第四章

数值积分

§4.1数值积分的一般问题

数值求积公式

讨论如下形式的数值求积公式

$$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} H_i f(x_i) \qquad (4.1.1)$$

称为机械求积公式.

其中$x_i \in [a,b]$ $(i=0,1,2,\ldots n)$称为求积节点;

$H_i(i=0,1,2,\ldots n)$称为求积系数(它与$f(x)$无关).

$$E(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} H_i f(x_i) \qquad (4.1.2)$$

称为求积公式的余项.

求积公式的代数精度

- 定义　若求积公式(4.1.1)对所有次数不超过m的多项式都精确成立，而对于某个$m+1$次多项式不能精确成立，则称此求积公式具有m次代数精度（或称该公式是m阶的）.
- 上述定义等价于：若求积公式(4.1.1)对$f(x)=1,x,x^2,\ldots,x^m$均精确成立，而对$f(x)=x^{m+1}$不精确成立,则称此求积公式具有m次代数精度（或称该公式是m阶的）.
- 代数精度的概念是衡量求积公式精确性的标准.

插值型求积公式

- 以给定互异点$x_0, x_1, \ldots, x_n$ 为插值节点,作$f(x)$的n次插值多项式$\varphi_n(x)$,把$\varphi_n(x)$ 写成Lagrange插值多项式的形式

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} (\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x) f(x_i)$$

求积系数

$$H_i = \int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x, \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

- 对于求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} H_i f(x_i)$$

如果求积系数

$$H_i = \int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\mathrm{d}x \qquad (4.1.3)$$

则称(4.1.1)为插值型求积公式.

其余项 $E(f) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} p_{n+1}(x)\mathrm{d}x$

若公式(4.1.1)是插值型求积公式，则它至少具有n次代数精度.

- 反之，若求积公式(4.1.1)至少具有n次代数精度，因$l_k(x)\in M_n$, $k=0,1,2,\ldots,n$.求积公式(4.1.1)对$l_k(x)$精确成立，即

$$\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}H_i l_k(x_i)=H_k,\ k=0,1,2,\cdots,n$$

- 综上有

定理 求积公式(4.1.1)至少具有n次代数精度的充分必要条件是它是插值型的.

例 确定求积公式中的待定参数，使其代数精确度尽量高，并指明求积公式所具有代数精度.

$$\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1} f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

- 解 求积分公式中含有三个待参数，即A_{-1}, A_0, A_1. 令求积公式对$f(x)=1,x,x^2$ 精确成立，即

$$\begin{cases} A_{-1} + A_0 + A_1 = 2h \\ -h(A_{-1} - A_1) = 0 \\ h^2(A_{-1} + A_1) = \dfrac{2}{3}h^3 \end{cases}$$

解得 $A_{-1} = A_1 = \frac{1}{3}h, \quad A_0 = \frac{4}{3}h$,所求公式至少具有2次代数精确度.

再将$f(x)=x^3,x^4$代入所确定的求积公式，有

$$\int_{-h}^{h} x^3\mathrm{d}x = 0 = \frac{h}{3}(-h)^3 + \frac{h}{3}(h^3)$$

$$\int_{-h}^{h} x^4\mathrm{d}x = \frac{2}{5}h^5 \neq \frac{h}{3}(-h)^4 + \frac{h}{3}h^4$$

故 $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{h}{3} f(-h) + \frac{4h}{3} f(0) + \frac{h}{3} f(h)$ 具有3次代数精度.

§4.2 等距节点的Newton-Cotes公式

Newton-Cotes公式

将区间$[a,b]$ n等分，其分点为$x_i=a+ih$，$i=0,1,2,\ldots,n$， $h=(b-a)/n$，以这$n+1$个等距分点为插值节点,作n次插值多项式

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n}\left(\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x\right)f(x_i)$$

求积系数

$$H_i=\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x, \quad (i=0,1,2,\cdots,n)$$

- 作变量替换$x=a+th$，于是

$$H_i=\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(-1)^{n-i}h}{i!(n-i)!}\int_0^n t(t-1)\cdots(t-i+1)(t-i-1)\cdots(t-n)\mathrm{d}t$$

记 $$C_i^{(n)}=\frac{(-1)^{n-i}}{n\cdot i!(n-i)!}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(t-j)\mathrm{d}t,\quad (i=0,1,2,\cdots,n) \qquad (4.2.1)$$

称为柯特斯（Cotes）系数.

则

$$H_i=(b-a)C_i^{(n)} \qquad (4.2.1)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i) \qquad (4.2.3)$$

称等距节点的插值型求积公式(4.2.3)为n阶牛顿—柯特斯（Newton-Cotes）公式.

- 当n=1时, Newton-Cotes公式(4.2.3)为梯形求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] = T \qquad (4.2.4)$$

$H_0 = H_1 = (b-a)/2$, $C_0 = C_1 = 1/2$

几何意义:用梯形面积近似代替曲边梯形面积.

- 当n= 2 时, Newton-Cotes公式(4.2.3)为抛物线

(Simpson)求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] = S \qquad (4.2.5)$$

$H_0 = H_2 = (b-a)/6$, $H_1 = 2(b-a)/3$, $C_0 = C_2 = 1/6$, $C_1 = 2/3$

- 当n=4时, Newton-Cotes公式(4.2.3)为Cotes公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)] \tag{4.2.6}$$

$H_0=H_4=7(b\text{-}a)/90$, $H_1=H_3=32(b\text{-}a)/90$, $H_2=12(b\text{-}a)/90$,

$C_0=C_4=7/90$, $C_1=C_3=32/90$, $C_2=12/90$.

- 其它情形可通过查Cotes系数表，给出具体公式.

Newton-Cotes公式的收敛性

定理　对于$n+1$个节点的Newton-Cotes公式的求积系数H_k, 当$n\to\infty$时, 数列 $\sum_{k=0}^{n}|H_k|$ 无限放大.

定理　如果当$n\to\infty$时, 与插值型求积公式(4.1.1)相应的数列 $\sum_{k=0}^{n}|H_k|$ 无限放大， 则有函数$f(x)\in C[a,b]$，使得数列

$$\sum_{k=0}^{n} H_k f(x_k) \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

不收敛于 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

此定理说明Newton-Cotes公式并不总是收敛于积分的真值.

Newton-Cotes公式的数值稳定性

- 设精确值为$f(x_j)$的计算值为$\tilde{f}(x_i)$，且

$$\left| f(x_i) - \tilde{f}(x_i) \right| \le \varepsilon_i, \quad i = 0,1,2,\cdots,n. \quad \varepsilon = \max_i \varepsilon_i$$

那么

$$\left| \sum_{i=0}^{n} H_i f(x_i) - \sum_{i=0}^{n} H_i \tilde{f}(x_i) \right| \le \sum_{i=0}^{n} |H_i| \left| f(x_i) - \tilde{f}(x_i) \right| \le \varepsilon \sum_{i=0}^{n} |H_i|$$

若每个H_i (i=0,1,2,…,n)都为正, 则

$$\left| \sum_{i=0}^{n} H_i f(x_i) - \sum_{i=0}^{n} H_i \tilde{f}(x_i) \right| \le \varepsilon \sum_{i=0}^{n} H_i = (b-a)\varepsilon$$

这时数值计算是稳定的.

若H_i有正有负,则$\sum_{i=0}^{n} |H_i| > b-a$且随$n$的增大无限放大,

这时数值计算是不稳定的.

- 当n=8时，Newton-Cotes公式中求积系数出现负数.
- 实际计算并不用高阶Newton-Cotes公式，一方面余项含高阶导数；另一方面其收敛性、稳定性都差.

Newton-Cotes公式的代数精度

- 对于n阶的Newton-Cotes公式

当n为奇数时，至少具有n次代数精度；

当n为偶数时，至少具有$n+1$次代数精度.

梯形求积公式具有1次代数精度.

抛物线求积公式具有3次代数精度.

Newton-Cotes公式的余项

- 对于n阶的Newton-Cotes公式

当n为奇数时，若$f(x)\in C^{n+1}[a,b]$,则

$$E(f)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_a^b p_{n+1}(x)\mathrm{d}x,\quad \xi\in(a,b)$$

当n为偶数时，若$f(x)\in C^{n+2}[a,b]$,则

$$E(f)=\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\int_a^b xp_{n+1}(x)\mathrm{d}x,\quad \xi\in(a,b)$$

定理4.3 当n为奇数时，Newton-Cotes公式有n次代数精度；当n为偶数时，Newton-Cotes公式有$n+1$次代数精度.

- 梯形求积公式的余项
- 定理 1　若$f(x) \in C^2[a,b]$,则梯形求积公式有余项估计

$$E_T(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta) \qquad \eta \in (a,b)$$

(4.2.7)

- 证　由插值余项定理知

$$f(x)-L_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)(x-b) \quad \xi\in(a,b)$$

等式两边积分得

$$E_T(f)=\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x$$

由于$f(x)\in C^2[a,b]$，且$(x\text{-}a)(x\text{-}b)$在$[a,b]$上非正(不变号),故根据积分中值定理知,至少存在一点$\eta\in(a,b)$,使

$$E_T(f)=\frac{1}{2}f''(\eta)\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x=-\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\eta)$$

- 抛物线求积公式的误差
- 定理 2　若$f(x)\in C^4[a,b]$,则抛物线求积公式有余项估计

$$E_s(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]$$

$$=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)\qquad \eta\in(a,b)\qquad (4.2.8)$$

- 证 抛物线求积公式具有3次代数精度, 为此构造三次多项式$P_3(x)$，满足 $P_3(a)=f(a)$,

$$P_3(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2}),P_3(b)=f(b),P_3'(\frac{a+b}{2})=f'(\frac{a+b}{2})$$

则

$$f(x)-P_3(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b) \quad \xi\in(a,b)$$

等式两边从a到b积分得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b P_3(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4!}\int_a^b f^{(4)}(\xi)(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)\mathrm{d}x$$

由于$P_3(x)$是三次多项式，故抛物线求积公式对它准确成立，即

$$\int_a^b P_3(x)\mathrm{d}\,x=\frac{b-a}{6}[P_3(a)+4P_3(\frac{a+b}{2})+P_3(b)]$$

$$=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

这样

$$E_s(f)=\frac{1}{4!}\int_a^b f^{(4)}(\xi)(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)\mathrm{d}x$$

由于$f(x)\in C^4[a,b]$，且$(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)$在$[a,b]$上非正(不变号),故根据积分中值定理知,至少存在一点$\eta\in(a,b)$,使

$$E_s(f)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\eta)\int_a^b(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)$$

复化Newton-Cotes公式

复化梯形求积公式

将区间$[a, b]$ n等份，其分点为$x_i=a+ih$ $(i=0,1,2,\ldots n)$, $h=(b-a)/n$. 在每个小区间$[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0,1,2,\ldots n-1)$,上利用梯形求积公式

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{x_{k+1}-x_k}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]$$

则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_{k+1}-x_k}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]$$

$$= \frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) = T_n \qquad (4.2.9)$$

称$T_n = \frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)]$为复化梯形求积公式.

- 将区间$[a, b]$ $2n$等份,得复化梯形求积公式

$$T_{2n}=\frac{h}{4}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+2f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]$$

$$T_{2n}=\frac{1}{2}(T_n+U_n)$$

其中

$$U_n=h\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

- 复化梯形求积公式的误差
- **定理 3** 若$f(x)\in C^2[a,b]$,则

$$E(f;T_n)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-T_n=-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta),\quad \eta\in(a,b) \tag{4.2.10}$$

- 证

$$E(f;T_n)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x-T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}\,x-\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]\}$$
$$=-\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k)\qquad \eta_k\in(x_k,x_{k+1})$$

由于$f(x)\in C^2[a,b]$，利用连续函数的性质知存在一点$\eta\in(a,b)$,使

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k)=f''(\eta)$$

这样

$$E(f;T_n)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-T_n=-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta),\quad \eta\in(a,b)$$

- $$\lim_{n\to\infty} T_n = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

即复化梯形求积公式是收敛的

- T_n的求积系数均为正，故是数值稳定的.

复化抛物线求积公式

将区间$[a, b]$ n等份，其分点为$x_i=a+ih$ $(i=0,1,2,\ldots n)$, $h=(b-a)/n$. 在每个小区间$[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0,1,2,\ldots n-1)$,上利用抛物线求积公式

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{x_{k+1}-x_k}{6}[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]$$

则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]$$

$$=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)]=S_n \qquad (4.2.11)$$

称为复化抛物线求积公式.

- $$S_n = \frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}U_n$$

$$S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{4-1} \qquad (4.2.12)$$

- 复化抛物线求积公式的误差

定理 4 若$f(x) \in C^4[a,b]$,则

$$E(f;S_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n = -\frac{(b-a)}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta), \eta \in (a,b)$$

(4.2.13)

- $$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

即复化抛物线求积公式是收敛的

- S_n的求积系数均为正，故是数值稳定的.

- 复化Cotes公式

$$C_n = \frac{h}{90}[7f(a) + 32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{3}{4}}) + 14\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 7f(b)] \tag{4.2.14}$$

其余项为

$$E(f;C_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - C_n = -\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta), \eta \in (a,b) \tag{4.2.15}$$

复化Cotes公式是收敛的、数值稳定的.

$$C_n = \frac{4^2 S_{2n} - S_n}{4^2 - 1}$$

例 用梯形求积公式和Simpson公式计算积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$,并估计误差.

- 解 记a=0, b=1, $f(x)=e^{-x}$,则$f'(x)=-e^{-x}$ $f''(x)=e^{-x}$, $f'''(x)=-e^{-x}$, $f^{(4)}(x)=e^{-x}$

$$T=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{1-0}{2}(\mathrm{e}^{-0}+\mathrm{e}^{-1})=0.683\,939\,7$$

$$E_T(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)=-\frac{1}{12}\mathrm{e}^{-\eta},\quad \eta\in(0,1)$$

$$|E_T(f)|\le\frac{1}{12}=0.083\,333$$

$$S=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$=\frac{1-0}{6}(\mathrm{e}^{-0}+4\mathrm{e}^{-0.5}+\mathrm{e}^{-1})=0.632\,333\,7$$

$$E_S(f)=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)=-\frac{1}{2880}\mathrm{e}^{-\eta},\quad \eta\in(0,1)$$

$$\left|E_S(f)\right|\le\frac{1}{2880}=0.000\,347\,2$$

推导如下矩形求积公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(a) + \frac{1}{2}f'(\eta)(b-a)^2$$

解 将$f(x)$在a处展开，得

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a), \quad \xi \in (a, x)$$

两边在$[a, b]$上积分，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a)\mathrm{d}x + \int_a^b f'(\xi)(x-a)\mathrm{d}x$$

$$= (b-a)f(a) + \int_a^b f'(\xi)(x-a)dx$$

由于x-a在$[a, b]$上不变号，故有$\eta\in(a,b)$, 使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(a) + f'(\eta)\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x$$

从而得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(a) + \frac{1}{2}f'(\eta)(b-a)^2, \quad \eta \in (a,b)$$

- 例 若用复化梯形求积公式求$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$的近似值，问要将积分区间[0, 1]分成多少等份才能保证计算结果有四位有效数字？若用复化抛物线求积公式呢？

- 解 记$f(x)=e^{-x}$，则 $f''(x)=f^{(4)}(x)=e^{-x}$． $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的真值具有零位整数，所以要求计算结果有四位有效数字，即要求复化梯形求积公式的误差满足

$$0.3 < \int_0^1 e^{-x} < 1$$

$$|E(f;T_n)| \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

由于b-a=1, $h=(b-a)/n=1/n$,所以要使

$$|E(f;T_n)| = \frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\eta) = \frac{1}{12n^2}\mathrm{e}^{-\eta} \le \frac{1}{12n^2} \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

只要 $n^2 \ge \frac{1}{6}\times 10^4$ ，开平方得，$n\ge 40.8$，取$n=41$.

- 因此，若用复化梯形公式求 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的近似值，必需将区间[0, 1]分成41等分才能保证计算结果有四位有效数字.
- 若用复化抛物线求积公式，则由其误差估计式知，要使

$$\left|E(f;S_n)\right| = \left|-\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta)\right| = \frac{h^4}{2880}e^{-\eta} \le \frac{1}{2880n^4} \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

只要$n\geq 2$，因此用复化抛物线求积公式计算，只需将区间[0, 1]分成2等分.

试分别用复化梯形求积公式和复化抛物线求积公式计算下列积分，并比较结果.

$$\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}dx \text{ (将区间8等分)}$$

- 解　将区间[0, 1]8等分，分点为$x_i=ih$ (i=0,1,2,…8), h=1/8.，令$f(x)=x/(4+x^2)$

  可计算得下表

x_i	0	1/8	1/4	3/8	1/2
$f(x_i)$	0	0.031 128 4	0.061 538 5	0.090 566 0	0.117 647 1
x_i		5/8	3/4	7/8	1
$f(x_i)$		0.142 348 8	0.164 383 6	0.183 606 6	0.200 00

- 由复化梯形求积公式得

$$T_8 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\left[f(0) + 2\sum_{i=1}^{7} f(x_i) + f(1) \right]$$
$$= \frac{1}{16}\left[f(0) + 2f(\frac{1}{8}) + 2f(\frac{1}{4}) + 2f(\frac{3}{8}) + 2f(\frac{1}{2}) + 2f(\frac{5}{8}) + 2f(\frac{3}{4}) + 2f(\frac{7}{8}) + f(1) \right]$$
$$\approx 0.111\,402\,4$$

- 由复化抛物线求积公式得

$$S_4 = \frac{1}{6}\times\frac{1}{4}\left\{ f(0) + 2\left[f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4}) \right] + 4\left[f(\frac{1}{8}) + f(\frac{3}{8}) + f(\frac{5}{8}) + f(\frac{7}{8}) \right] + f(1) \right\}$$
$$\approx 0.111\,572\,4$$

- 与积分的精确值比较，显然复化抛物线求积法比复化梯形求法精确得多.

$$\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(4+x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4} = 0.1115717$$

- 例4.1 利用复化梯形公式计算积分

$$S_i(1)=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$$

的近似值 T_8，并利用递推公式 $S_n=\frac{4T_{2n}-T_n}{4-1}$ 求出复化的Simpson公式 S_4 的值，然后都与真值 $S_i(1)=0.9460831$ 比较（所谓真值是指其每一位数字都是有效数字）。

解　我们采用步长对分法。先对整个区间[0,1]使用梯形公式。对于函数$f(x)=\sin x/x$，它在$x=0$值应补充定义为$f(0)=1$，而$f(1)=0.8414709$。于是得

$$T_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=0.9207355.$$

然后将区间二等分，再求出中点的函数值

$$f(\frac{1}{2})=0.9588510.$$

于是利用递推公式(4.2.26)，有

$$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=0.9397933.$$

我们进一步二分求积区间，并计算新分分点上的函数值

$$f(\frac{1}{4})=0.9896158,\quad f(\frac{1}{4})=0.9088516.$$

再利用式(4.2.26)，有

$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}\left[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})\right]=0.9445135.$$

相仿地，可得到

$$T_8=0.9456909.$$

再应用递推公式(4.2.31)，求得

$$S_4 = \frac{4T_8 - T_4}{3} = 0.9460834.$$

与真值相比，T_8 具有二位有效数字，而 S_4具有六位有效数字。

§4.3 Romberg求积法

$$E(f;T_n)=I(f)-T_n=-\frac{(b-a)^3}{12}\frac{1}{n^2}f''(\eta_1),\quad \eta_1\in(a,b) \qquad O(h^2)$$

$$E(f;T_{2n})=I(f)-T_{2n}=-\frac{(b-a)^3}{12}\frac{1}{(2n)^2}f''(\eta_2),\quad \eta_2\in(a,b)$$

$$\frac{I(f)-T_n}{I(f)-T_{2n}}\approx 4, \qquad I(f)\approx T_{2n}+\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)=\frac{4T_{2n}-T_n}{4-1}=S_n \quad (4.3.1)\quad O(h^4)$$

- 同理得

$$\frac{I(f)-S_n}{I(f)-S_{2n}}\approx 16, \qquad I(f)\approx S_{2n}+\frac{1}{15}(S_{2n}-S_n)=\frac{4^2S_{2n}-S_n}{4^2-1}=C_n,\ (4.3.2)\quad O(h^6)$$

- 同理得Romberg公式

$$\frac{4^3C_{2n}-C_n}{4^3-1}=R_n \qquad O(h^8) \qquad (4.3.3)$$

- …进行下去.
- 在变步长(半分区间)的过程中运用(4.3.1), (4.3.2), (4.3.3),就能将粗糙的近似值T_n逐步加工成精度较高的S_n (3阶的), C_n (5阶的), , R_n ,…值，提高了收敛速度，其实质起到了加速收敛的作用，也称为逐次分半加速法.

Romberg方法

- 将区间$[a, b]$依次作$2^0, 2^1, 2^2, \ldots$等分，记 $h_i = \dfrac{b-a}{2^i}$

按复化梯形求积公式算得的值相应地记为 $T_0^{(0)}, T_0^{(1)}, T_0^{(2)}, \cdots$.

由公式

$$T_m^{(k)} = \frac{4^m T_{m-1}^{(k+1)} - T_{m-1}^{(k)}}{4^m - 1}$$

递推计算数表

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$\cdots$
0	$T_0^{(0)}$				
1	$T_0^{(1)}$	$T_1^{(0)}$			
2	$T_0^{(2)}$	$T_1^{(1)}$	$T_2^{(0)}$		
3	$T_0^{(3)}$	$T_1^{(2)}$	$T_2^{(1)}$	$T_3^{(0)}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

用$T_m^{(k)}$或$T_m^{(0)}$作为定积分的近似值.

若$f(x)\in C^{2m+2}[a,b]$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_m^{(k)} = -\frac{B_{2m+2}}{2^{(m+1)(m+2k)}\cdot(2m)!}(b-a)^{2m+3} f^{(2m+2)}(\eta), \quad \eta\in(a,b)$$

(4.3.4)

其中B_{2m+2}是只与m有关而与k无关的常数.

由此可知:

T数表中元素$T_m^{(k)}$相应的求积公式具有$2m+1$次代数精度.

而且对固定的m

$$\lim_{k\to\infty} T_m^{(k)} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(4.3.5)

即T数表中第m列的元素收敛于积分真值.

若$f(x)$是有界可积的， 不仅(4.3.5)成立,而且还有

$$\lim_{m\to\infty} T_m^{(0)} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

即T数表中对角线上的元素也收敛于积分真值.

- T数表中的每一个元素$T_m^{(k)}$的值都是由2^k, 2^{k+1}, … ,2^{k+m}个区间上复化梯形公式的线性组合，即$T_m^{(k)}$的值是第一列元素值的线性组合.
- 在实际计算中，当表中对角线 (列)上出现两个顺序连接的数之差为允许误差时，即可停止运算.

例 用Romberg求积法求积分 $I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的近似值,要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$.

- 解 记 $f(x)=\frac{4}{1+x^2},\quad a=0,\quad b=1$

$$f(0)=\frac{4}{1+0^2}=4,\quad f(1)=\frac{4}{1+1^2}=2$$

$$T_0^{(0)}=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{1-0}{2}[f(0)+f(1)]=3$$

$$f(0.5)=\frac{4}{1+0.5^2}=3.2$$

$$T_0^{(1)}=\frac{1}{2}[T_0^{(0)}+f(0.5)]=\frac{1}{2}(3+3.2)=3.1$$

$$f(0.25)=\frac{4}{1+0.25^2}=3.764\,705\,9,\quad f(0.75)=\frac{4}{1+0.75^2}=2.560\,000\,0$$

$$T_0^{(2)} = \frac{1}{2}\{T_0^{(1)} + \frac{1}{2}\times[f(0.25) + f(0.75)]\} = 3.131\,176\,5$$

$$f(0.125) = \frac{4}{1+0.125^2} = 3.938\,461\,5 \qquad f(0.375) = \frac{4}{1+0.375^2} = 3.506\,849\,3$$

$$f(0.625) = \frac{4}{1+0.625^2} = 2.876\,404\,5 \qquad f(0.875) = \frac{4}{1+0.875^2} = 2.265\,486\,7$$

$$T_0^{(3)} = \frac{1}{2}\{T_0^{(2)} + \frac{1}{4}\times[f(0.125) + f(0.375) + f(0.625) + f(0.875)]\} = 3.138\,988\,5$$

$$T_0^{(4)} = \frac{1}{2}\left[T_0^{(3)} + \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8} f\left((2k-1)\frac{b-a}{16}\right) = 3.140\,941\,6\right]$$

由递推算式 $T_m^{(k)} = \dfrac{4^{(m)} T_{m-1}^{(k+1)} - T_{m-1}^{(k)}}{4^m - 1}$

计算得下表

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$
0	3.000 000				
1	3.100 000	3.133 333			
2	3.131 177	3.141 569	3.142 118		
3	3.138 989	3.141 593	3.141 594	3.141 586	
4	3.140 942	3.141 593	3.141 593	3.141 593	3.141 593

$$\left|T_4^{(0)} - T_3^{(0)}\right| \le \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

取$T_4^{(0)}$作为的近似值,即 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x \approx 3.141\,593$. 这一结果与准确值 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x = 4\arctan x\Big|_0^1 = \pi$相比较已有较好的效果.