Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Laboratorio de Computación para las Aplicaciones de la Matemática en la Ingeniería

Matemáticas 3 - MAT023
1er Semestre 2013

PREINFORME Nº1

NOMBRE	**:**	
ROL	**:**	
Día y Bloque	**:**	
Fecha de Entrega	**:**	
Profesor Cátedra	**:**	
Paralelo Cátedra	**:**	
Ayudante Lab.	**:**	

1. Enunciado

Para los problemas que se entregan a continuación, se deben usar las siguientes constantes:

α : penúltimo dígito no nulo de su rol. En mi caso: 9.

β : su bloque horario. En mi caso: 2.

Usando **Transformada de Laplace**, resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\beta x + \alpha y$$

Donde $x(0) = \beta$, $y(0) = \alpha$

2. Planteo

Primero, reemplazamos los alfa y beta por los valores respectivos, quedandonos el siguiente sistema:

$$\frac{dx}{dt} = 9x + 2y \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = -2x + 9y \tag{2}$$

Donde $x(0) = 2$, $y(0) = 9$

Luego, nos encontramos frente a un sistema de ecuaciones diferenciales, al cual se le debe encontrar soluciones empleando *Transformaciones de Laplace.*

El curso a seguir para resolver esto, sigue la misma mecánica que se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones normales, pero con algunos pasos extras, ya que la idea es dejar resuelta una incógnita conveniente, para luego encontrar la otra (tal cual como en un sistema normal).

El curso a seguir para resolver una ecuación diferencial utilizando *Transformaciones de Laplace*, es el siguiente:

1. Calculamos la transformada de Laplace de una ecuación, para obtener *la ecuación subsidiaria.*

2. Luego, despejamos la transformada de Laplace de esta ecuación subsidiaria.

3. Buscamos la función inversa de la transformada que encontramos. Esta inversa de Laplace, es la solución de la ecuación diferencial.

3. Desarrollo

Primero alineamos todos los valores de las ecuaciones (1) y (2) hacia la izquierda, y luego aplicamos la transformada de Laplace en ambas ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} - 9x - 2y = 0 \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} + 2x - 9y = 0 \tag{4}$$

$$sX - x(0) - 9X - 2Y = 0 \tag{5}$$

$$sY - y(0) + 2X - 9Y = 0 \tag{6}$$

Ya que $x(0) = 2$ y $y(0) = 9$, las reemplazamos en (5) y (6). Luego, factorizamos y acomodamos:

$$(s-9)X - 2Y = 2 \tag{7}$$

$$2X + (s-9)Y = 9 \tag{8}$$

Multiplicamos a (7) por $(s-9)$ y a (8) por 2:

$$(s-9)^2X - 2(s-9)Y = 2(s-9) \tag{9}$$

$$4X + 2(s-9)Y = 18 \tag{10}$$

Si sumamos a (9) y (10), obtenemos la siguiente ecuación:

$$((s-9)^2 + 4)X = 2s \tag{11}$$

Simplificando y despejando:

$$X(s) = 2\frac{s}{(s-9)^2 + 2^2} \tag{12}$$

Podemos notar que esta transformada de Laplace, tiene un cierto parecido a la transformada del coseno. La cual es:

$$\mathcal{L}\{cos(at)\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

Luego, sumamos un *cero* conveniente:

$$X(s) = 2\frac{s}{(s-9)^2 + 2^2} = 2\left(\frac{s-9}{(s-9)^2 + 2^2} + \frac{9}{(s-9)^2 + 2^2}\right) \tag{13}$$

Ahora notamos que el lado derecho de la suma, es similar a la transformada de Laplace del seno, el cual es:

$$\mathcal{L}\{sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Luego, multiplicamos el lado derecho de la suma, por un *uno* conveniente:

$$X(s) = 2\left(\frac{s-9}{(s-9)^2 + 2^2} + \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9}}\frac{9}{(s-9)^2 + 2^2}\right)$$
$$X(s) = 2\left(\frac{s-9}{(s-9)^2 + 2^2} + \frac{9}{2}\frac{2}{(s-9)^2 + 2^2}\right)$$
$$X(s) = \frac{2(s-9)}{(s-9)^2 + 2^2} + 9\frac{2}{(s-9)^2 + 2^2} \tag{14}$$

Ahora, notamos que ambas fracciones, tienen un corrimiento, lo que en transformada de Laplace se traduce como:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$$

Luego, $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ es:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) = 2e^{9t}cos(2t) + 9e^{9t}sin(2t)$$

$$x(t) = e^{9t}\left(2cos(2t) + 9sin(2t)\right) \tag{15}$$

Finalmente, hemos encontrado la solucion de $x(t)$, y al mirar la ecuacion (1), nos damos cuenta que $y(t)$ es simplemente una combinación lineal de $x(t)$ y $x'(t)$, por lo que solo nos falta encontrar $x'(t)$ para conocer a $y(t)$. Entonces:

$$x(t) = e^{9t}\left(2cos(2t) + 9sin(2t)\right)$$
$$x'(t) = 9e^{9t}\left(2cos(2t) + 9sin(2t)\right) + e^{9t}\left(-4sin(2t) + 18cos(2t)\right)$$
$$x'(t) = e^{9t}\left(36cos(2t) + 77sin(2t)\right) \tag{16}$$

Luego, despejando desde (1) a $y(t)$, tenemos que:

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(x'(t) - 9x(t)\right) \tag{17}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left\{e^{9t}\left(36cos(2t) + 77sin(2t)\right) - 9\left[e^{9t}\left(2cos(2t) + 9sin(2t)\right)\right]\right\} \tag{18}$$

$$y(t) = \frac{e^{9t}}{2}\left\{18cos(2t) - 4sin(2t)\right\} \tag{19}$$

$$y(t) = e^{9t}\left\{9cos(2t) - 2sin(2t)\right\} \tag{20}$$

4. Resultados Finales

5. Comentarios y Conclusiones

6. Comandos Utilizados