数理逻辑第四次作业

姓名	谢宇航	班级	5 班	学号	200110505
第 1 题					
总分					
备注	1. 作业提交邮箱：hitsz_logic_2022@163.com。作业提交截止时间：2022-06-20-24:00，超过提交截止时间的作业视为无效。 2. 确因网络等特殊原因无法及时提交作业的学生，应至少提前 1 小时与助教联系沟通（徐朕燃，QQ：1319282215，电话：13713994811 许天骁，QQ：1140931320，电话：18800415868）。 3. 作业文件名命名方式：第 x 次-学号-姓名-x 班（例：第 4 次-180110504-张三-5 班.pdf）；邮件主题为：第 x 次-学号-姓名-x 班（例：第 4 次-180110504-张三-5 班）。缺少这些信息的作业将被酌情扣分。注意作业次数以阿拉伯数字命名。 4. 可手写拍照转为 PDF 格式。				

1. 在 ND 中证明：

$(1)\quad \vdash_{ND} (\neg A \to A) \to A$

$(3)\quad \vdash_{ND} ((A \vee B) \to C) \leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$

$(5)\quad \vdash_{ND} \neg(A \to B) \leftrightarrow A \wedge \neg B$

$(7)\quad \vdash_{ND} (A \wedge B) \leftrightarrow A \wedge (\neg A \vee B)$

（1）

$\vdash_{ND} (\neg A \to A) \to A$

证明：

1. $\neg A \to A, \neg A \vdash \neg A$ $(\in)$

2. $\neg A \to A, \neg A \vdash \neg A \to A$ $(\in)$

3. $\neg A \to A, \neg A \vdash A$ $(1)(2)\ (\to -)$

4. $\neg A \to A, A \vdash A$ （∈）

5. $\neg A \to A \vdash A$ (3)(4)（−）

（3）

先证明$\vdash_{ND} \big((A \vee B) \to C\big) \to (A \to C) \wedge (B \to C)$

1. $(A \vee B) \to C, A \vdash A$ （∈）

2. $(A \vee B) \to C, A \vdash A \vee B$ (1)（∨+）

3. $(A \vee B) \to C, A \vdash (A \vee B) \to C$ （∈）

4. $(A \vee B) \to C, A \vdash C$ (2)(3)（→−）

5. $(A \vee B) \to C \vdash A \to C$ (4)（→+）

6. $(A \vee B) \to C, B \vdash B$ （∈）

7. $(A \vee B) \to C, B \vdash A \vee B$ (6)（∨+）

8. $(A \vee B) \to C, B \vdash (A \vee B) \to C$ （∈）

9. $(A \vee B) \to C, B \vdash C$ (7)(8)（→−）

10. $(A \vee B) \to C \vdash B \to C$ (9)（→+）

11. $(A \vee B) \to C \vdash (A \to C) \wedge (B \to C)$ (5)(10)（∧+）

12. $\vdash \big((A \vee B) \to C\big) \to (A \to C) \wedge (B \to C)$ （∈）

再证明$\vdash_{ND} (A \to C) \wedge (B \to C) \to \big((A \vee B) \to C\big)$

1. $(A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B, A \vdash A$ （∈）

2. $(A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B, A \vdash (A \to C) \wedge (B \to C)$ （∈）

3. $(A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B, A \vdash A \to C$ (2)（∧−）

4. $(A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B, A \vdash C$ (1)(3)（→ −）

5. $(A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B, B \vdash B$ (∈)

6. $(A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B, B \vdash (A \to C) \wedge (B \to C)$ (∈)

7. $(A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B, B \vdash B \to C$ (6)（∈）

8. $(A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B, B \vdash C$ (5)(7)（→ −）

9. $(A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B \vdash A \vee B$ (∈)

10. $(A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B \vdash C$ (4)(8)(9)（∨ −）

11. $(A \to C) \wedge (B \to C) \vdash (A \vee B) \to C$ (→ +)

12. $\vdash (A \to C) \wedge (B \to C) \to \big((A \vee B) \to C\big)$ (→ +)

（5）

先证明$\vdash_{ND} \neg(A \to B) \to A \wedge \neg B$

1. $\neg(A \to B), \neg A \vdash \neg(A \to B)$ (∈)

2. $\neg(A \to B), \neg A \vdash \neg A$ (∈)

3. $\neg(A \to B), \neg A \vdash \neg A \vee B$ (2)（∨ +）

4. $\neg A \vee B \vdash A \to B$ ND 定理 5

5. $\vdash (\neg A \vee B) \to (A \to B)$ (4)（→ +）

6. $\neg(A \to B), \neg A \vdash (\neg A \vee B) \to (A \to B)$ (+)

7. $\neg(A \to B), \neg A \vdash A \to B$ (1)(6)（→ −）

8. $\neg(A \to B) \vdash \neg\neg A$ (1)(7)（¬ +）

9. $\neg(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \vdash \boldsymbol{A}$ (8)（¬¬ −）

10. $\neg(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}), \boldsymbol{B} \vdash \neg(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})$ (∈)

11. $\neg(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}), \boldsymbol{B} \vdash \boldsymbol{B}$ (∈)

12. $\vdash \boldsymbol{B} \to (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})$ ND 定理 7

13. $\neg(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}), \boldsymbol{B} \vdash \boldsymbol{B} \to (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})$ (+)

14. $\neg(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}), \boldsymbol{B} \vdash \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ (11)(13)（→ −）

15. $\neg(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \vdash \neg\boldsymbol{B}$ (10)(14)（¬ +）

16. $\neg(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \vdash \boldsymbol{A} \wedge \neg\boldsymbol{B}$ (9)(15)（∧ +）

再证明$\vdash_{ND} A \wedge \neg B \to \neg(A \to B)$

1. $\boldsymbol{A} \wedge \neg\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \vdash \boldsymbol{A} \wedge \neg\boldsymbol{B}$ (∈)

2. $\boldsymbol{A} \wedge \neg\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \vdash \boldsymbol{A}$ (1)（∧ −）

3. $\boldsymbol{A} \wedge \neg\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \vdash \neg\boldsymbol{B}$ (1)（∧ −）

4. $\boldsymbol{A} \wedge \neg\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \vdash \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ (∈)

5. $\boldsymbol{A} \wedge \neg\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \vdash \boldsymbol{B}$ (2)(4)（→ −）

6. $\boldsymbol{A} \wedge \neg\boldsymbol{B} \vdash \neg(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})$ (3)(5)（¬ +）

7. $\vdash \boldsymbol{A} \wedge \neg\boldsymbol{B} \to \neg(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})$ (→ +)

（7）

先证明：$\vdash_{ND} (A \wedge B) \to A \wedge (\neg A \vee B)$

1. $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} \vdash \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$ (∈)

2. $\boldsymbol{A \wedge B \vdash A}$ (1) $(\wedge -)$

3. $\boldsymbol{A \wedge B \vdash B}$ (1) $(\wedge -)$

4. $\boldsymbol{A \wedge B \vdash \neg A \vee B}$ $(V +)$

5. $\boldsymbol{A \wedge B \vdash A \wedge (\neg A \vee B)}$ (2)(4) $(\wedge +)$

6. $\boldsymbol{\vdash (A \wedge B) \rightarrow A \wedge (\neg A \vee B)}$ $(\rightarrow +)$

再证明：$\vdash_{ND} A \wedge (\neg A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$

1. $\boldsymbol{A \wedge (\neg A \vee B) \vdash A \wedge (\neg A \vee B)}$ $(\in)$

2. $\boldsymbol{A \wedge (\neg A \vee B) \vdash A}$ (1) $(\wedge -)$

3. $\boldsymbol{A \wedge (\neg A \vee B) \vdash \neg A \vee B}$ (1) $(\wedge -)$

4. $\boldsymbol{\neg A \vee B \vdash A \rightarrow B}$ ND 定理 5

5. $\boldsymbol{\vdash (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)}$ $(\rightarrow +)$

6. $\boldsymbol{A \wedge (\neg A \vee B) \vdash (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)}$ $(+)$

7. $\boldsymbol{A \wedge (\neg A \vee B) \vdash A \rightarrow B}$ (3)(6) $(\rightarrow -)$

8. $\boldsymbol{A \wedge (\neg A \vee B) \vdash B}$ (2)(7) $(\rightarrow -)$

9. $\boldsymbol{A \wedge (\neg A \vee B) \vdash A \wedge B}$ (2)(8) $(\wedge +)$