

## 数理逻辑第二次作业

姓名	谢宇航	班级	5	学号	200110505
第 1 题					
第 2 题					
总分					
备注	1. 作业提交邮箱: hitsz_logic_2022@163.com。作业提交截止时间: 2022-06-07-24:00, 超过提交截止时间的作业视为无效。 2. 确因网络等特殊原因无法及时提交作业的学生, 应至少提前 1 小时与助教联系沟通 (徐朕燃, QQ: 1319282215, 电话: 13713994811 许天骁, QQ: 1140931320, 电话: 18800415868)。 3. 作业文件名命名方式: 第 x 次-学号-姓名-x 班 (例: 第 2 次-180110504-张三-5 班.pdf); 邮件主题为: 第 x 次-学号-姓名-x 班 (例: 第 2 次-180110504-张三-5 班)。缺少这些信息的作业将被酌情扣分。注意作业次数以阿拉伯数字命名。 4. 可手写拍照转为 PDF 格式。				

1. 分别用  $\downarrow$  和  $\uparrow$  等价表示下列公式

$$(1) \quad \neg p \vee q$$

$$(2) \quad p \wedge \neg q$$

$$(3) \quad \neg p \vee \neg q$$

$$(4) \quad p \leftrightarrow q$$

(1)

$$\neg p \vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \downarrow q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \downarrow q) \downarrow (\neg p \downarrow q)$$

$$\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg(\neg p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow p \uparrow \neg q$$

$$\Leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q)$$

(2)

$$p \wedge \neg q$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg(p \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \downarrow q)$$

$$\Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow q$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg (p \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg (p \uparrow \neg q)$$

$$\Leftrightarrow (p \uparrow \neg q) \uparrow (p \uparrow \neg q)$$

$$\Leftrightarrow (p \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow (p \uparrow (q \uparrow q))$$

(3)

$$\neg p \vee \neg q$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg (\neg p \vee \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\neg p \downarrow \neg q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \downarrow \neg q) \downarrow (\neg p \downarrow \neg q)$$

$$\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg (\neg p \vee \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow p \uparrow q$$

(4)

$$p \leftrightarrow q$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg ((\neg (p \wedge q)) \wedge (\neg (\neg p \wedge \neg q)))$$

$$\Leftrightarrow (\neg (p \wedge q)) \uparrow (\neg (\neg p \wedge \neg q))$$

$$\Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (\neg p \uparrow \neg q)$$

$$\Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow ((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q))$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg (\neg p \vee \neg \neg q)) \vee (\neg (p \vee q))$$

$$\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \vee (p \downarrow q)$$

$$\Leftrightarrow (((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow (p \downarrow q)) \downarrow (((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow (p \downarrow q))$$

2. 在 PC 中证明下列事实（使用演绎定理证明不能超过 2 项）

- (1)  $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- (3)  $A \rightarrow B, \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow C$
- (5)  $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$
- (7)  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$
- (9)  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
- (11)  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$
- (13)  $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C)$

- (1)
- $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- 1.  $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
  - 2.  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
  - 3.  $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$

定理 1  
定理 6  
定理 18

- (3)
- $A \rightarrow B, \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow C$
- 1.  $(\neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
  - 2.  $\neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A$
  - 3.  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
  - 4.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
  - 5.  $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$
  - 6.  $A \rightarrow B$
  - 7.  $A \rightarrow C$

公理 3  
已知条件  
2 和 1 rmp 分离规则  
公理 2  
3 和 4 rmp 分离规则  
已知条件  
6 和 5 rmp 分离规则

- (5)
- $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$
- 1.  $(B \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D))$
  - 2.  $((B \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D))) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D))))$
  - 3.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D)))$

加后件定理  
加前件定理  
1 和 2 rmp 分离规则

4.  $(A \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D))) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$  前件互换定理

5.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$  3 和 4 三段论定理

(7)

$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$

1.  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理 6

2.  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)))$  公理 1

3.  $B \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$  1 和 2 rmp 分离规则

4.  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$  定理 14

5.  $B \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$  3 和 4 三段论定理

6.  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$  前件互换定理

7.  $(B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A)$  定理 1

8.  $((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$  6 和 7 定理 18

(9)

$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

1.  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理 6

2.  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$  定理 14

3.  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$  1 和 2 rmp 分离规则

4.  $A \rightarrow A$  定理 1

5.  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$  3 和 4 定理 18

(11)

$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$

1.  $C \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C)$  公理 1

2.  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理 6

3.  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg C \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)))$  公理 1

4.  $\neg C \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$  2 和 3 rmp 分离规则

5.  $\neg A \rightarrow (\neg C \rightarrow (A \rightarrow B))$  前件互换定理

6.  $(\neg C \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C)$  定理 14

7.  $\neg A \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C)$  5 和 6 三段论定理

8.  $(A \rightarrow C) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C)$  1 和 7 定理 18

9.  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$  前件互换定理

10.  $C \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$  公理 1

11.  $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$  9 和 10 定理 18

(13)

$$\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow \left( (B \rightarrow C) \rightarrow \left( ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C \right) \right)$$

使用演绎定理证明

1.  $A \rightarrow C$  假设
2.  $B \rightarrow C$  假设
3.  $(A \rightarrow B) \rightarrow B$  假设
4.  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理 6
5.  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow \left( ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \right)$  公理 1
6.  $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$  4 和 5 rmp 分离规则
7.  $\neg A \rightarrow B$  3 和 6 rmp 分离规则
8.  $\neg A \rightarrow C$  7 和 2 三段论定理
9.  $(A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg A)$  定理 13
10.  $\neg C \rightarrow \neg A$  1 和 9 rmp 分离规则
11.  $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow A)$  定理 14
12.  $\neg C \rightarrow A$  8 和 11 rmp 分离规则
13.  $(\neg C \rightarrow A) \rightarrow ((\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow C)$  定理 16
14.  $(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow C$  12 和 13 rmp 分离规则
15.  $C$  10 和 14 rmp 分离规则
16.  $A \rightarrow C, B \rightarrow C, (A \rightarrow B) \rightarrow B \vdash C$
17.  $A \rightarrow C, B \rightarrow C \vdash \left( ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C \right)$
18.  $A \rightarrow C \vdash \left( (B \rightarrow C) \rightarrow \left( ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C \right) \right)$
19.  $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow \left( (B \rightarrow C) \rightarrow \left( ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C \right) \right)$