基底

2024年9月25日 星期三 19:11

向量的坐标依赖于选取的基底.

$\vec{u}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ 是基于 $\vec{e_x}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\vec{e_y}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 的坐标.

$\vec{u}=4\vec{e_x}+5\vec{e_y}$ 坐标就是各基向量前的系数.

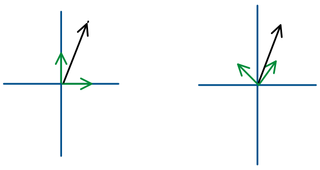
向量在不同基底上表示为不同坐标.

$\vec{u}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ 基于 $\vec{e_i}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，$\vec{e_j}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$ 基向量的坐标表示？

基向量模长为1，目标向量和基向量内积，即可获得该向量在基向量方向上的对应坐标值（投影长度）

$\vec{u}\cdot\vec{e_i}=\frac{9}{\sqrt{2}}$ $\vec{u}\cdot\vec{e_j}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\vec{u}=\frac{9}{\sqrt{2}}\vec{e_i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_j}=\begin{bmatrix}\frac{9}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$



并非任意向量都可以作为基底.

以 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$ 为基底. $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$ 无解.

构成基底的条件：在n维空间中，任意一个向量都可以表示为这一组基向量的线性组合，且表示方式（系数）唯一.

(1) 向量数量足够：n维空间 ≥ n个n维基向量.

三维空间，不共线的 $\vec{u}$，$\vec{v}$ 的线性组合 $c\vec{u}+d\vec{v}$ 只可表示平面.

(2) 线性无关 等效于线性组合表示方法的唯一性.

其中任何一个向量都不能通过其余向量的线性组合表示.

即当且仅当 $x_1=x_2=\dots=x_n=0$ 的等式关系成立时.

$x_1\vec{u_1}+x_2\vec{u_2}+\dots+x_n\vec{u_n}$ 才能生成零向量.

假设 $\vec{p}$ 有两种不同的表示方法，即：

$\vec{p}=c_1\vec{u_1}+c_2\vec{u_2}+\dots+c_n\vec{u_n}=d_1\vec{u_1}+d_2\vec{u_2}+\dots+d_n\vec{u_n}$

$(c_1-d_1)\vec{u_1}+(c_2-d_2)\vec{u_2}+\dots+(c_n-d_n)\vec{u_n}=\vec{0}$

当且仅当 $c_1-d_1=c_2-d_2=\dots=c_n-d_n=0$，等式成立.

与前提假设矛盾.

证明 线性无关和表示方法的唯一性等价.

三维空间中，若基向量 $\vec{x_1}$，$\vec{x_2}$，$\vec{x_3}$ 中，$\vec{x_3}$ 可以由 $\vec{x_1}$，$\vec{x_2}$ 线性表示，说明这3个向量共面.

张成空间

由一组向量所有线性组合构成的空间.（可以线性相关）

向量的个数和维数都并非其张成空间维数及形态的决定因素.

"秩".