第一次作业

2.

根据题意$f(x)=x^3-2x-5$在区间[2,3]上连续，根据误差不超过0.5×10^{-3}，得出所需迭代次数如下，解出$n=10$

$$\frac{|b-a|}{2^{n+1}}<\varepsilon \Rightarrow n=\left\lfloor \frac{ln(b-a)-ln\varepsilon}{ln2} \right\rfloor$$

再根据迭代次数得到的解为$\underline{x=2.09423828125}$，迭代过程如下

迭代次数k	$[a_i, b_i]$	x_k
0	$[2, 3]$	2.5
1	$[2, 2.5]$	2.25
2	$[2，2.25]$	2.125
3	$[2，2.125]$	2.0625
4	$[2.0625, 2.125]$	2.09375
5	$[2.09375, 2.125]$	2.109375
6	$[2.09375, 2.109375]$	2.1015625
7	$[2.09375, 2.1015625]$	2.09765625
8	$[2.09375, 2.09765625]$	2.095703125
9	$[2.09375, 2.095703125]$	2.0947265625
10	$[2.09375, 2.0947265625]$	2.09423828125

5.

根据题意$f(x)=x^3-x^2-1$是定义域上的连续函数，且有$f(1.5)>0, f(1.42)<0$

故$f(x)$在1.5附近的根属于区间**[1.42,1.5]**

(1)根据题意

$$x=\phi(x)=1+\frac{1}{x^2} \Rightarrow x_{k+1}=\phi(x_k)=1+\frac{1}{x_k^2}$$

当$x\in[1.42, 1.5]$时，$\phi(x)$单调递减

$\phi(1.42)=1.4959, \phi(1.5)=1.4444$，$\therefore \phi(x)\in[1.4444, 1.4959]\subset[1.42, 1.5]$

又$\because |\phi'(x)|=|-\frac{2}{x^3}|\leq 0.6985<1$

$\therefore$ 根据定理 1.3，在$x\in[1.42, 1.5]$时，$\phi(x)$收敛

$\therefore$ (1)的迭代公式在 1.5 附近**收敛**

(2)根据题意

$$x=\phi(x)=(1+x^2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x_{i+1}=(1+x_i^2)^{\frac{1}{3}}$$

当$x\in[1.42, 1.5]$时，$\phi(x)$单调递增

$\phi(1.5)=1.4812, \phi(1.42)=1.4449$，$\therefore \phi(x)\in[1.4449, 1.4812]\subset[1.42, 1.5]$

又$\because \left|\phi'(x)\right|=\left|\frac{2}{3}x(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}\right|\le\left|\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}\right|\le 0.4790<1$

∴ 根据定理 1.3，在$x\in[1.42,1.5]$时，$\phi(x)$ 收敛

∴ (2)的迭代公式在 1.5 附近**收敛**

(3)根据题意

$$x=\phi(x)=(x-1)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow x_{i+1}=(x_i-1)^{-\frac{1}{2}}$$

当$x\in[1.42,1.5]$时，$\left|\phi'(x)\right|=\left|-\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}}\right|\ge\left|\frac{1}{2}\cdot(1.5-1)^{-\frac{3}{2}}\right|=1.414>1$

∴ (3)的迭代公式在 1.5 附近局部**发散**

通过比较迭代方式(1)与迭代方式(2)的$\left|\phi'(x)\right|$，并选择较小的$\left|\phi'(x)\right|$进行迭代运算，以便加快迭代速度，可以得到方程的根约为 **1.4655771837422105**

k	x_k	x_{k+1}	$\lvert x_{k+1}-x_k\rvert$
0	1.5	1.4812480342	0.01875197
1	1.4812480342	1.4727057296	0.00854230
2	1.4727057296	1.4688173137	0.00388842
3	1.4688173137	1.4670479732	0.00176934
4	1.4670479732	1.4662430101	8.04963086E-4
5	1.4662430101	1.4658768202	3.66189946E-4
6	1.4658768202	1.4657102408	1.66579393E-4
7	1.4657102478	1.4656344765	7.57755374E-5
8	1.4656344765	1.4655999959	3.44693852E-5
9	1.4655999959	1.4655843162	1.56796577E-5
10	1.4655843162	1.4655771837	7.13245344E-6

12.

根据$Newton$迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

当$f(x)=x^n-a=0$时，代入$f(x_k),f'(x_k)$得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^n-a}{nx_k^{n-1}}=\frac{(n-1)x^n+a}{nx^{n-1}}\quad(k=0,1,\ldots)$$

当$f(x)=1-\frac{a}{x^n}=0$时，代入$f(x_k),f'(x_k)$得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{1-\frac{a}{x^n}}{\frac{a}{x^{n+1}}}=\frac{a(n+1)x_k-x_k^{n+1}}{an}\quad(k=0,1,\cdots)$$

由于$a^{\frac{1}{n}}$是方程的单根，可得$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\alpha-x_{i+1}}{(\alpha-x_i)^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i^2}=-\dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$

当$f(x)=x^n-a=0$时，代入$f\left(x_k\right),f'\left(x_k\right)$得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i^2}=-\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}=-\frac{n(n-1)\alpha^{n-2}}{2n\alpha^{n-1}}=-\frac{n-1}{2}a^{-\frac{1}{n}}$$

当$f(x)=1-\dfrac{a}{x^n}=0$时，代入$f\left(x_k\right),f'\left(x_k\right)$得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i^2}=-\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}=-\frac{-\frac{n(n+1)a}{\alpha^{n+2}}}{2\cdot\frac{an}{\alpha^{n+1}}}=\frac{n+1}{2}a^{-\frac{1}{n}}$$