向量空间和子空间

2024年10月11日 星期五　　15:53

R^n空间：包含所有含有n个成分的列向量

向量空间：
针对一个向量集合V，如果任取V中的两个向量u和v，满足以下两个条件，这个向量集　合V
就构成了向量空间：
（1）u+v 仍然存在与V中
（2）任取标量c，满足cu也在V中

一个“斜搭”在三维空间只能够并经过空间中原点的平面，其组成成分仍然是三维向　量，但是它显
然不包括所有的三维向量，但是根据定义也属于是向量空间，同样也可以说是R^3空间　的子空间。

一个R^3空间的子空间有4种形式：R^3空间自身、R^3空间中过原点的平面、R^3空间过原点　的直线和零向量自身。

4个重要的子空间（以m*n的矩阵A为例）

列空间 C(A)：
- 矩阵A的列空间包括所有这n个m维列向量的线性组合，是R^m空间的子空间
- 对任意一个线性方程组，都可以将其写成矩阵乘法的形式，只有当b可以写成以　下形式，方程组才有解，即向量b在矩阵A的列空间中

$$\vec{b} = x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + \dots + x_3\vec{a_3}$$

零空间 N(A)：
- 所有满足 Ax = 0 的向量x的集合，称为矩阵A的零空间
- 如果矩阵A各列满足线性无关，那么向量x只有零向量唯一解；若线性相关，则还　还有非零解

行空间 $C(A^T)$：
- 矩阵A的行空间就是转置矩阵A^T的列空间

左零空间 $N(A^T)$：
- $A^T x = 0$等式成立的所有向量的集合

秩：连接起4个子空间
（1）列空间和零空间
- 列空间的维数就是矩阵A的秩r
- 零空间就是原始空间中通过矩阵A映射到目标空间原点的向量空间，维数是n-r　（空间压缩的维数）

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

若 $\begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$ 可以由其他3个列向量的线性组合表示.
且其他3个列向量线性无关. ($r=3$)
则该方程组只有x_4可以有无数解. x_1、x_2、x_3有唯一解.
↓
这些解就构成了零空间. n-r维.

（2）列空间与行空间

- 线性无关的行向量的个数和线性无关的列向量的个数是相等的
- 行空间的维数也等于矩阵的秩r

（3）行空间与左零空间

- 转置矩阵A^T对应的映射前原始空间维度是m，左零空间的维度就是m-r