

Institut für Experimentalphysik der Technischen Universität Graz

&

Institut für Physik der Universität Graz

LABORÜBUNGEN 1: MECHANIK UND WÄRME

Übungstitel: Trägheitsmomente

Betreuer: Nuster Robert

Gruppennummer:

Vorbereitung	Durchführung	Protokoll

 Σ

Name: Maximilian Philipp

Kennzahl: UF 033 678 Matrikelnummer: 11839611

Datum: 24 Mai 2021 SS 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	3
2	Voraussetzungen und Grundlagen	3
3	Versuchsanordnung	6
4	Geräteliste	7
5	Versuchsdurchführung und Messergebnisse	8
6	Auswertung	10
7	Diskussion und Zusammenfassung	12
7.1	Diskussion	12
7.2	Zusammenhang	13

1 Aufgabenstellung

Ziel dieser Laborübung ist es für eine Drehschwingung Direktionsmoment D_r , Trägheitsmoments I , Dämpfung γ und Kennfrequenz ω_0 zu bestimmen. Vorerst soll das Trägheitsmoment abgeschätzt werden und anschließend mit dem experimentell bestimmten Wert verglichen werden.

2 Voraussetzungen und Grundlagen

Folgende Grundlagen wurden aus dem zurverfügung gestellten Vorlagen [4] und dem Mechanik Vorlesungskript [3] entnommen und für dieses Experiment leicht angpasst.

Das Drehpendel wird durch eine Smartphone, welche durch einen Torsionsdraht an der Verdrehung gehindert wird, realisiert. Die periodische veränderliche Größe ist der Drehwinkel ϕ der Metallscheibe um eine vorgegebene Achse. Dies ist möglich, wenn auf den Körper ein Drehmoment T wirkt, das eine Funktion des Drehwinkels ist. Für die Winkelbeschleunigung gilt:

$$\ddot{\phi} = \frac{T}{I} \quad (1)$$

worin I das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehachse ist.

Der lineare Zusammenhang zwischen Drehwinkel und Drehmoment ist durch:

$$T = -D_r \phi \quad (2)$$

gegeben. Der Proportionalitätsfaktor D_r heißt das Direktionsmoment. Wird dies durch Verdrillung eines Drahtes der Länge l und des Radius r bewirkt, so gilt für das Direktionsmoment:

$$D_r = \frac{\pi r^4 G}{2l} \quad (3)$$

Dabei ist G der Torsionsmodul, welcher durch das Material des Drahtes bestimmt wird. Die Bewegungsgleichung des Drehpendels lautet unter Vernachlässigung einer Dämpfung:

$$I \ddot{\phi} + D_r \phi = 0 \quad (4)$$

Die Lösung der Schwingungsgleichung lautet:

$$\phi(t) = \phi_0 \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} = \phi_0 \cos \omega_0 t \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D_r}{I}} \quad (5)$$

Wobei ω_0 die Kennfrequenz des Schwingers ist. Für die Periodendauer t_p gilt somit:

$$t_p = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D_r}} \quad (6)$$

Wird das Trägheitsmoment I der Scheibe um einen definierten Wert nI' verändert, so führt das zu einer geänderten Schwingungsdauer:

$$t_p(n) = 2\pi \sqrt{\frac{I + nI'}{D_r}} \quad (7)$$

Durch Quadrieren erhält man einen linearen Zusammenhang:

$$t_p^2(n) = \frac{4\pi I}{D_r} + \frac{4\pi I'}{D_r}n \quad (8)$$

Trägt man nun in einem Diagramm $t_p^2(n)$ als y -Wert und n als x -Wert auf, so kann man aus der ermittelten Ausgleichsgeraden D_r und I bestimmen.

Werden als Zusatzgewichte 4 Münzen mit Masse M und Radius R verwendet, so lautet das dadurch zusätzliche Trägheitsmoment bezogen auf die gemeinsame Drehachse (Zylinderachse):

$$I' = M(R^2 + 4d^2) \quad (9)$$

Wobei d die Distanz von der Drehachse zum Münzenschwerpunkt. Diese Distanz lässt sich durch die halbe Dicke des Smartphones b und der Distanz von Drehachse zum Münzenschwerpunkt entlang der Mittelachse a anschreiben. Für eine genauer Illustration siehe Abbildung 1. Weiters ist Näherungen $I_{Zyl} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Ml^2 \approx \frac{1}{4}MR^2$ gemacht worden, da die Dicke der Münze im Vergleich viel kleiner als der Radius ist $R \gg l$.

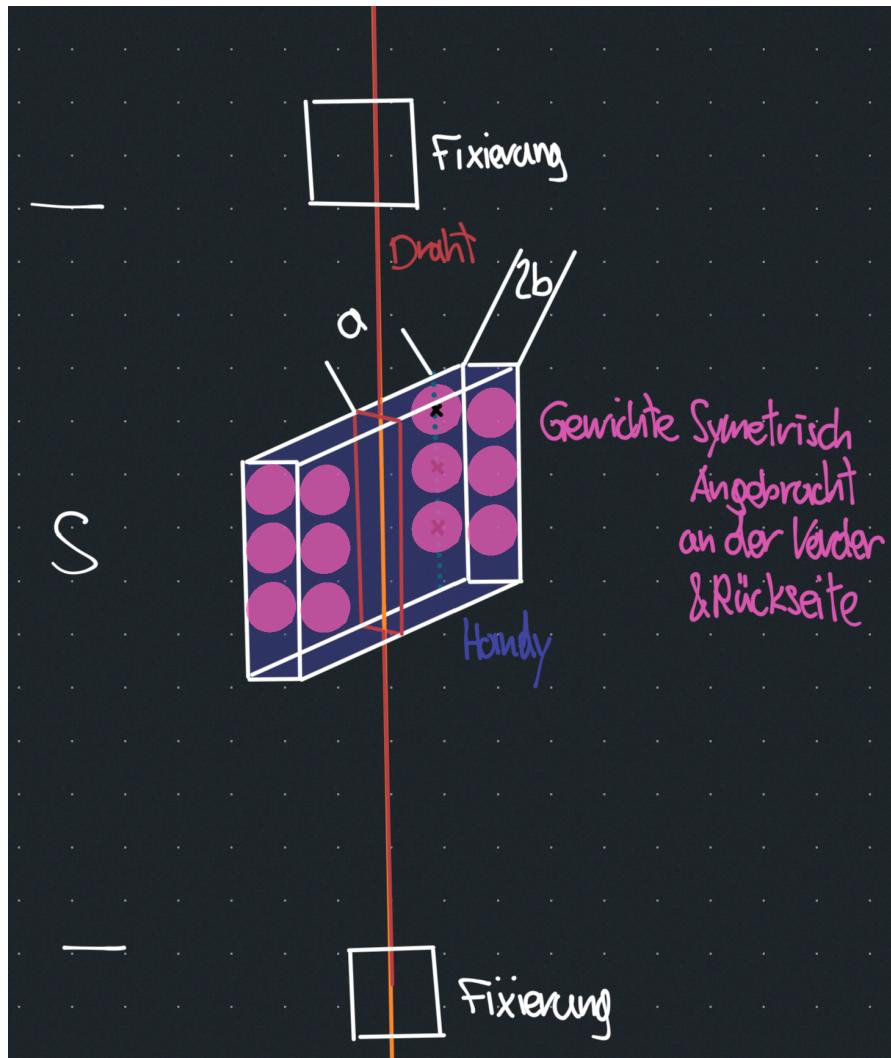


Abbildung 1: Dies ist eine Skizze um die Verbindung zwischen Theorie und Experiment zu visualisieren.

Unter Berücksichtigung einer Geschwindigkeitsabhängigen Reibung lautet die Differentialgleichung der gedämpften Schwingung:

$$\ddot{\phi} + 2\gamma\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = 0 \quad (10)$$

wobei γ die Dämpfungskonstante und $\omega_0 = \sqrt{\frac{D_r}{I}}$ die Kennfrequenz ist. Die Lösung der gedämpften Schwingung lautet:

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_e t \quad (11)$$

Die Eigenfrequenz der Schwingung $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ ist dabei durch die Dämpfung gegenüber der Kennfrequenz verringert worden. Im Verlauf mehrerer Schwingungen verringert sich die Schwingungsamplitude nach einer e -Potenz. Die Dämpfungskonstante γ

kann aus dem Amplitudenverhältnis von aufeinanderfolgenden Schwingungen bestimmt werden zu:

$$\frac{1}{t_P} \ln \left(\frac{\phi(t)}{\phi(t + t_P)} \right) = \gamma \quad (12)$$

Um zu sehen wie sich die Unsicherheit der Messungen bis in die Ergebnisse fortplanzt, ist Gleichung 13 verwendet worden. Die Grundlagen dieser Gleichung sind von den Powerpointfolien von GUM entnommen worden.[7] Die Verallgemeinerung ist von Wikipedia entnommen worden [2]. Für die Auswertung ist die Programmiersprache Python im speziellen das Packet `scipy`, zur Hilfe genommen worden.

$$V_y = J(x) \cdot V_x \cdot J^T(x) \quad (13)$$

Wobei V_y und V_x die Kovarianzmatrizen von den Vektoren \mathbf{y} und \mathbf{x} . \mathbf{x} ist der Vektor der Eingangsvariablen und \mathbf{y} ist der Vektor der Ausgangsvariablen. J ist die Jakobi-matrix der vektorwertigen Funktion $\mathbf{y} = \vec{F}(\mathbf{x})$ ist. So lassen sich die Komponenten der Matrix relativ einfach anschreiben $J_{ij}(x) = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x)$. Damit man die Unsicherheit der einzelnen Variablen y_i bekommt muss nur die Quadratwurzel des i-ten Diagonalelementes der \mathbf{y} -Kovarianzmatrix genommen werden $u_i = \sqrt{\text{diag}(V_y)_i}$. Da in diesem Experiment meistens nur skalare Funktionen untersucht werden vereinfacht sich die Gleichung 13 dramatisch und die Unsicherheit der Variabel y lässt sich einfach so berechnen:

$$u_y = \sqrt{\text{grad}y^T \cdot V_x \cdot \text{grad}y} \quad (14)$$

3 Versuchsanordnung

Das Handy wird in einem Stahldraht eingewickelt und zwischen zwei Beinen eines Sessels eingespannt. Ein Schraubenzieher wird verwendet um den Draht zu spannen. Dieser wurde so eingesetzt, dass das Gewicht des Sessel auf den Schraubenzieher lastet und damit immer stärker den Draht spannt. Für den ersten Teilversuch wird nur das Handy selbst ausgelenkt, für die folgenden Versuche werden erst ohne dann insgesamt 4, dann insgesamt 8 und dann insgesamt 12 50-Cent Münzen am Handy fixiert. Dabei wird vom unteren Rand des Handys angefangen und es werden jeweils immer auf der linken und rechten äußeren Seite die Münzen mit Klebeband symmetrisch fixiert, damit sich der Schwerpunkt nicht verschiebt, siehe Abbildung 2.

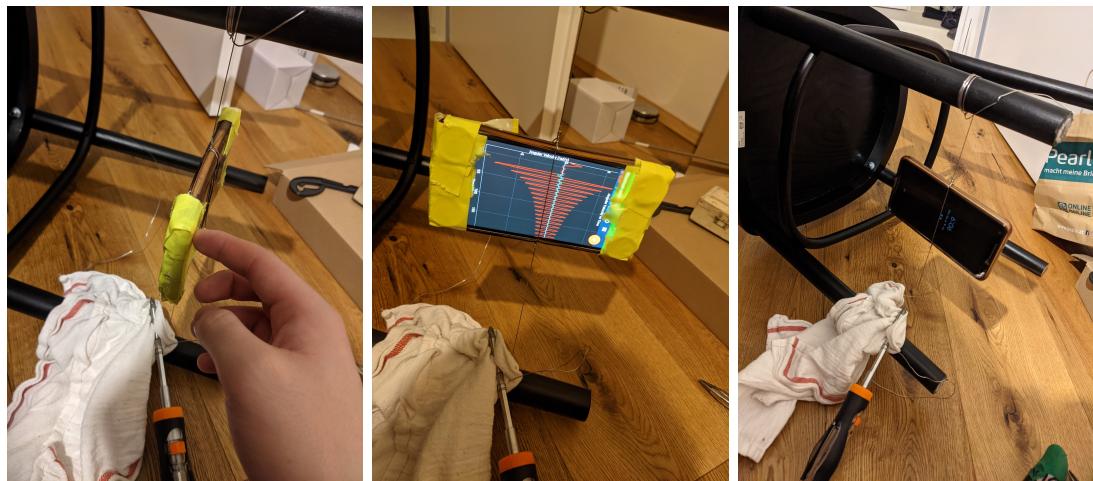


Abbildung 2: 3 Messungen der Winkelgeschwindigkeit ω_x in der x-Achse des Smartphones ohne Zusatzgewichte

4 Geräteliste

Tabelle 1: Verwendete Geräte

Gerät	Gerät-Nr.	Unsicherheit	Bemerkungen
Handy	axx	3 ms	Wird verwendet um Winkelgeschwindigkeit aufzuzeichnen und es ist das Objekt von dem, das Trägheitsmoment bestimmt wird.
Maßband	bxx	1 mm	-
Schublehre	cxx	0,02 mm	Um die Dicke bzw. Länge des Smartphones zu messen
50-Cent-Münzen 12x	dxx	-	Die Zusatzgewichte von denen man das Trägheitsmoment leicht berechnen kann.
Stuhl	gxx	-	Zum Befüllen des Quincke-Rohres
Stahldraht	hxx	-	Sendet einen 1600,00 Hz Sinussignal an den Lautsprecher
Schraubenzieher	ixx	-	Zum Anregen von stehenden Wellen im Quincke-Rohr mit der Frequenz vom Signalgenerator
Thermometer	jxx	0,6 K	Modell: GTH 1170 (Greisinger GmbH.) Um die Umgebungstemperatur zu bestimmen

5 Versuchsdurchführung und Messergebnisse

Die 50 Cent-Münzen haben ein Gewicht 7,80 g, einen Durchmesser von 24,25 mm und eine Dicke von 2,38 mm, siehe [1]. Der Fehler wurde als implizit angegeben angenommen.

Weiters sind die Länge a und b , aus der Skizze 1 mit der Schublehre bestimmt worden. a ist (67 ± 2) mm und b ist $(8,35 \pm 0,04)$ mm. Da die Befestigung nicht so exakt war kann a nicht so genau bestimmt werden.

Das eingespannte Handy wird per Hand um 90 ± 2 Grad ausgelenkt und losgelassen und das Handy zeichnet die Winkelgeschwindigkeit auf. Nach 10 Schwingungen (bei der Unbelasteten) war die Amplitude der Winkelschwingung nur mehr $(27 \pm 1)\%$ von der Initialen.

Im nächsten Schritt werden am unteren Rand des Handys auf beiden Seiten je zwei 50-Cent Münzen mit Klebeband fixiert, siehe Abbildung 1. Nun wird das Handy mit den Münzen ausgelenkt und das Handy zeichnet wieder die Winkelgeschwindigkeit auf. Dies wird nun weitere zweimal wiederholt, wobei beim zweiten Mal die Münzen rechts und links am mittleren Rand fixiert werden und beim dritten Mal am oberen Rand. Somit erhält man folgende Daten.

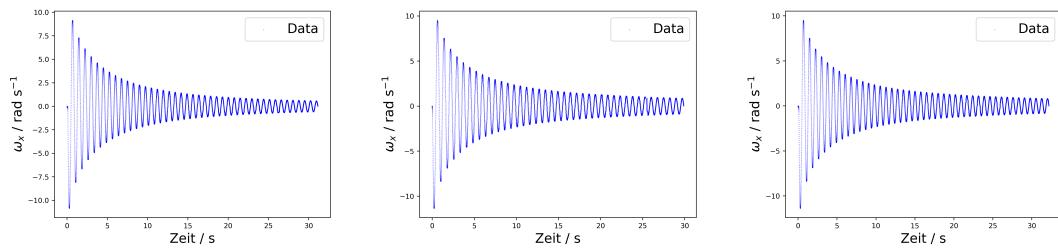


Abbildung 3: 3 Messungen der Winkelgeschwindigkeit ω_x in der x-Achse des Smartphones ohne Zusatzgewichte. Wobei auf der x-Achse die Zeit t / s aufgetragen wurde und auf der y-Achse die Winkelgeschwindigkeit $\omega_x / \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

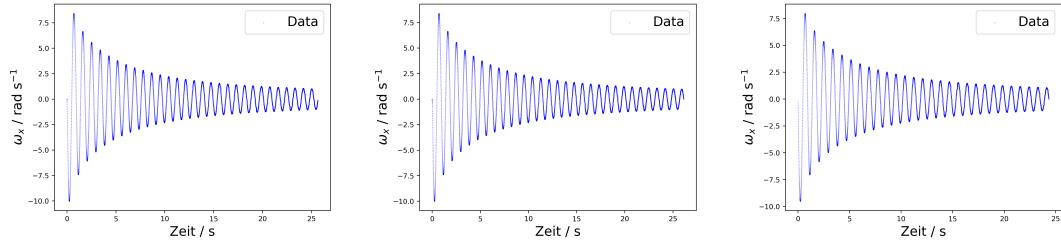


Abbildung 4: 3 Messungen der Winkelgeschwindigkeit ω_x in der x-Achse des Smartphones mit 4 Zusatzgewichte. Wobei auf der x-Achse die Zeit t / s aufgetragen wurde und auf der y-Achse die Winkelgeschwindigkeit $\omega_x / \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

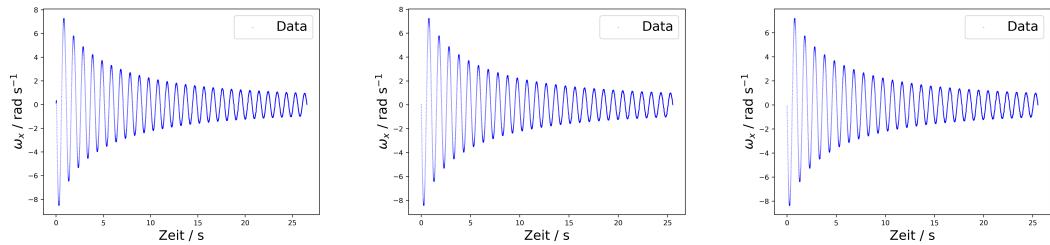


Abbildung 5: 3 Messungen der Winkelgeschwindigkeit ω_x in der x-Achse des Smartphones mit 8 Zusatzgewichte. Wobei auf der x-Achse die Zeit t / s aufgetragen wurde und auf der y-Achse die Winkelgeschwindigkeit $\omega_x / \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

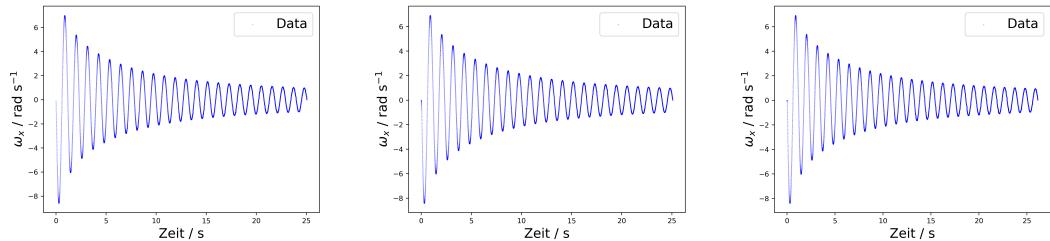


Abbildung 6: 3 Messungen der Winkelgeschwindigkeit ω_x in der x-Achse des Smartphones mit 12 Zusatzgewichte. Wobei auf der x-Achse die Zeit t / s aufgetragen wurde und auf der y-Achse die Winkelgeschwindigkeit $\omega_x / \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Nutz man Python kann man folgende Werte aus den Daten lesen.

Tabelle 2: Diese Tabelle beinhaltet alle Relevanten gemessenen Werte:

a ist die gemessene Distanz von Drehachse zum Schwerpunkt entlang der Mittelachse, siehe die Skizze 1

b ist die gemessene Distanz von der halben Dicke des Handys plus Dicke der Münze, siehe die Skizze 1

M ist das Gewicht einer 50-Cent-Münze

R ist der Radius einer 50-Cent-Münze

$|_{10}$ ist das Verhältnis von initialen Auslenkung zur maximalen Auslenkung nach 10 Perioden bei der unbelasteten Schwingung

t_{10} ist die gemessene Zeit von 10 Perioden

t_{ohne} ist die, über alle Perioden gemittelte, Periodendauer der unbelasteten Schwingung

t_{mit4} ist die, über alle Perioden gemittelte, Periodendauer der mit 4 Münzen belasteten Schwingung

t_{mit8} ist die, über alle Perioden gemittelte, Periodendauer der mit 8 Münzen belasteten Schwingung

t_{mit12} ist die, über alle Perioden gemittelte, Periodendauer der mit 12 Münzen belasteten Schwingung

Symbol	Wert	Δ
a / mm	66,8	$\pm 1,7$
b / mm	8,35	$\pm 0,04$
M / g	7,80	0,005
R / mm	12,125	0,003
$ _{10} / \%$	27	± 1
t_{10} / s	8,36	$\pm 0,10$
t_{ohne} / s	0,746	$\pm 0,010$
t_{mit4} / s	0,864	$\pm 0,018$
t_{mit8} / s	0,975	$\pm 0,019$
t_{mit12} / s	1,07	$\pm 0,03$

Es wurden nur die ersten 10 Perioden genommen um die Dämpfungskonstante zu bestimmen, der Grund dafür wird in der Diskussion und Zusammenfassung besprochen.

6 Auswertung

Werden die a , b , M und R mit der Gleichung 9 kombiniert bekommt man folgenden Wert für das Trägheitsmoment der Zusatzgewichte I' :

$$I' = (142 \pm 8) \text{ kg mm}^2 \quad (15)$$

Um nun das Direktionsmoment D_r zu finden werden, die Quadrate der Periodendauern t_* in Abhängigkeit der Anzahl an hinzufügten Trägheitsmomenten n geplottet (wie in Gleichung 8 zusehen ist) und an eine lineare Funktion gefittet.

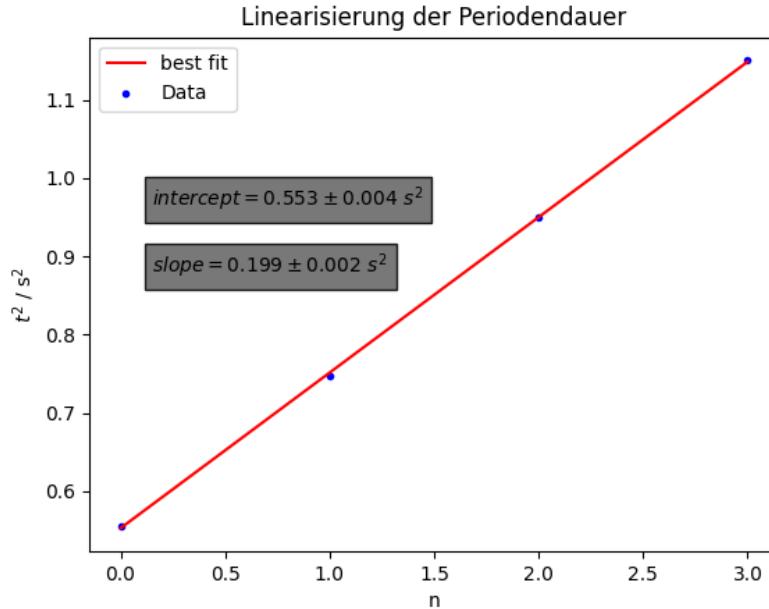


Abbildung 7: Das Bild veranschaulicht die lineare Regression der Quadrate Periodendauern t^2 gegenüber der Anzahl an hinzufügten Trägheitsmomenten n

Durch die Steigung (Slope) k der Geraden ist lässt sich D_r , wie folgt bestimmen:

$$D_r = \frac{4\pi I'}{k} = (9,1 \pm 0,4) \text{ mN m} \quad (16)$$

Mit dem Wert für D_r und dem Wert der Ordinate (intercept) $y_{Schnitt}$ lässt sich nun auch das Trägheitsmoment des Smartphones bestimmen:

$$I = \frac{D_r y_{Schnitt}}{4\pi} = (4,0 \pm 0,2) \text{ kg cm}^2 \quad (17)$$

Mit D_r und I bekannt lässt sich die Kennfrequenz ω_0 , wie in Gleichung 5 ersichtlich, bestimmen:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D_r}{I}} = (4,77 \pm 0,18) \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (18)$$

Nimmt man, das Verhältnis $|_{10}$ und die Zeit t_{10} , aus Tabelle 2 und setzt diese in Gleichung 12 erhält man einen Wert für die Dämpfungskonstante γ :

$$\gamma = (0,15 \pm 0,01) \text{ Hz} \quad (19)$$

Zuletzt lässt sich die Eigenfrequenz ω_e des Systems bestimmen mit:

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = (4,76 \pm 0,18) \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (20)$$

Welche quasi Equivalent der Kennfrequenz ist.

7 Diskussion und Zusammenfassung

Nun werden die verwendeten Methoden diskutiert und die Ergebnisse zusammengefasst.

7.1 Diskussion

Um die Dämpfungskonstante γ zu bestimmen, wurde nur das Verhältnis von dem Ersten bis zum Elften Peak bestimmt. Der Grund dafür ist, dass die Daten in einen nicht exponentiellen Abfall übergehen. Wie in Abbildung 8 klar ersichtlich ist.

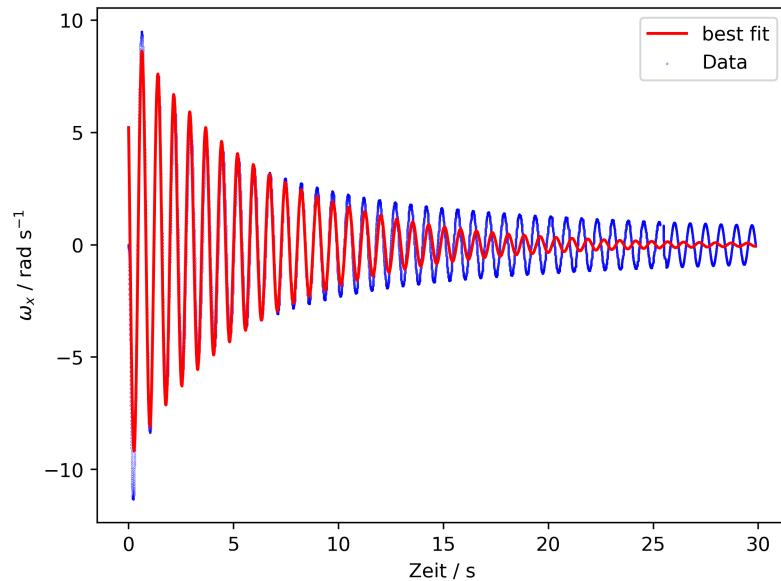


Abbildung 8: Die gefittete Kurve (in Rot) für die Winkelgeschwindigkeit $\omega_x(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit, beschreibt nur den Anfang gut danach gibt es keinen exponentiellen Abfall mehr

Ein Grund für diesen Übergang ist, dass am Anfang der Luftwiderstand diesen exponentiellen Abfall erst verursacht und ab einer gewissen Winkelschwingung nichts der Abbremsung mehr beiträgt. Wenn die, von der Winkelgeschwindigkeit, Abhängigkeit der Reibung bei kleinen Winkelgeschwindigkeiten verschwindet, kann nur noch eine konstante (lineare) Reibung die Winkelgeschwindigkeit verringern, was in Abbildung 9 zu erkennen ist.

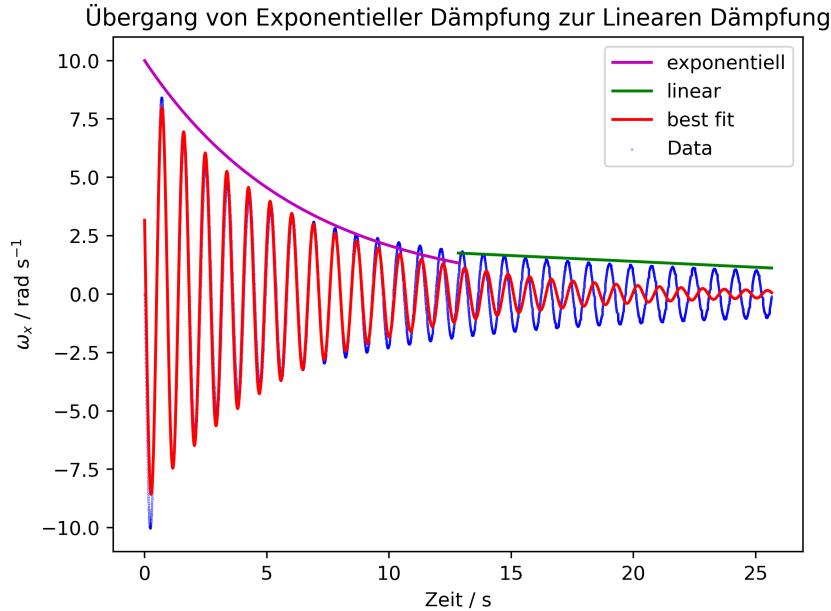


Abbildung 9: Die gefittete Kurve (in Rot) für die Winkelgeschwindigkeit $\omega_x(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit, beschreibt nur den Anfang gut danach macht es einen Übergang von exponentiellen Abfall (in Magenta) zu einem linearen Abfall (in Grün)

Eine weiter Erklärung für diese Diskrepanz könnte sein, dass durch das weite Auslenken von $(90 \pm 2)^\circ$ Randeffekte stattfinden.

Nun zu dem Direktionsmoment D_r dies konnte durch das Fitten bestimmt werden um den erhaltenen Wert zu Vergleichen wurde der Wert auch mit Gleichung 3 bestimmt. Dazu ist der Radius $r = (0,40 \pm 0,03)$ mm von Hersteller [5] entnommen worden, der Schubmodul für Stahl $G = 79,3$ GPa bis $81,0$ GPa von Wikipedia [6] und die Länge $l = (35,0 \pm 0,5)$ cm wurde mit einem Maßband bestimmt. Folgender möglicher Wertebereich wurde für das Direktionsmoment gefunden:

$$D_r = 6 \text{ mN m bis } 13 \text{ mN m} \quad (21)$$

Der gefittete Wert für das Direktionsmoment D_r liegt genau in der Mitte des mit der Gleichung 3 errechneten Wertebereichs.

Weitere Vergleiche können nicht Vollzogen werden, da keine Literaturwerte für die anderen Werte zufinden waren.

Damit bessere Werte gefunden werden können sollte, man vielleicht das Smartphone weniger weit Auslenken. Weiters könnte man die Münzen besser befestigen und somit die Distanz von Schwerpunkt der Münze zur Drehachse besser bestimmen.

7.2 Zusammenhang

Da D_r größtenteils in dem Wertebereich liegt lässt sich auch sagen, dass der Wert für das Trägheitsmoment des Smartphones auch größtenteils dem realen

Trägheitsmomente

PHILIPP Maximilian

24 Mai 2021

Wert entspricht.

Literatur

- [1] *Common sides of euro coins.* en. URL: https://ec.europa.eu/info/business-economy-euro/euro-area/euro-coins-and-notes/euro-coins/common-sides-euro-coins_en (besucht am 04.06.2021).
- [2] *Fehlerfortpflanzung.* de. Page Version ID: 205827844. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Fehlerfortpflanzung&oldid=205827844> (besucht am 08.05.2021).
- [3] Peter Knoll. *Mechanik und Wärme(Mechanics and Heat).* Skriptum zur Vorlesung. DE. Vorlesungsskript. 2020. 407 S.
- [4] Peter Knoll. *Protokoll Bsp.5a,b,c: Einfache Schwingungen.* de. Petersgasse 16, A-8010 Graz: Inst. f. Physik der KFU Graz, 2020.
- [5] *LUX Stahldraht Edelstahl Ø 0,8 mm x 9 m kaufen bei OBI.* at. URL: <https://www.obi.at/stahldraht/lux-stahldraht-edelstahl-0-8-mm-x-9-m/p/3267440> (besucht am 04.06.2021).
- [6] *Schubmodul.* de. Page Version ID: 210071570. März 2021. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Schubmodul&oldid=210071570> (besucht am 05.06.2021).
- [7] Braunschweig Wolfgang Kessel. *Die ISO/BIPM-GUM Sicht:Schätzwert & Messunsicherheit.* 2004.

Abbildungsverzeichnis

1	Dies ist eine Skizze um die Verbindung zwischen Theorie und Experiment zu visualisieren.	5
2	Aufbau des Experiments	7
3	Schwingungsmessungen ohne Zusatzgewichte	8
4	Schwingungsmessungen mit 4 Zusatzgewichten	9
5	Schwingungsmessungen mit 8 Zusatzgewichten	9
6	Schwingungsmessungen mit 12 Zusatzgewichten	9
7	Das Bild veranschaulicht die lineare Regression der Quadrate Periodendauern t^2 gegenüber der Anzahl an hinzufügten Trägheitsmomenten n	11
8	Die gefittete Kurve (in Rot) für die Winkelgeschwindigkeit $\omega_x(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit, beschreibt nur den Anfang gut danach gibt es keinen exponentiellen Abfall mehr	12
9	Die gefittete Kurve (in Rot) für die Winkelgeschwindigkeit $\omega_x(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit, beschreibt nur den Anfang gut danach macht es einen Übergang von exponentiellen Abfall (in Magenta) zu einem linearen Abfall (in Grün)	13

Tabellenverzeichnis

1	Geräteliste	7
---	-----------------------	---

- 2 Diese Tabelle beinhaltet alle Relevanten gemessen Werte: a ist die gemessene Distanz von Drehachse zum Schwerpunkt entlang der Mittelachse, siehe die Skizze 1 b ist die gemessene Distanz von der halben Dicke des Handys plus Dicke der Münze, siehe die Skizze 1 M ist das Gewicht einer 50-Cent-Münze R ist der Radius einer 50-Cent-Münze $|_{10}$ ist das Verhältnis von initialen Auslenkung zur maximalen Auslenkung nach 10 Perioden bei der unbelasteten Schwingung t_{10} ist die gemessene Zeit von 10 Perioden t_{ohne} ist die, über alle Perioden gemittelte, Periodendauer der unbelasteten Schwingung t_{mit4} ist die, über alle Perioden gemittelte, Periodendauer der mit 4 Münzen belasteten Schwingung t_{mit8} ist die, über alle Perioden gemittelte, Periodendauer der mit 8 Münzen belasteten Schwingung t_{mit12} ist die, über alle Perioden gemittelte, Periodendauer der mit 12 Münzen belasteten Schwingung 10