第二章

线性方程组的数值解法

- 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- 对于线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$,

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

若系数阵$\boldsymbol{A}$非奇异，则方程组有唯一解.

本章只讨论系数矩阵为非奇异的线性方程组.

计算机上求解线性方程组的有效数值方法

- 直接法

直接解法是解线性方程组的重要方法. 它是指通过有限步的算术运算求出精确解的方法（若计算过程没有舍入误差）. 其基本思想是通过等价变换将线性方程组化为结构简单、易于求解的形式，从而求解.

- 迭代法

  迭代法的基本思想是用某种极限过程逐次逼近方程组的解的方法，是解线性方程组的重要方法.它具有占有储存单元少、程序设计简单、原始系数矩阵在计算过程中不变的优点，但需考虑收敛性和收敛速度问题.

§2.1 向量、矩阵的范数

向量的范数

- 设$\mathbf{R}^n$为实n维向量空间, $\mathbf{C}^n$为复n维向量空间.
- 定义　若$\mathbf{R}^n$ (或$\mathbf{C}^n$) 上任一向量$\boldsymbol{x}$，对应一个非负实数$\|\boldsymbol{x}\|$，满足如下条件

(I) 非负性：$\|\boldsymbol{x}\|\geq 0$ 且 $\|\boldsymbol{x}\|=0 \Leftrightarrow x=\mathbf{0}$

(II) 齐次性：$\|\lambda \boldsymbol{x}\|=|\lambda|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$，$\forall \lambda\in\mathbf{R}$ (或$\mathbf{C}$)

(III) 三角不等式

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\| \quad ,\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n \ (\text{或}\mathbf{C}^n)$$

则称$\|\boldsymbol{x}\|$为向量x的一种范数.

常用的向量范数

- 设$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$,

1-范数：$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

2-范数：$\|\boldsymbol{x}\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

∞-范数：$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$

p-范数：$\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

范数的有关定理

- 定理2.1(范数连续性定理) 设$f(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|$为$\mathbf{R}^n$上任一向量范数, 则$f(\boldsymbol{x})$是$\boldsymbol{x}$的连续函数.
- 定理2.2(范数等价性定理) 设$\|\boldsymbol{x}\|_s$, $\|\boldsymbol{x}\|_t$为$\mathbf{R}^n$上任意两种向量范数, 则存在常数$c_1, c_2>0$，使得

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|_s \le \|\boldsymbol{x}\|_t \le c_2\|\boldsymbol{x}\|_s, \quad \forall \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$$

- 定理2.3 向量序列$\{\boldsymbol{x}^k\}$收敛于$\boldsymbol{x}^*$的充分且必要条件是

$$\|\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{x}^*\|\to 0,\ k\to\infty$$

其中$\|\cdot\|$是任一向量范数.

例

- $\boldsymbol{x}=(3,-1,5,8)^{\mathrm{T}}$,求 $\|\boldsymbol{x}\|_1, \|\boldsymbol{x}\|_2, \|\boldsymbol{x}\|_\infty$
- 解 $\|\boldsymbol{x}\|_1 = |3| + |-1| + |5| + |8| = 17$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 5^2 + 8^2} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|3|, |-1|, |5|, |8|\} = 8$$

矩阵的范数

- 定义 若$\mathbf{R}^{n\times n}$ (或$\mathbf{C}^{n\times n}$)上任一矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,对应一个非负实数$\|\boldsymbol{A}\|$ ，满足以下条件:

（I）非负性： $\|\boldsymbol{A}\|\geq 0$ 且 $\|\boldsymbol{A}\|=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\mathbf{0}$

（II）齐次性：$\|\lambda\boldsymbol{A}\|=|\lambda|\cdot\|\boldsymbol{A}\|$, $\forall\lambda\in\mathbf{R}$ (或$\mathbf{C}$)

（III）三角不等式： $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|\leq\|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{B}\|$,$\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ (或$\mathbf{C}^{n\times n}$)

（IV） $\|\boldsymbol{AB}\|\leq\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{B}\|$, $\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ (或$\mathbf{C}^{n\times n}$)

则称 $\|\boldsymbol{A}\|$为矩阵$\boldsymbol{A}$的一种范数.

- 例 对于实矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$

$$\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

是一种矩阵范数,称为矩阵的Frobenius范数,
简称矩阵的F范数.
(视其为n^2维向量的2-范数,再利用矩阵乘法与Cauchy不等式证明条件（IV）即可)

- 定义 对于给定向量范数$\|\cdot\|$和矩阵范数$\|\cdot\|$，如果对任何向量$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ (或$\mathbf{C}^n$)和$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ (或$\mathbf{C}^{n\times n}$),都有不等式$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|\le\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$ 成立，则称所给的矩阵范数与向量范数是相容的.

定义 设$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ (或$\mathbf{C}^n$)和$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ (或$\mathbf{C}^{n\times n}$)，且给定一种向量范数$\|\cdot\|_v$，称

$$\|\boldsymbol{A}\|_v=\max_{x\neq 0}\frac{\|\boldsymbol{Ax}\|_v}{\|\boldsymbol{x}\|_v} \quad \text{或} \quad \|\boldsymbol{A}\|_v=\max_{\|\boldsymbol{x}\|_v=1}\|\boldsymbol{Ax}\|_v$$

为矩阵$\boldsymbol{A}$的由向量范数$\|\boldsymbol{x}\|_v$产生的从属范数或算子范数.

单位矩阵的任一种从属范数都为1.

从属范数一定与所给定的向量范数相容.

矩阵的从属范数$\|\boldsymbol{A}\|_v$依赖于向量范数$\|\boldsymbol{x}\|_v$的具体含义.

由向量1-范数,2-范数, ∞ -范数产生的从属范数分别为

- 定理　设n阶方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，则

1-范数：$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

2-范数：$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)}$，$A^H$是$A$的共轭转置

∞-范数：$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

矩阵的谱半径

- 定义设n阶方阵A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$，则称

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$$

为A的谱半径（$|\lambda_i|$为λ_i的模）.

对于任意从属范数$\|\cdot\|$， $\rho(\boldsymbol{A})\le\|\boldsymbol{A}\|$

但当A是正规矩阵，即$A A^H = A^H A$时，

$$\rho(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_2$$

显然若A为实对称矩阵，则$\rho(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_2$

矩阵范数也有相应向量范数三个定理的结论.

例

- 计算方阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix}$

的各种常用范数 $\|A\|_1,\|A\|_\infty,\|A\|_2,\|A\|_F$

- 解 $$\|A\|_1=\max_{1\le j\le 3}\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}|=\max\{1,4,8\}=8$$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le 3}\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|=\max\{1,6,6\}=6$$

$$\|A\|_F=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{41}$$

$$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 32\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$的特征方程为

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}\text{-}\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-8 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-32\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-8)(\lambda-32)=0$$

所以$\rho(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})=32$， $\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

解线性方程组的直接法

§2.2 消去法

Gauss消去法

思想：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{d}$ (其中$\boldsymbol{B}$是上三角阵)

求解$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{d}$

Gauss消去法包括消元过程和回代过程两个环节

（一）消元过程

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} r_1 \\ i=2,3,\cdots,n}]{\substack{\text{第一步} \\ a_{11}\neq 0}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{A}_1 \vdots \boldsymbol{b}_1)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_i-\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}r_2\\ i=3,4,\cdots,n}]{\substack{\text{第二步}\\ a_{22}^{(1)}\neq 0}}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{A}_2 \vdots \boldsymbol{b}_2) \to \cdots$$

$$\xrightarrow[\substack{r_i-\frac{a_{i,k-1}^{(k-2)}}{a_{k-1,k-1}^{(k-2)}}r_{k-1}\\ i=k,\cdots,n}]{\substack{\text{第}k-1\text{步}\\ a_{k-1k-1}^{(k-2)}\neq 0}}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2k}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} & b_k^{(k-1)} \\ & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k-1)} & \cdots & a_{nn}^{(k-1)} & b_n^{(k-1)} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{A}_{k-1} \vdots \boldsymbol{b}_{k-1})$$

$$
\xrightarrow[\substack{r_i-\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}r_k \\ i=k+1,\cdots,n}]{\substack{\text{第}k\text{步} \\ a_{kk}^{(k-1)}\neq 0}}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2k}^{(1)} & a_{2k+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{kk}^{(k-1)} & a_{kk+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} & b_k^{(k-1)} \\
 & & & & a_{k+1k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1n}^{(k)} & b_{k+1}^{(k)} \\
 & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & a_{nk+1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)}
\end{pmatrix}
=(\boldsymbol{A}_k \vdots \boldsymbol{b}_k)\rightarrow\cdots
$$

$$
\xrightarrow[r_n-\frac{a_{nn-1}^{(n-2)}}{a_{n-1n-1}^{(n-2)}}r_{n-1}]{\substack{\text{第}n-1\text{步} \\ a_{n-1n-1}^{(n-2)}\neq 0}}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)}
\end{pmatrix}
=(\boldsymbol{A}_{n-1} \vdots \boldsymbol{b}_{n-1})
$$

- $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, b_i^{(0)} = b_i$
- 对 k=1,2,…,(n-1)，依次计算

$$\begin{cases} m_{ik} = a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \\ a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)} \\ b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik} b_k^{(k-1)} \end{cases} \qquad (i, j = k+1, k+2, \cdots, n)$$

- （二）回代过程

$$x_i = (b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j) / a_{ii}^{(i-1)} \quad (i = n, n-1, \cdots, 1)$$

列选主元的Gauss消去法

- Gauss消去法能够进行到底的条件是各步的主元素$a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$. 另外既使主元素$a_{kk}^{(k-1)}$不为零，但如果主元素的绝对值很小，用它作除数，势必造成舍入误差的严重扩散，以致于方程组的解的精度受到严重影响，为此引入选主元的方法，列选主元的具体方法如下：

- 对方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$仍按$x_1,x_2,\ldots$的顺序依次消元，只是在每一步消元前都增加一步按列选主元的工作，如第k步消元前，就所有$a_{\mu k}^{(k-1)}(\mu=k,k+1,\cdots,n)$，取绝对值最大者，设$\left|a_{lk}^{(k-1)}\right|=\max\limits_{k\le\mu\le n}\left|a_{\mu k}^{(k-1)}\right|$,将第$l$个方程与第$k$个方程互换位置，这样 $a_{lk}^{(k-1)}$成为第k步的主元素，然后进行第k步消元. 每步消元都如此，最后再进行回代过程，得出方程组的解.

全选主元的Gauss消去法

- 对方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$仍按$x_1,x_2,\ldots$的顺序依次消元，只是在每一步消元前都增加一步全选主元的工作，如第k步消元前，就所有$a_{ij}^{(k-1)}(i,j=k,k+1,\cdots,n)$，取绝对值最大者，设$\left|a_{ls}^{(k-1)}\right|=\max\limits_{\substack{k\le i\le n\\ k\le j\le n}}\left|a_{ij}^{(k-1)}\right|$，将第$l$个方程与第$k$个方程互换位置，变元$x_s,x_k$互换位置，这样$a_{ls}^{(k-1)}$成为第$k$步的主元素，然后进行第$k$步消元. 每步消元都如此，最后再进行回代过程，得出方程组的解.

- 选主元的Gauss消去法能压制计算过程中舍入误差的增长，减少舍入误差对计算结果的影响.

例

- 利用Gauss消去法求解方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 解 （1）消元过程用矩阵表示为

$$\left[\boldsymbol{A}^{(0)} \vdots \boldsymbol{b}^{(0)}\right]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 & 7 \\ -2 & -2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2-2r_1 \\ r_3+2r_1 \\ r_4-r_1}]{\text{第一步}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{\text{第二步}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4-\frac{1}{3}r_3]{\text{第三步}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -7 \end{bmatrix}$$

$$=\left[\boldsymbol{A}^{(3)} \vdots \boldsymbol{b}^{(3)}\right]$$

经三步消元后；原方程组化为同解的上三角形方程组$\boldsymbol{A}^{(3)}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}^{(3)}$.

- （2）回代过程

对方程组$\boldsymbol{A}^{(3)}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}^{(3)}$自下而上按未知元$x_i$的下标逆序逐步回代得原方程组的解为

$x_4=-1,\ x_3=2,\ x_2=-1,\ x_1=2$, 即$\boldsymbol{x}=(2,-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$

例

- 用选列主元素的Gauss法解下列方程组

$$\begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 4 \\ -18 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -15 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- 解 消元过程用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 4 & 15 \\ \boxed{-18} & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_1]{\text{选主元}} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 4 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+\frac{1}{18}r_1 \\ r_4+\frac{1}{6}r_1}]{\substack{\text{第一步消元} \\ r_2+\frac{2}{3}r_1}} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & \frac{10}{3} & 5 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & \boxed{\frac{3}{2}} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 \leftrightarrow r_2]{\text{选主元}} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & \frac{10}{3} & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+(-\frac{7}{9})r_2 \\ r_4+\frac{2}{3}r_2}]{\text{第二步消元}} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{50}{27}} & \frac{8}{27} & \frac{50}{9} \\ 0 & 0 & \frac{14}{9} & \frac{35}{9} & \frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+(-\frac{21}{25})r_3]{\text{第三步消元}} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{50}{27} & \frac{8}{27} & \frac{50}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{91}{25} & 0 \end{bmatrix}$$

- 得同解上三角方程组

$$\begin{cases} -18x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -15 \\ \dfrac{3}{2}x_2 - \dfrac{7}{6}x_3 + \dfrac{5}{6}x_4 = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{50}{27}x_3 + \dfrac{8}{27}x_4 = \dfrac{50}{9} \\ \dfrac{91}{25}x_4 = 0 \end{cases}$$

- 回代求解得$x_4=0, x_3=3, x_2=2$, $x_1=1$, 即$\boldsymbol{x}=(1,2,3,0)^T$

§2.3 矩阵三角分解法

- 如果A的所有顺序主子式均不为零，则A可唯一分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$$

其中$\boldsymbol{L}$为单位下三角阵，$\boldsymbol{U}$为上三角阵.

以下讨论中都假设上述条件成立.

求解$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$求解$\begin{cases}\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\end{cases}$

Doolittle分解法(直接三角分解法)

- i）分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$, 其中$\boldsymbol{L}$为单位下三角阵，$\boldsymbol{U}$为上三角阵. 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}=\boldsymbol{LU}$$

利用矩阵运算比较两边得其分解公式:对k=1,2,3,…n，

$$\begin{cases} u_{kj}=a_{kj}-\sum\limits_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj} & (j=k,k+1,\cdots,n) \\ l_{ik}=\left(a_{ik}-\sum\limits_{r=1}^{k-1} l_{ir}u_{rk}\right)\Big/u_{kk} & (i=k+1,k+2,\cdots,n) \end{cases}$$

其中 $\sum\limits_{1}^{0}=0$

求解$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$⇔求解 $\begin{cases} \boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y} \end{cases}$

- ii）求解方程组$\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}$，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- 其计算公式为

$$y_k=b_k-\sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} y_r \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

- 其中 $\sum_{1}^{0}=0$

- iii）求解方程组$\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}$，即

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- 其计算公式为

$$x_k=(y_k-\sum_{r=k+1}^{n}u_{kr}x_r)\Big/u_{kk}\quad (k=n,n-1,\cdots,2,1)$$

- 其中 $\sum_{n+1}^{n}=0$

- Doolittle分解法的存储可利用原系数矩阵的存储单元，存储形式

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \to \boldsymbol{A}$$

例用Doolittle分解法求解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 9 \\ 4x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 15x_4 = 23 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 18x_4 = 22 \\ 6x_1 + 15x_2 + 18x_3 + 40x_4 = 47 \end{cases}$$

- 解　方程组的系数矩阵和右端项分别为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 6 & 15 \\ 2 & 6 & 9 & 18 \\ 6 & 15 & 18 & 40 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 23 \\ 22 \\ 47 \end{bmatrix}$$

- （1）分解$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 3 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4 & 2 & 6\\ & 1 & 2 & 3\\ & & 3 & 6\\ & & & 1\end{bmatrix}$$

- （2）求解$\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}$，即

$$\begin{bmatrix}1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 3 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 23\\ 22\\ 47\end{bmatrix}$$

- 解得$\boldsymbol{y}=(9, 5,3,-1)^T$

- 求解$\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，即

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 3 & 6 \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- 由公式解得$\boldsymbol{x}=(0.5,2,3,-1)^{\mathrm{T}}$

Crout分解法

- i）记$\boldsymbol{D}$=diag($u_{11},u_{22},\ldots,u_{nn}$),

$$A = LU = (LD)(D^{-1}U) = \hat{L}\hat{U},\ \hat{L} = LD, \hat{U} = D^{-1}U$$

其中$\hat{\boldsymbol{L}}$是下三角阵，$\hat{\boldsymbol{U}}$是单位上三角阵.此分解是惟一的.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{l}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hat{l}_{21} & \hat{l}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{l}_{n1} & \hat{l}_{n2} & \cdots & \hat{l}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \hat{u}_{12} & \cdots & \hat{u}_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & \hat{u}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \hat{\boldsymbol{L}}\hat{\boldsymbol{U}}$$

利用矩阵运算比较两边得其分解公式: 对k=1,2,3,…n，

$$\begin{cases} \hat{l}_{ik} = a_{ik} - \sum\limits_{r=1}^{k-1} \hat{l}_{ir}\hat{u}_{rk} \quad (i = k, k+1, k+2, \cdots, n) \\ \hat{u}_{kj} = (a_{kj} - \sum\limits_{r=1}^{k-1} \hat{l}_{kr}\hat{u}_{rj}) / \hat{l}_{kk} \quad (j = k+1, k+2, \cdots, n) \end{cases}$$

求解$Ax=b$⇔求解$\begin{cases}\hat{L}y=b\\ \hat{U}x=y\end{cases}$

- ii）求解方程组 $\hat{L}y=b$ ，即

$$\begin{pmatrix}\hat{l}_{11} & 0 & \cdots & 0\\ \hat{l}_{21} & \hat{l}_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hat{l}_{n1} & \hat{l}_{n2} & \cdots & \hat{l}_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

- 其计算公式为

$$y_k=(b_k-\sum_{r=1}^{k-1}\hat{l}_{kr}y_r)/\hat{l}_{kk}\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

- 其中 $\sum_{1}^{0}=0$

- iii）求解方程组$\hat{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，即

$$\begin{pmatrix} 1 & \hat{u}_{12} & \cdots & \hat{u}_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & \hat{u}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- 其计算公式为

$$x_k = y_k - \sum_{r=k+1}^{n} \hat{u}_{kr} x_r \quad (k = n, n-1, \cdots, 2, 1)$$

- 其中 $\sum_{n+1}^{n} = 0$

- Crout分解法的存储可利用原系数矩阵的存储单元，存储形式

$$\begin{pmatrix} \hat{l}_{11} & \hat{u}_{12} & \cdots & \hat{u}_{1n} \\ \hat{l}_{21} & \hat{l}_{22} & \cdots & \hat{u}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{l}_{n1} & \hat{l}_{n2} & \cdots & \hat{l}_{nn} \end{pmatrix} \to \boldsymbol{A}$$

- 例 用系数矩阵$\boldsymbol{A}$的Crout分解求解线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$.

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

- 分解 $A=\hat{L}\hat{U}$ ，即

$$A=\begin{bmatrix} 6 & & & \\ 2 & \frac{10}{3} & & \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{37}{10} & \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{9}{10} & \frac{191}{74} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{37} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 求解方程组 $\hat{L}y=b$ ，得 $y=\left(1,-\frac{9}{10},\frac{46}{37},-1\right)^{\mathrm{T}}$
- 求解方程组 $\hat{U}x=y$ ，得 $x=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$

Cholesky分解法(平方根法)

- i）记$\boldsymbol{D}$=diag$(u_{11},u_{22},\ldots,u_{nn})$, $\hat{\boldsymbol{U}}= \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U}$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}=(\boldsymbol{LD})(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U})=\boldsymbol{LD}\hat{\boldsymbol{U}} \quad \text{(分解惟一)}$$

其中$\boldsymbol{L}$是单位下三角阵，$\hat{\boldsymbol{U}}$是单位上三角阵.

- 如果$\boldsymbol{A}$是对称正定的，则$\hat{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{LD}^{\frac{1}{2}})(\boldsymbol{LD}^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}}=\bar{\boldsymbol{L}}\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}$$

其中$\bar{\boldsymbol{L}}$是下三角阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{l}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{l}_{21} & \bar{l}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{l}_{n1} & \bar{l}_{n2} & \cdots & \bar{l}_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{l}_{11} & \bar{l}_{21} & \cdots & \bar{l}_{n1} \\ 0 & \bar{l}_{22} & \cdots & \bar{l}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{l}_{nn} \end{pmatrix}=\overline{\boldsymbol{L}}\,\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}$$

称为矩阵的Cholesky分解.

利用矩阵运算比较两边得其分解公式: 对k=1,2,3,…n，

$$\begin{cases} \bar{l}_{kk}=(a_{kk}-\sum\limits_{r=1}^{k-1}\bar{l}_{kr}^{2})^{1/2} \\ \bar{l}_{ik}=(a_{ik}-\sum\limits_{r=1}^{k-1}\bar{l}_{ir}\bar{l}_{kr})/\bar{l}_{kk} \quad (i=k+1,k+2,\cdots,n) \end{cases}$$

其中 $\sum\limits_{1}^{0}=0$

求解$Ax=b \Leftrightarrow$求解 $\begin{cases} \bar{L}y = b \\ \bar{L}^{T}x=y \end{cases}$

- ii）求解方程组 $\bar{L}y=b$，即

$$\begin{pmatrix} \bar{l}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{l}_{21} & \bar{l}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{l}_{n1} & \bar{l}_{n2} & \cdots & \bar{l}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

其计算公式为

$$y_k = \left(b_k - \sum_{r=1}^{k-1} \bar{l}_{kr} y_r \right) \Big/ \bar{l}_{kk} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

其中$\sum_{r=1}^{0} = 0$

- iii）求解方程组 $\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，即

$$\begin{pmatrix} \bar{l}_{11} & \bar{l}_{21} & \cdots & \bar{l}_{n1} \\ 0 & \bar{l}_{22} & \cdots & \bar{l}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{l}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

其计算公式为

$$x_k = (y_k - \sum_{r=k+1}^{n} \bar{l}_{rk} x_r) \Big/ \bar{l}_{kk} \quad (k = n, n-1, \cdots, 2, 1)$$

其中 $\sum_{r=n+1}^{n} = 0$

- Cholesky分解法的存储可利用原系数矩阵(对称)的存储单元，它没有增加储存单元，存储形式.

$$\begin{pmatrix} \bar{l}_{11} & & \cdots & \\ \bar{l}_{21} & \bar{l}_{22} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{l}_{n1} & \bar{l}_{n2} & \cdots & \bar{l}_{nn} \end{pmatrix} \to A$$

- 平方根法是用于解系数矩阵为正定矩阵的线性方程组.

- 例 用平方根法（Cholesky分解）解方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

解 由于系数矩阵A对称正定，故一定有分解形式 $A = \bar{L}\bar{L}^T$

其中$\bar{L}$为下三角阵.

（1）对系数矩阵进行Cholesky分解$A = \bar{L}\bar{L}^T$，即

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{l}_{11} & & \\ \bar{l}_{21} & \bar{l}_{22} & \\ \bar{l}_{31} & \bar{l}_{32} & \bar{l}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{l}_{11} & \bar{l}_{21} & \bar{l}_{31} \\ & \bar{l}_{22} & \bar{l}_{32} \\ & & \bar{l}_{33} \end{bmatrix}$$

由公式得 $\bar{l}_{11}=\sqrt{3},\quad \bar{l}_{21}=\dfrac{2}{\sqrt{3}},\quad \bar{l}_{31}=\sqrt{3}$

$$\bar{l}_{22}=\sqrt{\frac{2}{3}},\quad \bar{l}_{32}=-\sqrt{6},\quad \bar{l}_{33}=\sqrt{3}$$

解方程组 $\bar{L}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$ ，即

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & & \\ \dfrac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{\dfrac{2}{3}} & \\ \sqrt{3} & -\sqrt{6} & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

得 $\boldsymbol{y}=(\dfrac{5}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{3}})^{\mathrm{T}}$

解方程组 $\bar{L}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ ，即

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \dfrac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} \\ & \sqrt{\dfrac{2}{3}} & -\sqrt{6} \\ & & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{5}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

得 $\boldsymbol{x}=(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3})^{\mathrm{T}}$

改进的Cholesky分解法(改进的平方根法)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & 1 & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=LDL^{\mathrm{T}}$$

利用矩阵运算比较两边得其分解公式:对k=1,2,3,…n,

$$\begin{cases} d_k = a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}^2 d_r \\ l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} d_r l_{kr}) / d_k \quad (i = k+1, k+2, \cdots, n) \end{cases}$$

其中 $\sum_{r=n+1}^{n} = 0$

- ii）求解方程组$\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}$

$$y_k = b_k - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} y_r \ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

其中 $\sum_{r=1}^{0} = 0$

- iii）求解方程组$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}= \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{y}$

$$x_k = y_k / d_k - \sum_{r=k+1}^{n} l_{rk} x_r \quad (k = n, n-1, \cdots, 2, 1)$$

其中 $\sum_{r=n+1}^{n} = 0$

- 改进的Cholesky分解法的存储可利用原系数矩阵(对称)的存储单元，它没有增加储存单元，存储形式.

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \cdots & \\ l_{21} & d_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & d_n \end{pmatrix} \to A$$

- 例 用改进的平方根法解方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 30 \end{bmatrix}$$

- 解系数矩阵是对称的，故可分解为LDL^{T}，设有分解

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ & 1 & l_{32} \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

- 由公式得

$$d_1 = 3, \quad l_{21} = 1, \quad l_{31} = \frac{5}{3}$$

$$d_2 = 2, \quad l_{32} = 2, \quad d_3 = \frac{2}{3}$$

解方程组$\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$，即

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ \frac{5}{3} & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 30 \end{bmatrix}$$

得 $\boldsymbol{y}=(10,6,\frac{4}{3})^{\mathrm{T}}$

解方程组$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{y}$，即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{3} \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

得 $\boldsymbol{x}=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$

解三对角方程组的追赶法

- 设方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{d}$$

它的系数方阵$\boldsymbol{A}$是一个阶数较高的三对角方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

且满足条件：(i) $|b_1|>|c_1|>0$, (ii) $|b_n|>|a_n|>0$

(iii)$|b_i|\ge |a_i|+|c_i|$, $a_i,c_i\ne 0(i=2,3,\ldots,n-1)$

- i)对A进行Crout分解

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \gamma_{n-1} & \alpha_{n-1} & \\ & & & \gamma_n & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ & 1 & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \beta_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

利用矩阵运算比较两边推得其分解公式：

$$\begin{cases} \alpha_1 = b_1,\ \beta_1 = c_1 / b_1 \\ \gamma_i = a_i, \quad (i = 2, \cdots, n) \\ \alpha_i = b_i - a_i \beta_{i-1} (i = 2, \cdots, n) \\ \beta_i = c_i / (b_i - a_i \beta_{i-1}), (i = 2, \cdots, n-1) \end{cases}$$

- α_i,可由a_i, b_i ,$\beta_{i\text{-}1}$, 产生，真正需计算的是β_i.
β_i的递推公式为

$$\begin{cases} \beta_1 = c_1 / b_1 \\ \beta_i = c_i /(b_i - a_i \beta_{i-1}), (i = 2, \cdots, n-1) \end{cases}$$

求解$Ax=d$⇔求解$\begin{cases}\hat{L}y=d\\ \hat{U}x=y\end{cases}$

- ii）求解方程组 $\hat{L}y=d$ ，即

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & & & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \gamma_{n-1} & \alpha_{n-1} & \\ & & & \gamma_n & \alpha_n\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}$$

其计算公式为

$$\begin{cases}y_1=d_1/b_1\\ y_k=(d_k-a_k y_{k-1})/(b_k-a_k\beta_{k-1}) \qquad (k=2,3,\ldots,n)\end{cases}$$

- iii）求解方程组$\hat{U}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，即

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ & 1 & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \beta_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- 其计算公式为

$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_k = y_k - \beta_k x_{k+1} \end{cases} \qquad (k=n-1, n-2, \ldots, 2, 1)$$

- 将求系数$\beta_1 \to \beta_2 \to \dots \to \beta_{n-1}$及$y_1 \to y_2 \to \dots \to y_n$的过程称之为追的过程;求$x_n \to x_{n-1} \to \dots \to x_2 \to x_1$的过程称之为赶的过程;

§2.4 矩阵的条件数
及误差分析

矩阵的条件数

- 设$\boldsymbol{A}$为非奇异矩阵，称数$\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$为矩阵$\boldsymbol{A}$的条件数.

$$\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\geq\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\|=1$$

- 条件数与所取范数有关，因此有时详细记为 $\operatorname{cond}_v(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_v\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_v$

- 计算3阶Hilbert矩阵

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

的条件数$\mathrm{cond}_\infty(H_3)$

- 解

$$H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$$

$\|H_3\|_\infty=11/6$, $\|H_3^{-1}\|_\infty=408$,

$\mathrm{cond}_\infty(H_3) = \|H_3\|_\infty \|H_3^{-1}\|_\infty=748$

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{A'x'}=\boldsymbol{b'} \qquad (2)$$

- (2)是(1)的近似方程组，研究二者解的近似程度.
- 上面问题相当于研究$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的精确解$\boldsymbol{x}$与 $(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}+\delta\boldsymbol{b}$ 的精确解$\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}$的差$\delta\boldsymbol{x}$与扰动$\delta\boldsymbol{A}$和$\delta\boldsymbol{b}$的关系.

- 方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

记为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其精确解为$x=(2,0)^T$

- 当常数项有微小变化时，即考虑方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{pmatrix}$$

记为$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta x})=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\delta b}$， $\boldsymbol{\delta b}=(0,0.0001)^T$

其精确解为$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta x}=(1,1)^T$

- 本节讨论所采用的矩阵范数是算子范数.

方程组$Ax=b$的右端b的扰动对解的影响

- 设δb为b的扰动， 引起解x的扰动为δx，则

$$A(x+\delta x)=b+\delta b \quad , \quad \delta x = A^{-1}\delta b$$

$$\|\delta x\| \le \|A^{-1}\| \|\delta b\|$$

$$\|x\| \ge \frac{\|Ax\|}{\|A\|} = \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = \mathrm{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

方程组$Ax=b$的系数阵A的扰动对解的影响

设δA为A的扰动， 引起解x的扰动为δx，则

$$(\boldsymbol{A}+\delta \boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}+\delta \boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}\,, \qquad \boldsymbol{A}\delta \boldsymbol{x}+\delta \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\delta \boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$$

$$\delta \boldsymbol{x}=-\boldsymbol{A}^{-1}\delta \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\delta \boldsymbol{x})$$

$$\|\delta \boldsymbol{x}\| \le \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta \boldsymbol{A}\|(\|\boldsymbol{x}\|+\|\delta \boldsymbol{x}\|)$$

假设$\delta \boldsymbol{A}$足够小，使$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta \boldsymbol{A}\|<1$

$$\frac{\|\delta \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \le \frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta \boldsymbol{A}\|}{1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta \boldsymbol{A}\|} = \frac{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\dfrac{\|\delta \boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}}{1-\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\dfrac{\|\delta \boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}} = \frac{\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})\dfrac{\|\delta \boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}}{1-\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})\dfrac{\|\delta \boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}}$$

- 总之，cond($\boldsymbol{A}$)愈小，由$\boldsymbol{A}$(或$\boldsymbol{b}$)的相对误差引起解的相对误差就愈小；cond($\boldsymbol{A}$)愈大，由$\boldsymbol{A}$(或$\boldsymbol{b}$)的相对误差引起解的相对误差就有可能愈大.所以，量cond($\boldsymbol{A}$)实际刻画了解对原始数据变化的敏感程度，即刻画了方程组的病态程度.

- 对于一个确定的线性方程组，系数矩阵的条件数较小（接近1）时，方程组是良态的；反之，条件数较大（>>1）时，则方程组是病态的．条件数越大，则病态越严重．用一个稳定的方法去解一个良态方程组，必然得到精度很高的解．同样，用一个稳定的方法去解一个病态方程组，结果就可能很差．

- 设x'是方程组的近似解，则称$r=b-Ax'$为误差(剩余)向量. 近似解x'的精度不仅依赖于r的“大小”,而且依赖于的A条件数. 当A时病态时,即使有很小的r，也不能保证x'是高精度的近似解.

$$\frac{\|x-x'\|}{\|x\|} \leq cond(A) \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

§2.5 解线性方程组的迭代法

- 将方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \tag{2.5.1}$$

改写成等价方程组

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Bx}+\boldsymbol{g} \tag{2.5.2}$$

建立迭代格式

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{Bx}^{(k)}+\boldsymbol{g} \qquad (k=0,1,2,\ldots) \tag{2.5.3}$$

向量$\boldsymbol{x}^{(0)}$为初始预估解向量,用公式(2.5.3)逐步迭代求解的方法叫做迭代法.$\boldsymbol{B}$称为迭代矩阵.

如果产生的序列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$对于任意初始向量$\boldsymbol{x}^{(0)}$均收敛于$\boldsymbol{x}^*$，则称迭代法是收敛的.

显然$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$的极限$\boldsymbol{x}^*$为方程组(2.5.2)的精确解.

迭代法的误差

- 记

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^* \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

称为第k步迭代的误差向量.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}=\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^* =\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}^{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

其中$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}=\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{x}^*$为初始误差向量.

考察收敛性，就要研究$\boldsymbol{B}$在什么条件下$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\to\mathbf{0}$ $(k\to\infty)$，即就要研究$\boldsymbol{B}$满足什么条件时有

$$\boldsymbol{B}^k\to\mathbf{0}(k\to\infty).$$

迭代法的收敛性

- 定理 设$\boldsymbol{B}\in\mathbf{K}^{n\times n}$, $\lim\limits_{k\to\infty} B^k = \mathbf{0}$

的充分必要条件是$\rho(\boldsymbol{B})<1$.

- 定理（迭代法的基本收敛定理）迭代过程

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{g}$$

对于任意初始向量$\boldsymbol{x}^{(0)}$及右端向量$\boldsymbol{g}$均收敛的充分必要条件是迭代矩阵$\boldsymbol{B}$的谱半径$\rho(\boldsymbol{B})<1$, 并且$\rho(\boldsymbol{B})$ 愈小，收敛速度愈快.

由此可知：迭代法的收敛性与收敛速度与迭代矩阵$\boldsymbol{B}$有关，而与右端向量$\boldsymbol{g}$和初始向量$\boldsymbol{x}^{(0)}$无关.

迭代法的误差估计

- 定理　设x^*为方程组$Ax=b$的精确解. 若迭代法

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$$

的迭代矩阵B满足$\|B\|<1$, 其中$\|.\|$是某种算子范数，则对于任意的初始向量$x^{(0)}$与右端向量g迭代法收敛， 且有如下两个误差估计式:

（1）
$$\left\|x^{(k)}-x^*\right\|\le\frac{\|B\|}{1-\|B\|}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\| \tag{2.5.4}$$

（2）
$$\left\|x^{(k)}-x^*\right\|\le\frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\| \tag{2.5.5}$$

$$k>\left[\ln\frac{\varepsilon(1-\|B\|)}{\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|}/\ln\|B\|\right]$$

- 证 $\rho(\boldsymbol{B})\le\|\boldsymbol{B}\|<1$，故对于任意的$x^{(0)}$与$g$迭代收敛.

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{*}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{*})$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)})$$

$$\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{*}\|\le\|\boldsymbol{B}\|\cdot\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{*}\|$$

$\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\|\le\|\boldsymbol{B}\|\cdot\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)}\|$， 利用$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\ge\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\|$

$$\|\boldsymbol{B}\|\cdot\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)}\|\ge\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\|\ge\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{*}\|-\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{*}\|$$

$$\ge(1-\|\boldsymbol{B}\|)\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{*}\|$$

(1)成立.再反复利用$\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\|\le\|\boldsymbol{B}\|\cdot\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)}\|$得(2)成立.

基本迭代公式

- 将方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的系数$\boldsymbol{A}$分解成

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{U}$$

其中$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn})$，$\boldsymbol{L}$和$\boldsymbol{U}$分别是$\boldsymbol{A}$的对角线下方元素和上方元素组成的严格下三角阵与严格上三角阵. 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobi迭代法

- 若$a_{ii}\neq 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 将方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2-\dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3-\cdots-\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n+\dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2=-\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1-\dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3-\cdots-\dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n+\dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \cdots\quad\cdots \\ x_n=-\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1-\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2-\cdots-\dfrac{a_{n\,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1}+\dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

建立迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)}-\dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)}-\cdots-\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)}+\dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)}=-\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k)}-\dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)}-\cdots-\dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)}+\dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \cdots\quad\cdots \\ x_n^{(k+1)}=-\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k)}-\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k)}-\cdots-\dfrac{a_{n\,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(k)}+\dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases} \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

称为解方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的Jacobi迭代法.

Jacobi迭代法的分量形式

若$a_{ii}\neq 0$，将方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

改写为

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

建立迭代格式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}) \quad (i=1,2,\cdots,n; \quad k=0,1,2,\cdots)$$

Jacobi迭代法

- Jacobi迭代法矩阵形式

若$a_{ii}\neq 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 即$\boldsymbol{D}$非奇异，将方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$改写成

$$\boldsymbol{Dx}=-(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

建立迭代格式

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=-\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

称为解方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的Jacobi迭代法.

- 迭代矩阵$\boldsymbol{B}_J=-\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}$

$$B_J=\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss-Seidel迭代法

- Gauss-Seidel迭代法分量形式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n; \quad k = 0, 1, 2, \cdots)$$

- Gauss-Seidel迭代法矩阵形式

将方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，改写成

$$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{Ux}+\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{Ux}+(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

建立迭代格式

$$x^{(k+1)}=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)}+(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b} \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

称为解方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的Gauss-Seidel迭代法.

迭代矩阵$\boldsymbol{B}_G=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$

超松弛迭代法(SOR方法)

- 由Gauss-Seidel迭代法得

$$\bar{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})$$

$$x_i^{(k+1)} = \omega \bar{x}_i^{(k+1)} + (1-\omega) x_i^{(k)}$$

即 $$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})$$

称为超松弛迭代法(SOR方法),其中ω为松弛因子.

超松弛法的矩阵表示为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{D} + \omega \boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D} - \omega \boldsymbol{U}]\boldsymbol{x}^{(k)} + \omega(\boldsymbol{D} + \omega \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

当$\omega=1$时,就是Gauss-Seidel迭代法.

- 定理 超松弛法收敛的必要条件为$0<\omega<2$
- 证 设其迭代矩阵$\boldsymbol{B}_\omega$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$,

由于迭代收敛,故有$\rho(\boldsymbol{B}_\omega)<1$

从而 $$\left|\det \boldsymbol{B}_\omega\right| = \left|\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\right| \le (\max_{1\le i\le n}\left|\lambda_i\right|)^n < 1$$

又 $$\left|\det \boldsymbol{B}_\omega\right| = \left|\det((\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1})\cdot\det((1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{U})\right|$$

$$= \left|\frac{1}{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}\cdot(1-\omega)^n a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\right| = \left|(1-\omega)^n\right|$$

因此$|1-\omega| <1$,即$0<\omega<2$

关于解某些特殊方程组迭代法的收敛性

定理　若线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$为对称正定阵，则Gauss-Seidel迭代法收敛.

定理　若线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$为对称正定阵，则当$0<\omega<2$时, SOR方法收敛.

- 称方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{nn}$ 为严格对角占优的，如果

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}\right|<\left|a_{ii}\right| \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left|a_{ij}\right|<\left|a_{jj}\right| \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

- 定理 若线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的系数方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{nn}$是按行(或按列)严格对角占优的，则Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法都是收敛的.

- Jacobi迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}_J = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

由于$\boldsymbol{A}$是按行严格对角占优,即

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

故

$$\|\boldsymbol{B}_J\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

从而Jacobi迭代收敛

- 设方程组的精确解为 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots x_n^*)'$

$$x_i^* = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^* - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^*)$$

- Gauss-Seidel迭代公式为

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n; \quad k = 0, 1, 2, \cdots)$$

- 两式相减得

$$x_i^* - x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(x_j^* - x_j^{(k+1)}) + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}(x_j^* - x_j^{(k)})]$$

- 令 $\delta_k = \max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i^* - x_i^{(k)}\right|$,设 $\delta_{k+1} = \max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i^* - x_i^{(k+1)}\right| = \left|x_l^* - x_l^{(k+1)}\right|$

- 则 $\delta_{k+1} = \left|x_l^* - x_l^{(k+1)}\right| \le \dfrac{1}{|a_{ll}|}\left(\sum\limits_{j=1}^{l-1}|a_{lj}|\delta_{k+1} + \sum\limits_{j=l+1}^{n}|a_{lj}|\delta_k\right)$
- 整理得

$$\delta_{k+1} \le \frac{\sum\limits_{j=l+1}^{n}\left|\dfrac{a_{lj}}{a_{ll}}\right|}{1-\sum\limits_{j=1}^{l-1}\left|\dfrac{a_{lj}}{a_{ll}}\right|}\delta_k$$

- 由于系数阵$\boldsymbol{A}$是按行严格对角占优的,故

令 $r_{l_k} = \dfrac{\sum_{j=l+1}^{n} \left| \dfrac{a_{lj}}{a_{ll}} \right|}{1 - \sum_{j=1}^{l-1} \left| \dfrac{a_{lj}}{a_{ll}} \right|} < 1 \quad (1 \le l_k \le n)$ ， $r = \max r_{l_k}$

- 从而

$$\left\| x^* - x^{(k+1)} \right\|_\infty = \delta_{k+1} \le r^{k+1} \delta_0 \to 0 \quad (k \to \infty)$$

- 所以Gauss-Seidel迭代 法收敛.

- 定理 若线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$为严格对角占优矩阵，则当$0<\omega\leq 1$时,SOR方法收敛.
- 定理 设$\boldsymbol{A}$是具有正对角线元素的对称矩阵，则解线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的Jacobi迭代法收敛的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$和$2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$都为对称正定阵.

- Jacobi迭代法

收敛的充要条件: $\rho(\boldsymbol{B}_J)<1$

$\boldsymbol{A}$和$2\boldsymbol{D}$-$\boldsymbol{A}$都为对称正定阵($\boldsymbol{A}$是具有正对角线元素的对称矩阵).

充分条件：$\|\boldsymbol{B}_J\|<1$ ($\|.\|$是某种算子范数)

$\boldsymbol{A}$是严格对角占优的

- Gauss-Seidel迭代法

收敛的充要条件: $\rho(\boldsymbol{B}_G)<1$

充分条件：$\|\boldsymbol{B}_G\|<1$ ($\|.\|$是某种算子范数)

$\boldsymbol{A}$是严格对角占优的

$\boldsymbol{A}$为对称正定阵

- SOR方法

收敛的充要条件: $\rho(\boldsymbol{B}_\omega)<1$

充分条件：$\|\boldsymbol{B}_\omega\|<1$ ($\|.\|$是某种算子范数)

$\boldsymbol{A}$是严格对角占优的，且$0<\omega\le 1$

$\boldsymbol{A}$为对称正定阵， $0<\omega<2$

必要条件：$0<\omega<2$

- 例1 分别用Jacobi迭代法与Gauss-Seidel迭代法求解方程组

$$\begin{cases} 20x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - 3x_2 + 15x_3 = 30 \end{cases}$$

取初值$\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$,

解

- （1）系数阵严格对角占优，故Jacobi迭代法与Gauss-Seidel迭代均收敛.

法用Jacobi迭代法，其迭代法的分量形式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{20}(24 - 2x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)}) = 1.2 - 0.1x_2^{(k)} - 0.15x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(12 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) = 1.5 - 0.125x_1^{(k)} - 0.125x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{15}(30 - 2x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)}) = 2 - 0.1333x_1^{(k)} + 0.2x_2^{(k)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

Jacobi迭代法的矩阵形式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+2)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & -0.15 \\ -0.125 & 0 & -0.125 \\ -0.1333 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.5 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

取初值$\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$，迭代可得

$$x^{(1)}=(1.200\,000, 1.500\,000, 2.000\,000)^{\mathrm{T}},$$

$$x^{(2)}=(0.750\,000, 1.100\,000, 2.140\,000)^{\mathrm{T}},$$

$$x^{(3)}=(0.769\,000, 1.138\,750, 2.120\,000)^{\mathrm{T}},$$

$$x^{(4)}=(0.768\,125, 1.138\,875, 2.125\,217)^{\mathrm{T}},$$

$$x^{(5)}=(0.767\,330, 1.138\,332, 2.125\,358)^{\mathrm{T}},$$

$$x^{(6)}=(0.767\,363, 1.138\,414, 2.125\,356)^{\mathrm{T}},$$

$$x^{(7)}=(0.767\,355, 1.138\,410, 2.125\,368)^{\mathrm{T}},$$

迭代7次，得近似值

$$\boldsymbol{x}\approx(0.767\,355, 1.138\,410, 2.125\,368)^{\mathrm{T}}$$

(2)用Gauss-Seidel迭代法,其迭代法的分量形式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{20}(24 - 2x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)}) = 1.2 - 0.1x_2^{(k)} - 0.15x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(12 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}) = 1.5 - 0.125x_1^{(k+1)} - 0.125x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{15}(30 - 2x_1^{(k+1)} + 3x_2^{(k+1)}) = 2 - 0.1333x_1^{(k+1)} + 0.2x_2^{(k+1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

其迭代法的矩阵形式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}x^{(k)}+(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}\quad(k=0,1,2,\ldots)$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & -0.15 \\ 0 & 0.0125 & -0.10625 \\ 0 & 0.158333 & -0.00125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.35 \\ 2.11 \end{bmatrix}$$

取初值$\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)'$，迭代可得

$$x^{(1)}=(1.200\,000, 1.350\,000, 2.110\,000)^{\mathrm{T}},$$

$$x^{(2)}=(0.748\,500, 1.142\,688, 2.128\,738)^{\mathrm{T}},$$

$$x^{(3)}=(0.766\,421, 1.138\,105, 2.125\,432)^{\mathrm{T}},$$

$$x^{(4)}=(0.767\,375, 1.138\,399, 2.125\,363)^{\mathrm{T}},$$

$$x^{(5)}=(0.767\,356, 1.138\,410, 2.125\,368)^{\mathrm{T}}.$$

迭代5次，得近似值

$$\boldsymbol{x}\approx(0.767\,356, 1.138\,410, 2.125\,368)^{\mathrm{T}}$$

- 例2 对方程组

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3
\end{cases}
$$

分别讨论用Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法求解的收敛性.

- 解　系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&&\\1&0&\\2&2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&-2\\&0&1\\&&0\end{bmatrix}=D+L+U$$

则Jacobi迭代法的迭代矩阵为

$$B_J=E-D^{-1}A=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$|\lambda E-B_J|=\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\1&\lambda&1\\2&2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3=0$$

因此有$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$,即$\rho(B_J)=0<1$,所以Jacobi迭代法收敛.

- 对于Gauss-Seidel迭代法,其迭代矩阵为

$$B_G = -(D+L)^{-1}U = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$|\lambda E - B_G| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2 = 0$$

因此有$\lambda_1=0$,$\lambda_2=\lambda_3=2$，即$\rho(B_G)=2>1$，所以Gauss-Seidel

迭代法发散.

- 例3　设方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

分别讨论用Jacobi迭代法、Gauss-seidel迭代法和逐次超松弛迭代法($0<\omega<2$)求解的收敛性.

- 解 显然A是对称矩阵. 现考虑A的各阶顺序主子式

$$\Delta_1 = |1| = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \underline{\underline{c_1+c_2+c_3}} \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \frac{r_2-r_1}{r_3-r_1} \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} > 0$$

从而A是对称正定阵，故Gauss-Seidel迭代法收敛.

又由已知$0<\omega<2$，且A对称正定，故SOR法也是收敛的.

- 但因

$$2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

的$\Delta_3=|2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}|=0$, 所以$2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$是非正定阵，Jacobi迭代法不收敛，也即发散.

- 例 分别用Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法求解方程组

$$\begin{cases} 20x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - 3x_2 + 15x_3 = 30 \end{cases}$$

取初值$\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$,需要迭代多少次，才能保证各分量的误差绝对值小于$10^{-6}$?

- 解 Jacobi迭代公式的分量形式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{20}(-2x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)} + 24) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8}(-x_1^{(k)} - x_3^{(k)} + 12) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{15}(-2x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)} + 30) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{G}_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{2}{15} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

经一次迭代得$\boldsymbol{x}^{(1)}=(6/5,3/2,2)^{\mathrm{T}}$，则$\|\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty=2$

迭代矩阵$\boldsymbol{G}_J=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}$，$\|\boldsymbol{G}_J\|_\infty=1/3$. 由公式（2.5.5)得

$$k > \left[\ln \frac{10^{-6}(1-\frac{1}{3})}{2} / \ln \frac{1}{3} \right] = 13.5754$$

要保证各分量误差绝对值小于10^{-6},需要迭代14次.

- Gauss-Seidel迭代法的迭代公式的分量形式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{20}(-2x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)} + 24) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8}(-x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)} + 12) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{15}(-2x_1^{(k+1)} + 3x_2^{(k+1)} + 30) \end{cases} \qquad \boldsymbol{B}_G = \frac{1}{2400}\begin{bmatrix} 0 & -240 & 360 \\ 0 & 30 & -255 \\ 0 & 38 & -3 \end{bmatrix}$$

取初值$\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$,经一次迭代得$\boldsymbol{x}^{(1)}=(1.2,1.35,2.11)^{\mathrm{T}}$,则$\|\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty=2.11$.由例1计算结果知Gauss-seidel迭代法的迭代矩阵$\boldsymbol{B}_G=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$, $\|\boldsymbol{B}_G\|_\infty=0.25$.由公式(2.5.5)可得

$$k > \left[\ln\frac{10^{-6}(1-0.25)}{2.11} / \ln 0.25\right] = 10.7119$$

即要保证各分量误差绝对小于10^{-6},只要迭代11次.