逆映射与逆矩阵

2024年10月1日 星期二　19:52

逆映射：用已知结果向量的坐标去反推出原始向量的坐标

矩阵A的逆矩阵A^{-1}：表征逆映射的映射过程

- 类比反函数：函数存在反函数的条件就是必须满足一一映射

“矮胖”矩阵压缩空间：不存在逆映射

- 举例：2*3的矩阵A，若3个列向量共面不共线，将向量x所在的三维空间映射到向量y所在的二维空间，在此过程中会有多个向量x被转移到同一个向量y上去（方程组有多个解）
- 在映射过程中，空间被矩阵A压缩了，一些信息在这个压缩过程中丢失了，无法再找回元向量的坐标，不存在逆映射

零空间：在映射的作用下满足等式Ax = 0成立的向量x的集合，记作N(A)

- 如果一个矩阵A存在逆映射，意味着其映射后的点是要能被唯一还原的
- 因此，N(A)不能是一维直线或者是一个二维平面，只能是一个点，即原始空间中的零向量
- 如果一个矩阵满足可逆，则其零空间必须是零维的

“高瘦”矩阵不存在逆映射：目标空间无法全覆盖

- 举例：3*2的矩阵A把二维空间映射到三维空间中的一个平面，所以这个平面外的任意一点都不能找到原始空间中对应的出发点

列空间C(A)：映射矩阵A各列所有线性组合的结果集合

- 当三阶方阵A的3个列向量共面不共线时，矩阵A的秩为2，矩阵A的列空间是一个斜搭在三维目标空间中的一个二维平面。

逆矩阵存在的条件：

- 如果矩阵A中某个列向量可以写成其他列向量的线性组合，那么对应的矩阵映射一定是空间压缩的映射，一定不存在逆矩阵
- 如果矩阵A的各个列向量线性无关，则映射时空间不会被压缩，即矩阵A有逆矩阵

总结：

（1）矩阵必须是一个方阵 —> 原始空间中向量x的存在性和唯一性

（2）矩阵A的零空间维数为0，列向量的维数为n / 列向量满足线性无关