

# 作业四

1、

(1)

分别代入 $f(x) = 1, x, x^2$ 得

$$\begin{cases} H_{-1} + H_0 + H_1 = 2h \\ -hH_{-1} + 0 + hH_1 = 0 \\ h^2H_{-1} + 0 + h^2H_1 = \frac{2}{3}h^3 \end{cases}$$

解得 $H_{-1} = H_1 = \frac{1}{3}h, H_0 = \frac{4}{3}h$

令 $f(x) = x^3$ , 左边 $= \int_{-h}^h x^3 dx = 0$ , 右边 $= H_{-1}f(-h) + H_0f(0) + H_1f(h) = 0$ , 左边=右边

令 $f(x) = x^4$ , 左边 $= \int_{-h}^h x^4 dx = \frac{2}{5}h^5$ , 右边 $= H_{-1}f(-h) + H_0f(0) + H_1f(h) = \frac{2}{3}h^5$ , 故左边 $\neq$

右边

综上所述, 该求积公式的精度为 3, 精度不能提高的原因是若代入 $f(x) = x^n (n \geq 4)$ 时, 令其系数矩阵为 $A$ , 则当 $h \neq 0, R(A) < R(A, b)$ , 方程无解, 即系数无解

(2)

分别代入 $f(x) = 1, x, x^2$ 得

$$\begin{cases} H_{-1} + H_0 + H_1 = 4h \\ -hH_{-1} + 0 + hH_1 = 0 \\ h^2H_{-1} + 0 + h^2H_1 = \frac{16}{3}h^3 \end{cases}$$

解得 $H_{-1} = H_1 = \frac{8}{3}h, H_0 = -\frac{4}{3}h$

令 $f(x) = x^3$ , 左边 $= \int_{-2h}^{2h} x^3 dx = 0$ , 右边 $= H_{-1}f(-h) + H_0f(0) + H_1f(h) = 0$ , 左边=右边

令 $f(x) = x^4$ , 左边 $= \int_{-2h}^{2h} x^4 dx = \frac{64}{5}h^5$ , 右边 $= H_{-1}f(-h) + H_0f(0) + H_1f(h) = \frac{16}{3}h^5$ , 故左

边 $\neq$ 右边

综上所述, 该求积公式的精度为 3, 精度不能提高的原因是若代入 $f(x) = x^n (n \geq 4)$ 时, 令其系数矩阵为 $A$ , 则当 $h \neq 0, R(A) < R(A, b)$ , 方程无解, 即系数无解

(3)

分别代入 $f(x) = 1, x, x^2$ 得

$$\begin{cases} -1 + 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ \frac{1}{3}(1 + 2x_1^2 + 3x_2^2) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

解得 $x_1 = \frac{1-\sqrt{6}}{5}, x_2 = \frac{3+2\sqrt{6}}{15}$ 或 $x_1 = \frac{1+\sqrt{6}}{5}, x_2 = \frac{3-2\sqrt{6}}{15}$

令 $f(x) = x^3$ , 左边 $= \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$ ,

当 $x_1 = \frac{1-\sqrt{6}}{5}, x_2 = \frac{3+2\sqrt{6}}{15}$ 时, 右边 $=\frac{1}{3}\left(-1+2\times\left(\frac{1-\sqrt{6}}{5}\right)^3+3\times\left(\frac{3+2\sqrt{6}}{15}\right)^3\right)\neq 0$

当 $x_1 = \frac{1+\sqrt{6}}{5}, x_2 = \frac{3-2\sqrt{6}}{15}$ 时, 右边 $=\frac{1}{3}\left(-1+2\times\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)^3+3\times\left(\frac{3-2\sqrt{6}}{15}\right)^3\right)\neq 0$

故左边 $\neq$ 右边

综上所述, 该求积公式的精度为 2, 精度不能提高的原因是若代入 $f(x) = x^n (n \geq 3)$ 时, 令其系数矩阵为 $A$ , 则当 $h \neq 0, R(A) < R(A, b)$ , 方程无解, 即系数无解

(4)

分别代入 $f(x) = 1, x$ 时, 原式显然成立

代入 $f(x) = x^2$ 时

$$\frac{h}{2} \cdot h^2 + ah^2(2 \times 0 - 2h) = \frac{1}{3}h^3$$

解得 $a = \frac{1}{12}$

令 $f(x) = x^3$ , 左边 $=\int_0^h x^3 dx = \frac{1}{4}h^4$ , 右边 $=\frac{h}{2}h^3 + \frac{h^2}{12}(0 - 3h^2) = \frac{1}{4}h^4$ , 左边=右边

令 $f(x) = x^4$ , 左边 $=\int_0^h x^4 dx = \frac{1}{5}h^5$ , 右边 $=\frac{h}{2}h^4 + \frac{h^2}{12}(0 - 4h^3) = \frac{1}{6}h^5$ , 故左边 $\neq$ 右边

综上所述, 该求积公式的精度为 3, 精度不能提高的原因是若代入 $f(x) = x^n (n \geq 4)$ 时, 令其系数矩阵为 $A$ , 则当 $h \neq 0, R(A) < R(A, b)$ , 方程无解, 即系数无解

9、

(1)

根据Romberg递推公式 $T_{m,k} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1}$ 以及误差终止公式 $|T_{i,0} - T_{i-1,0}| \leq \varepsilon$ , 可得如下Romberg积分表

$T_{i,0}$	$T_{i,1}$	$T_{i,2}$	$T_{i,3}$
0.77174333	0.72806995	0.71698276	0.71420017
0.71351215	0.71328703	0.71327264	
0.71327203	0.71327168		
0.71327167			

故利用Romberg积分法求得 $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x} dx = 0.71327167$

(2)

根据Romberg递推公式 $T_{m,k} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1}$ 以及误差终止公式 $|T_{i,0} - T_{i-1,0}| \leq \varepsilon$ , 可得如下Romberg积分表

$T_{i,0}$	$T_{i,1}$	$T_{i,2}$	$T_{i,3}$
0.61091697	0.646316	0.65485115	0.6569664
0.65811568	0.6576962	0.65767148	
0.65766824	0.65766983		
0.65766985			

故利用Romberg积分法求得 $\int_0^{0.8} e^{-x^2} dx = 0.65766985$