$

$\Leftrightarrow \neg p \vee q \vee r$ **（主合取范式）**

$\Leftrightarrow \big(\neg p \wedge (q \vee \neg q)\big) \vee \big(q \wedge (p \vee \neg p)\big) \vee \big(r \wedge (p \vee \neg p)\big)$

$\Leftrightarrow \big(\neg p \wedge q \wedge (r \vee \neg r)\big) \vee \big(\neg p \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r)\big) \vee \big(p \wedge q \wedge (r \vee \neg r)\big) \vee \big(p \wedge r \wedge (q \vee \neg q)\big)$
$\qquad \vee \big(\neg p \wedge r \wedge (q \vee \neg q)\big)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$ **（主析取范式）**