空间映射

2024年9月29日 星期日　　13:29

矩阵乘法的空间映射作用：由于矩阵乘法的作用，原始向量的空间位置甚至其所在空间的维度和形态都发生了变化

- 变化的是基向量
- 在原始空间中坐标为(x,y)的向量，保持坐标不变，基向量变为矩阵A的列向量，在这个目标空间中坐标为(x,y)的向量的空间位置相对于原始空间中坐标为(x,y)的向量发生了变化——变化后的向量在原始空间中对应的坐标就变成了(ax+by, cx+dy)
- 如果矩阵A对空间进行了压缩，那目标向量是不是不能在原始空间中找到对应的坐标了？

降维：“矮胖”矩阵对空间的压缩

- m<n，矩阵A的行数小于列数，这一组列向量所能张成空间的维数最大就是m
- n维空间中的任意向量x经过映射作用后，都被转换到了一个维数更低的新空间中的新位置上

举例：A是一个2*3的矩阵，3个二维向量必然是线性相关的

（1）如果这3个二维向量满足不全部共线，那么其所有线性组合结果就能构成一个二维平面。
　　经过矩阵A的映射，整个三维的原始向量空间就被压缩成了一个二维平面

（2）如果这3个二维向量是共线向量，那么其所有线性组合只能分布在一条穿过原点的直线上
　　经过矩阵A的映射，整个三维的原始向量空间就被压缩成了一个一维空间（直线）

罩不住：“高瘦”矩阵无法覆盖目标空间

- m>n，向量x映射后的目标向量维数提高了，由n维变成了m维，
- 但是这并不意味着“经过矩阵A地映射作用，由原始向量x所构成的n维空间变成了更高的m维空间”
- 一个向量所携带的信息是不能平白无故增加的

举例：A是一个3*2的矩阵

（1）如果这两个三维向量线性无关，那么由这两个向量所张成的空间就是一个二维平面
　　这个平面虽然是二维的，但是平面上的每个点都是三维的

（2）如果这两个三维向量线性相关，那么两者张成的空间就是一条直线

方阵：也需要分情况讨论

- 核心问题：矩阵A各个列的线性相关性
- 矩阵A映射后得到的空间维度必然小于等于n，当且仅当这n个列线性无关时可以取等号

秩(rank)：决定映射后的空间形态

- 像空间：矩阵映射后得到的新空间
- 像空间维度的决定因素就是空间映射矩阵各列的线性相关性
- 矩阵各列所张成空间的维数被称为这个映射矩阵的秩
- 秩也可以看作是映射矩阵线性无关的列的个数