作业二

5.

Doolittle 分解：

根据题意对 A 进行 Doolittle 分解得到

$$A=\begin{bmatrix}5&7&9&10\\6&8&10&9\\7&10&8&7\\5&7&6&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\\frac{6}{5}&1&&\\\frac{7}{5}&-\frac{1}{2}&1&\\1&0&\frac{3}{5}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&7&9&10\\&-\frac{2}{5}&-\frac{4}{5}&-3\\&&-5&-\frac{17}{2}\\&&&\frac{1}{10}\end{bmatrix}$$

通过$Ly=b$即

$$\begin{bmatrix}1&&&\\\frac{6}{5}&1&&\\\frac{7}{5}&-\frac{1}{2}&1&\\1&0&\frac{3}{5}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

解得$y=\begin{bmatrix}1&-\frac{3}{5}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{10}\end{bmatrix}^T$

通过$Ux=y$即

$$\begin{bmatrix}5&7&9&10\\&-\frac{2}{5}&-\frac{4}{5}&-3\\&&-5&-\frac{17}{2}\\&&&\frac{1}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}$$

解得$x=\begin{bmatrix}20&-12&-5&3\end{bmatrix}^T$

Crout 分解：

根据题意对 A 进行 Crout 分解得到

$$A=\begin{bmatrix}5&7&9&10\\6&8&10&9\\7&10&8&7\\5&7&6&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&&&\\6&-\frac{2}{5}&&\\7&\frac{1}{5}&-5&\\5&0&-3&\frac{1}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{7}{5}&\frac{9}{5}&2\\&1&2&\frac{15}{2}\\&&1&\frac{17}{10}\\&&&1\end{bmatrix}$$

通过$Ly=b$即

$$\begin{bmatrix}5&&&\\6&-\frac{2}{5}&&\\7&\frac{1}{5}&-5&\\5&0&-3&\frac{1}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

解得$y=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 3\end{bmatrix}^T$

通过$Ux=y$即

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{7}{5} & \frac{9}{5} & 2\\ & 1 & 2 & \frac{15}{2}\\ & & 1 & \frac{17}{10}\\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}$$

解得$x=\begin{bmatrix}20 & -12 & -5 & 3\end{bmatrix}^T$

8.

(1)根据题意将A进行追逐法分解

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&4&1&0\\0&1&4&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1&\frac{7}{2}\\&1&\frac{26}{7}\\&&1&\frac{45}{26}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\&1&\frac{2}{7}\\&&1&\frac{7}{26}\\&&&1\end{bmatrix}$$

通过$\widehat{L}y=b$即

$$\begin{bmatrix}2\\1&\frac{7}{2}\\&1&\frac{26}{7}\\&&1&\frac{45}{26}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\\0\end{bmatrix}$$

解得$y=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{5}{7} & 1 & -\frac{26}{45}\end{bmatrix}^T$

通过$\widehat{U}x=y$即

$$\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\&1&\frac{2}{7}\\&&1&\frac{7}{26}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}$$

解得$x=\begin{bmatrix}\frac{46}{45} & -\frac{47}{45} & \frac{52}{45} & -\frac{26}{45}\end{bmatrix}^T$

(2)根据题意将A进行追逐法分解

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & -1 & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & & & & \\ -1 & \frac{15}{4} & & & \\ & -1 & \frac{56}{15} & & \\ & & -1 & \frac{209}{56} & \\ & & & -1 & \frac{780}{209} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & & & \\ & 1 & -\frac{4}{15} & & \\ & & 1 & -\frac{15}{56} & \\ & & & 1 & \frac{56}{209} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

通过$\widehat{L}y=b$即

$$\begin{bmatrix} 4 & & & & \\ -1 & \frac{15}{4} & & & \\ & -1 & \frac{56}{15} & & \\ & & -1 & \frac{209}{56} & \\ & & & -1 & \frac{780}{209} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix}$$

解得$y=\begin{bmatrix} 25 & \frac{20}{3} & \frac{25}{14} & \frac{100}{209} & \frac{2095}{39} \end{bmatrix}^T$

通过$\widehat{U}x=y$即

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & & & \\ & 1 & -\frac{4}{15} & & \\ & & 1 & -\frac{15}{56} & \\ & & & 1 & \frac{56}{209} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

解得$x=\begin{bmatrix} 53.7179 & 14.8718 & 5.7692 & 8.2051 & 27.0513 \end{bmatrix}^T$

7

<u>平方根法：</u>

根据题意将A进行平方根法分解

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.75 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & & \\ -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \\ \frac{1}{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ & & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

通过$\widehat{L}y=b$即

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \\ \frac{1}{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7.25 \end{bmatrix}$$

解得$y=\begin{bmatrix} 2 & 3.2998 & 1.4162 \end{bmatrix}^T$

通过$\widehat{L}^T x=y$即

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ & & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

解得$x=\begin{bmatrix} 0.8611 & 0.7111 & 1.2667 \end{bmatrix}^T$

<u>改进平方根法：</u>

根据题意将A进行改进平方根法分解

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.75 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{4} & 1 & \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & & \\ & \frac{9}{2} & \\ & & \frac{5}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ & 1 & \frac{2}{3} \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

通过$\widehat{L}y=b$即

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{4} & 1 & \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7.25 \end{bmatrix}$$

解得$y=\begin{bmatrix} 4 & 7 & 1.5833 \end{bmatrix}^T$

再通过$L^T x=D^{-1}y$即

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ & 1 & \frac{2}{3} \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & & \\ & \frac{2}{9} & \\ & & \frac{4}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

解得$x=\begin{bmatrix} 0.8611 & 0.7111 & 1.2667 \end{bmatrix}^T$

10,

根据题意，利用$Gauss-Jordan$消元法求矩阵的逆的过程如下

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\1&-1&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&1&0&0&1&0\\1&1&-1&1&0&0\\1&-1&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&1&0&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&-1&1&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}&0&0&-\frac{1}{2}&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&-1&1&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}&0&0&-\frac{1}{2}&1\end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}&0&0&-\frac{1}{2}&1\\0&\frac{1}{2}&-1&1&-\frac{1}{2}&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&-\frac{3}{2}&0&0&-\frac{1}{2}&1\\0&0&-1&1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&-1&1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&1&-1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{array}\right]$$

故可到矩阵的逆如下

$$A^{-1}=\left[\begin{array}{ccc}0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{array}\right]$$