

数理逻辑第一次作业

姓名	谢宇航	班级	5	学号	200110505
第 1 题					
第 2 题					
第 3 题					
第 4 题					
总分					
备注	<div>1. 作业提交邮箱：hitsz_logic_2022@163.com。作业提交截止时间：2022-05-21-24:00，超过提交截止时间的作业视为无效。</div> <div>2. 确因网络等特殊原因无法及时提交作业的学生，应至少提前 1 小时与助教联系沟通（徐朕燃，QQ：1319282215，电话：13713994811）。</div> <div>3. 作业文件名命名方式：<u>第 x 次-学号-姓名-x 班</u>（例：第 1 次-180110504-张三-5 班.pdf）；邮件主题为：<u>第 x 次-学号-姓名-x 班</u>（例：第 1 次-180110504-张三-5 班）。缺少这些信息的作业将被酌情扣分。注意作业次数以阿拉伯数字命名。</div> <div>4. 可手写拍照转为 PDF 格式。</div>				

1.

解：

(1) 令 $r = "A \text{ 是大学里的学生}"$, $p = "A \text{ 是本科生}"$, $q = "A \text{ 是研究生}"$

"大学里的学生不是本科生就是研究生"可表示为 $r \rightarrow p \vee q$

(2) 令 $p = "接到超速罚单"$, $q = "车速超过每小时 100 \text{ 公里}"$

"只要你接到超速罚单, 你的车速就超过每小时 100 公里"可表示为 $p \rightarrow q$

(3) 令 $p = "年满 18 \text{ 周岁}"$, $q = "具有选举权"$

"除非你年满 18 周岁, 否则你没有选举权"可表示为 $q \rightarrow p$

2.

解：

(1)

对于 v , $st A^v = 1$

$$(B \rightarrow A)^v = (\neg B)^v \vee A^v = 1$$

故该逻辑蕴含成立

(2)

由逻辑等价的推论, 对于任意赋值 v 均有 $A^v = B^v$ 即可推出 $A \Leftrightarrow B$

$$\text{对于 } \forall v, (\neg A \rightarrow \neg B)^v = 1 - (\neg A)^v + (\neg A)^v (\neg B)^v = 1 - (1 - A^v) + (1 - A^v)(1 - B^v) = 1 - B^v + A^v B^v$$

$$\text{又 } \because (B \rightarrow A)^v = 1 - B^v + A^v B^v$$

$$\therefore \text{对于任意赋值 } v \text{ 均有 } (\neg A \rightarrow \neg B)^v = (B \rightarrow A)^v, \text{ 所以 } \neg A \rightarrow \neg B \Leftrightarrow B \rightarrow A$$

故该逻辑等价成立

(3)

$$\text{对于 } \forall v, (A \rightarrow (B \rightarrow C))^v = 1 - A^v + A^v (B \rightarrow C)^v = 1 - A^v + A^v (1 - B^v + B^v C^v) = 1 - A^v B^v + A^v B^v C^v = 1$$

$$\text{而 对于 } ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))^v = ((1 - A^v + A^v B^v) \rightarrow (1 - A^v + A^v C^v))^v = 1 - (1 - A^v + A^v B^v) + (1 - A^v + A^v B^v)(1 - A^v + A^v C^v) = 1 - A^v B^v + A^v B^v C^v = 1$$

$$\text{故 } \forall v \text{ 使得 } (A \rightarrow (B \rightarrow C))^v = 1 \text{ 即可使得 } ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))^v \text{ 为真}$$

故该逻辑蕴含成立

(4)

由逻辑等价的推论, 对于任意赋值 v 均有 $A^v = B^v$ 即可推出 $A \Leftrightarrow B$

$$\text{对于 } \forall v, (A \rightarrow (B \rightarrow C))^v = 1 - A^v + A^v (B \rightarrow C)^v = 1 - A^v + A^v (1 - B^v + B^v C^v) = 1 - A^v B^v + A^v B^v C^v$$

$$\text{又 } \because (A \wedge B \rightarrow C)^v = 1 - (A \wedge B)^v + (A \wedge B)^v C^v = 1 - A^v B^v + A^v B^v C^v$$

$$\therefore \text{对于任意赋值 } v \text{ 均有 } A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow A \wedge B \rightarrow C$$

故该逻辑等价成立

(5)

由逻辑等价的推论, 对于任意赋值 v 均有 $A^v = B^v$ 即可推出 $A \Leftrightarrow B$

对于 $\forall v$, $(A \vee B \rightarrow C)^v = 1 - (A \vee B)^v + (A \vee B)^v C^v = 1 - (A^v + B^v - A^v B^v) + (A^v + B^v - A^v B^v) C^v = 1 - A^v - B^v + A^v B^v + A^v C^v + B^v C^v - A^v B^v C^v$

对于 $\forall v$, $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))^v = (1 - A^v + A^v C^v)(1 - B^v + B^v C^v) = 1 - A^v - B^v + A^v C^v + A^v B^v + B^v C^v - A^v B^v C^v$

\therefore 对于 $\forall v$, 均有 $(A \vee B \rightarrow C)^v = ((A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C))^v$

故该逻辑等价成立

(6)

对于指派 v , $st A^v = 0, B^v = 0, C^v = 0, D^v = 0$

$\neg A \vee B = 1, A \rightarrow B \wedge C = 1, D \rightarrow B = 1$

但是 $\neg B \rightarrow C = 0$

故该逻辑蕴含不成立

3.

解:

(1) 根据题意

$\neg(q \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow \neg s)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg q \vee p) \wedge (\neg r \vee \neg s)$

$\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg s)$

$\Leftrightarrow q \wedge \neg p \wedge (\neg r \vee \neg s)$ (合取范式)

$\Leftrightarrow (q \wedge \neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p \wedge \neg s)$ (析取范式)

(2) 根据题意

$\neg p \wedge q \rightarrow r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge q) \vee r$

$\Leftrightarrow (p \vee \neg q) \vee r$

$\Leftrightarrow p \vee \neg q \vee r$ (合取范式、析取范式)

(3) 根据题意

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge q$

$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge q)) \vee ((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q))$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ (合取范式)

$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg p) \vee ((p \vee q) \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge q)) \vee ((\neg q \wedge p) \vee (q \wedge \neg q))$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$ (析取范式)

4.

(1) 根据题意

$\neg p \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ (主析取范式)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee q \quad (\text{主合取范式})$$

(2) 根据题意

$$p \vee q \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (q \rightarrow r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r)) \vee (\neg q \wedge (p \vee \neg p)) \vee (r \wedge (p \vee \neg p))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge p \wedge (r \vee \neg r)) \vee (\neg q \wedge \neg p \wedge (r \vee \neg r)) \\ \vee (r \wedge p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (r \wedge \neg p \wedge (q \vee \neg q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \\ r) \quad (\text{主析取范式})$$

$$\Leftrightarrow (\neg q \vee r \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee r \vee (p \wedge \neg p))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \quad (\text{主合取范式})$$

(3) 根据题意

$$(p \rightarrow p \wedge q) \vee r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee (p \wedge q)) \vee r$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)) \vee r$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee q \vee r \quad (\text{主合取范式})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (q \wedge (p \vee \neg p)) \vee (r \wedge (p \vee \neg p))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge (r \vee \neg r)) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r)) \vee (p \wedge q \wedge (r \vee \neg r)) \vee (p \wedge r \wedge (q \vee \neg q)) \\ \vee (\neg p \wedge r \wedge (q \vee \neg q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \\ r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \quad (\text{主析取范式})$$