



Institut für Experimentalphysik der Technischen Universität Graz

&

Institut für Physik der Universität Graz

LABORÜBUNGEN 1: MECHANIK UND WÄRME

Übungstitel: Bestimmung der Oberflächenspannung von Flüssigkeiten

Betreuer: Michael Lamprecht

Gruppennummer:

Vorbereitung	Durchführung	Protokoll
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Σ
<input type="text"/>

Name: Maximilian Philipp

Kennzahl: UF 033 678

Matrikelnummer: 11839611

Datum: 6. Mai 2021

SS 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	3
2	Voraussetzungen und Grundlagen	3
3	Versuchsanordnung	4
4	Geräteliste	4
5	Versuchsdurchführung und Messergebnisse	5
5.1	Oberflächenspannung nach Lenard	5
5.1.1	Ablauf	5
5.1.2	Messung Seifenlauge	6
5.1.3	Messung Wasser	6
5.2	Kapillaren	6
5.2.1	Ablauf	7
6	Auswertung	7
6.1	Methode nach Lenard	8
6.2	Kapillareffekt	8
7	Diskussion und Zusammenfassung	8

1 Aufgabenstellung

Wie laut Angabe sind die Kapitel 1, 2 und 3, aus der vorgegeben PDF [1] übernommen, und gegeben falls angepasst. Bestimmung der Oberflächenspannung von Wasser und einer Seifenlösung:

- Mit der Bügelmethode nach Lenard bzw. mit dem Ring.
- Aus der Steighöhe in einer Kapillare.

2 Voraussetzungen und Grundlagen

Die Oberflächenspannung σ_0 einer Flüssigkeit ist als Quotient der am Rand der Flüssigkeit tangential angreifenden Kraft F_R und der Randlänge l_R definiert. Dieser Sachverhalt ist in folgender Gleichung 1.

$$\sigma_0 = \frac{F_R}{l_R} \quad (1)$$

Dies wird bei der Messung der Oberflächenspannung nach Lenard (siehe Abbildung 1) realisiert. Die Kraft F_{VR} wird mit einer Federwaage gemessen, die Randlänge l_{VR} ist durch die Geometrie des Bügels gegeben. Bei der Messung mit dem Ring wird anstelle von l_{VR} dessen Umfang eingesetzt. Da bei dieser Methode auf zwei Seiten der Flüssigkeitshaut neue Oberfläche geschaffen wird, ergibt sich für die Oberflächenspannung der Zusammenhang in Gleichung 2.

$$\sigma_0 = \frac{F_{VR}}{2l_{VR}} \quad (2)$$

Weiters kann die Oberflächenspannung auch über Kapillaraszension (bzw. -depression) gemessen werden (siehe Abbildung 2). Für eine vollständig die Innenwand der Kapillare benetzende Flüssigkeit ergibt sich für kleine Steighöhen h der Flüssigkeit Gleichung 3.

$$\sigma_0 = \frac{r\rho gh}{2} \quad (3)$$

Dabei ist r der Innenradius der Kapillare, ρ die Dichte der Flüssigkeit und $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

Um zu sehen wie sich die Unsicherheit der Messungen bis in die Ergebnisse fortplant, ist Gleichung 4 verwendet worden. Die Grundlagen dieser Gleichung sind von den Powerpointfolien von GUM entnommen worden.[6] Die Verallgemeinerung ist von Wikipedia entnommen worden [2]. Für die Auswertung ist die Programmiersprache Python im speziellen das Paket `scipy`, zur Hilfe genommen worden.

$$V_y = J(x) \cdot V_x \cdot J^T(x) \quad (4)$$

Wobei V_y und V_x die Kovarianzmatrizen von den Vektoren \mathbf{y} und \mathbf{x} . \mathbf{x} ist der Vektor der Eingangsvariablen und \mathbf{y} ist der Vektor der Ausgangsvariablen. J ist die Jakobimatrix der vektorwertigen Funktion $\mathbf{y} = \vec{F}(\mathbf{x})$ ist. So lassen sich die Komponent der Matrix relativ einfach anschreiben $J_{ij}(x) = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x)$. Damit man die Unsicherheit der einzelnen

Variablen y_i bekommt muss nur die Quadratwurzel des i-ten Diagonalelementes der \mathbf{y} -Kovarianzmatrix genommen werden $u_i = \sqrt{\text{diag}(V_y)_i}$. Da in diesem Experiment meistens nur skalare Funktionen untersucht werden vereinfacht sich die Gleichung 4 dramatisch und die Unsicherheit der Variabel y lässt sich einfach so berechnen:

$$u_y = \sqrt{\text{grad}y^T \cdot V_x \cdot \text{grad}y} \quad (5)$$

3 Versuchsanordnung

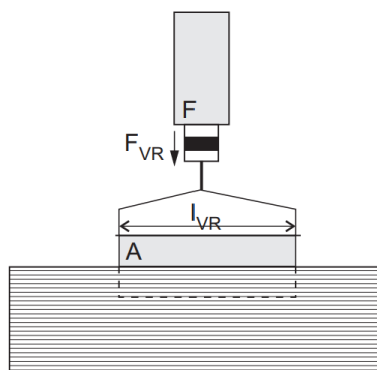


Abbildung 1: Zur Messung mit dem Lenardbügel. Wird der Bügel mit der Länge l_{VR} aus dem Wasser gezogen, so bildet sich eine Lamelle A . Die dabei angreifende Kraft F_{VR} wird mit einer Federwaage F bestimmt.

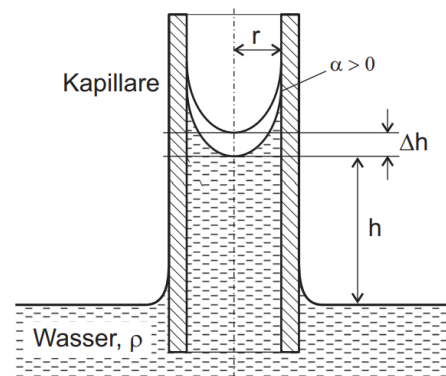


Abbildung 2: Zur Messung nach der Kapillarmethode. r Radius der Kapillare, h Steighöhe, ρ Dichte der Flüssigkeit. Für vollständig benetzende Flüssigkeiten ist der Randwinkel $\alpha = 0$.

4 Geräteliste

Tabelle 1: Verwendete Geräte

Gerät	Hersteller	Gerätenummer	Unsicherheit
Kathetometer	-	axx	0,5 Skalenabstände
Kamera	-	bxx	-
Federwaage	-	cxx	1 mN
Lenardbügel	-	dxx	-
Ring	-	fxx	-
Kapillaren	-	gxx	-
Mikrometer	-	hxx	10 μm
Schublehre	-	ixx	0,05 mm
Stativ des Kathetometers	-	jxx	0,1 mm

5 Versuchsdurchführung und Messergebnisse

Es wurde die Oberflächenspannung von den verschiedenen Flüssigkeiten auch auf verschiedene Arten festgestellt da bietet es sich an diese auch separat durchzugehen.

5.1 Oberflächenspannung nach Lenard

Wie in Voraussetzungen und Grundlagen schon erwähnt wurde ist hier Methode von Lenard angewendet.

5.1.1 Ablauf

1. Ein Behälter wird mit der zu untersuchenden Flüssigkeit befüllt, bis der Flüssigkeitsstand so hoch ist, dass das ganze Objekt bedeckt werden kann.
2. Der Behälter wird auf eine höhenverstellbare Unterlage plaziert.
3. Das Objekt wird nun an der Federwaage befestigt. Diese wird danach so eingestellt, dass sie auf Null justiert ist, wenn das Objekt in die Flüssigkeit eintaucht und von dieser benetzt wird.
4. Nun wird Behälter langsam hinuntergelassen, bis der Flüssigkeitsfilm reißt und man die maximale Kraft von der Federwaage durch die Kameraaufzeichnung ablesen kann.
5. Das Bild mit dem Messwert wird dann mittels dem Bildbearbeitungsprogramm GIMP untersucht. Die maximale Anzahl an sichtbaren Skalenstrichen wurden als Maßstab verwendet um ± 7 px Ableseauflösung zu haben.

Diese Methode wurde für alle Messwerte wiederholt, sowohl für die Wasser als auch für die Seifenlauge Messung und auch für jedes Objekt. Mit dieser Methodik sind folgende Messwerte zustandegekommen.

5.1.2 Messung Seifenlauge

Tabelle 2: Messreihen der maximalen Kraft in der Seifenlauge links mit Bügel ($F_{Bügel}$) rechts mit Ring (F_{Ring}). Wobei μ der Mittelwert und $\hat{\sigma}$ die Standardabweichung des Mittelwerts der Messwerte sind.

i	$F_{Bügel} / \text{mN}$	i	F_{Ring} / mN
1	$7,7 \pm 0,4$	1	$15,3 \pm 0,4$
2	$7,6 \pm 0,4$	2	$15,7 \pm 0,4$
3	$7,9 \pm 0,4$	3	$16,0 \pm 0,4$
4	$8,5 \pm 0,4$	4	$16,3 \pm 0,4$
5	$8,3 \pm 0,4$	5	$15,6 \pm 0,4$
$\mu \pm \hat{\sigma}$	$8,0 \pm 0,2$	$\mu \pm \hat{\sigma}$	$15,8 \pm 0,2$

5.1.3 Messung Wasser

Tabelle 3: Messreihen der maximalen Kraft im Wasser links mit Bügel ($F_{Bügel}$) rechts mit Ring (F_{Ring}). Wobei μ der Mittelwert und $\hat{\sigma}$ die Standardabweichung des Mittelwerts der Messwerte sind.

i	$F_{Bügel} / \text{mN}$	i	F_{Ring} / mN
1	$14,6 \pm 0,3$	1	$26,1 \pm 0,3$
2	$14,5 \pm 0,3$	2	$25,9 \pm 0,3$
3	$15,2 \pm 0,3$	3	$26,1 \pm 0,3$
4	$15,0 \pm 0,3$	4	$24,6 \pm 0,3$
5	$15,5 \pm 0,3$	5	$25,1 \pm 0,3$
$\mu \pm \hat{\sigma}$	$15,0 \pm 0,2$	$\mu \pm \hat{\sigma}$	$25,6 \pm 0,3$

Weiters wurde auch die innere Bügellänge und der Außendurchmesser des Ringes, durch das Messen mit einer Schublehre, bestimmt.

Tabelle 4: Zusätzliche Messungen der inneren Bügellänge und des Außendurchmessers des Ringes

$L_{Bügel}$	\varnothing_{Ring}
$(10,035 \pm 0,005) \text{ cm}$	$(6,000 \pm 0,005) \text{ cm}$

5.2 Kapillaren

Da nicht nur eine Methode verwendet wurde um die Oberflächenspannung von Wasser zu bestimmen, wird in dieser Subsektion die Durchführung dieser Methode erläutert und die daraus resultierenden Ergebnisse angeführt.

5.2.1 Ablauf

1. Eine Kapillare wird mit dem Mikrometer abgemessen um, den Außendurchmesser der Kapillare zu bestimmen.
2. Die Kapillare wird so plziert, dass im Kathetometer die Wände der Kapillare gut sichtbar sind und mittels der Skala (oder dem Bildbearbeitungsprogramm) das Verhältnis des Außendurchmessers und des Innendurchmessers ablesbar ist.
3. Da der Durchmesser der Kapillare bekannt ist, ist es möglich den Innendurchmesser dieser Kapillare zu bestimmen.
4. Nun wird die Kapillare vertikal in ein Behälter mit Wasser plziert, sodass der Kapillareffekt stattfinden kann.
5. Damit nun die, durch den Kapillareffekt entstandene, Höhenänderung in der Kapillare gemessen werden kann wird das Kathetometer verwendet. Da dies ein höhenverstellbares Stativ mit einer Millimeterskala besitzt.
6. Das Kathetometer so eingestellt wird, dass der Wasserspiegel bei zb. Skalenstrich 30 ist. Als Referenz kann nun, der bei dieser Einstellung erhaltene, Höhenwert verwendet werden.
7. Nun stellt man das Kathetometer so ein, dass der Meniskus beim gleichen Skalenstrich wie oben ist. Die Differenz zwischen Referenzwert und diesem Messwert ist die Höhenänderung, aufgrund des Kapillareffekts.

Diese Prozedur wird für alle drei Kapillaren wiederholt. Da die Unsicherheit in der Messung des Außendurchmessers $\pm 0,01$ mm der Kapillaren natürlich beeinflusst, sowie auch das Ablesen mittels dem Bildbearbeitungsprogramm ± 15 px (größer da der Übergang schlechter zusehen war). Kombiniert man diese Fehler bekommt man einen Fehler von ca. $\pm 0,025$ mm. Die Werte der Messungen sind in den folgenden Tabellen angeführt:

Tabelle 5: Zusätzliche Messungen der inneren Bügellänge und des Außendurchmessers des Ringes

Kapillare Nr.	1	2	3
Außendurchmesser / mm	$1,775 \pm 0,005$	$1,549 \pm 0,005$	$1,560 \pm 0,005$
Verhältnis Innen zu Außen / $\frac{\text{px}}{\text{px}}$	$\frac{927 \pm 15}{1307 \pm 15}$	$\frac{1377 \pm 15}{1900 \pm 15}$	$\frac{770 \pm 15}{1048 \pm 15}$
Innerer Radius (r_i) / mm	$0,63 \pm 0,03$	$0,56 \pm 0,03$	$0,57 \pm 0,03$
Referenzhöhe / cm	$4,66 \pm 0,01$	$4,66 \pm 0,01$	$4,66 \pm 0,01$
Δh / cm	$0,64 \pm 0,02$	$0,96 \pm 0,02$	$0,64 \pm 0,02$

6 Auswertung

Die Auswertungen der unterschiedlichen Methoden sind in zwei Unterkapitel gegliedert.

6.1 Methode nach Lenard

Kombiniert man die Messwerte der Tabellen (2,3,4) mit der Gleichung 2 erhaltenen wir folgende Werte für die Oberflächenspannung σ :

Tabelle 6: Ergebnisse für die Oberflächenspannungen σ von Wasser und Seifenlauge, welche durch die Methode von Lenard ermittelt worden sind

Oberflächenspannung von:	$\sigma / \frac{\text{mN}}{\text{m}}$
Wasser mittels Bügel	$74,5 \pm 1,0$
Wasser mittels Ring	68 ± 2
Seifenlauge mittels Bügel	$39,9 \pm 1,0$
Seifenlauge mittels Ring	$41,8 \pm 1,0$

Für die Unsicherheitfortpflanzung ist wie zuvor erwähnt die verallgemeinerte Gauß-methode verwendet worden und ist mittels Python `scipy` ausgewertet worden.

6.2 Kapillareffekt

Um die Oberflächenspannung zu bestimmen mittels dem Kapillareffekt werden die Daten der Tabelle 5 und die Gleichung 3 verwendet. Wie auch im vorigen Teil sind die Unsicherheitsintervalle mittels Python errechnet worden. Wobei $\rho = 0,998\,207 \frac{\text{g}}{\text{ml}}$ die Dichte des Wasser von der Website [5] für 20 °C entnommen worden ist.

Tabelle 7: Ergebnisse für die Oberflächenspannungen σ von Wasser unterverwendung des Kapillareffekts

Kapillare	1	2	3
$\sigma / \frac{\text{mN}}{\text{m}}$	19 ± 2	26 ± 1	18 ± 1

7 Diskussion und Zusammenfassung

Wie in Tabelle 8 ersichtlich weichen die Werte der verschiedenen Methoden deutlich von einander ab. Gründe für die unterschiedlichen Werte für die Oberflächenspannung von Wasser der zwei Methoden sind zb.:

- Messungenauigkeiten des Radies, der Dichte, der Erdbeschleunigung und der Höhendifferenz bei der Methode des Kapillareffekts
- Messungenauigkeiten der maximalen Abrisskraft und der Länge der mit dem Wasser im Kontakt stehenden Fläche bei der Methode nach Lenard
- Die Methode des Kapillareffekts hat viel mehr Variablen wodurch die Unsicherheitsintervalle drastisch größer werden als bei der Methode nach Lenard

Bei der Kapillareffekt Methode würde man viel mehr Geräte benötigen, welche zudem auch sehr genau Messungen vollziehen müssten, da jede Variabel einen enormen Fehlerverursachen könnte. Aufgrund der Einfachheit und der geringen Anzahl der zu-messenden Variablen ist die Methode nach Lenard zu bevorzugen. Dies reflektiert auch der Vergleich mit dem Literaturwert, welcher $72,75 \frac{\text{mN}}{\text{m}}$ [3] bei 20°C .

Da die genaue Zusammensetzung der Seifenlauge nicht bekannt ist, macht es keinen Sinn den gemessen Wert mit einem genauen Literaturwert zu vergleichen. Es macht nur Sinn den gemessen Wert größenordnungsmäßig mit dem Literaturwert zu vergleichen und zu schauen ob dieser auch niedriger als der vom Wasser ist. Laut Literatur liegt der Wert bei $30 \frac{\text{mN}}{\text{m}}$ [4], was größenordnungsmäßig dem gemessen Wert entspricht und auch ungefähr die Hälfte von der Oberflächenspannung von Wasser beträgt.

Tabelle 8: Tabelle der Resultate für die Oberflächenspannungen der verschiedenen Flüssigkeiten

Typ	Wasser	Seifenlauge
Lenardbügel	$(74,5 \pm 1,0) \frac{\text{mN}}{\text{m}}$	$(39,9 \pm 1,0) \frac{\text{mN}}{\text{m}}$
Ring	$(68 \pm 2) \frac{\text{mN}}{\text{m}}$	$(41,8 \pm 1,0) \frac{\text{mN}}{\text{m}}$
Kapillare 1	$(19 \pm 2) \frac{\text{mN}}{\text{m}}$	-
Kapillare 2	$(26 \pm 1) \frac{\text{mN}}{\text{m}}$	-
Kapillare 3	$(18 \pm 1) \frac{\text{mN}}{\text{m}}$	-

Alle Werte passen größenordnungsmäßig mit den Literaturwerten überein. Würde man genauere Werte benötigen sollte man eher die Methode von Lenard verwenden und genauere Messungen vollziehen.

Literatur

- [1] *Bestimmung der Oberflächenspannung von Flüssigkeiten*. de. Petersgasse 16, A-8010 Graz: Institut f. Experimentalphysik Technische Universität Graz, Feb. 2012.
- [2] *Fehlerfortpflanzung*. de. Page Version ID: 205827844. Nov. 2020. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Fehlerfortpflanzung&oldid=205827844> (besucht am 08.05.2021).
- [3] *Oberflächenspannung*. de. Page Version ID: 209936664. März 2021. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=OberflC3A4chenspannung%5Coidid=209936664> (besucht am 08.05.2021).
- [4] Stefan Roth und Achim Stahl. „Hydro- und Aerostatik“. de. In: Hrsg. von Stefan Roth und Achim Stahl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2016, S. 313–346. ISBN: 9783662453049. DOI: 10.1007/978-3-662-45304-9_15. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-662-45304-9_15 (besucht am 08.05.2021).
- [5] W. Wagner und A. Pruß. „The IAPWS Formulation 1995 for the Thermodynamic Properties of Ordinary Water Substance for General and Scientific Use“. en. In: *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 31.2 (Juni 2002), S. 387–535. ISSN: 0047-2689, 1529-7845. DOI: 10.1063/1.1461829. URL: <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1461829> (besucht am 08.05.2021).
- [6] Braunschweig Wolfgang Kessel. *Die ISO/BIPM-GUM Sicht: Schätzwert & Messunsicherheit*. 2004.

Abbildungsverzeichnis

1	Messung mit dem Lenardbügel	4
2	Messung nach der Kapillarmethode	4

Tabellenverzeichnis

1	Geräteliste	4
2	Messreihen der maximalen Kraft in der Seifenlauge links mit Bügel ($F_{\text{Bügel}}$) rechts mit Ring (F_{Ring}). Wobei μ der Mittelwert und $\hat{\sigma}$ die Standardabweichung des Mittelwerts der Messwerte sind.	6
3	Messreihen der maximalen Kraft im Wasser links mit Bügel ($F_{\text{Bügel}}$) rechts mit Ring (F_{Ring}). Wobei μ der Mittelwert und $\hat{\sigma}$ die Standardabweichung des Mittelwerts der Messwerte sind.	6
4	Zusätzliche Messungen der inneren Bügellänge und des Außendurchmessers des Ringes	6
5	Zusätzliche Messungen der inneren Bügellänge und des Außendurchmessers des Ringes	7
6	Ergebnisse für die Oberflächenspannungen σ von Wasser und Seifenlauge, welche durch die Methode von Lenard ermittelt worden sind	8

7	Ergebnisse für die Oberflächenspannungen σ von Wasser unter Verwendung des Kapillareffekts	8
8	Tabelle der Resultate für die Oberflächenspannungen der verschiedenen Flüssigkeiten	9