矩阵

2024年9月28日 星期六 20:45

作用在一个具体的向量上，使其空间位置变换.

特殊形态的矩阵：

(1) 方阵

(2) 转置与对称矩阵

原矩阵与转置后新得到的矩阵相等.

(3) 零矩阵

(4) 对角矩阵：非对角线位置上矩阵元素全部为0.

A= np.diag([1,2,3,4,5])

(5) 单位矩阵：对角元素均为1

A= np.eye(5)

矩阵乘以向量：改变向量的空间位置.

$A\vec{x}$：$\vec{x}$的空间位置在矩阵A的作用下进行变换的过程.

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\32\\50\end{bmatrix}$$

平面坐标(4,5)在矩阵作用下转化为三维空间中的新目标点.

矩阵映射后，目标空间的维数可能也会变化.

矩阵乘向量的新视角：变换基底.

(1) 行向量角度

$$A\vec{x}=\begin{bmatrix}row_1\\row_2\end{bmatrix}\vec{x}=\begin{bmatrix}row_1\,\vec{x}\\row_2\,\vec{x}\end{bmatrix}$$

(2) 列向量角度.

$$A\vec{x}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$$

对A的列向量进行线性组合的过程.

在A的作用下，$x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow x\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$

矩阵把向量的基底进行了变换.

运算矩阵的各列就是映射后的新基底.

对于一个 $m\times n$ 的矩阵A和n维向量$\vec{x}$，经过$A\vec{x}$的乘法作用

$\vec{x}$的n个n维默认基向量被转换成了n个m维的目标向量.

(1) $n>m$ 时，n个向量线性相关，不构成基底.

(2) $n<m$ 时，即使n个向量线性无关，不能表示m维空间中的所有，也无法构成m维目标空间基底.

(3) 当且仅当 $n=m$，且这n个向量线性无关时，才可作为基底.