Elastizität

PHILIPP Maximilian
11839611

26.05.2021

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung

1. Wiegen der Gewichte des Gewichtssatzes, messen des Abstands der Auflageschneiden mit einem Maßband und die Bestimmung der Stababmessungen (Höhe, Breite, Länge bzw. Durchmesser) mit einer Schiebelehre.
2. Ermittlung des Flächenträgheitsmoments durch die Messungen für ein vorgegebenes Stabprofil.
3. Bestimmung der maximale Durchbiegung
4. Bestimmung des Elastizitätsmodul E eines Stabes, anhand seiner Durchbiegung
5. Wiederholung des Biegeversuchs mit einem anderen Material

2 Voraussetzungen und Grundlagen

Folgende Grundlagen wurden aus dem zur Verfügung gestellten Vorlagen [2] [6] und dem Mechanik Vorlesungskript [5] entnommen und für dieses Experiment leicht angepasst.

Wirken auf einen Körper äußere Kräfte, die im Gleichgewicht sind, so tritt eine Änderung der Form und des Volumens des Körpers ein, die bei Beenden der Kraftwirkung wieder vollständig zurückgeht, solange die Deformation die Grenze des elastischen Bereiches nicht überschreitet. Die Dehnung ε (positiv oder negativ) ist dann proportional der wirkenden Spannung σ. Die Proportionalitätskonstante E wird Elastizitätsmodul genannt. Dieser Zusammenhang ist in Gleichung 1 dargestellt.

$$\sigma = \frac{F}{A} = E\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon E \tag{1}$$

Betrachtet man einen Balken oder Stab, welcher zwischen zwei Punkten im Abstand L gelagert ist und auf welchen in der Mitte eine Kraft F wirkt, kommt es zu einer Durchbiegung. Dabei lässt sich die maximale Durchbiegung w_{max} bei kleinen Durchbiegungen mittels Gleichung 2 beschreiben.

$$w_{max} = \frac{FL^3}{48EI_y} \tag{2}$$

I_y beschreibt hierbei das Flächenträgheitsmoment des Stabes:

$$I_y = \int z^2 \mathrm{d}A \tag{3}$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad \text{für rechteckiges Stabprofil} \tag{4}$$

$$I_y = \frac{\pi d^4}{64} \quad \text{für kreisförmiges Stabprofil} \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Wobei z der senkrechte Abstand der y-Achse zum dA Element ist. b ist die Dicke und h die Höhe des rechteckigen Stabes. d ist der Durchmesser des runden Stabes.

Die maximale Biegespannung σ_{max} lässt sich durch das, durch die Kraft enstandene, Biegemoment M_b, der Stabhöhe h und dem Flächenträgheitsmoment I_y anschreiben:

$$\sigma_{max} = \frac{hM_b^{max}}{2I_y} \tag{7}$$

Das maximale Biegemoment ist, wie zuvor erwähnt, abhängig von der Kraft F und der Länge L des Stabes, die Gleichung 8 zeigt diesen Zusammenhang:

$$M_{max} = \frac{FL}{4} = \frac{mgL}{4} \tag{8}$$

Um zu sehen, wie sich die Unsicherheit der Messungen bis in die Ergebnisse fortpflanzt, ist Gleichung 9 verwendet worden. Die Grundlagen dieser Gleichung sind von den Powerpointfolien von GUM entnommen worden.[7] Die Verallgemeinerung ist von Wikipedia entnommen worden [4]. Für die Auswertung ist die Progammiersprache Python im speziellen das Packet `scipy`, zur Hilfe genommen worden.

$$V_y = J(x) \cdot V_x \cdot J^T(x) \tag{9}$$

Wobei V_y und V_x die Kovarianzmatrizen von den Vektoren $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{x}$ sind. $\boldsymbol{x}$ ist der Vektor der Eingangsvariablen und $\boldsymbol{y}$ ist der Vektor der Ausgangsvariablen. J ist die Jakobimatrix der vektorwertigen Funktion $\boldsymbol{y} = \vec{F}(\boldsymbol{x})$ ist. So lassen sich die Komponenten der Matrix relativ einfach anschreiben $J_{ij}(x) = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x)$. Damit man die Unsicherheit der einzelnen Variablen y_i bekommt, muss nur die Quadratwurzel des i-ten Diagonalelementes der $\boldsymbol{y}$-Kovarianzmatrix genommen werden $u_i = \sqrt{\mathrm{diag}(V_y)_i}$. Da in diesem Experiment meistens nur skalare Funktionen untersucht werden, vereinfacht sich die Gleichung 9 dramatisch und die Unsicherheit der Variable y lässt sich einfach so berechnen:

$$u_y = \sqrt{\mathrm{grad}y^T \cdot V_x \cdot \mathrm{grad}y} \tag{10}$$

3 Versuchsanordnung

Zwei Sessel werden einander gegenüber gestellt und der zu untersuchende Stab hinaufgelegt, siehe Abbildung 1. Weiters wird ein dritter Sessel benötigt um einen Schuhlöffel als Referenzpunkt mit Panzerband dort zu befestigen, siehe Abbildung 2. Alle Messungen werden von diesem Referenzpunkt aus gemacht.

Abbildung 1: Aufbau des Experiments wo der Träger zwischen den zwei Sesseln belastest wird.

Abbildung 2: Aufbau des Referenzpunkts

4 Geräteliste

Tabelle 1: Verwendete Geräte

Gerät	Gerät-Nr.	Unsicherheit	Bemerkungen
Holzstab, eckig	axx	3 ms	Objekt von dem das E-Modul bestimmt wird
Maßband	bxx	1 mm	Um die Länge bzw. den Überhang der Stäbe zu messen
Schublehre	cxx	0,02 mm	Um die Dicke bzw. Höhe der Stäbe zu messen
Stahlstab, rund	dxx	-	Für die Bestimmung des E-Moduls eines anderes Materials
Stühle 3x	fxx	-	Dienen als Loslager für die Träger
Schuhlöffel	hxx	-	Dient als Referenzpunkt
Panzerband	ixx	-	Um den Schuhlöffel fest an einem Stuhl zu befestigen
Set-Präzision Gewichte	jxx	±0,02 g	Eichung Österreichischeseichamt
0,75 kg Gewichte 2x	kxx	±10 g	Gewogen mit Waage die eine Unsicherheit von ±3 g@0,75 kg

5 Versuchsdurchführung und Messergebnisse

Für die Biegeversuche werden die Stäbe auf zwei Sessel gelegt. Im nächsten Schritt werden in der Mitte der Stäbe Gewichte fixiert, bis eine gewisse Deformation des Stabes erkenntlich ist, wodurch sich das E-Modul bestimmen lässt. Dies wird mit verschiedenen Gewichten gemacht um ein Reihe an Messwerten zu bekommen. Dieser Versuch wird für die verschiedenen Materialien wiederholt. Dies wurde mit einem rechteckigen Holzstab und einem runden Stahlstab durchgeführt. In folgenden Tabellen sind die erhaltenen Auslenkungen bei einem bestimmten Gewicht aufgelistet:

Tabelle 2: Diese Tabelle beinhaltet die Gewichte m_i und die Auslenkung ω_{max_i}, die die entsprechenden Gewichte bei einem Holzstab verursachen:
m_i ist die Aufgehängte Masse
ω_{max_i} ist die, durch die Masse verursachte, Deflektion vom Referenzpunkt aus
ref ist die Distanz vom Referenzpunkt zum Messpunkt bei keinem Gewicht

i	m_i / g	Δm_i / mg	ω_{max_i} / cm	$\Delta\omega_{max_i}$ / cm
ref	0	0	0,912	0,02
1	20	±2	1,028	0,02
2	50	±2	1,252	0,02
3	70	±2	1,514	0,02
4	100	±2	1,710	0,02
5	120	±2	1,936	0,02
6	150	±2	2,158	0,02
7	200	±2	2,578	0,02
8	220	±2	2,716	0,02
9	250	±2	2,922	0,02
10	270	±2	3,122	0,02
11	300	±2	3,342	0,02
12	320	±2	3,502	0,02
13	350	±2	3,706	0,02
14	400	±2	4,088	0,02

Tabelle 3: Diese Tabelle beinhaltet die Gewichte m_i und die Auslenkung ω_{max_i}, die die entsprechenden Gewichte bei einem Stahlstab verursachen:
m_i ist die Aufgehängte Masse
ω_{max_i} ist die, durch die Masse verursachte, Deflektion vom Referenzpunkt aus
ref ist die Distanz vom Referenzpunkt zum Messpunkt bei keinem Gewicht

i	m_i / g	Δm_i / g	ω_{max_i} / cm	$\Delta\omega_{max_i}$ / cm
ref	0	0	1,820	0,02
1	200	±0,02	1,912	0,02
2	400	±0,02	2,042	0,02
3	750	±10	2,246	0,02
4	1150	±10	2,536	0,02
5	1500	±20	2,706	0,02
6	1700	±20	2,778	0,02
7	1900	±20	2,958	0,02

Das exakte Ablesen der Werte war schwierig, deshalb sind die Unsicherheiten bei der Längenmessung deutlich höher, im Vergleich zur Genauigkeit der Schublehre.

Die Länge von Lager zu Lager wurde auch bestimmt:

Tabelle 4: Diese Tabelle beinhaltet die Distanz von Lager zu Lager der zwei Messungen.
L_{Holz} ist die Distanz von Lager zu Lager bei der Messung vom Holz
L_{Stahl} ist die Distanz von Lager zu Lager bei der Messung vom Stahl

Symbol	Werte	Δ
L_{Holz} / cm	119	±0,1
L_{Stahl} / cm	100	±0,1

Die Dimensionen des Holzstabes sind die Breite $b = (2{,}60 \pm 0{,}07)\,\mathrm{cm}$ und die Höhe $h = (6{,}7 \pm 0{,}7)\,\mathrm{mm}$ da der Holzstab über die Länge variiert, konnten diese Werte nicht genauer bestimmt werden.

Der Durchmesser des runden Stahlstabes ist $(8{,}00 \pm 0{,}02)\,\mathrm{mm}$.

6 Auswertung

Zunächst lässt sich das Flächenträgheitsmoment vom rechteckigen Holzstab I_H Gleichung 4 und dann das Flächenträgheitsmoment vom runden Stahlstab I_S Gleichung 5 bestimmen:

$$I_H = (7 \pm 3) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^4 \tag{11}$$

$$I_S = (2{,}01 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^4 \tag{12}$$

Formt man Gleichung 8 nach E um und nimmt die Kraft $F = mg$ gleich der Gravitationskraft, wobei m die Masse der Objekte und $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ die Erdbeschleunigung ist, können die Werte aus Tabelle 2 3 4 genommen werden um eine Reihe an Werten für das E-Modul zu bekommen.

$$E = \frac{gL^3}{48\omega_{max} I_y} m \tag{13}$$

Wenn diese Werte nun gemittelt werden und der Standarderror davon berechnet wird, bekommt man folgende Werte für das E-Modul von Stahl E_S

$$E_S = (181 \pm 8)\,\mathrm{GPa} \tag{14}$$

und für das E-Modul von Holz

$$E_S = (6 \pm 5)\,\mathrm{GPa} \tag{15}$$

Eine andere Methode wäre das E-Modul mittels einem linearen Fit zu finden indem man die maximale Deflektion ω_{max} über das belastende Gewicht m aufträgt.

$$\omega_{max} = \frac{gL^3}{48EI_y} m \tag{16}$$

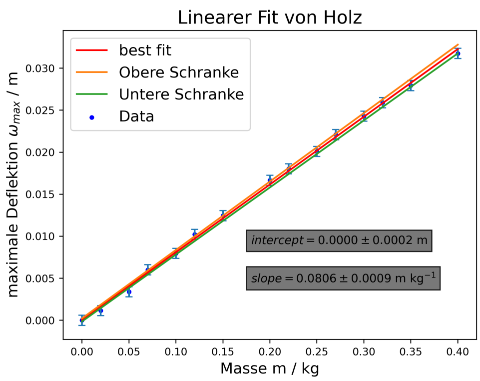

Abbildung 3: Die Daten aus Tabelle 2 an diese Gleichung 16 gefittet um die Steigung zu bestimmen, mit der dann das E-Modul von Holz gefunden werden kann.

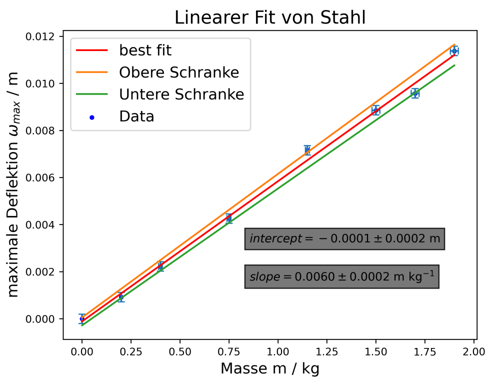

Abbildung 4: Die Daten aus Tabelle 3 an diese Gleichung 16 gefittet um die Steigung zu bestimmen, mit der dann das E-Modul von Stahl gefunden werden kann.

Vergleicht man die durch das Fitten erhaltene Steigung (slope) k mit der Steigung der Gleichung 16, so ergibt sich ein Wert für das E-Modul.

So erhält man für Stahl einen Wert von

$$E_S = (170 \pm 60)\,\mathrm{GPa} \tag{17}$$

und für Holz einen Wert von

$$E_H = (6 \pm 5)\,\mathrm{GPa} \tag{18}$$

7 Diskussion und Zusammenfassung

Nun werden die verwendeten Methoden diskutiert und die Ergebnisse zusammengefasst.

Die erhaltenen Werte aus dem Kapitel Auswertung für die E-Module von Stahl E_S und Holz E_H beinhalten die Literaturwerte, siehe Tabelle 5 jedoch sind die relativen Unsicherheiten überwiegend groß, wodurch nicht wirklich eine Aussage getroffen werden kann.

Tabelle 5: Messergebnisse für das E-Modul für Stahl und Holz, unter Verwendung von einem Linearen-Fit und dem Mittel von mehreren Messungen. Zudem die Gegenüberstellung von den Messwerten zu den Literaturwerten

E / GPa	Mittelung	Linearer Fit	Literaturwert
Holz	6 ± 5	6 ± 5	10 bis 15[3]
Stahl	181 ± 8	170 ± 60	180 bis 210[1]

Der einzige brauchbare Wert ist der Wert für das E-Modul von Stahl, welcher durch Mittelung der Messwerte bestimmt wurde.

Verbesserungsvorschläge sind:

1. Einen besseren Holzstab nehmen, da dieser nicht wirklich perfekt homogen war.
2. Mehrere Messungen des Holzstabes mit größeren Gewichtsabständen
3. Verwendung von genaueren und schwereren Gewichten

Dieses Experiment, war um es kurz zu fassen, ein experimentalphysikalisches Weihefestspiel (indirektes Zitat Helmuth Mayr BWB2 2019).

Eine gute Sache, welche noch zu erwähnen wäre, ist, dass der Referenzpunkt mit dem Schuhlöffel sehr gut funktioniert hat. So sollte es immer gemacht werden.

Literatur

[1] Rainer Ahrberg u. a. *Handbuch Maschinenbau: Grundlagen und Anwendungen der Maschinenbau-Technik.* Wiesbaden: Springer-Verlag, 2011. ISBN: 978-3-8348-1025-0.

[2] *Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch Biegung.* de. Petersgasse 16, A-8010 Graz: Institut f. Experimentalphysik Technische Universität Graz, 18. Apr. 2018.

[3] *Elastizitätsmodul.* de. Page Version ID: 211887586. Mai 2021. URL: `https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Elastizit%C3%A4tsmodul&oldid=211887586` (besucht am 06. 06. 2021).

[4] *Fehlerfortpflanzung.* de. Page Version ID: 205827844. URL: `https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Fehlerfortpflanzung&oldid=205827844` (besucht am 08. 05. 2021).

[5] Peter Knoll. *Mechanik und Wärme(Mechanics and Heat). Skriptum zur Vorlesung.* DE. Vorlesungsskript. 2020. 407 S.

[6] Robert Nuster und Peter Knoll. *Protokoll Bsp. 3c: Elastizität.* de. Petersgasse 16, A-8010 Graz: Inst. f. Physik der KFU Graz, 2020.

[7] Braunschweig Wolfgang Kessel. *Die ISO/BIPM-GUM Sicht:Schätzwert & Messunsicherheit.* 2004.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis