

数理逻辑第二次作业

姓名	谢宇航	班级	5	学号	200110505
第 1 题					
第 2 题					
总分					
备注	1. 作业提交邮箱: hitsz_logic_2022@163.com。作业提交截止时间: <u>2022-06-07-24:00</u> , 超过提交截止时间的作业视为无效。 2. 确因网络等特殊原因无法及时提交作业的学生, 应至少提前 1 小时与助教联系沟通 (徐朕燃, QQ: 1319282215, 电话: 13713994811 许天骁, QQ: 1140931320, 电话: 18800415868)。 3. 作业文件名命名方式: 第 x 次-学号-姓名-x 班 (例: 第 2 次-180110504-张三-5 班.pdf); 邮件主题为: 第 x 次-学号-姓名-x 班 (例: 第 2 次-180110504-张三-5 班)。缺少这些信息的作业将被酌情扣分。注意作业次数以阿拉伯数字命名。 4. 可手写拍照转为 PDF 格式。				

1. 分别用 \downarrow 和 \uparrow 等价表示下列公式

$$(1) \quad \neg p \vee q$$

$$(2) \quad p \wedge \neg q$$

$$(3) \quad \neg p \vee \neg q$$

$$(4) \quad p \leftrightarrow q$$

(1)

$$\neg p \vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \downarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \downarrow q) \downarrow (\neg p \downarrow q) \Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow p \uparrow \neg q \Leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q)$$

(2)

$$p \wedge \neg q$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow q$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \uparrow \neg q) \Leftrightarrow (p \uparrow \neg q) \uparrow (p \uparrow \neg q) \Leftrightarrow (p \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow (p \uparrow (q \uparrow q))$$

(3)

$$\neg p \vee \neg q$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \downarrow \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \downarrow \neg q) \downarrow (\neg p \downarrow \neg q)$$

$$\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow p \uparrow q$$

(4)

$$p \leftrightarrow q$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg\neg(p \wedge q)) \vee (\neg\neg(\neg p \wedge \neg q))$$

$$\Leftrightarrow ((p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)) \vee (((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow ((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)))$$

$$\Leftrightarrow (((p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)) \uparrow ((p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q))) \uparrow$$

$$(((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow ((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q))) \uparrow (((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow ((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)))$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee \neg\neg q)) \vee (\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \vee (p \downarrow q)$$

$$\Leftrightarrow (((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow (p \downarrow q)) \downarrow (((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow (p \downarrow q))$$

2. 在 PC 中证明下列事实（使用演绎定理证明不能超过 2 项）

$$(1) \vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$(3) A \rightarrow B, \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow C$$

$$(5) \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$$

$$(7) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$(9) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

$$(11) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$$

$$(13) \vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$$

(1)

$$\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$1. (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

定理 1

$$2. \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

定理 6

$$3. (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

定理 18

(3)

$$A \rightarrow B, \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow C$$

$$1. (\neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

公理 3

2. $\neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A$ 已知条件
3. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 2 和 1 rmp 分离规则
4. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 公理 2
5. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ 3 和 4 rmp 分离规则
6. $A \rightarrow B$ 已知条件
7. $A \rightarrow C$ 6 和 5 rmp 分离规则

(5)

- $$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$$
1. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D))$ 加后件定理
 2. $((B \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D))) \rightarrow (A \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D)))$ 加前件定理
 3. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D)))$ 1 和 2 rmp 分离规则
 4. $(A \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D))) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$ 前件互换定理
 5. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$ 3 和 4 三段论定理

(7)

- $$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$$
1. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理 6
 2. $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)))$ 公理 1
 3. $B \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$ 1 和 2 rmp 分离规则
 4. $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$ 定理 14
 5. $B \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$ 3 和 4 三段论定理
 6. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 前件互换定理
 7. $(B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 定理 1
 8. $((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 6 和 7 定理 18

(9)

- $$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$
1. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理 6
 2. $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$ 定理 14
 3. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$ 1 和 2 rmp 分离规则
 4. $A \rightarrow A$ 定理 1
 5. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ 3 和 4 定理 18

(11)

- $$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$$

1. $C \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C)$ 公理 1
2. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理 6
3. $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg C \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)))$ 公理 1
4. $\neg C \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$ 2 和 3 rmp 分离规则
5. $\neg A \rightarrow (\neg C \rightarrow (A \rightarrow B))$ 前件互换定理
6. $(\neg C \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C)$ 定理 14
7. $\neg A \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C)$ 5 和 6 三段论定理
8. $(A \rightarrow C) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C)$ 1 和 7 定理 18
9. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$ 前件互换定理
10. $C \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$ 公理 1
11. $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$ 9 和 10 定理 18

(13)

$$\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$$

使用演绎定理证明

1. $A \rightarrow C$ 假设
2. $B \rightarrow C$ 假设
3. $(A \rightarrow B) \rightarrow B$ 假设
4. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理 6
5. $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$ 公理 1
6. $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ 4 和 5 rmp 分离规则
7. $\neg A \rightarrow B$ 3 和 6 rmp 分离规则
8. $\neg A \rightarrow C$ 7 和 2 三段论定理
9. $(A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg A)$ 定理 13
10. $\neg C \rightarrow \neg A$ 1 和 9 rmp 分离规则
11. $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow A)$ 定理 14
12. $\neg C \rightarrow A$ 8 和 11 rmp 分离规则
13. $(\neg C \rightarrow A) \rightarrow ((\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow C)$ 定理 16
14. $(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow C$ 12 和 13 rmp 分离规则
15. C 10 和 14 rmp 分离规则
16. $A \rightarrow C, B \rightarrow C, (A \rightarrow B) \rightarrow B \vdash C$
17. $A \rightarrow C, B \rightarrow C \vdash (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C)$
18. $A \rightarrow C \vdash ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$
19. $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$