第一章

非线性方程的数值解法

非线性方程根的概念

$$f(x)=0 \qquad (1.1.1)$$

下面先讨论单个方程，

在方程（1.1.1）中，若函数f(x)是n次多项式，则称方程（1.1.1）为n次**多项式方程**；若f(x)是超越函数，则称方程为**超越方程**。理论上已证明，当$n \le 4$时，多项式方程的根可用求根公式表示；当$n \ge 5$时，方程的根一般不能用解析式表示。对于方程（1.1.1），在实际应用中，一般不需要得到求根的解析表达式，只有得到满足一定精度要求的根的近似值就可以了。现在，我们讨论求方程（1.1.1）的单实根α的问题，若对多个根都有兴趣，则可根据已求得的根$\alpha_1 \cdots \alpha_m$，利用

$$f_m(x)=\frac{f(x)}{\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)}$$

就能求出第m+1个根α_{m+1}。

非线性方程根的概念

给定非线性方程$f(x)=0$

- 如果有α使得$f(\alpha)=0$，则称α为$f(x)=0$的根或$f(x)$的零点.
- 设有正整数m使得$f(x)=(x-\alpha)^m g(x)$

  且$g(\alpha)\neq 0$，则当$m\geq 2$时，称α为$f(x)=0$的m重根；当$m=1$时，称α为$f(x)=0$的单根.
- 若α为$f(x)=0$的m重根，则

  $$f(\alpha)=f'(\alpha)=\ldots=f^{(m-1)}(\alpha)=0,\ f^{(m)}(\alpha)\neq 0$$
- 这里只讨论实根的求法.

对方程（1.1.1）求根大致分为三个步骤：

（1）**根的存在性**：方程是否有根？如果有，有几个根？对于多项式方程，n次方程有n个根。

（2）**根的隔离**：把有根区间分成较小的子区间，每个子区间或者有一个根，或者没有根。这样可以将有根子区间内的任一点都可看成该根的一个近似值。

（3）**根的精确化**：对根的某个近似值设法逐步精确化，使其满足一定的精度要求。

非线性方程求根的数值方法

- 二分法
- 迭代法

  单点迭代法(不动点迭代，Newton迭代法)

  多点迭代法(弦截法)

二分法

- 求根方法中最简单最直观的方法是**二分法**。

若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b) < 0$. 为了方便讨论，不妨假设$f(a) < 0, f(b) > 0$. 根据**连续函数根的存在性定理**，方程（1.1.1）在(a,b)上一定有实根.称(a,b)是方程的有根区间，这里假设(a,b)内只有一个根α，如图1.1所示.

二分法

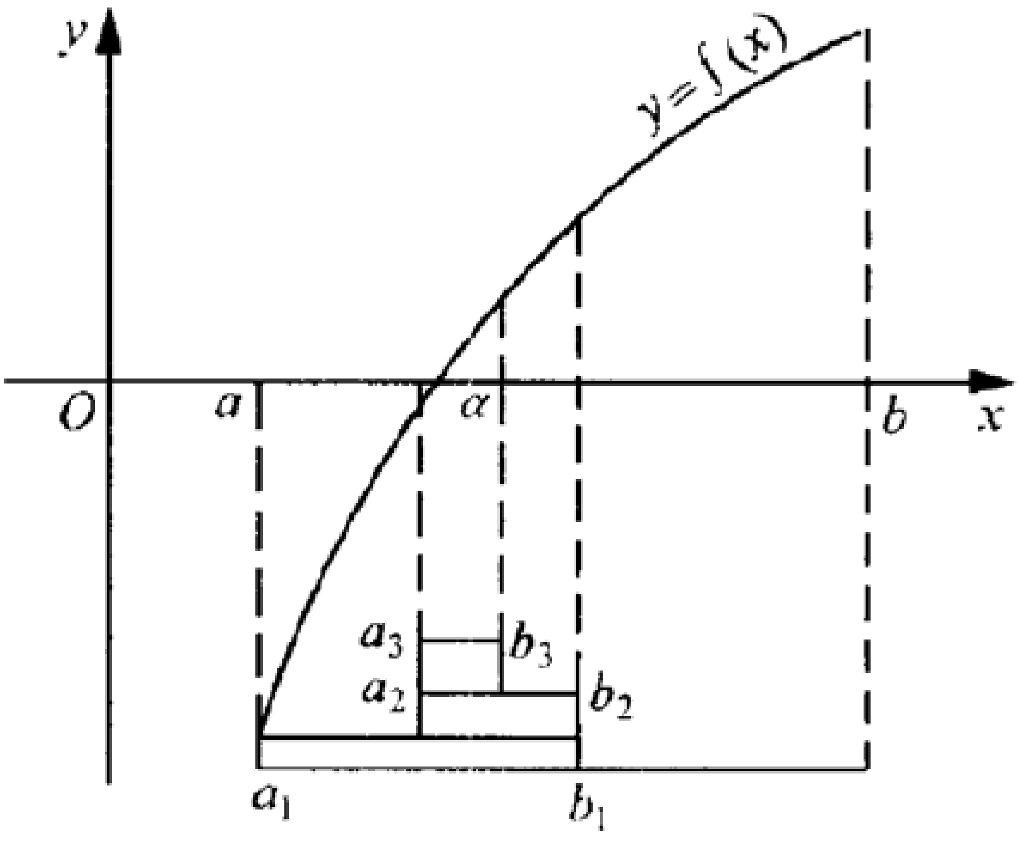


图 1.1　二分法

二分法

二分法的计算过程为:

(1) 若区间[a, b]的中点为$x_0 = \frac{a+b}{2}$,并计算中点的函数值$f(x_0)$,判断:

若$f(a)f(x_0) < 0$,则有根区间为$[a, x_0]$,取$a_1 = a, b_1 = x_0$,即新的有根区间为$[a_1, b_1]$;

若$f(a)f(x_0) = 0$,则x_0即为所求的根α;

若$f(a)f(x_0) > 0$,则有根区间为$[x_0, b]$,取$a_1 = x_0, b_1 = b$,即新的有根区间为$[a_1, b_1]$.

(2) 若区间$[a_1, b_1]$的中点为$x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$,并计算中点的函数值$f(x_1)$,判断:

若$f(a)f(x_1) < 0$,则有根区间为$[a_1, x_1]$,取$a_2 = a_1, b_2 = x_1$,即新的有根区间为$[a_2, b_2]$;

若$f(a_1)f(x_1) = 0$,则x_1即为所求的根α;

若$f(a_1)f(x_1) > 0$,则有根区间为$[x_1, b_1]$,取$a_2 = x_1, b_2 = b_1$,即新的有根区间为$[a_2, b_2]$.

二分法

此过程可以一直进行下去,则可得到一系列有根区间

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots.$$

显然,$[a_n,b_n]$的区间长度为

$$b_n-a_n=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}=\cdots=\frac{b-a}{2^n},$$

如图1.1所示. 这时,我们取最后一个区间的中点x_n作为方程(1.1.1)的根的近似值

$$x_n=\frac{a_n+b_n}{2},\qquad x\in[a_n,b_n],(1.1.2)$$

其误差估计式为

$$|a-x_n|\leq\frac{b_n-a_n}{2}=\frac{b-a}{2^{n+1}},(1.1.3)$$

当$n\to\infty$时,$|a-x_n|\leq\frac{b-a}{2^{n+1}}\to 0$,即$x_n\to\alpha$.

二分法

对给定的小数$\epsilon > 0$,要使

$$|a - x_n| < \epsilon,$$

只需令

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < \epsilon,$$

即

$$2^{n+1} > \frac{b-a}{\epsilon},$$

所以

$$n = \left[\frac{\ln(b-a) - \ln\epsilon}{\ln 2}\right], (1.1.4)$$

其中,[ ]表示取整数.

利用式(1.1.4),对给定的精度,可以预先确定出二分的次数.

二分法的优点是计算过程简单,收敛性可保证,对函数的性质要求低,只要求连续就可以了;它的缺点是计算收敛的速度慢,不能求偶数重根,也不能求复根和虚根,特别是函数值$f(a_k), f(b_k)(k = 0,1,2,\cdots)$每次均已计算出来,但没有利用上,只利用了它们的符号,显然是一种浪费.

迭代法的一般理论

- 迭代法是一种逐次逼近的方法，它的基本思想是通过构造一个递推关系式 (迭代格式)，计算出根的近似值序列,并要求该序列收敛于方程的根.

迭代法

在实际应用中，求方程（1.1.1）的根的主要方法是**迭代法**，它的基本思想是通过构造一个递推关系式，即迭代格式，构造一个根的近似序列，并希望该序列能收敛于方程（1.1.1）的根。

一般来讲，我们总可以把方程（1.1.1）化成等价方程

$$x = \phi(x), \tag{1.2.1}$$

然后选定一个根的初始近似值x_0，利用递推关系式

$$x_{i+1} = \phi(x_i), i = 0,1,2..., \tag{1.2.2}$$

产生序列$\{x_i\}$. 如果该序列收敛于α，则α一定满足式（1.2.1），故α也是方程（1.1.1）的根。

由此可见，**迭代法所涉及的基本问题是迭代格式的构造**，通常迭代法可分为单点迭代法和多点迭代法两种形式。

迭代法

为产生迭代序列$\{x_i\}$，仅需一个初始值x_0的迭代法称为**单点迭代法**，其一般形式为$x_{i+1} = \phi_i(x_i)$，其中ϕ_i称为迭代函数。

多点迭代法的一般形式为

$$x_{i+1} = \phi_i(x_i, x_{i-1}, \ldots, x_{i-n+1}), i = 0,1,2, \ldots, \qquad (1.2.3)$$

其中，$x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-n+1}$为初始近似值。

若迭代函数ϕ_i随迭代次数i变化，则称迭代为**非定常迭代**，若ϕ_i不随迭代次数i变化，即$\phi_i = \phi$，则称迭代为**定常迭代**。

然而我们所构造的迭代格式是否有意义，在于**迭代是否收敛**，对于一个收敛的迭代格式，其使用价值将依赖于迭代过程中的**收敛速度**和**计算效率**。

对于迭代法需要考虑一下几个主要问题

- 收敛性
- 收敛速度
- 计算效率

迭代法的全局收敛性

- 定义1 设α为$f(x)=0$的根，如果$\forall x_0\in[a, b]$，由迭代法产生的序列都收敛于根α，则称该迭代法是全局收敛的.

迭代法的局部收敛性

- 定义2　设方程$x=\phi(x)$有根α, 如果存在α的某个邻域 Δ: $|x-\alpha|\le\delta$, 对任意初值$x_0\in\Delta$, 迭代过程所产生的序列均收敛于根α，则称该迭代法是局部收敛的.

迭代过程的收敛速度

- 定义3 设迭代过程$x_{k+1}=\phi(x_k)$产生的序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$收敛于方程$x=\phi(x)$的根α， 记 $e_k=\alpha-x_k$， 若

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C\neq 0$$

则称迭代过程是p阶收敛的.

特别地，当$p=1$时，称为线性收敛;

当$p>1$时，称为超线性收敛,

当$p=2$时，称为平方收敛.

p越大，收敛越快.

效率指数

- 定义3　称

$$EI = p^{\frac{1}{\theta}}$$

为效率指数．其中p表示迭代的收敛阶，θ表示每步迭代的计算量.

EI越大，计算效率越高.

单点迭代法

- 将方程$f(x)=0$改写成等价形式

$$x=\phi(x) \qquad (1)$$

建立迭代公式

$$x_{k+1}=\phi(x_k) \qquad (2)$$

在根的附近任取一点x_0，可得一序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$.若$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$收敛，即$\lim_{k\to\infty} x_k=\alpha$，且$\phi(x)$连续，则对(2)两端取极限有$\alpha=\phi(\alpha)$，从而$\alpha$为方程(1)的根，也称为$\phi(x)$的不动点，这种求根算法称为不动点迭代法（Picard迭代法）. $\phi(x)$ 称为迭代函数.

不动点迭代法

例如，求方程 $9x^2-\sin x-1=0$

在[0,1]内的根，此时可将方程转化为等价方程

$$x=\frac{1}{3}\sqrt{\sin x+1},$$

于是，迭代公式为 $x_{i+1}=\frac{1}{3}\sqrt{\sin x_i+1}, i=0,1,2,\ldots,$

其中，迭代函数 $\varphi(x)=\frac{1}{3}\sqrt{\sin x+1}$.

在[0,1]内任取一个初始值 x_0，例如取 $x_0=0.4$，则迭代可以收敛于根 α= 0.391846907.

然而原方程还可以写成，$x=\arcsin(9x^2-1)$.

于是，迭代公式为 $x_{i+1}=\arcsin(9x_i^{\ 2}-1), 0=1,2,\ldots,$

对初始值 $x_0=0.4\in[0,1]$，迭代却是发散的。因此，可以看出，**迭代公式是否收敛，与迭代函数φ(x)的形式有关**。什么情况下迭代收敛呢？

不动点迭代法的整体收敛性

- 定理1.1 设$\phi(x)$在$[a, b]$上具有一阶导数，且

(1)当$x\in[a, b]$时, $\phi(x)\in[a, b]$；

(1) $\forall x\in[a, b]$，有$|\phi'(x)|\le L<1$

则对任意初值$x_0\in[a, b]$, 迭代过程 $x_{k+1}=\phi(x_k)$收敛于

$x=\phi(x)$在$[a, b]$上的惟一根.

不动点迭代法的整体收敛性

- 定理1.2 设$\phi(x)$满足

  (1)当$x\in[a, b]$时，$\phi(x)\in[a, b]$；

  (2)$\forall x_1, x_2\in[a, b]$，有

  $$|\phi(x_1)-\phi(x_2)|\le L|x_1-x_2|，\quad L<1$$

  则对任意初值$x_0\in[a, b]$, 迭代过程 $x_{k+1}=\phi(x_k)$收敛于 $x=\phi(x)$在$[a, b]$上的惟一根，且有误差估计式

  $$|\alpha - x_k| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|$$

  $$|\alpha - x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

- 证 根的存在性

由(2)知$\phi(x)$连续. 令$f(x)=x-\phi(x)$, $f(a)\le 0$, $f(b)\ge 0$, 从而$f(x)=0$在$[a, b]$上有根α， 即$x=\phi(x)$在$[a, b]$上有根α.

根的唯一性

设$x=\phi(x)$在$[a, b]$上有两根α_1, α_2, $\alpha_1\ne \alpha_2$，

$|\alpha_1-\alpha_2|=|\phi(\alpha_1)-\phi(\alpha_2)|\le L\,|\alpha_1-\alpha_2|$ 与 $L<1$矛盾.故$\alpha_1=\alpha_2$

序列的收敛性

$|x_{k+1}-\alpha|=|\phi(x_k)-\phi(\alpha)|\le L|x_k-\alpha|$， $|x_{k+1}-\alpha|\le L^{k+1}|x_0-\alpha|$

由$0\le L<1$有

$$\lim_{k\to\infty} x_k=\alpha$$

误差估计

$$|x_{k+1}-x_k|=|\phi(x_k)-\phi(x_{k-1})|\le L|x_k-x_{k-1}|$$

$$|x_{k+2}-x_{k+1}|=|\phi(x_{k+1})-\phi(x_k)|\le L^2|x_k-x_{k-1}|$$

$$\cdots$$

$$|x_{k+p}-x_{k+p-1}|\le L^p|x_k-x_{k-1}|$$

$$|x_{k+p}-x_k|\le |x_{k+p}-x_{k+p-1}|+|x_{k+p-1}-x_{k+p-2}|+\ldots+|x_{k+1}-x_k|$$

$$\le(L^p+L^{p-1}+\ldots+L)\,|x_k-x_{k-1}|$$

$$=\frac{L-L^{p+1}}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$$

令$p\to\infty$，有

$$|\alpha-x_k|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$$

$$|\alpha-x_k|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

例　求方程 $xe^x-1=0$ 在 $\left[\frac{1}{2},\ln 2\right]$ 中的根。

解：先将方程改写为 $x=e^{-x}$，构造迭代格式 $x_{i+1}=e^{-x_i}$。

这里，迭代函数 $\varphi(x)=e^{-x}$。

因为 $\varphi'(x)=-e^{-x}<0$，所以 $\varphi(x)$ 是单调下降函数。于是当 $x\in\left[\frac{1}{2},\ln 2\right]$ 时有

$$\frac{1}{2}=\varphi(\ln 2)\le\varphi(x)\le\varphi\left(\frac{1}{2}\right)<\ln 2,$$

即

$$\varphi(x)\in\left[\frac{1}{2},\ln 2\right],\qquad x\in\left[\frac{1}{2},\ln 2\right].$$

而

$$|\varphi'(x)|=\left|-e^{-x}\right|\le e^{-\frac{1}{2}}<1,$$

所以，根据**定理1.1**，方程 $xe^x-1=0$ 在 $\left[\frac{1}{2},\ln 2\right]$ 上存在唯一的根，且迭代 $x_{i+1}=e^{-x_i}$ 是收敛的。

取初值 $x_0=0.5$，用迭代公式 $x_{i+1}=e^{-x_i}$，$i=0,1,2,\cdots$，计算，结果为

$$x_0=0.50000,\quad x_1=0.606531,\quad ,x_2=0.545239,\ \cdots,\quad x_{23}=0.567143.$$

不动点迭代法的局部收敛性

- 定理1.3 若$\phi(x)$在方程$x=\phi(x)$的根α的邻域内有一阶连续的导数，且$|\phi'(\alpha)| < 1$,则迭代过程$x_{k+1}=\phi(x_k)$具有局部收敛性.
- 证 由连续函数性质，存在α的充分小邻域

  Δ: $|x-\alpha|\le\delta$, 使当$x\in\Delta$时，有

$$|\phi'(x)|\le L<1$$

由微分中值定理有

$$|\phi(x)-\alpha|=|\phi(x)-\phi(\alpha)|=|\phi'(\xi)||x-\alpha|<|x-\alpha|\le\delta$$

故$\phi(x)\in\Delta$，由定理1.1知对任意初值$x_0\in\Delta$均收敛.

不动点迭代法的局部收敛阶

- 定理1.4 若$\phi(x)$在方程$x = \phi(x)$的根α的邻域内有充分阶连续的导数，则迭代过程
$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$
在α邻域是p阶收敛的充分且必要条件是
$$\phi^{(j)}(\alpha) = 0, j = 1,2,\cdots,p-1$$
$$\phi^{(p)}(\alpha) \neq 0$$

- 证 充分性

$$x_{k+1}=\phi(x_k)$$

$$=\varphi(\alpha)+\varphi'(\alpha)(x_k-\alpha)+\cdots+\frac{1}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(\alpha)(x_k-\alpha)^{p-1}$$

$$+\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi)(x_k-\alpha)^p$$

$$x_{k+1}-\alpha=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi)(x_k-\alpha)^p$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^p}=\frac{1}{p!}\left|\varphi^{(p)}(\alpha)\right|\neq 0$$

- 必要性(反证法) 设迭代法$x_{k+1}=\phi(x_k)$是p阶局部收敛的，如果结论不成立，那么必有最小正整数$p_0 \neq p$，使得

$$\phi^{(j)}(\alpha)=0, j=1,2,\cdots,p_0-1$$

$$\phi^{(p_0)}(\alpha)\neq 0$$

由充分性的证明知此迭代法是p_0阶局部收敛的, 矛盾. 必要性得证.

例　能不能用迭代法求解方程x=4-2^x，如果不能时，试将方程改写成能用迭代法求解的形式.

- 方程为x-4+2^x=0.设$f(x)=x-4+2^x$，则$f(1)<0$，$f(2)>0$，$f'(x)=1+2^x\ln2>0$,故方程$f(x)=0$仅在区间(1, 2)内有唯一根.题中 $\phi(x)=4-2^x$，当$x\in[1,2]$时,$|\phi'(x)|=|-2^x\ln2|\geq2\ln2>1$,由定理1.1不能用 $x_{k+1}=4-2^{x_k}$ 来迭代求根.

  把原方程改写为$x=\ln(4-x)/\ln2$, 此时$\phi(x)=\ln(4-x)/\ln2$, 则有

  1°当$x\in[1,2]$时，$\phi(x)\in[1,\ln3/\ln2]\subset[1,2]$

  2° $\forall x\in[1,2]$，有

$$|\phi'(x)|=\left|\frac{-1}{4-x}\cdot\frac{1}{\ln2}\right|\leq\frac{1}{4-2}\cdot\frac{1}{\ln2}=\frac{1}{2\ln2}<1$$

  由定理1.1知可用迭代公式$x_{k+1}=\ln(4-x_k)/\ln2$来求解(1,2)区间内的唯一根.

例　设$F(x)=x+c(x^2-3)$，应如何选取c才能使迭$x_{k+1}=F(x_k)$代具有局部收敛性？

- 方程$x=F(x)$的根为 $\alpha_1=-\sqrt{3}$, $\alpha_2=\sqrt{3}$，函数$F(x)$在根附近具有连续一阶导数，又$F'(x)=1+2cx$，

解$\left|F'(-\sqrt{3})\right|=\left|1-2\sqrt{3}c\right|<1$　得$0<c<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

解 $\left|F'(\sqrt{3})\right|=\left|1+2\sqrt{3}c\right|<1$　得$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<c<0$

从而使迭代$x_{k+1}=F(x_k)$ 具有局部收敛性,则$|c|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，且$c\neq 0$.

令$F'(-\sqrt{3})=1-2\sqrt{3}c=0$ 得 $c=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$；

令 $F'(\sqrt{3})=1+2\sqrt{3}c=0$, 得 $c=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

这时 $F''(x)=2c\neq 0$

故当c取$\pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$时，为平方收敛,这时迭代收敛较快.

Newton迭代法

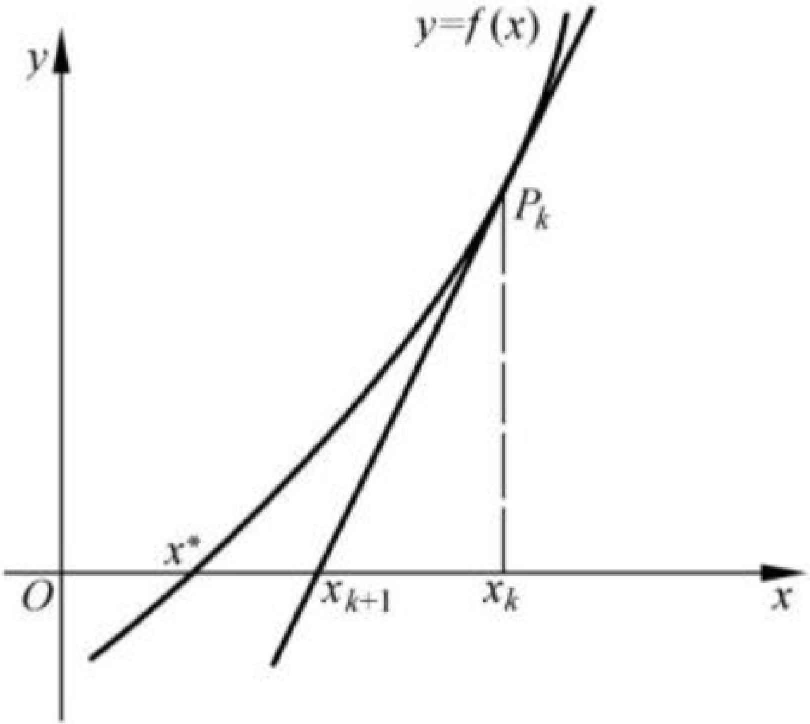
Newton迭代法

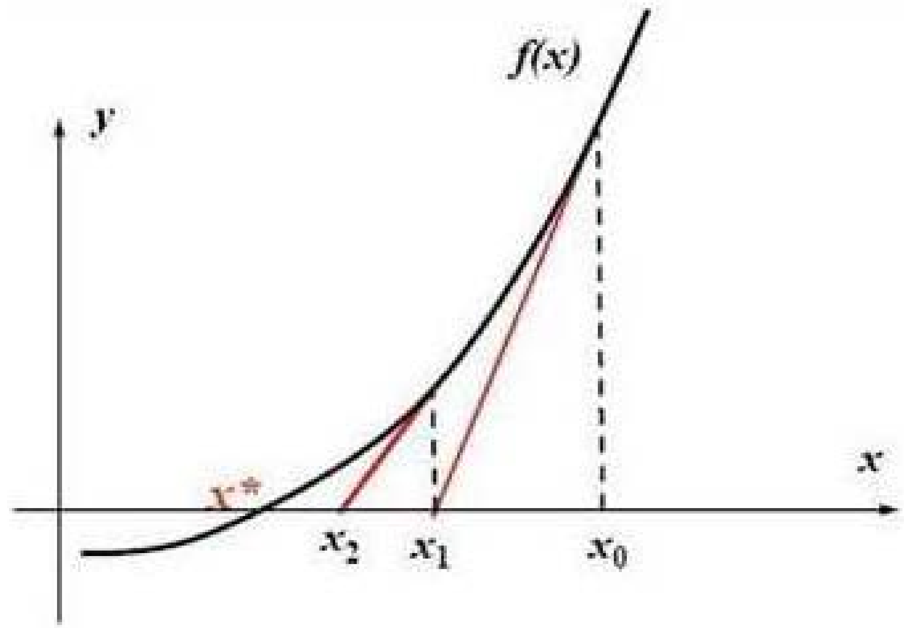
- 设有方程$f(x)=0$，在$f(x)=0$的根α附近任取一点x_0作为初始近似根，由迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

逐次逼近方程$f(x)=0$的根α，这种求根算法称为Newton法（切线法），此公式称为Newton迭代公式.

Newton迭代法





Newton迭代法是局部收敛的方法。它是否收敛，与初值的选择有关。当初值x_0的选取充分接近根α时，一般可保证迭代收敛。

Newton迭代法的局部收敛性及收敛阶

- Newton法的迭代函数是 $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

从而

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

由此知若α是$f(x)$=0的一个单根, $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq 0$, $\varphi'(\alpha)=0$, $\varphi''(\alpha)=f''(\alpha)/f'(\alpha)$, 则在根$\alpha$附近Newton法是局部收敛的, 并且是二阶收敛的,即 $p=2$.

$$EI = 2^{\frac{1}{1+\theta_1}}$$

但如果α是$f(x)$=0的重根，则Newton法仅是局部线性收敛的 ,即 $p=1$.

事实上，若α是$f(x)=0$的重根，设其重数为r,

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$=x-\frac{f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\cdots+\frac{1}{(r-1)!}f^{(r-1)}(\alpha)(x-\alpha)^{r-1}+\frac{1}{r!}f^{(r)}(\xi_1)(x-\alpha)^r}{f'(\alpha)+f''(\alpha)(x-\alpha)+\cdots+\frac{1}{(r-2)!}f^{(r-1)}(\alpha)(x-\alpha)^{r-2}+\frac{1}{(r-1)!}f^{(r)}(\xi_2)(x-\alpha)^{r-1}}$$

$$=x-\frac{1}{r}\frac{f^{(r)}(\xi_1)}{f^{(r)}(\xi_2)}(x-\alpha)$$

$$\varphi(x)-\varphi(\alpha)=(x-\alpha)-\frac{1}{r}\frac{f^{(r)}(\xi_1)}{f^{(r)}(\xi_2)}(x-\alpha)$$

$$\varphi'(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}\frac{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}{x-\alpha}=1-\frac{1}{r}\neq 0,\quad \left|\varphi'(\alpha)\right|<1$$

例　设a为正实数，试建立求 $\frac{1}{a}$ 的Newton迭代公式，要求在迭代函数中不用除法运算，并要求当取初值x_0满足 $0 < x_0 < \frac{2}{a}$ 时，此算法是收敛的.

- 解　考虑方程　$f(x) = \frac{1}{x} - a = 0$

则 $\frac{1}{a}$ 为此方程的根，$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$，用Newton法求此方程根的迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k(2 - ax_k) \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

迭代函数不含除法运算.

$$1 - ax_{k+1} = 1 - ax_k(2 - ax_k) = (1 - ax_k)^2 \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

递推可得

$$1 - ax_k = (1 - ax_0)^{2^k} \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

解得 $x_k = \frac{1}{a}[1-(1-ax_0)^{2^k}] \qquad (k=0,1,2,\cdots)$

当 $0 < x_0 < \frac{2}{a}$ 时，$|1-ax_0| < 1$，从而 $\lim_{k\to\infty}(1-ax_0)^{2^k} = 0$

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \frac{1}{a}$$

此算法收敛.

Newton迭代法的全局收敛性

- 定理1.5 设$f(x)$在有根区间$[a, b]$上二阶导数存在，且满足

(1) $f(a)f(b)<0$; （保证根的存在）

(2) $f'(x)\neq 0,\ x\in[a, b]$; （单调，根唯一）

(3) $f''(x)$不变号, $x\in[a, b]$; （凹向不变）

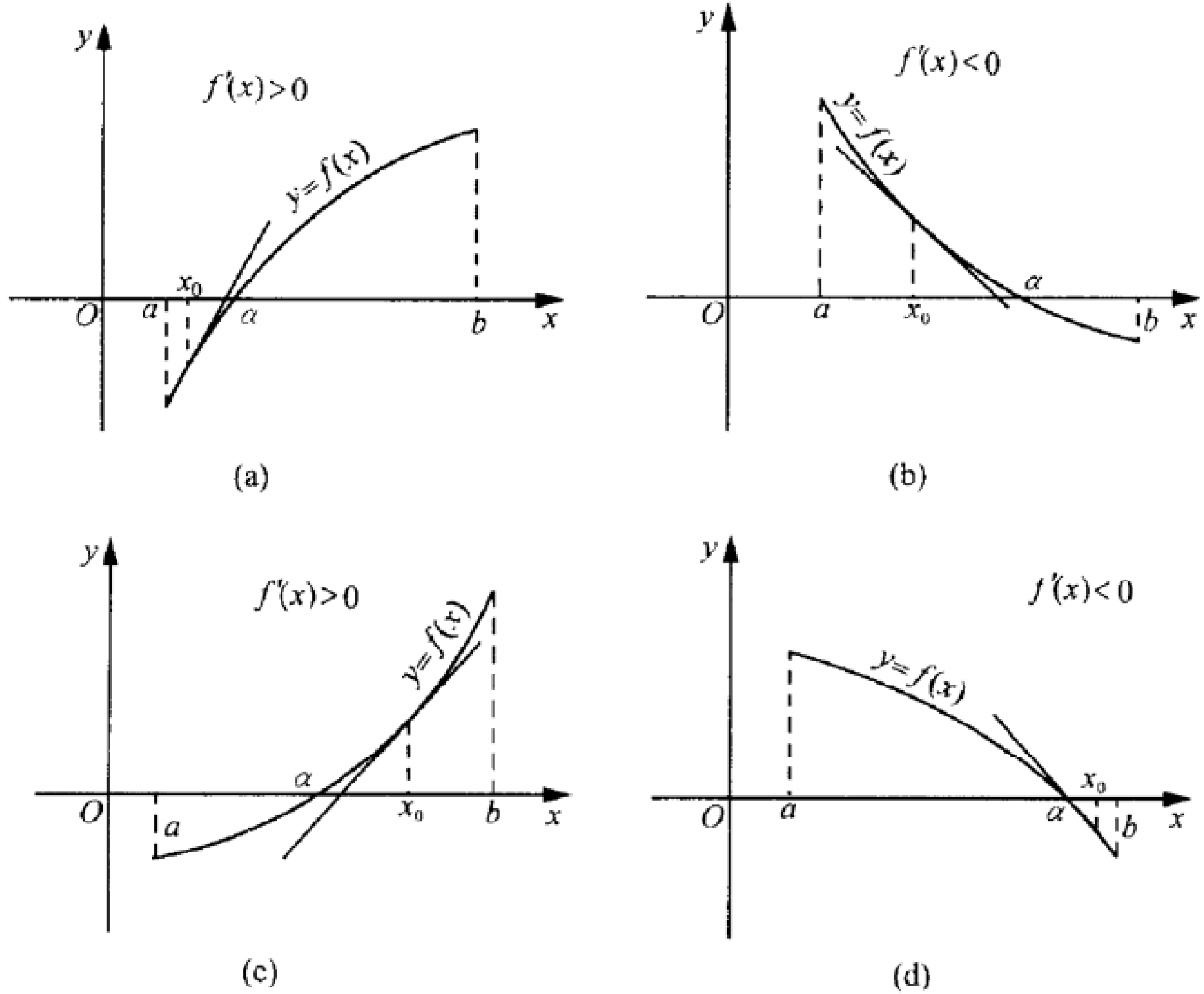
(4) 初值$x_0\in[a, b]$且使$f''(x_0)f(x_0)>0$;

（保证$x\in[a,b]$时，$\phi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}\in[a,b]$）

则 Newton 迭代法收敛于$f(x)=0$在$[a, b]$内的唯一根.

Newton迭代法的全局收敛性

定理1.5几何解释



例 研究求$\sqrt{a}$的Newton公式 $x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k}), x_0>0 \quad (k=0,1,2,\cdots$

证明(1)对一切 $k=1,2,\cdots,\quad x_k \ge \sqrt{a}$, 且序列$\{x_k\}$是单调递减的,
(2)对任意的初值$x_0>0$，此Newton迭代公式收敛到$\sqrt{a}$.

- 证 （1）因$a>0$，$x_0>0$,故$x_k>0$ $(k=1,2,\ldots)$.

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k})$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{x_k}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_k}})^2+\sqrt{a}\ge\sqrt{a}$$

因此对一切$k\ge 1$,均有 $x_k \ge \sqrt{a}$，利用这一结果，得

$$\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{1}{2}\frac{x_k+a/x_k}{x_k}=\frac{1}{2}+\frac{a}{2x_k^2}\le\frac{1}{2}+\frac{a}{2a}=1$$

故$x_{k+1}\le x_k$,即$\{x_k\}$单调递减.根据单调有界原理知,$\{x_k\}$收敛.

例 研究求$\sqrt{a}$的Newton公式 $x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k}), x_0>0 \quad (k=0,1,2,\cdots$

证明(1)对一切 $k=1,2,\cdots, \quad x_k \geq \sqrt{a}$，且序列$\{x_k\}$是单调递减的，
(2)对任意的初值$x_0>0$，此Newton迭代公式收敛到$\sqrt{a}$.

- 证

（2）序列$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$是单调递减的，且有下界，必有极限，即$\lim\limits_{k\to\infty} x_k$存在．对任意初值$x_0>0$

$$x_{k+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k})-\sqrt{a}=\frac{1}{2x_k}(x_k-\sqrt{a})^2$$

$$x_{k+1}+\sqrt{a}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k})+\sqrt{a}=\frac{1}{2x_k}(x_k+\sqrt{a})^2$$

两式相除

$$\frac{x_{k+1}-\sqrt{a}}{x_{k+1}+\sqrt{a}}=(\frac{x_k-\sqrt{a}}{x_k+\sqrt{a}})^2$$

反复递推

$$\frac{x_k-\sqrt{a}}{x_k+\sqrt{a}}=(\frac{x_0-\sqrt{a}}{x_0+\sqrt{a}})^{2^k}$$

令

$$q=\frac{x_0-\sqrt{a}}{x_0+\sqrt{a}}$$

例 研究求$\sqrt{a}$的Newton公式 $x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k}), x_0>0 \quad (k=0,1,2,\cdots$

证明(1)对一切 $k=1,2,\cdots, \quad x_k \ge \sqrt{a}$, 且序列$\{x_k\}$是单调递减的,
(2)对任意的初值$x_0>0$, 此Newton迭代公式收敛到$\sqrt{a}$.

- 证

解得

$$x_k=\frac{1+q^{2^k}}{1-q^{2^k}}\sqrt{a}$$

注意到$|q|<1$，因此$\lim\limits_{k\to\infty} q^{2^k}=0$，故

$$\lim_{k\to\infty} x_k=\lim_{k\to\infty}\frac{1+q^{2^k}}{1-q^{2^k}}\sqrt{a}=\sqrt{a}$$

即序列$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$收敛于$\sqrt{a}$.

最后，在求其根为$\sqrt{a}$的过程中，利用

$$\frac{x_{k+1}-\sqrt{a}}{x_{k+1}+\sqrt{a}}=\frac{(x_k-\sqrt{a})^2}{(x_k+\sqrt{a})^2}$$

得

$$\frac{x_{k+1}-\sqrt{a}}{(x_k-\sqrt{a})^2}=\frac{x_{k+1}+\sqrt{a}}{(x_k+\sqrt{a})^2}$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\sqrt{a}}{(x_k-\sqrt{a})^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}+\sqrt{a}}{(x_k+\sqrt{a})^2}=\frac{\lim\limits_{k\to\infty}(x_{k+1}+\sqrt{a})}{\lim\limits_{k\to\infty}(x_k+\sqrt{a})^2}=\frac{2\sqrt{a}}{(2\sqrt{a})^2}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

即迭代公式是计算$\sqrt{a}$的 2 阶方法.

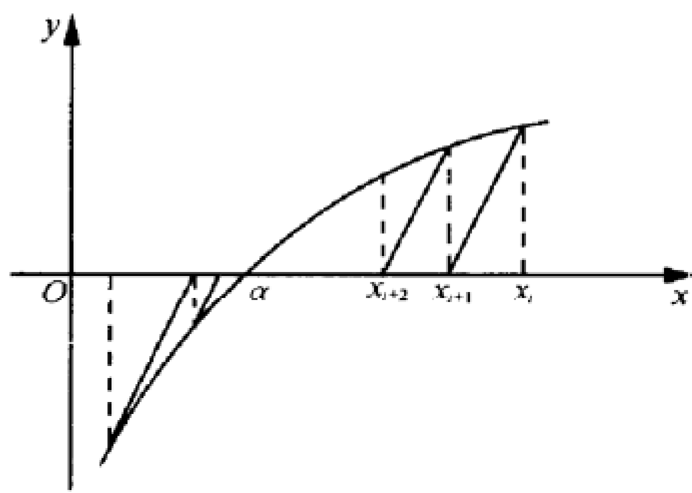
简化 Newton法

- 简化 Newton法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{C}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

一般地，取$C = f'(x_0)$. 若$|\varphi'(x)| = \left|1 - \frac{f'(x)}{C}\right| < 1$,

是一阶收敛的.



Newton下山法

- Newton下山法

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (0 < \lambda < 1), \quad k = 0,1,2,\cdots$$

其中λ为下山因子，λ的选取应满足条件:

$$f(x_{k+1}) < f(x_k), \quad k = 0,1,2,\cdots$$

保证所得序列是收敛的.

$$\phi(x) = x - \lambda \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\phi'(x) = 1 - \lambda \frac{(f'(x))^2 - f''(x)f'(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow \phi'(\alpha) = 1 - \lambda.$$

当$\lambda \neq 1$时，是一阶收敛的。

在实际中，可选择$\lambda = \lambda_i, 0 < \lambda_i < 1$，每次迭代，选择不同的下山因子---单点非定常迭代

- 例如，用牛顿法求解方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 在 $x = 1.5$ 附近的一个根 x^*。
- 设取迭代值 $x_0 = 1.5$，用牛顿法公式 $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1}$

计算得：$x_1 = 1.34783$，$x_2 = 1.32520$，$x_3 = 1.32472$。

迭代3次得到的结果 x_3 有6位有效数字。

但是，如果改用 $x_0 = 0.6$ 作为迭代初值，则依牛顿法公式迭代一次得：$x_1 = 17.9$。这个结果反而比 $x_0 = 0.6$ 更偏离了所求的根 $x^* = 1.32472$。

若用牛顿下山法解方程，当 $x_0=0.6$ 时由牛顿法公式求得 $x_1=17.9$，它不满足条件 $|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$，通过 λ 逐次取半进行试算，当 $\lambda=\frac{1}{32}$ 时可求得 $x_1=1.140625$，此时 $f(x_1)=-0.656643$，而 $f(x_0)=-1.384$，显然 $|f(x_1)|<|f(x_0)|$ 由 x_1 计算 $x_2,x_3,\cdots$ 时 $\lambda=1$，均能使条件成立。计算结果如下：

$$x_2=1.36181,\quad f(x_2)=0.1866$$

$$x_3=1.32628,\quad f(x_3)=0.00667$$

$$x_4=1.32472,\quad f(x_4)=0.000008$$

x_4 即为 x^* 的近似

一般情况下只要能满足条件成立，则可得到 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)=0$ 从而使 $\{x_k\}$ 收敛。

多点迭代法

- 建立迭代公式

$$x_{k+1}=\phi(x_{k-n+1},\dots,x_{k-2},x_{k-1},x_k) \qquad (3)$$

弦截法

弦截法

- 在方程$f(x)=0$的根α附近任取两初始近似根x_0, x_1，由迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}f(x_k)\quad(k=0,1,\cdots)\qquad（1.4.1）$$

或改写为

$$x_{k+1}=\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}x_{k-1}-\frac{f(x_{k-1})}{f(x_{k-1})-f(x_k)}x_k\qquad（1.4.2）$$

逐次逼近$f(x)=0$的根α，这种求根算法称为弦截法（割线法）.

弦截法（割线法）

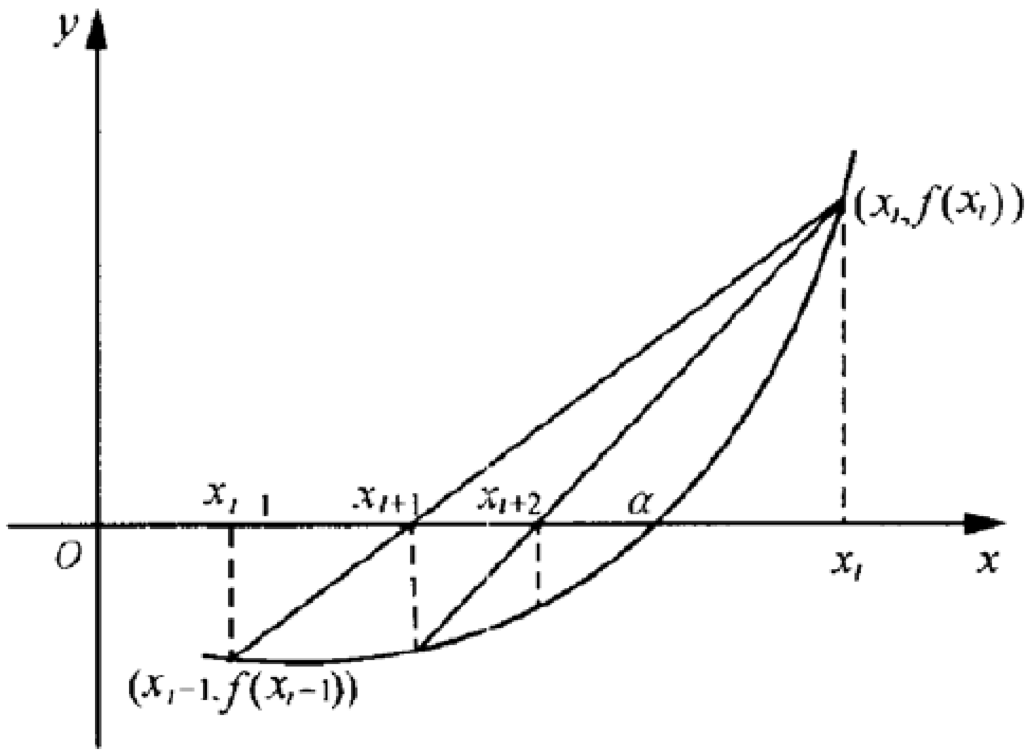


图 1.6　割线法

弦截法局部收敛性和收敛速度

- 定理1.6 设$f(x)$,$f'(x)$和$f''(x)$在包含方程$f(x)=0$的根α的某个区间上连续，并假设$f'(\alpha)\neq 0$。则如果初始值x_0和x_1的选取充分接近根α，那么由分割线公式（1.4.1）或式（1.4.2）产生的迭代序列收敛于根α，收敛阶是

$$\mathrm{p}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$$

- 且有

$$\lim_{\mathrm{i}\to\infty}\frac{|\varepsilon_{i+1}|}{|\varepsilon_i|^p}=\left|\frac{f''(a)}{2f'(a)}\right|^{p-1} \quad （1.4.3）$$

割线法和Newton法的比较

- 现在考虑割线法与Newton法的比较。割线法的收敛阶为$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，且每次迭代仅计算一次$f(x)$，其效率指数为

$$EI_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

而Newton迭代法的效率为

$$EI_2 = 2^{\frac{1}{1+\theta_1}}$$

由直接计算容易知道，若$\theta_1 < 0.44$，则Newton迭代法的计算效率大于割线法，即

$$EI_2 > EI_1$$

割线法和Newton法的比较

- 若 $\theta_1 > 0.44$，则Newton迭代法的计算效率小于割线法，即

$$EI_2 < EI_1$$

因此，对给定的$f(x)$，若要判断是否用割线法或Newton迭代法去解方程$f(x)=0$，则非常合理的根据是估计θ_1，若$\theta_1>0.44$就用割线法，否则使用Newton迭代法。

重根情形的迭代法

已知根的重数r

- 将Newton法修正为

$$x_{k+1} = x_k - r\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

它是求r重根α的二阶收敛格式.

$$e_{k+1} = \alpha - x_{k+1} = \alpha - x_k + r\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{(\alpha - x_k)f'(x_k) + rf(x_k)}{f'(x_k)}$$

记$G(x) = (\alpha - x)f'(x) + rf(x)$

$$G^{(j)}(x) = rf^{(j)}(x) + (\alpha - x)f^{(j+1)}(x) - jf^{(j)}(x)$$

由$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{r-1}(\alpha) = 0$得

$$G^{(j)}(\alpha) = 0, j = 0,1,2,\cdots,r,$$

$$G^{(r+1)}(\alpha) = -f^{(r+1)}(\alpha).$$

在α处将$G(x_k), f'(x_k)$ Taylor展开

$$e_{k+1} = \frac{\frac{1}{(r+1)!} G^{(r+1)}(\xi_1) e_k^{r+1}}{\frac{1}{(r-1)!} f^{(r)}(\xi_2) e_k^{r-1}} = \frac{G^{(r+1)}(\xi_1)}{r(r+1) f^{(r)}(\xi_2)} e_k^2$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{e_k^2} = \frac{1}{r(r+1)} \left| \frac{G^{(r+1)}(\alpha)}{f^{(r)}(\alpha)} \right| \neq 0$$

从而它是具有二阶局部收敛的格式.

根的重数未知

将Newton法修正为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{u'(x_k)} \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

其中$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$.

$u(x) = 0$的单根就是$f(x) = 0$的r重根，故它是求$f(x) = 0$重根的二阶局部收敛格式.

事实上，设α是$f(x) = 0$的r重根

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-\alpha)^r g(x)}{r(x-\alpha)^{r-1} g(x) + (x-\alpha)^r g'(x)}$$

$$= \frac{g(x)}{rg(x) + (x-\alpha) g'(x)} (x-\alpha)$$

α为$u(x) = 0$的单根.

例 方程$x^4-4x^2+4=0$的根$\alpha=\sqrt{2}$是二重根，用下列方法求根

(1) Newton迭代法(1.3.11);

(2)修正的Newton迭代法 (1.5.2);

(3)修正的Newton迭代法 (1.5.4).

- 解 三种方法的迭代公式:

Newton迭代法 $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-2}{4x_k}$

修正的Newton迭代法 (1.5.2) $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-2}{2x_k}$

修正的Newton迭代法 (1.5.4) $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k(x_k^2-2)}{x_k^2+2}$

取初值x_0=1.5,计算结果如表:

k	x_k	方法(1)	方法(2)	方法(3)
1	x_1	1.458333333	1.416666667	1.411764706
2	x_2	1.436607143	1.414215686	1.414211438
3	x_3	1.425497619	1.414213562	1.414213562

计算三步方法(2)和方法(3)均达到10位有效数字，而牛顿法只有线性收敛，要达到同样精度，需迭代30次.