

# 数理逻辑第三次作业

姓名	谢宇航	班级	5 班	学号	200110505
第 1 题					
第 2 题					
总分					
备注	1. 作业提交邮箱: hitsz_logic_2022@163.com。作业提交截止时间: <u>2022-06-20-24:00</u> , 超过提交截止时间的作业视为无效。 2. 确因网络等特殊原因无法及时提交作业的学生, 应至少提前 1 小时与助教联系沟通 (徐朕燃, QQ: 1319282215, 电话: 13713994811; 许天骁, QQ: 1140931320, 电话: 18800415868)。 3. 作业文件名命名方式: 第 x 次-学号-姓名-x 班 (例: 第 3 次-180110504-张三-5 班.pdf); 邮件主题为: 第 x 次-学号-姓名-x 班 (例: 第 3 次-180110504-张三-5 班)。缺少这些信息的作业将被酌情扣分。注意作业次数以阿拉伯数字命名。 4. 可手写拍照转为 PDF 格式。				

1. 利用演绎定理在 PC 中证明:

- (1)  $\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$
- (2)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (3)  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
- (4)  $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

1.

(1)

$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$

1.  $B \rightarrow A$

假设

2.  $\neg A$

假设

3.  $(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$

定理 13

4.  $\neg A \rightarrow \neg B$

1 和 3 rmp 分离规则

5.  $\neg B$

2 和 4 rmp 分离规则

6.  $B \rightarrow A, \neg A \vdash \neg B$

7.  $B \rightarrow A \vdash (\neg A \rightarrow \neg B)$

8.  $\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$

(2)

$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

1.  $A \rightarrow B$

假设

2.  $B \rightarrow C$

假设

3.  $A \rightarrow C$

1 和 2 三段论定理

4.  $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$

5.  $A \rightarrow B \vdash ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
6.  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(3)

$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

1.  $(A \rightarrow B) \rightarrow A$  假设
2.  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$  定理 13
3.  $\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$  1 和 2 rmp 分离规则
4.  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理 6
5.  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow B)) \rightarrow A)$  定理 16
6.  $(\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow B)) \rightarrow A$  4 和 5 rmp 分离规则
7.  $A$  3 和 6 rmp 分离规则
8.  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \vdash A$
9.  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

(4)

$\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

1.  $\neg(A \rightarrow B)$  假设
2.  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理 6
3.  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$  定理 14
4.  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$  2 和 3 rmp 分离规则
5.  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$  公理 1
6.  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$  4 和 5 三段论定理
7.  $B \rightarrow A$  1 和 6 rmp 分离规则
8.  $\neg(A \rightarrow B) \vdash (B \rightarrow A)$
9.  $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

2. 将 PC 中公理 3 改成

$$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$$

记所得系统为 PC1。证明：

$$(1) \vdash_{PC} (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$$

$$(2) \vdash_{PC1} (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

(1)

- |                                                                                                                                                                                 |                |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|--|
| 1. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$                                                                                                                  | 公理 3           |  |
| 2. $B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$                                                                                                                  | 前件互换定理         |  |
| 3. $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$                                                               | 定理 13          |  |
| 4. $B \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$                                                                                                         | 2 和 3 三段论      |  |
| 5. $\neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$                                                                                                         | 前件互换定理         |  |
| 6. $(\neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B)))$ | 公理 2           |  |
| 7. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$                                                                                    | 5 和 6 rmp 分离规则 |  |
| 8. $(\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$                                                               | 公理 3           |  |
| 9. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$                                                                                             | 7 和 8 三段论定理    |  |

(2)

证明：使用**演绎定理**进行证明

- |                                                                                     |                |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| 1. $\neg A \rightarrow \neg B$                                                      | 假设             |
| 2. $B$                                                                              | 假设             |
| 3. $B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$                                           | 公理 1           |
| 4. $\neg A \rightarrow B$                                                           | 2 和 3 rmp 分离规则 |
| 5. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ | PC1 系统公理 3     |
| 6. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A$                                      | 4 和 5 rmp 分离规则 |
| 7. $A$                                                                              | 1 和 6 rmp 分离规则 |
| 8. $\neg A \rightarrow \neg B, B \vdash_{PC1} A$                                    |                |
| 9. $\neg A \rightarrow \neg B \vdash_{PC1} (B \rightarrow A)$                       |                |
| 10. $\vdash_{PC1} (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$        |                |