第六章

常微分方程数值解法

- 本章研究常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \quad a \le x \le b \\ y(a) = \eta \end{cases} \tag{6.1.1}$$

的数值解法. 并且假定$f(x, y)$满足解的存在唯一性定理及相当光滑等条件.

- 初值问题(6.1.1)的精确解记为$y(x)$.

建立数值解法的基本思想

- 本章的数值解法，它不是求(6.1.1)的解$y(x)$的解析表达式或近似表达式，而是通过某种离散化方法，将连续变量的初值问题转化为关于离散量的差分方程的相应问题来求一系列离散点上的解值$y(x_i)$的近似值y_i. 利用计算机解微分方程主要使用数值方法.

- 取一系列点

$$x_0=a, \quad x_1, \quad \dots, \quad x_n, \dots$$

$$y(x_0)=y_0, y(x_1)\approx y_1, \dots, y(x_n)\approx y_n, \dots$$

$y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$称为数值解.

$h=x_n-x_{n-1}$称为步长．本章都取定步长.

用离散化方法建立求$y(x_n)$的近似值y_n的递推格式(差分方程)，求得y_n

- 解初值问题(6.1.1)的数值解法，其特点都是采取步进式的方法，即求解过程顺着节点排列的次序一步一步向前推进.

- 这种数值解法分为两大类：

(1)单步法：若求y_{n+1}，只需利用它前一步的信息y_n，则称这种方法为单步法。它由y_0出发，可求得y_1，y_2，$y_3 \cdots$

(2)多步法：若求y_{n+1}，需利用它前面至少两个点的息，则称这种方法为多步法.

数值解法研究的主要问题：

(1)方法的推导：采用的离散化手段，精度准则.

(2)收敛性：差分方程的解是否充分逼近初值问题的解.

(3)稳定性：初始数据、计算过程中每步产生的误差对以后各步解的影响，这种误差传播是否可控制、甚至是衰减的.

- 具体数值方法的应用还应考虑

(1)误差估计

(2)解的起动方法

(3)步长如何选取

(4)隐式方法如何使用

建立数值解法的基本途径

- 常用的离散化方法

(1)Taylor展开

(2)化导数为差商

(3)数值积分

§6.1 单步法及基本概念

Euler折线法

- 利用Taylor展开法

将$y(x_{n+1})$在x_n处Taylor展开

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(\xi_n)$$

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

得差分方程

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \quad （n=0,1,2,\ldots）$$

称此方法为Euler折线法或矩形法.

- 利用化导数为差商的方法

$$\frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}\approx y'(x_n)=f(x_n,y(x_n))$$

$$y(x_{n+1})\approx y(x_n)+hf(x_n,y(x_n))$$

得差分方程

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)\quad（n=0,1,2,\ldots）\qquad(6.1.2)$$

- 利用数值积分的方法

在$[x_n,x_{n+1}]$上对$y'(x)=f(x, y(x))$积分得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\mathrm{d}x$$

用左矩形求积公式计算定积分有

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

以此得差分方程

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

梯形法

- 用不同的近似公式计算定积分的值,就得到解初值问题的不同数值解法.
- 用梯形求积公式计算积分得

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{6.1.3}$$

这个方法称为梯形法. 它是隐格式.

- 运用它常采用下面的迭代格式

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})] \end{cases}$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots; n = 0, 1, 2, \cdots)$$

改进的Euler方法

- 若梯形法只迭代一次,便得改进的Euler方法

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})] \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{6.1.4}$$

也可写成以下两种形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{2}hK_1 + \dfrac{1}{2}hK_2 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_p = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_c = y_n + hf(x_{n+1}, y_p) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases} \quad (6.1.4)'$$

数值方法精度的衡量准则

- 定义　设$y_n=y(x_n)$，则称$T_n=y(x_{n+1})-y_{n+1}$为方法的从x_n到x_{n+1}这一步的局部截断误差.

- 定义　若数值方法的局部截断误差为$O(h^{r+1})$，则称这种方法为r阶方法，这里r为非负整数.

- 由Taylor展开式知

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots \tag{6.1.5}$$

对于Euler法

$T_n = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_n, y(x_n)) = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hy'(x_n)$

$$= \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + O(h^3) = O(h^2)$$

Euler法是1阶方法

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \cdots$$

- 对于梯形法

$$T_n = y(x_{n+1}) - y(x_n) - \frac{h}{2}(y'(x_n) + y'(x_{n+1})) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

由Taylor展开式知

$$y'(x_{n+1}) = y'(x_n) + hy''(x_n) + \frac{h^2}{2} y'''(x_n) + \cdots$$

$$T_n = hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \cdots - \frac{h}{2}(y'(x_n) + y'(x_n)$$

$$+hy''(x_n) + \frac{h^2}{2} y'''(x_n) + \cdots) = -\frac{h^3}{12} y'''(x_n) + O(h^4) = O(h^3)$$

梯形法是2阶方法.

- 对于改进Euler法，设$y_n=y(x_n)$，利用Taylor展开式

$$K_1=f(x_n,y(x_n))=y'(x_n)$$

$$\begin{aligned}
K_2 &= f(x_n+h, y(x_n)+hK_1) \\
&= f(x_n, y(x_n)) + h\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + hK_1 \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n)) + \cdots \\
&= f(x_n, y(x_n)) + h[\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + y'(x_n) \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n))] + \cdots \\
&= y'(x_n) + hy''(x_n) + \cdots
\end{aligned}$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \cdots$$

将其代入中T_n有

$$T_n = y(x_{n+1}) - y(x_n) - \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

$$= hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \cdots - \frac{h}{2}(y'(x_n) + y'(x_n) + hy''(x_n) + \cdots)$$

$$= O(h^3)$$

改进Euler法是2阶方法.

- 例 用Euler方法求解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y + x + 1 \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

取h=0.1

- 解 设$f(x,y)=-y+x+1$，$x_0=0, y_0=1, x_n=x_0+nh=0.1n$（$n=0,1,\ldots,10$）

Euler格式为 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + 0.1(-y_n + x_n + 1)$

由$y_0=1$出发，按上面公式的计算结果并与精确解$y(x)$进行比较，如表所示

x_n	y_n	$y(x_n)$	$\lvert y(x_n) - y_n \rvert$
0	1.000 000	1.000 000	0
0.1	1.000 000	1.004 837	0.004 837
0.2	1.010 000	1.018 731	0.008 731
0.3	1.029 000	1.040 818	0.011 818
0.4	1.056 100	1.070 320	0.014 220
0.5	1.090 490	1.106 531	0.016 041
0.6	1.131 441	1.148 812	0.017 371
0.7	1.178 297	1.196 585	0.018 288
0.8	1.230 467	1.249 329	0.018 862
0.9	1.287 420	1.306 570	0.019 150
1.0	1.348 678	1.367 879	0.019 201

利用Euler方法计算积分 $\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 在点x=0.5, 1, 1.5, 2处的数值解.

- 解 令 $y(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$

则有等价的问题 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x^2} \\ y(0)=0 \end{cases}$

对此一阶常微分方程初值问题，取步长h=0.5，设 $f(x,y)=e^{x^2}, x_0=0, y_0=0$

$$x_n=x_0+nh=nh \quad (n=0,1,2,3,4)$$

由Euler格式

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y_n+0.5\mathrm{e}^{x_n^2}$$

从$y_0=0$出发计算的数值解如表

x_n	y_n
0.5	0.500 000
1.0	1.142 013
1.5	2.501 154
2.0	7.245 022

用梯形法解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 8 - 3y \quad 1 \le x \le 2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

取步长h=0.2，小数点值至少保留5位.

- 解　设$f(x,y)=8-3y$，$x_0=1, y_0=2$,

$x_n=x_0+nh=1+0.2n$（$n=0,1,\ldots,5$）

梯形公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

于是

$$y_{n+1} = y_n + \frac{0.2}{2}[8 - 3y_n + 8 - 3y_{n+1}]$$

整理得显格式

$$y_{n+1}=\frac{7}{13}y_n+\frac{16}{13}$$

由y_0=2出发，计算结果如表所示

x_n	y_n	x_n	y_n
1	2	1.6	2.562 59
1.2	2.307 69	1.8	2.610 62
1.4	2.473 37	2.0	2.636 49

用改进Euler法求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y + y^2 \sin x = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

要求取步长h=0.2，计算$y(1.2)$及$y(1.4)$的近似值，小数点后至少保留5位.

- 解 设$f(x,y)=-y-y^2\sin x$, $x_0=1, y_0=1$, $x_n=x_0+nh=1+0.2n$,改进Euler法为

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} \overline{y}_{n+1} = y_n - 0.2(y_n + y_n^2 \sin x_n) \\ y_{n+1} = y_n - 0.1(y_n + y_n^2 \sin x_n + \overline{y}_{n+1} + \overline{y}_{n+1}^2 \sin x_{n+1}) \end{cases}$$

由y_0=1计算得

$$\begin{cases} \overline{y}_1 = 0.631\,706 \\ y(1.2) \approx y_1 = 0.715\,489 \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{y}_2 = 0.476\,965 \\ y(1.4) \approx y_2 = 0.526\,112 \end{cases}$$

Runge-Kutta方法

- Taylor展开式

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \cdots$$

$$= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

$$+ \frac{h^2}{2!}[\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + f(x_n, y(x_n)) \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n))] + \cdots$$

- 理论上讲，只要解$y(x)$充分光滑，通过保留Taylor展开式的若干项就可得到任意阶的近似公式，但计算$y(x)$的各阶导数很麻烦.可间接利用这种思想,保留其高精度,单步法的优点.

- Euler法也可写成形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_1 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \end{cases}$$

- 其局部截断误差为$O(h^2)$，是一阶方法.每步计算f的值一次.

- 改进Euler法也可写成形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{2}hK_1 + \dfrac{1}{2}hK_2 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1) \end{cases}$$

- 局部截断误差为$O(h^3)$，是二阶方法．每步计算f的值二次．
- 可以通过增加计算f的值的次数，提高公式的阶数（精度）．

- 以f在不同点上的函数值的线性组合来代替$y_{n+1}-y_n$，其中有一些可待定选取的待定参数，通过Taylor展开确定这些待定参数使建立的数值方法按要求达到一定的阶数，这种思想就是Runge-Kutta方法的思想.

- s阶Runge-Kutta法的一般形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} R_i K_i \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_i = f(x_n + a_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j), \quad i = 2, 3, \cdots, s \end{cases}$$

其中R_i,a_i,b_{ij}都是常数.

二阶Runge-Kutta法的建立

- 二阶Runge-Kutta法的一般形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + R_1 h K_1 + R_2 h K_2 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + ah, y_n + bhK_1) \end{cases}$$

其中R_1, R_2, a, b为待定常数.

其局部截断误差为$O(h^3)$，是二阶方法. 每步计算f的值二次.

- 设$y_n=y(x_n)$

$K_1=f(x_n,y_n)=f(x_n,y(x_n))$

把K_2中f在$(x_n,y(x_n))$处Taylor展开

$$K_2 = f(x_n+ah, y(x_n)+bhK_1) = f(x_n, y(x_n))$$

$$+ah\frac{\partial}{\partial x}f(x_n, y(x_n))+bhK_1\frac{\partial}{\partial y}f(x_n, y(x_n))+O(h^2)$$

$$= f(x_n, y(x_n))$$

$$+h[a\frac{\partial}{\partial x}f(x_n, y(x_n))+bf(x_n, y(x_n))\frac{\partial}{\partial y}f(x_n, y(x_n))]+O(h^2)$$

- 再将K_1,K_2代入y_{n+1}中,

$$y_{n+1} = y_n + R_1 hK_1 + R_2 hK_2$$
$$= y(x_n) + h(R_1 + R_2) f(x_n, y(x_n))$$
$$+h^2[aR_2 \frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + bR_2 f(x_n, y(x_n)) \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n))] + O(h^3)$$

- 将其与$y(x_{n+1})$泰勒展开式比较，要使$y(x_{n+1})$-y_{n+1}=$O(h^3)$，含h^0, h^1, h^2的项相同．即有

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 1 \\ aR_2 = \frac{1}{2} \\ bR_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- 4 个未知数， 3 个方程

满足条件的解不止一组．取$R_1=R_2=1/2,a=b=1$, 就是改进Euler法；取$R_1=0,R_2=1,a=1/2,b=1/2$得中点方法.

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n))$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_2 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} K_1) \end{cases}$$

四阶Runge-Kutta法的建立

- 四阶Runge-Kutta法的一般形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + R_1 h K_1 + R_2 h K_2 + R_3 h K_3 + R_4 h K_4 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} h K_1) \\ K_3 = f(x_n + a_3 h, y_n + b_{31} h K_1 + b_{32} h K_2) \\ K_4 = f(x_n + a_4 h, y_n + b_{41} h K_1 + b_{42} h K_2 + b_{43} h K_3) \end{cases}$$

其中有13个待定常数

局部截断误差为$O(h^5)$，是四阶方法．每步计算f的值四次．

- 设$y_n=y(x_n)$
- 把K_2,K_3,K_4中f在$(x_n,y(x_n))$处泰勒展开后，将K_1,K_2,K_3,K_4代入y_{n+1}中，再将y_{n+1}按h的幂重新整理后与$y(x_{n+1})$泰勒展开式比较，要使$y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^5)$，含$h^0, h^1, h^2, h^3, h^4$的项相同．从而确定各参数．

$$
\left\{
\begin{aligned}
& R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 1 \\
& a_2 = b_{21} \\
& a_3 = b_{31} + b_{32} \\
& a_4 = b_{41} + b_{42} + b_{43} \\
& a_2 R_2 + a_3 R_3 + a_4 R_4 = \frac{1}{2} \\
& a_2^2 R_2 + a_3^2 R_3 + a_4^2 R_4 = \frac{1}{3} \\
& a_2^3 R_2 + a_3^3 R_3 + a_4^3 R_4 = \frac{1}{4} \\
& a_2 b_{32} R_3 + R_4 (a_2 b_{42} + a_3 b_{43}) = \frac{1}{6} \\
& a_2^2 b_{32} R_3 + R_4 (a_2^2 b_{42} + a_3^2 b_{43}) = \frac{1}{12} \\
& a_2 a_3 b_{32} R_3 + a_4 R_4 (a_2 b_{42} + a_3 b_{43}) = \frac{1}{8} \\
& a_2 b_{32} b_{43} R_4 = \frac{1}{24}
\end{aligned}
\right.
$$

13个未知数，11个方程

满足条件的解不止一组．最常用的是

- 标准四阶Runge-Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{hK_1}{2}) \\ K_3 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{hK_2}{2}) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \end{cases} \qquad (6.1.7)$$

取步长h=0.4，写出用标准四阶Runge-Kutta方法求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sin(x+y) \quad 1 \le x \le 9 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

的计算公式，并计算$y(1.8)$的近似值，小数点后至少保留6位.

- 解 设$f(x,y)=x\sin(x+y)$，$x_0=1, y_0=0$, $x_n=x_0+nh=1+0.4n$，（$n=0,1,\ldots,20$）标准四阶Runge-Kutta公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{hK_1}{2}) \\ K_3 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{hK_2}{2}) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \end{cases}$$

代入$f(x,y)=x\sin(x+y)$有

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{0.4}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = (1+0.4n)\sin(1+0.4n+y_n) \\ K_2 = (1.2+0.4n)\sin(1.2+0.4n+y_n+0.2K_1) \\ K_3 = (1.2+0.4n)\sin(1.2+0.4n+y_n+0.2K_2) \\ K_4 = (1.4+0.4n)\sin(1.4+0.4n+y_n+0.4K_3) \end{cases}$$

- 由$y_0=0$计算得
- $y(1.4)\approx y_1=0.460\ 389$
- $y(1.8)\approx y_2=0.911\ 704$

例 6.1 用Euler法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y}, \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

解：求解这个初值问题的Euler法公式为

$$y_{n+1} = y_n + h(y_n - \frac{2x_n}{y_n}),$$

取步长$h = 0.1$，计算结果见表6.1.

表 6.1

x_n	y_n	$y(x_n)$	x_n	y_n	$y(x_n)$
0.1	1.1000	1.0954	0.6	1.5090	1.4832
0.2	1.1918	1.1832	0.7	1.5803	1.5492
0.3	1.2774	1.2649	0.8	1.6498	1.6125
0.4	1.3582	1.3416	0.9	1.7178	1.6733
0.5	1.4351	1.4142	1.0	1.7848	1.7321

我们将解 $y=\sqrt{1+2x}$ 的精确值 $y(x_n)$同近似值y_n 一起列在表6.1中，两者比较可以看出Euler法的精度很低。

例6.8 分别用改进的Euler法(取h=0.1)和经典四级4阶RK法(取h=0.2)求解初值问题

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y}, & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解:

(1) 改进的Euler法公式(6.5.16)可以写为

$$\begin{cases} y_p = y_n + h(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}) \\ y_c = y_n + h(y_p - \dfrac{2x_{n+1}}{y_p}) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$

取h=0.1，计算结果见表6.6

表6.6

x_n	y_n	$y(x_n)$	x_n	y_n	$y(x_n)$
0.1	1.0959	1.0954	0.6	1.4860	1.4832
02	1.1841	1.1832	0.7	1.5525	1.5492
0.3	1.2662	1.2649	0.8	1.6153	1.6125
0.4	1.3434	1.3416	0.9	1.6782	1.6733
0.5	1.4164	1.4142	1.0	1.7379	1.7321

(2)经典四级4阶RK公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}, \quad K_2 = y_n + \dfrac{h}{2}K_1 - \dfrac{2x_n + h}{y_n + \frac{h}{2}K_1} \\ K_3 = y_n + \dfrac{h}{2}K_2 - \dfrac{2x_n + h}{y_n + \frac{h}{2}K_2}, \quad K_4 = y_n + hK_3 - \dfrac{2(x_n + h)}{y_n + hK_3} \end{cases}$$

取h=0.2，计算结果见表6.7

表6.7

x_n	y_n	$y(x_n)$
0.2	1.1832	1.1832
0.4	1.3417	1.3416
0.6	1.4833	1.4832
0.8	1.6125	1.6125
1.0	1.7321	1.7321

比较这两个结果，显然是4阶RK法的精度高。但是，由于RK法的导出是基于Taylor级数法，因此在使用RK法时，要求解具有较好的光滑性。若解的光滑性差，使用4阶RK法求得的数值解，其精度可能反而不如用改进的Euler法取较小的步长来计算时的精度。因此，在实际计算时，我们应当针对问题的具体特点选择合适的数值方法。