YD1's Class Notes

YCN

YD1

Some Class Notes to Functional Analysis

☠ Math

绪论

在先前的学习过程中，包括数学分析，高等代数，解析几何等课中，研究的对象均为**有限维**空间上的函数，在本课程中，我们会探讨进一步的推广，即到**无限维**.

- 探究一般的，本质的东西；
- 抽象化、一般化、几何化；
- 无限维空间中的映射及运算.

本课程为华东师范大学 23 级数学非师范专业本科生限制性选修，主讲老师为何小清教授.
主要参考书为《泛函分析讲义》[1] 许全华、马涛、尹智

符号说明

本笔记中多数符号第一次出现时均有说明，以下为部分常用符号

$\mathbb{K}/\mathbb{R}/\mathbb{C}$	一般/实/复数域
$d(x,y)$	度量
$\chi/\mathbb{1}$	示性函数
H^*	对偶空间
$F^{\perp}$	正交补空间
$\\|\cdot\\|$	范数
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	内积
$C(X,Y)$	连续映射全体
$\mathcal{L}(E,F)$	线性算子全体
$\mathcal{B}(E,F)$	有界线性算子全体
$\mathcal{K}(E,F)$	紧线性算子全体
$\mathrm{id}/\mathcal{I}$	恒等映射
Ker	核空间
Rg	像空间（值域）
$\sigma(T)$	算子谱
$\rho(T)$	算子预解集

目录

Chapter 1
度量空间

1.1 度量空间的基本概念

Definition 1.1.1 度量空间

设 X 为一个非空集合，函数 $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ 称为 X 上的**度量（距离）**若满足：

- 正定性：$d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$，且 $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- 对称性：$d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;
- 三角不等式：$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$.

此时称 (X, d) 为一个**度量（距离）空间**.

Example 1.1.1

一些很基本的例子：

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 中 $d(x, y) = |x - y|$;
- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 中 $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$;
- $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ 中 $d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$.

Remark 1.1.1

赋范线性空间都是度量空间.

Example 1.1.2 离散度量空间

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y; \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

Example 1.1.3 诱导度量空间

若 (X, d) 是一个度量空间，$\forall \varnothing \neq A \subset X, d|_{A \times A}$ 自然是 A 上的一个度量，(A, d) 是一个度量空间，例如 $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$，$(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, |\cdot|)$.

Example 1.1.4

$m(\Omega, \mathbb{R})$ 表示集合 Ω 上的可测函数，$\forall f, g \in m(\Omega, \mathbb{R}), d(f, g) = \displaystyle\int_\Omega \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|} \mathrm{d}t$.

Example 1.1.5

$$L^p(\Omega,\mathbb{R}^m), f:\Omega\to\mathbb{R}^m, d(f,g)=\left(\int_\Omega |f-g|^p\right)^{1/p}.$$

Example 1.1.6

令 $X=C([0,1]),\forall f,g\in X$，定义 $d(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$.

Definition 1.1.2 开球

设 (X,d) 是一个度量空间，$\forall x\in X,\forall r>0$，则集合 $B(x,r)=\{y\in X|d(x,y)<r\}$ 称为以 x 为球心，r 为半径的**开球**.

Example 1.1.7

一些很基本的例子

- $(\mathbb{R},|\cdot|), B(a,r)=(a-r,a+r)$;
- (X,d) 为离散度量空间，则 $\forall a\in X, B(a,r)=\begin{cases}\{a\} & 0<r\le 1;\\ X & 1<r.\end{cases}$

Definition 1.1.3 开集

$A\subset(X,d)$，称为**开集**，若 $\forall x\in A,\exists\, r>0, s.t.\ B(a,r)\subset A$.

Proposition 1.1.1 开集的基本性质

给定度量空间 (X,d)

- $\varnothing$ 与 X 是开集;
- 若 A,B 是开集，则 $A\cap B$ 为开集（可推广至有限交）;
- 任意开球均为开集.（留作练习）
- $A\subset(X,d)$ 为开集 $\iff$ A 是一些开球的并.

Proof: 仅证明第四条：($\Leftarrow$) 显然，只需证明 ($\Rightarrow$)：$\forall x\in A,\exists\, r_x>0, s.t. B(x,r_x)\subset A$，从而

$$A=\bigcup_{x\in A}\{x\}\subset\bigcup_{x\in A}B(x,r_x)\subset A.$$

Definition 1.1.4 拓扑空间

若一个集合 X 的一些子集构成一个集族 τ，满足：

- $\varnothing, X \in \tau$.
- $\forall A_1 \cdots A_n \in \tau, \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$;
- $\forall \{S_\alpha \in \tau\}_{\alpha \in \mathscr{A}}, \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} S_\alpha \in \tau$.

称 τ 中元素为**开集**，(X, τ) 为一个**拓扑空间**.

Example 1.1.8

给定 $X = \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$

- $d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$;
- $d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$;
- $d_3(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$.

三个度量并不等价，但是三者诱导的拓扑是等价的.

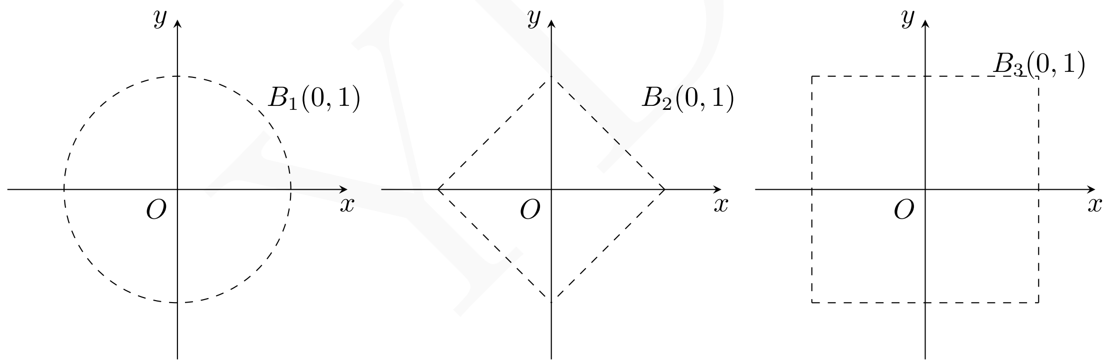


图 1.1: 三种度量下的单位开球

Example 1.1.9

$(C[0,1], d)$ 中的开球 $B(f, r)$ 如下图.

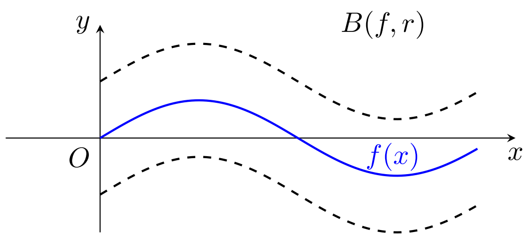


图 1.2: $C[0,1]$ 中开球

Remark 1.1.2

设 (X, d) 为一个度量空间，定义 X 上的子集族 τ 为 X 的所有开集的集合，易证 τ 是 E 上的一个拓扑，并称 τ 为由度量 d 诱导的拓扑.

Remark 1.1.3

若 X 上的拓扑可由一个度量 d 诱导，则称 (X, τ) 是一个可度量化的空间.

1.2 收敛与闭包

设 (X, d) 为一个度量空间.

Definition 1.2.1 收敛

称一个序列 $\{x_n\} \subset X$ 为**收敛**的，若 $\exists\, x \in X$，满足 $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0.$，此时称 x 为序列 $\{x_n\}$ 的极限，又称 $\{x_n\}$ 收敛到 x，记 $x_n \to_d x$（指在 d 的意义下收敛）.

Example 1.2.1

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$，给定 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$；而 $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ 中的序列不一定收敛.

Example 1.2.2

$(C[0,1], d)$ 中 $\{f_n\}$ 收敛到 f 是指 $\exists f \in C[0,1]$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0 \ (\text{ i.e. } f_n \rightrightarrows f.)$$

Definition 1.2.2 闭集

称一个集合 $A \subset (X, d)$ 是**闭**的（或**闭集**），若它的补集 $X \backslash A = A^c$ 是开集.

Example 1.2.3

$\overline{B}(x, r) = \{y \in X | d(x, y) \le r\}$ 是闭集；$S(x, r) = \{y \in X | d(x, y) = r\}$ 是闭集.

Definition 1.2.3 聚点

称 $a \in X$ 为序列 (X, d) 中序列 $\{x_n\}$ 的一个**聚点**，若 $\exists$ 子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 a.

Remark 1.2.1

只有唯一聚点的序列不一定收敛.

Definition 1.2.4 有界集

$A \subset (X, d)$ 称为**有界**的，若 $\exists x_0 \in X, M > 0$，使得 $A \subset B(x_0, M)$.

Definition 1.2.5 接触点（粘着点）

设 (X,d) 是一个度量空间，$A \subset X, x \in X$ 称为 A 的**接触点**，若 $\forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

Remark 1.2.2

A 中的点一定是 A 的接触点，反之不然.

Definition 1.2.6 （凝）聚点

设 $A \subset (X,d), x \in X$，若 $\forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon)$ 都包含 A 中不同于 x 的点，即

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(x,\varepsilon) \cap (A \backslash \{x\}) \neq \varnothing$$

则称 x 为 A 的**聚点**.

Example 1.2.4

$X = \mathbb{R}, A = (a,b)$，则 a, b 是 A 的聚点.

Example 1.2.5

聚点一定是接触点，反之不然. $A = [0,1] \cap \{2\}$ 中，2 是接触点但非聚点.

Definition 1.2.7 闭包

设 $A \subset (X,d)$，A 的接触点全体称为 A 的**闭包**，记作 $\overline{A}$.

Remark 1.2.3

闭包的基本性质有

- $A \subset \overline{A}$;
- $x \notin \overline{A} \iff \exists\, r > 0,\ s.t.\ B(x,r) \cap A = \varnothing$.

Theorem 1.2.1

设 $A \subset (X,d)$，则以下结论成立

(a) $\overline{A}$ 是闭集;

(b) $\overline{A}$ 是 X 中包含 A 的最小闭集，即 $\overline{A} = \bigcap_{F \supset A, F\text{闭}} F$;

(c) A 是闭集 $\iff A = \overline{A}$，即 A 包含了自己的所有接触点.

Claim 1.2.1

F 是闭集，若 $x \in \overline{F}$，必有 $x \in F$.

Proof: 反证法，假设 $x \notin F$，则 $x \in F^c$，且 F^c 为开集，于是 $\exists\, r > 0$，使得 $B(x,r) \subset F^c$，则 $B(x,r) \cap F = \varnothing \Rightarrow x \notin \overline{F}$，得出矛盾.

下面回到定理 1.2.1 的证明：

Proof:

(a) 即证 $\overline{A}^c = X \backslash \overline{A}$ 是开集：
设 $x \in \overline{A}^c$，则 $x \notin \overline{A}$. 因此 $\exists\, r > 0$ 使得 $B(x,r) \cap A = \varnothing$，由于 $B(x,r)$ 是开集，故

$$\forall y \in B(x,r), B(y, r - d(x,y)) \subset B(x,r)$$

于是我们有

$$B(y, r - d(x,y)) \cap A = \varnothing \Rightarrow y \notin \overline{A}.$$

由于 y 的任意性得到

$$B(x,r) \cap \overline{A} = \varnothing \Rightarrow B(x,r) \subset X \backslash \overline{A} = \overline{A}^c.$$

又由 x 的任意性得到 $\overline{A}^c$ 为开集，进而 $\overline{A}$ 是闭集.

(b) 显然 $\overline{A} \supset \bigcap_{F \supset A, F闭} F$，下证 $\overline{A} \subset \bigcap_{F \supset A, F闭} F$：
设 $F \supset A$ 且为闭集，并设 $x \in \overline{A}$，即 x 是 A 的接触点，则 x 显然也是 F 的接触点，即 $x \in \overline{F}$
由 x 的任意性可得 $\overline{A} \subset F \Rightarrow \overline{A} \subset \bigcap_{F \supset A, F闭} F$.

(c) ($\Leftarrow$) 显然，下证 ($\Rightarrow$)：
设 A 是闭集，且 $A \supset A$，由 (b) 可得 $A \supset \overline{A}$，又因 $A \subset \overline{A}$，成立 $A = \overline{A}$.

Definition 1.2.8 稠密

设 $A \subset (X,d)$，若 $\overline{A} = X$，则称 A 在 X 中**稠密**.

Example 1.2.6

$\mathbb{Q} \subset (\mathbb{R}, |\cdot|), \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Definition 1.2.9 内部

设 $x \in A \subset (X,d)$，若存在 $r > 0$，使得 $B(x,r) \subset A$，则称 x 是 A 的**内点**，A 的所有内点的集合称为 A 的**内部**，记为 A°.

Example 1.2.7

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 中，$\mathbb{Q}^\circ = \varnothing, ([0,1])^\circ = (0,1)$.

Example 1.2.8

由 Weierstrass 逼近定理，$\overline{\{[0,1]上的多项式\}} = C[0,1]$.

Theorem 1.2.2

设 $A \subset (X,d)$，则

(1) A° 是包含于 A 的所有开集的并，即 A° 是包含于 A 的最大开集.

(2) A 是开集 $\iff A^\circ = A$.

证明留作练习. 由**稠密**的定义 1.2.8 以及第一次作业习题 1，我们容易可以得到如下推论:

Corollary 1.2.1

A 稠密 $\iff \overline{A} = E \iff (\overline{A})^c = \varnothing \iff (A^c)^\circ = \varnothing$.

Definition 1.2.10 疏朗集

若 $(\overline{A})^\circ = \varnothing$，则称 A 为 E 的**无处稠密/疏朗集**，即 A 不在任何 E 的非空开集中稠密.

Remark 1.2.4

$(\overline{A})^\circ$ 不等价于 $A^\circ = \varnothing$，反例可考虑 $A = \mathbb{Q}$，$E = \mathbb{R}$.

Definition 1.2.11

称 E 中可数个开集的交为 G_δ 集，称 E 中可数个闭集的并为 F_σ 集.

Lemma 1.2.1

G_δ 集的补集为 F_σ 集，反之亦然.

Proof: 设 $B = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$，其中 $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ 为一列闭集，则

$$B^c = \left(\bigcup_{n=1}^\infty F_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^\infty F_n^c$$

而每个 F_n^c 为开集，故 B^c 为 G_δ 集. 反之亦然.

Chapter 2

连续映射

有了度量，我们就可以定义两个度量空间之间的连续映射.

2.1 连续映射

设 $(X,d_1),(Y,d_2)$ 是两个度量空间，考虑映射：$f:X\to Y$

Definition 2.1.1 连续映射

称 f 在 $x\in X$ 处**连续**，是指 $\forall\varepsilon>0,\exists\ \delta(\varepsilon,x)>0$，$s.t.\ \forall y\in X$ 满足 $d_1(x,y)<\delta$，都有 $d_2(f(x),f(y))<\varepsilon$（i.e. $y\in B_X(x,\delta)\Rightarrow f(y)\in B_Y(f(x),\varepsilon)$）；称 f 在 X 上**连续**，若 f 在 X 的每一点都连续.

Proposition 2.1.1 连续的等价刻画

f 在 $x_0\in X$ 连续 $\iff\forall\{x_n\}\subset X$ 满足 $x_n\to_{d_1}x$ 有 $f(x_n)\to_{d_2}f(x)$.

Proof: $(\Rightarrow)$ 易证：由 f 在 x_0 连续，$\forall\varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，使得 $d(x_n,x)<\delta\Rightarrow d_2(f(x_n),f(x))$.
另一方面，对这样的 $\delta,\exists\ N\in\mathbb{N}$，使得

$$d(x_n,x)<\delta,\forall n\geq N\Rightarrow d_2(f(x_n),f(x))<\varepsilon,\forall n\geq N.$$

$(\Leftarrow)$ 证明逆否命题：f 在 x_0 不连续 $\Rightarrow\exists\ \varepsilon_0>0,\forall\delta=\frac{1}{n}>0$，使得

$$d_1(x_n,x_0)<\delta\text{ 但 }d_2(f(x_n),f(x_0))\geq\varepsilon_0$$

即 $x_n\to_{d_1}x_0$ 但 $f(x_n)\not\to f(x_0)$ 矛盾，因此命题得证.

Theorem 2.1.1

$f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ 连续 $\iff$ 任意开集的原像是开集（i.e. $\forall O\subset Y,O$ 是 (Y,d_2) 的开集），$f^{-1}(O)=\{x\in X|f(x)\in O\}$ 是 (X,d_1) 中的开集.）

Proof:

- $(\Rightarrow)$ 任取开集 $O\subset Y$，要证 $f^{-1}(O)$ 是开集：$\forall x_0\in f^{-1}(O)$，即 $y_0:=f(x_0)\in O,\exists\ r_0>0$ 使得 $B_{d_2}(y_0,r_0)\subset O$. 由 f 在 x_0 连续，$\exists\ \delta>0$ 使得 $d_1(x_0,x)<\delta\Rightarrow d_2(y_0,f(x))<r_0$.，即 $f(x)\in B_{d_2}(y_0,r_0)\subset O$. 即 $x\in B_{d_1}(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)\in O\Rightarrow B_{d_1}(x,\delta)\subset f^{-1}(O)\Rightarrow f^{-1}(O)$ 是开集.
- $(\Leftarrow)\forall x_0\in X,\forall\varepsilon>0$，$O_\varepsilon:=B_{d_2}(f(x_0,\varepsilon))$ 是 Y 中开集. 由条件得 $f^{-1}(O_\varepsilon)$ 是 X 中开集，且 $x_0\in f^{-1}(O_\varepsilon)$，则 $\exists\ \delta>0$ 使得 $\forall x\in B_{d_1}(x_0,\delta),f(x)\in O_\varepsilon$，即 $d_2(f(x_0,f(x)))<\varepsilon\Rightarrow f$ 在 x_0 连续，由 x_0 的任意性 $\Rightarrow f$ 连续.

Proposition 2.1.2

连续映射的复合依然是连续的.

Proof: 由定理 2.1.1 立即可得.

Definition 2.1.2 一致连续

映射 $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$，称 f 在 X 上是**一致连续**的，若 $\forall\varepsilon>0,\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)$，使得

$$d_1(x,y)<\delta\Rightarrow d_2(f(x),f(y))<\varepsilon,\quad \forall x,y\in X.$$

Definition 2.1.3 Lipschitz 连续

映射 $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$，称 f 是 M-Lipschitz 连续的，若 $\exists\, M>0$ 使得 $\forall x,y\in X$ 有

$$d_2(f(x),f(y))\le Md_1(x,y).$$

Remark 2.1.1

M-Lipschitz 连续 $\Rightarrow$ 一致连续，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2M}$ 即可.

Definition 2.1.4 等距嵌入和等距同构

映射 $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$，称 f 是**等距嵌入**，若

$$d_2(f(x),f(y))=d_1(x,y),\quad \forall x,y\in X$$

进一步，若 $f(X)=Y$，即 f 是满射，则称 f 是度量空间 X 到 Y 的**等距同构**.

Remark 2.1.2

- 等距嵌入是单射，且是 1-Lipschitz 的;
- 等距同构的逆映射 f^{-1} 也是等距同构;
- 等距嵌入 $\Rightarrow$1-Lipschitz$\Rightarrow$ 一致连续 $\Rightarrow$ 连续.

2.2 度量的拓扑等价与等价度量

Definition 2.2.1 拓扑等价

X 上的两个度量 d_1,d_2 称为**拓扑等价**的，若任给序列 $\{x_n\}\subset X$，有 $x_n\overset{d_1}{\to}x\iff x_n\overset{d_2}{\to}x$.

Definition 2.2.2 拓扑同胚

映射 $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$，称 f 为**同胚**的，若 f 是连续双射且 f^{-1} 也连续，此时称为 (X,d_1) 与 Y,d_2 时**拓扑同胚**，称为 f 为**同胚映射**.

Remark 2.2.1

拓扑等价是同一个空间 X 上而言，拓扑同胚是 X 和 Y 之间的关系.

Proposition 2.2.1

X 上的两个度量 d_1,d_2 拓扑等价 $\iff$ $\mathrm{id}:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ 是一个同胚映射.

Definition 2.2.3 等价度量

称为 X 上的两个度量 d_1,d_2 是**等价度量**，若 $\exists\, c_1,c_2>0$ 使得

$$c_1d_1(x,y)\le d_2(x,y)\le c_2d_2(x,y),\quad \forall x,y\in X$$

Remark 2.2.2

度量等价 $\Rightarrow$ 拓扑等价，反之不然.

Example 2.2.1

映射 $f:(0,1)\to(0,1),d_1(x,y)=|x-y|,d_2(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

Example 2.2.2

映射 $f:\mathbb{R}\to(-1,1),x\mapsto\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 取欧氏度量.

Proposition 2.2.2

d_1,d_2 是 X 上的等价度量 $\iff$ id 是双 Lipschitz 的.

Example 2.2.3

例 1.2.2 中三个度量是拓扑等价的

Example 2.2.4

考虑 $C([0,1])$ 上的两个度量

$$d_\infty(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f-g|,\quad d_1(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x.$$

设其诱导的拓扑分别为 τ_∞,τ_1.

2.3 度量空间中的 Cauchy 序列与完备性

回顾 $\mathbb{R}$ 中 Cauchy 列，直接推广得到：

Definition 2.3.1 Cauchy 列

设 (X,d) 是一个度量空间，X 中序列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N > 0,\ s.t.\ \forall m,n > N,\ |d(x_m) - d(x_n)| < \varepsilon.$$

Remark 2.3.1

Cauchy 列满足如下性质：

（1） 收敛序列是 Cauchy 列;

（2） Cauchy 列不一定收敛;

（3） 若 Cauchy 列有一个聚点，则该序列收敛;

（4） Cauchy 列一定有界

Definition 2.3.2 完备集

一个集合 $A \subset (X,d)$ 称为**完备**的，若 A 中的任意 Cauchy 列收敛于 A.

Definition 2.3.3 完备度量空间

若 (X,d) 中任一 Cauchy 列都收敛，则称 X 为**完备度量空间**，也称度量 d 是**完备**的.

Example 2.3.1

(1) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 是一个完备度量空间；

(2) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 的子集 $[0,1]$ 是一个完备度量空间，$(0,1]$ 不完备；

(3) $C[0,1]$ 在度量 $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$ 下完备.

Proof: 设 $\{f_n\}$ 是 $(C[0,1], d)$ 中的 Cauchy 列，$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\forall m,n > N, \quad \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{2.1}$$

则 $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列，由于 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 完备，$\exists\ f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$，下证 $f \in C[0,1]$ 且 $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$，在 (2.1) 式中令 $m \to \infty$，得到

$$\forall n > N, \quad \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

由 f_{N+1} 一致连续，对上述 $\varepsilon, \exists\, \delta > 0$，使得

$$\forall |x-y| < \delta, \quad |f_{N+1}(x) - f_{N+1}(y)| < \varepsilon$$

于是有

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f_{N+1}(x)|+|f_{N+1}(x)-f_{N+1}(y)|+|f_{N+1}(y)-f(y)|<3\varepsilon$$

于是有 f 一致连续，又由 (2) 知 $d(f_n,f)\to 0$.

Remark 2.3.2

$C[0,1]$ 在 $d_1(f,g)=\int_0^1 |f-g|\mathrm{d}x$ 下是度量空间但不完备

Proof: 取一列函数 $\{f_n\}$ 满足：

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 & x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right] \\ nx-\dfrac{1}{2} & x\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right) \\ 1 & x\in\left[\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n},1\right] \end{cases}$$

证明其为 Cauchy 列：

$$d(f_m,f_n)=\int_0^1 |f_m-f_n|\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|\to 0$$

但是其不收敛，用反证法：假设 f_n 收敛，则

$$\exists\ f\in C[0,1],\ s.t.\ d(f_n,f)\to 0$$

$\forall\varepsilon$，当 $\frac{1}{n}<\varepsilon$ 时

$$d(f_n,f)=\int_0^1 |f_n-f|\mathrm{d}x \geq \int_{\varepsilon+\frac{1}{2}}^1 |f_n-f|\mathrm{d}x=\int_{\varepsilon+\frac{1}{2}} |1-f(x)|\mathrm{d}x\to 0$$

由于 ε 任意性，$f(x)\equiv 1,\forall x\in(\frac{1}{2},1)$，另一方面

$$d(f_n,f)\geq \int_0^{\frac{1}{2}} |f_n-f|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} |f|\mathrm{d}x\to 0\Rightarrow f\equiv 0,\quad \forall x\in(0,\frac{1}{2})$$

从而 f 在 $\frac{1}{2}$ 不连续.

Example 2.3.2

$c_{00}(\mathbb{N}_+)=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)|x_n\in\mathbb{R},x$ 中只有有限项不为0$\}$，再取度量为

$$d_\infty(x,y)=\max_k |x_k-y_k|$$

则 (c_{00},d_∞) 是一个度量空间，但不完备.

Proof: 令 $x^{(k)}=(1,\frac{1}{2},\cdots\frac{1}{k},0,\cdots,0,\cdots)\in c_{00}$，则

$$d_\infty(x^{(k)},x^{(l)})=\begin{cases} \frac{1}{\min\{k,l\}+1} & k\neq l \\ 0 & k=l \end{cases}\to 0\quad (k,l\to\infty)$$

则 $\{x^{(k)}\}$ 是 Cauchy 列，但不收敛，用反证法：假设 $x^{(k)}\xrightarrow{d_\infty} x$，则 $x_i^{(k)}\xrightarrow{|\cdot|} x_i$，当 $k\to\infty$，即

$$\forall i\in\mathbb{N}_*,|x_i^{(k)}-x_i|\to 0$$

但 $x_k^{(k)}=\frac{1}{i}$，当 $k\geq i$ 时，$x_i=\frac{1}{i}\Rightarrow x=(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots)=(\frac{1}{n})_{n\geq 1}\notin c_{00}$，故不完备

完备与闭集

Theorem 2.3.1

设 (X,d) 是一个度量空间，$A \subset X$，则 (A,d) 完备 $\Rightarrow A$ 是闭集.

Proposition 2.3.1

任何一个完备集一定是闭集.

Proof: 设 A 完备，要证其为闭集，只需证：$\overline{A} \subset A$

$$\forall x \in \overline{A}, \exists \{x_n\} \subset A \ s.t. \ x_n \xrightarrow{d} x$$

从而 $\{x_n\}$ 是 A 中的 Cauchy 列 $\Rightarrow x_n \xrightarrow{d} y \in A$，由极限的唯一性，

$$x = y \Rightarrow x \in A \Rightarrow \overline{A} \subset A \Rightarrow A = \overline{A} \Rightarrow A\text{闭}.$$

Theorem 2.3.2

设 (X,d) 是一个完备度量空间，$A \subset X$，则 (A,d) 完备 $\iff A$ 是 X 的闭集.

Proof: $(\Rightarrow)$ 由命题 2.3.1 已证；
$(\Leftarrow)$ 设 $A \subset X$ 是闭集，任取 Cauchy 列 $\{x_n\} \subset A$，由 X 完备，$\exists\, x \in X$，$s.t.\ x_n \xrightarrow{d} x \Rightarrow x \in \overline{A}$，由于 A 是闭集，故 $A = \overline{A}$，由定义 A 完备.

2.4 压缩映射与 Banach 不动点定理

Definition 2.4.1 压缩映射

若映射 $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ 是 α-Lipschitz 的，且 $\alpha \in (0,1)$，则称 f 为压缩映射.

Example 2.4.1

(1) 在 $\mathbb{R}$ 上：$f(x) = \alpha x$，其中 $|\alpha| < 1$ 是压缩映射；

(2) 在 $\mathbb{R}$ 上：$f(x) = \sin x, |x|$ 均不是压缩映射.

(3) 在 $\mathbb{R}$ 上：$f(x) = x^3, x = x^{1/3}$ 也均不是压缩映射.

Claim 2.4.1

设 $f : X \to X$ 是压缩映射，则由 $x_{n+1} = f(x_n)$，$n \geq 0$ 定义的 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列

Proof:

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq \alpha d(x_1 - x_0)$$

由归纳法易得

$$d(x_{n+1},x_n) \leq \alpha^n d(x_1,x_0)$$

则对 $\forall m,n$：

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1},x_n) \leq (\alpha^{m-1}+\cdots+\alpha^n)d(x_1,x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_1,x_0)$$

从而 $d(x_m,x_n) \to 0(n\to\infty)$，即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

Definition 2.4.2 不动点

给定映射 $g: X \to X$，$x_0 \in X$ 称为 g 的不动点，若 $g(x_0) = x_0$.

Theorem 2.4.1 Banach 压缩映射原理

设 (X,d) 是一个完备度量空间，且 $f: X \to X$ 是一个压缩映射，则 $\exists! x \in X$，$s.t.\ f(x) = x$，即 f 有唯一不动点.

Proof:

- **唯一性**：f 是压缩映射，故 $\exists \alpha \in (0,1)$ 使得

  $$\forall x,y \in X, \quad d(f(x),f(y)) < \alpha d(x,y)$$

  反证法，假设存在两个不动点 $x_1 \neq x_2$，则 $f(x_i) = x_i, i = 1,2$

  $$d(x_1,x_2) = d(f(x_1),f(x_2)) \leq \alpha d(x_1,x_2)$$

  与 $\alpha \in (0,1)$ 矛盾，唯一性得证；

- **存在性**：任取 $x_0 \in X$，定义序列 $x_{n+1} = f(x_n)$，$n \geq 0$，由 Claim 2.4.1 与 X 的完备性，$\exists\ a := \lim_{n\to\infty} x_n$，由 f 的连续性，$a = f(a)$，即 a 是 f 的不动点.

Remark 2.4.1

(1) 证明过程表明：$\forall x_0 \in X, x_n = f \circ f \cdots f(x_0) = f^n(x_0)$ 都收敛；

(2) $\forall m > n$，$d(x_m,x_n) \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_1,x_0)$，令 $m \to \infty$，则给出了迭代精度的估计；

(3) X 完备，f 到自身，f 压缩，三个条件缺一不可.

Example 2.4.2

对上述 (3) 中三个条件各有反例

(a) $f: (0,\frac{1}{4}) \to (0,\frac{1}{4}), x \mapsto x^2$；

(b) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$，$x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$；

(c) 见习题

Remark 2.4.2

Banach 压缩映射原理的应用：

(a) 隐函数存在定理的证明；

(b) 牛顿迭代法求函数零点；

(c) ODE 中 Cauchy 问题解的存在唯一性；

(d) 解方程

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos(x+y) + \mathrm{e}^{2019t} - \sin^2 t; \\ y = \frac{1}{3}\sin(x-y) - \ln(1+t^2) + 3 \end{cases} \tag{$*$}$$

下证方程 $(*)$ 有且仅有一个根 (x_t, y_t)

Proof: 考虑映射

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(x+y) + \mathrm{e}^{2025t} - \sin^2 t \\ \frac{1}{3}\sin(x-y) - \ln(1+t^2) + 3 \end{pmatrix}$$

取度量 $d_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$，则 $(\mathbb{R}^2, d_1)$ 完备，不难验证

$$d_1\left(T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}|cos(x_1+y_1) - \cos(x_2+y_2)| + \frac{1}{3}|\sin(x_1-y_1) - \sin(x_2-y_2)|$$

$$\leq \frac{1}{2}|\sin\xi||(x_1-x_2)+(y_1-y_2)| + \frac{1}{3}|\cos\eta||(x_1-x_2)+(y_1-y_2)| \leq \frac{5}{6}\cdot d_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

则由定理 2.4.1 知结论成立. ✪

Remark 2.4.3

若取 $d_\infty = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$，则无法找到合适的 Lipschitz 系数，故不能使用定理 2.4.1，由此可见选取合适的度量十分重要.

Example 2.4.3

常微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x); \\ x(0) = \xi \end{cases} \iff x(t) = \xi + \int_0^t f(t, x(s))\mathrm{d}s.$$

此处 f 在 $R = [-a,a] \times [\xi - b, \xi + b]$ 上连续，其中 $a, b > 0$ 的解的存在性.

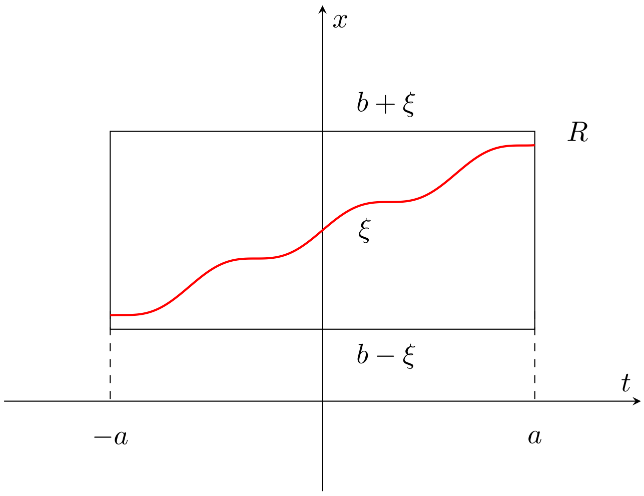
目标: 寻找积分形式问题的不动点. 取 $h \in (0, a]$，以及

$$X = \{x \in C[-h,h] | \max_{-h\leq t\leq h} |x(t) - \xi| \leq b\}$$

则 X 是 $C[-h,h]$ 上的闭集，因此完备，$\forall x \in X$，定义

$$Tx(t) = \xi + \int_0^t f(t, x(s))\mathrm{d}x$$

需要验证



(1) $Tx \in X,\ \forall x \in X$;

(2) $\exists\ x \in (0,1),\ s.t.\ d(Tx,Ty) \le \alpha d(x,y)$.

对于 (1)，有

$$|Tx(t)-\xi| = \left|\int_0^t f(t,x(s))\mathrm{d}s\right| \le h \cdot \max_{\substack{-h\le t\le h\\ \xi-b\le x\le \xi+b}} |f(t,x)| \le hM$$

其中 $M=\max_{(t,x)\in R}|f(t,x)|$，因此为使 $Tx\in X$，只需取 $h\le \frac{b}{M}$
对于 (2)，$\forall x,y\in X$

$$|Tx(t)-Ty(t)| = \int_0^t |f(t,x(s))-f(t,y(s))|\mathrm{d}s \le \int_0^t L|x(s)-y(s)|\mathrm{d}s \le Lh\cdot d(x,y)$$

只需取 $h<\frac{1}{L}$，且 $f(t,x)$ 关于 x 在 $\mathbb{R}$ 上一致 L-Lipschitz，即

$$\forall |t|\le a,\ \forall |x-\xi|\le b, |y-\xi|\le b,\ |f(t,x)-f(y,x)|\le L|x-y|.$$

综上，只需满足 $h\le \min\{a,\frac{1}{L},\frac{b}{M}\}$，且 $f\in C(R)$ 有最大值 M，则原方程在 $[-h,h]$ 上存在唯一解（由压缩映射原理保证）.

Remark 2.4.4

证明解的存在性只需 $f\in C(\mathbb{R})$.

Example 2.4.4

不满足 f 对 x 的 Lipschitz 条件有反例 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2\sqrt{|x|};\\ x(0)=0.\end{cases}$

度量空间的完备化

Definition 2.4.3 完备化

设 (X,d) 是一个度量空间（不完备），称 (Y,d_1) 是 X,d 的**完备化**，若 (Y,d_1) 完备且 $\exists\ X\to Y$ 的等距嵌入 φ，称 (Y,d_1) 为 X,d 的**最小完备化空间**，若 $\varphi(X)$ 在 (Y,d_1) 中稠密，即 $\overline{\varphi(X)}=Y$.

Example 2.4.5

$(\mathbb{Q},|\cdot|)$ 的最小完备化空间为 $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

2.5 度量空间的紧性与列紧性

Definition 2.5.1 紧集

一个集合 $A\subset(X,d)$ 称为**紧集**，若 A 的任何开覆盖都有有限子覆盖，i.e. 开集族 $\{O_i\}_{i\in I}$ 满足

$$A\subset\bigcup_{i\in I}O_i,\ \exists\ p=1,2,\cdots k,\ s.t. A\subset\bigcup_{p=1}^{k}O_{ip}$$

Definition 2.5.2 列紧集

一个集合 $A\subset(X,d)$ 称为**列紧**的，若任给序列 $\{x_n\}\subset A$，一定存在一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 在 X 中收敛.

Definition 2.5.3 自列紧集

闭的列紧集称为**自列紧集**.

Remark 2.5.1

(1) 列紧集的子集是列紧的；

(2) $[0,1]$ 在 $\mathbb{R}$ 中列紧，但不自列紧；

(3) 区分全空间和子集的列紧或自列紧.

Definition 2.5.4 预紧集

一个集合 $A\subset(X,d)$ 称为**预紧/完全有界**的，若 $\forall\varepsilon>0,\exists$ 有限个点 $x_1,\cdots,x_k\in X$，使得

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{k}B(x_i,\varepsilon).$$

i.e. A 包含在有限个半径为 ε 的开球的并中.

Remark 2.5.2

(1) 在上述定义中，完全可以选择球心 $x_i\in A$，做法如下：$\forall\varepsilon>0, A\subset\bigcup B(x_i,\frac{\varepsilon}{2})$，则 $\forall i$, $A\cap B(x_i,\frac{\varepsilon}{2})\neq\varnothing\Rightarrow\exists\ y_i\in A\cap B(x_i,\frac{\varepsilon}{2})$，则 $A\subset\bigcup B(y_i,\varepsilon)$.

(2) 完全有界集是有界的；

(3) $\mathbb{R}^n$ 中任何有界集都是完全有界集，对于一般距离空间不一定成立.

Example 2.5.1

(3) 的反例可取 $f_n(x)=\begin{cases}0, & x>\frac{1}{n}\\ 1-nx, & x\in(0,\frac{1}{n}]\end{cases}$

Remark 2.5.3

闭集不一定是列紧集，如 $[0,+\infty)$

Corollary 2.5.1

一个集合 $A\subset(X,d)$ 是自列紧的，则 A 是完备的.

Proof: 假设 $\{x_n\}$ 是 A 中的 Cauchy 列，由 A 自列紧，则存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 $x\in A$，由 X 完备性，$\{x_n\}$ 收敛于 $x\in A$，故 A 完备.

Proposition 2.5.1

$A\subset(X,d)$ 是列紧的，则它是预紧的.

Proof: 反证法，假设 A 不是全有界的，则 $\exists\,\varepsilon_0$，使得任意有限个以 A 中的点为球心的，ε_0 为半径的球的并都不能覆盖 A，特别地，取 $x_1\in A$，则

$$A\backslash B(x_1,\varepsilon)\neq\varnothing\Rightarrow\ \exists\ x_2\in A\backslash B(x_1\varepsilon)$$

依次类推构造序列 $\{x_n\}\subset A$，使得

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_{n+1}\in A\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,\varepsilon_0)\right)$$

从而 $d(x_m,x_n)\geq\varepsilon$, $\forall m\neq n$，则 $\{x_n\}$ 无收敛子列，与 A 列紧矛盾.

Proposition 2.5.2

设 (X,d) 完备，$A\subset X$，则 A 预紧 $\Rightarrow A$ 列紧.

Proof: 因 (X,d) 完备，只需证明 A 中任意序列 $\{x_n\}$ 均有 X 中的 Cauchy 子列.
首先取 $\varepsilon_1=\frac{1}{2}$，由预紧，$\exists\ z_1,\cdots,z_n\in A$，使得

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(z_i,\frac{1}{2})$$

则至少存在一个球包含 $\{x_n\}$ 中的无穷项，即包含 $\{x_n\}$ 中的一个子列，再令该球的球心为 $y_1\in A$，该子列为 $\{x_n^{(1)}\}\subset\{x_n\}$，类似地，取 $\varepsilon_2=\frac{1}{2^2}$，对 $\{x_n^{(1)}\}$ 做类似操作，可得到

$$y_2\in A$$

以及 $B(y_2,\varepsilon_1)$ 中的子列 $\{x_n^{(2)}\}\subset\{x_n^{(1)}\}\subset\{x_n\}$，容易归纳得到

$$\forall\varepsilon_k=\frac{1}{2^k},\ \exists\ y_k\in A,\ \{x_n^{(k)}\}\subset\{x_n^{(k-1)}\}\cap B(y_k,\varepsilon_k)$$

考虑对角线子列 $\{x_k^{(k)}\}$:

Claim 2.5.1

$\{x_k^{(k)}\}$ 是 Cauchy 列

事实上 $\forall n, p \in \mathbb{N}$

$$d(x_{n+p}^{(n+p)}, x_n^{(n)}) \leq d(x_{n+p}^{(n+p)}, y_n) + d(y_n, x_n^{(n)}) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0, \quad n \to \infty$$

故 $\{x_n^{(n)}\}$ 是一个 Cauchy 列，由 X 完备性

$$\exists\, x \in X,\ s.t.\ x_n^{(n)} \to x, \quad n \to \infty$$

也就得到 A 列紧.

Corollary 2.5.2

设 $A \subset (X, d)$，则 A 列紧 $\Rightarrow$ A 有界.

Proposition 2.5.3

设 A 自列紧，任给 $\{O_i\}_{i\in I}$ 为 A 的一个开覆盖，则存在 $\lambda > 0$，使得

$$\forall x \in A,\ \exists\, i_x \in I\ B(x, \lambda) \subset O_{i_x}$$

这个 λ 称为开覆盖 $\{O_i\}_{i\in I}$ 的 **Lebesgue 数**.

Proof: 用反证法：假设 $\{O_i\}_{i\in I}$ 不存在这样的 Lebesgue 数，则

$$\forall \varepsilon > 0\ , \exists\, x_\varepsilon \in A,\ s.t.\ \forall i \in I,\ B(x_\varepsilon, \varepsilon) \not\subset O_i$$

可得到

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\, x_n \in A,\ s.t.\ \forall i \in I,\ B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset O_i$$

由 A 自列紧，序列 $\{x_n\}$ 存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足

$$x_{n_k} \xrightarrow{d} y \in A, \quad k \to \infty$$

$\because A \subset \bigcup_{i\in I} O_i$，$\therefore \exists i_0 \in I,\ s.t. y \in O_{i_0}$，又 $\because O_{i_0}$ 是开集，$\exists r > 0\ s.t.\ B(y, r) \subset O_{i_0}$
由极限定义，当 k 足够大时 $d(x_{n_k}, y) < \frac{r}{2}$，且 $\frac{1}{n_k} < \frac{r}{2}$，得到

$$B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset B(y, r) \subset O_{i_0}$$

与假设矛盾.

Theorem 2.5.1

设 (X, d) 是度量空间，则以下命题等价

（i） (X, d) 是紧空间；

（ii） (X, d) 是（自）列紧的；

（iii） (X, d) 是完备且预紧的.

Proof: (ii) $\iff$ (iii) 在命题 2.5.1 , 2.5.2 与推论 2.5.1已证明,只需证 (i) $\iff$ (ii),我们将证明 $A \subset (X,d)$ 带诱导度量也满足.

- $\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)}}$ 使用反证法：设 A 不是自列紧的，则 $\exists$ 序列 $\{x_n\} \subset A$，没有 A 中的聚点.
  令 $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$，则 $\#(S) = \infty \Rightarrow \#(A) = \infty$，且

$$\forall y \in A, \exists\, r_y > 0,\ \exists N_y \in \mathbb{N},\ s.t.\ \forall n > N_y,\ x_n \notin B(y, r_y).$$

  即通过适当地缩小 r_y，$\exists\, \tilde{r}_y > 0$，使得

$$\#(S \cap B(y, \tilde{r}_y)) \leq 1 \iff B(y, \tilde{r}_y) \cap (S \backslash \{y\}) = \varnothing.$$

  又由 $A \subset \bigcup_{y \in A} B(y, \tilde{r}_y)$ 以及 A 的紧性，存在有限子覆盖，设为 $y_1, \cdots, y_k \in A$，使得

$$\bigcup_{i=1}^{k} B(y_i, \tilde{r}_{y_i}) \supset A \supset \{x_n\}$$

  但是每个 $B(y_i, \tilde{r}_{y_i})$ 至多只有 S 中的一个点，与 $\#(S) = \infty$ 矛盾，从而 A 自列紧.

- $\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(i)}}$ 已知 A 自列紧，由命题 2.5.1 可得 A 是全有界集，有 $\{O_i\}_{i \in I}$ 为 A 的一个开覆盖，由命题 2.5.3 存在 $\lambda > 0$ 为其 Lebesgue 数，$\exists\, y_1, y_2, \cdots, y_n \in A$, $s.t.$ $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(y_k, \lambda)$，且

$$\forall y_k \in A,\ \exists\, i_k \in I,\ s.t.\ B(y_k, \lambda) \subset O_{i_k}$$

  从而

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(y_k, \lambda) \subset \bigcup_{i=1}^{k} O_{i_k}$$

  因此 A 是紧集.

总结

- 设 (X,d) 是一个度量空间，$A \subset X$ 紧 $\iff$ A 自列紧 $\iff$ A 完备 + 预紧

  (1) 若 $A \subset (X,d)$ 为紧集，$F \subset A$ 为紧集 $\iff$ $F \subset A$ 是闭集

  (2) 设 $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ 连续，则 $\forall A \subset X$ 紧，$f(A)$ 是紧的.

  (3) 设 $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ 连续，若 X 紧则 f 一致连续.

  (4) 设 $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ 是连续函数，又设 X 紧，则 f 在 X 上一致有界且达到极值.

  (5) 设 (X,d) 紧，$f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ 连续双射（该表述中 f^{-1} 不一定连续），则 f 是 X 到 Y 的同胚，即 f^{-1} 连续.

> **Remark 2.5.4**
>
> 上述 (4) 可以推广至有限维赋范线性空间，即紧 $\iff$ 有界闭；但度量空间的 $\Leftarrow$ 不一定成立.

Chapter 3
赋范空间和连续线性映射

3.1 Banach 空间

Definition 3.1.1 赋范空间

设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，$P: E \to [0, +\infty)$ 是 E 上的实值函数，若 $\forall x, y \in E, \quad \lambda \in \mathbb{K}$

（i） 正定性：$P(x) \geq 0$，且 $P(X) = 0 \iff X = 0;$

（ii） 正齐性：$P(\lambda x) = |\lambda| P(x);$

（iii） 三角不等式：$P(x+y) \leq P(x) + P(y)$

则称 P 是 E 上的**范数**，通常记为 $\|\cdot\|$，并称 $(E, \|\cdot\|)$ 为**赋范空间**.

- 赋范空间是度量空间，只需定义 $d(x, y) = \|x - y\|$, $\forall x, y \in E$，赋范空间有度量空间的所有性质.
- 赋范空间的度量具有平移不变性，即

$$d(x, y) = d(x+z, y+z), \quad \forall x, y, z \in E$$

- 度量空间不一定是赋范空间，例如

$$(\mathbb{R}, d), \quad d(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)|, \quad \phi(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

Definition 3.1.2 收敛

$\{x_n\} \subset (E, \|\cdot\|)$ 收敛到 $x \iff \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$，记作 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$，称为依范数收敛.

- 单位球面 $S = \{x \in E \big| \|x\| = 1\}$
- 三角不等式 $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- 运算的连续性：
  - 若 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$，则 $\|x_n\| \xrightarrow{\mathbb{R}} \|x\|$
  - 若 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x, y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$，则 $x_n + y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x + y$
  - 若 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x, \lambda_n \xrightarrow{\mathbb{R}} \lambda$，则 $\lambda_n x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \lambda x$

Example 3.1.1

$\mathbb{K}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{K}\}$，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$

- 欧氏范数：$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$，$\|x-y\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2}$

- 无穷范数：$\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n}|x_k|$
- p-范数：$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}$

Example 3.1.2

连续函数空间 $C[0,1]$

- 一致范数：$\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]}|f(x)|$
- L^p 范数：$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$

Example 3.1.3

$M_n(\mathbb{K})$ 是一个 n^2 维的 $\mathbb{K}$ 线性空间，$A \in M_n(\mathbb{K})$ 可看做 $\mathbb{K}^n$ 上的线性算子. 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{K}^n$ 上的范数，定义

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\|$$

称为矩阵范数或算子范数.

Definition 3.1.3 Banach 空间

设 $(E, \|\cdot\|)$ 为赋范空间，若 E 在范数 $\|\cdot\|$ 诱导的度量下完备，则称 $(E, \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间

Example 3.1.4

$\mathbb{R}^n$ 在任何范数下均完备.

赋范空间中的级数

Definition 3.1.4 部分和

设 $(E, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间，$\sum_{n-1}^\infty$ 是 E 中的无穷级数，$S_n = \sum_{i=1}^n x_i$ 称为级数的部分和.

(1) 若 S_n 依范数收敛于 $S \in E$，即 $\lim_{n\to\infty}\|S_n - S\| = 0$，则称级数 $\sum_{n=1}^\infty x_n$ 在 $(E\|\cdot\|)$ 中收敛，S 是无穷级数 $\sum_{n=1}^\infty x_n$ 的和，记作 $S = \sum_{n=1}^\infty x_n$.

(2) 若 $\{S_n\}$ 是 E 中的柯西列，则称 $\sum_{n=1}^\infty x_n$ 为 Cauchy 级数.

(3) 若 $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^\infty$ 绝对收敛.

Example 3.1.5

数项级数 $\sum_{n=1}^\infty x_n$ 绝对收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty x_n$ 收敛，但在一般赋范空间中不成立，见下例：在 $C[0,1]$，

取 $\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x$

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & [0,\frac{1}{2}]\\ 2^n x-2^{n-1} & (\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n})\\ 1 & [\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n},1]\end{cases}$$

令 $x_1=f_1$，$x_2=f_2-f_1,\cdots,x_n=f_n-f_{n-1},n\geq 2$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\|f_1\|+\sum_{n=1}^{\infty}\|f_{n+1}-f_n\|=\|f_n\|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}}$$

绝对收敛，但是部分和 $S_n=\sum_{i=1}^n x_i=f_n$ 不收敛.

Theorem 3.1.1

赋范空间 $(E,\|\cdot\|)$ 完备的充分必要条件是绝对收敛级数必收敛.

Proof:

- $(\Rightarrow)$ 设 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 绝对收敛，则 $\forall n,p\in\mathbb{N}$，

$$\|S_{n+p}-S_n\|=\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p}x_k\right\|\leq\sum_{k=n+1}^{n+p}\|x_k\|\to 0,\quad n,p\to\infty$$

  从而 $\{S_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 列，由于 $(E,\|\cdot\|)$ 完备，S_n 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.

- $(\Leftarrow)$ $\forall$ Cauchy 列 $\subset E$，取子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得

$$\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|\leq\frac{1}{2^k}$$

  故 $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|$ 收敛，即 $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})$ 绝对收敛，由已知条件，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})$ 收敛，从而 $\{x_{n_k}\}$ 收敛，又由 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列知 $\{x_n\}$ 整体收敛 $\Rightarrow(E,\|\cdot\|)$ 完备.

Remark 3.1.1

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty}x_n=0_E$

Corollary 3.1.1

Banach 空间中绝对收敛级数一定收敛.

范数的等价

Definition 3.1.5 等价范数

设 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 是向量空间 E 上的两个范数，若 $\exists C_1$，$C_2>0$ 使得 $\forall x\in E$

$$C_1\|x\|_1\leq\|x\|_2\leq C_2\|x\|_1$$

则称范数 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 为等价范数.

Remark 3.1.2

若 $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ 等价，则

$$\mathrm{id} : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$$

是双连续且双 Lipschitz 的（$\Rightarrow$ 一致连续）；在等价范数下完备性与紧性等价.

Example 3.1.6

$\mathbb{R}^n$ 或者 $\mathbb{C}^n$ 上如下范数均等价.

- $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$
- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$（欧氏范数）
- $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$（对应的三角不等式即 Minkovski 不等式）

$$\|x\|_\infty \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \le n^{1/p}\|x\|_\infty$$

Example 3.1.7

$C(\Omega, \mathbb{K})$ 是紧集 $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ 到 K 的连续函数空间

- $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$ 是 $C(\Omega, \mathbb{K})$ 上的一个范数.
- $\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)| \mathrm{d}x (\Omega \subset \mathbb{R}^n)$
- $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$，$1 \le p < \infty$

特别地，$C([0,1], \mathbb{R})$ 是无穷维的，$\mathbb{R}[x] \subset C([0,1], \mathbb{R})$

想证明两个范数 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 不等价，只需找到 $\{x_n\} \subset E\ s.t. \frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_2} \to 0$ 或 ∞

Example 3.1.8

$C([0,1], \mathbb{R})$ 中考虑 $f_n(x) = x^n$，有 $\|f_n\|_\infty = 1$

$$\|f_n\|_p = \left(\int_0^1 x^{np} \mathrm{d}x\right) = \left(\frac{1}{1+np}\right)^{1/p} \to 0, \quad n \to \infty$$

故 $\|\cdot\|_p$ 与 $\|\cdot\|_\infty$ 不等价.

在 $\mathbb{R}[x]$ 中考虑 $\|\cdot\|_\infty$，定义 $\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$，可以证明，它是 $\mathbb{R}[x]$ 上的一个范数，但该空间不完备，考虑 $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$，$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \mathrm{e}^x$，$n \to \infty$

Remark 3.1.3

可以证明 $C([a,b], \mathbb{R})$ 在 $\|\cdot\|_p (1 \le p < \infty)$ 下也不是完备的，$p = 1$ 已证明，$p = \infty$ 完备

取 $[a,b]=[-1,1]$

$$f_n(x)=\begin{cases}-1 & [-1,-\frac{1}{n})\\ nx & [-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]\\ 1 & (\frac{1}{n},1]\end{cases}$$

$m>n$ 时候，考虑

$$\|f_m-f_n\|_p^p=\int_{-1}^{1}|f_n(x)-f_m(x)|\mathrm{d}x\le\int_{-1/n}^{1/n}2^p\mathrm{d}x\to 0$$

故是 Cauchy 列，但在 $C([-1,1],\mathbb{R})$ 不存在极限.

Definition 3.1.6 有限维

一个 $\mathbb{K}$ 上的向量空间是有限维的 $\iff$ 存在一个有限的基底 $\{e_i\}$ 使得

$$\forall x\in E,\ \exists!\ x_i\in\mathbb{K},\ 1\le i\le m,\ s.t.\ \sum_{i=1}^{m}x_ie_i.$$

因此可定义如下映射

$$\varphi:E\to\mathbb{K}^m,\ x\mapsto(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_m(x))=(x_1,\cdots,x_m)$$

则称 φ 是 E 到 $\mathbb{K}^m$ 的线性（代数）同构.

Proposition 3.1.1

定义 $p(x)=\sum_{i=1}^m|\varphi_i(x)|=\sum_{i=1}^k|x_i|$，则 p 是 E 上的一个范数.

Corollary 3.1.2

φ 是 (E,p) 到 $(\mathbb{K}^m,\|\cdot\|_1)$ 的等距同构.

Proof: 由定义 $\forall x\in E$，$\|\varphi(x)\|_1=\sum_{i=1}^m|x_i|=p(x)$，所以 $\forall x,y\in E$

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)\|_1=\sum_{i=1}^{m}|x_i-y_i|=p(x-y)$$

由此可得：$(\mathbb{K}^m,\|\cdot\|_1)$ 上的性质 (E,p) 都有，特别地：

- (E,p) 也是一个 Banach 空间;
- $(\mathbb{K}^m,\|\cdot\|_1)$ 的子集是紧集当且仅当其有界闭，因此 $A\subset(E,p)$ 是紧集当且仅当其有界闭.

Theorem 3.1.2

E 上所有范数均与 p-范数等价（有限维赋范线性空间上的所有范数等价.）

Proof: 沿用上述定义的范数 p，使得 $\varphi:(E,p)\to(\mathbb{K},\|\cdot\|_1)$，$x\mapsto(x_1,\cdots,x_m)$ 是等距同构，因此 $A\subset(E,p)$ 紧 $\iff$ A 有界闭，特别地，E 中的单位球面 $S=\{x\in E|p(x)=1\}$ 是有界闭的，故紧.
设 $\|\cdot\|$ 是 E 上的另一个范数，考虑恒等映射

$$\mathrm{id}:(E,p)\to(E,\|\cdot\|),x\mapsto x$$

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^m x_i e_i\right\| \le \sum_{i=1}^m \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^m |x_i|\cdot\|e_i\| \le \max_{1\le i\le m}(\|e_i\|)\cdot p(x)$$

记 $M = \max_{1\le i\le m}\|e_i\|$，即 $\|x\| \le M\cdot p(x) \Rightarrow \|x-y\| \le M\cdot p(x-y)$，故 p 是 M-Lipschitz 的.
现在考虑复合映射

$$(E,d) \xrightarrow{\text{id}} (E,\|\cdot\|) \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbb{R},\ x\mapsto x\mapsto \|x\|.$$

所以

$$\|x-y\| \le M\cdot p(x-y) \Rightarrow \|\cdot\|\circ \text{id}\ M\text{-Lipschitz} \Rightarrow 连续$$

又 S 是紧集，复合映射把 S 映成紧集，可取极值

$$0<\alpha = \min_{x\in S}\|x\|,\quad \beta = \max_{x\in S}\|x\|$$

所以 $\forall y\ne 0_E$

$$\frac{y}{\|y\|}\in S \Rightarrow 0<\alpha\le \left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| \le \beta \Rightarrow \alpha p(x)\le \|y\|\le \beta(x)$$

而 $y=0_E$ 时显然成立，因此 $\|\cdot\|$ 与 p 等价.

Corollary 3.1.3

(1) 有限维赋范线性空间均为 Banach 空间.

(2) 赋范空间的任一有限维子空间都是闭的.

(3) 有限维赋范空间中的集合 A 是紧 $\iff$ A 有界闭.

(4) 域 $\mathbb{K}$ 上同有限维赋范线性空间是拓扑同构的.

Remark 3.1.4

上述性质 (1) – (4) 在无穷维线性空间都是不成立的

(1) $\mathbb{R}[x]$ 上任意一个范数都不是 Banach 空间，例如 $(C[a,b],\ \mathbb{K})$ 在 $L^p(1\le<\infty)$ 范数下不是完备的;

(2) $\mathbb{R}[x]$ 在 $(C[a,b],\ \mathbb{K})$ 中稠密.

Lemma 3.1.1 Riesz 引理

设 $(E,\|\cdot\|)$ 是一个赋范空间，F 是它的真闭子空间，那么 $\forall y\in E$ 满足 $\|y\|=1$ 且

$$d(y,F) = \inf_{x\in F}\|y-x\| \ge 1-\varepsilon.$$

若 F 是有限维的，存在 $y\in E$ 满足 $\|y\|=1$ 且 $d(y,F)=1$.

Proof: 利用事实 $d(y,F)=0 \iff y\in E$，取 $y_0\in E\backslash F$，则 $d(y_0,F)=\alpha>0$（F 是闭集，$\overline{F}=F$）. 则任给 $\delta>0\ \exists\ x_\delta\in F$ *s.t.* $\|y_0-x_\delta\|\le\alpha+\delta$，令 $y=(y_0-x_\delta)/\|y_0-x_\delta\|$，则 $\|y\|=1$ 且 $\forall x\in F$，有

$$y-x = \frac{y_0-x_\delta}{\|y_0-x_\delta\|}-x = \frac{1}{\|y_0-x_\delta\|}(y_0-x_\delta-\|y_0-x_\delta\|x) \ge \frac{\alpha}{\alpha+\delta}\ge 1-\varepsilon$$

Proposition 3.1.2

若 $\dim(F) < \infty$, $\forall z \in E \backslash F$, $\exists x \in F$ $s.t.$ $d(z, F) = \max_{w \in F} \|z - w\| = \|z - x\|$

Proof: $\exists \{x_n\} \subset F$ $s.t.$ $\|z - x_n\| \leq d(z, F) + \frac{1}{n} \Rightarrow \{x_n\}$ 有界，又由 $\dim(F) < \infty$ 知 $\exists$ 子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 $x \in F$，

$$d(z, F) \leq \|z - x\| \leq \|z - x_n\| + \|x_n - x\|$$

两边取 $n \to \infty$，则 $d(z, F) = \|z - x\| = \min_{w \in F} \|z - w\|$.

Theorem 3.1.3 Riesz 定理

$(E, \|\cdot\|)$ 中单位球面 S 是紧的 $\iff \dim(E) < \infty$.

Proof: $(\Leftarrow)$ 已证，下证 $(\Rightarrow)$：假设 $\dim(E) = \infty$，$\exists \{e_n \in E, \ n \in \mathbb{N}\}$ 是线性无关的，令

$$F_n = \mathrm{Span}\{e_1, \cdots, e_n\}, \ F_n \subsetneq F_{n+1}, \ \dim F_n = n$$

则 $\forall n$，F_n 是有限维的且是 F_{n+1} 的真闭子空间，由 Riesz 引理 3.1.1

$$\exists \ x_n \in F_{n+1} \ s.t. \ \|x_n\| = 1 \ \& \ d(x_n, F_{n-1}) = 1 \Rightarrow \{x_n\} \subset S$$

$\forall p > q$, $x_p \in F_p$, $x_q \in F_q \subsetneq F_p$，又 $d(x_{p+1}, F_p) = 1 \leq \|x_{p+1} - x_q\|$，不存在 Cauchy 子列，从而 x_n 没有收敛子列，故 S 不列紧 $\Rightarrow$ 不紧.

3.2 连续线性映射

Definition 3.2.1 线性映射/算子

设 E, F 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，若映射 $u : E \to F$ 满足

$$u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x, y \in E$$

则称 u 为**线性映射**或**线性算子**，记 $\mathcal{L}(E, F)$ 为 E 到 F 的线性映射全体；特别地，当 $E = F$ 时，记 $\mathcal{L}(E)$；$\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ 中的元素称为**线性泛函**.

Remark 3.2.1

(1) 容易验证 $\mathcal{L}(E, F)$ 是线性空间.

(2) 若 $\dim E, \dim F < \infty$，在 E, F 中可取相应的基底使得 $u \in \mathcal{L}(E, F)$ 可用矩阵表示，例如 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\dim E = \dim F = n$，则 $E \cong F \cong \mathbb{C}^n$，设 $\{e_i\}, \{f_j\}$ 分别为 E, F 的基底，则有 $[u] = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $u(e_i) = \sum_j a_{ij} f_i$.

Theorem 3.2.1

设 E 与 F 为数域 $\mathbb{K}$ 上的两个赋范空间，$u \in \mathcal{L}(E, F)$，则以下等价：

(1) u 在 E 上连续；

(2) u 在某一点 $x \in E$ 连续；

(3) u 在原点 O_E 连续；

(4) $\exists\, c \geq 0,\ s.t.\ \forall x \in E$，有 $\|u(x)\| \leq c\|x\|$

(5) u 在 E 上 Lipschitz 连续.

Proof:

- $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ 显然;
- $\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ s.t.\ \|y - x\| < \delta \Rightarrow \|u(y) - u(x)\| = \|u(y - x)\| < \varepsilon$;
- $\boxed{(3) \Rightarrow (4)}$ 若 u 在 O_E 连续，则取 $\varepsilon = 1,\ \exists\, \delta > 0,\ s.t.\ \|y\| < \delta \Rightarrow \|u(y) - u(0)\| = \|u(y)\| \leq 1$，则 $\forall x \neq O_E$，
$$\|u(x)\| = \left\| u\left(\|x\| \frac{2}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \frac{2\|x\|}{\delta} \left\| u\left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|;$$
- $\boxed{(4) \Rightarrow (5)}$ $\forall x, y \in E,\ \|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| \leq c\|x - y\| \Rightarrow u$ 是 Lipschitz 连续;
- $\boxed{(5) \Rightarrow (1)}$ 显然.

Definition 3.2.2 范数

若 $u \in \mathcal{L}(E, F)$ 满足 $\exists\, c \geq 0,\ s.t.\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq c\|x\|$，则称 u 是**有界**的，
$$\|u\| := \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$
称为 u 的**范数**.

Remark 3.2.2

此时，
$$M = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in E, \|x\| = \leq 1} \|u(x)\| \leq \sup_{x \in E, \|x\| = 1} \|u(x)\| < \infty$$

Proof: 分别记上述三个表述为 M_1, M_2, M_3，下证 $M_1 \geq M_2$
$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq M_1\|x\|,$$
若 $\|x\| \leq 1$，则 $\|u(x)\| \leq M_1$，两边对 x 取 sup，得到 $M_2 \leq M_1$.，再证 $M_3 \geq M_1$：
$$\forall x \neq O_E, \frac{x}{\|x\|} \in S, \Rightarrow \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \left\| u\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq M_3$$
从而 $M_3 \geq M_1$，又 $M_2 \geq M_3$ 显然，故 $M_1 \geq M_2 \geq M_3 \geq M_1$，即三种定义相等.

Remark 3.2.3

u 有界是指 u 在单位球面 S/闭球 $\overline{B}$/有界闭集上有界，除 $u \equiv 0$ 外，u 不可能在 E 上有界.

Corollary 3.2.1

$u \in \mathcal{L}(E,F)$，则 u 有界 $\iff$ u 连续.

Theorem 3.2.2

若 E 是有限维赋范空间，则 E 到任意赋范线性空间 F 的线性映射 u 都是连续的.

Proof: $\dim_{\mathbb{K}} E = m < \infty$，设 $\{e_i\}$ 是 E 的一组基，则 $\forall x \in E$，$\exists ! x_1, \cdots x_m \in \mathbb{K}$，使得 $x = \sum_i x_i e_i$

$$\|u(x)\| = \left\| u(\sum_i x_i e_i) \right\| = \left\| \sum_i x_i u(e_i) \right\| \leq \sum_i |x_i| \cdot \|u(e_i)\| \leq \max_i \|u(e_i)\| \cdot \|x\|_1 \leq M \cdot c\|x\|$$

最后一步由定理 3.1.2 得到，从而 u 是 Lipschitz 的，由定理 3.2.1知 u 连续.

当无穷维时存在反例

Example 3.2.1

$E = c_{00}(\mathbb{N}_+)$，有限项不为 0 的序列的集合，$\forall E \ni (x) = (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots)$，$\|x\|_\infty = \max |x_n|$，定义映射

$$u : E \to E,\ (x_n) \mapsto (nx_n)$$

是线性映射，但不连续，只需取 $e_k = (\delta_{nk})$，显然 $\|e_k\|_\infty = 1$，但 $\|u(e_k)\|_\infty = k\|e_k\|_\infty \to \infty$

Example 3.2.2

$\mathcal{P}(x) : [0,1]$ 上的多项式线性空间，$\forall f \in \mathcal{P}(x)$，$\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(x)|$，定义映射

$$u : \mathcal{P}(x) \to C[0,1], f \mapsto f'$$

是线性映射，但不连续，考虑 $f_n = x^n$ 即可.

Definition 3.2.3

设 E, F 是 $\mathbb{K}$ 上的两个赋范空间，记 $\mathcal{B}(E,F) = \{u \in \mathcal{L}(E,F) | \|u\| < \infty\}$ 为 E 到 F 的所有连续有界线性映射全体.

特殊情况：

(1) $F = \mathbb{K}$，$\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$：$E$ 上的线性泛函；$\mathcal{B}(E,\mathbb{K})$ 称为 E 的对偶空间，记作 $E^* = \mathcal{B}(E,\mathbb{K})$

(2) $F = E$，$\mathcal{B}(E) := \mathcal{B}(E,E)$，$\forall \mathcal{B}(E,F)$，定义 $\|u\|_{\mathcal{B}(E,F)}$ 同 3.2.2.

Proposition 3.2.1

$\mathcal{B}(E,F)$ 是 $\mathcal{L}(E,F)$ 的 $\mathbb{K}$ 子空间，且 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(E,F)}$ 是其上一个范数.

证明留作练习

Theorem 3.2.3

设 E 是赋范空间，F 是 Banach 空间，则 $\mathcal{B}(E,F)$, $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(E,F)}$ 是一个 Banach 空间.

Proof: 任取 Cauchy 列 $\{u_n\} \subset \mathcal{B}(E,F)$，即 $\|u_n - u_m\|_{\mathcal{B}(E,F)} \to 0$，当 $m,n \to \infty$，则 $\forall x \in E$

$$\|u_m(x) - u_n(x)\|_F = \|(u_m - u_n)(x)\|_F \le \|u_m - u_n\|_{\mathcal{B}(E,F)} \cdot \|x\|_E \to 0$$

所以 $\{u_n(x)\}$ 是 F 中的 Cauchy 列，由 F 完备，$\exists\, u(x) \in F,\ s.t.\ u_n(x) \xrightarrow{\|\cdot\|_F} u(x)$，取遍 $x \in E$，则得到映射 $u : E \to F$

- 首先证明 $u \in \mathcal{B}(E,F)$，即 u 线性，连续；
- 再证明 $\|u_n - u\|_{\mathcal{B}(E,F)} \to 0$，当 $n \to \infty$

$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E$

$$u(\lambda x + y) = \lim_{n\to\infty} u_n(\lambda x + y) = \lim_n \to \infty\, (\lambda u_n(x) + u_n(y)) = \lambda u(x) + u(y)$$

接着证明 $\exists\, M < \infty$，使得 $\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \le M\|x\|_E$：由于 $\{u_n\}$ 是 $\mathcal{B}(E,F)$ 中 Cauchy 列，

$$\exists\, M > 0,\ s.t.\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\|_{\mathcal{B}(E,F)} \le M.$$

又因为

$$\|u_n(x)\|_F \le \|u_n\|_{\mathcal{B}(E,F)} \cdot \|x\|_E \le M\|x\|_E$$

令 $n \to \infty$，得 $\|u(x)\|_F \le M \cdot \|x\|_E \Rightarrow$ 连续 $\Rightarrow u \in \mathcal{B}(E,F)$. 由 Cauchy 列的定义，$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N_0 \in \mathbb{N}$，当 $m,n > N_0$ 时，有

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{B}(E,F)} < \varepsilon.$$

因此，$\forall x \in E$，

$$\|u_m(x) - u_n(x)\|_F \le \|u_m - u_n\|_{\mathcal{B}(E,F)} \cdot \|x\|_E < \varepsilon\|x\|_E$$

令 $m \to \infty$，则

$$\|u_n(x) - u(x)\|_F \le \varepsilon\|x\|_E, \quad \forall n \ge N_0$$

进一步，$\forall x \ne 0_E$，

$$\frac{\|(u_n - u)(x)\|_F}{\|x\|_E} \le \varepsilon \Rightarrow \sup_{x\ne 0_E} \frac{\|(u_n - u)(x)\|_F}{\|x\|_E} \le \varepsilon \Rightarrow \|u_n - u\|_{\mathcal{B}(E,F)} \le \varepsilon < 2\varepsilon.$$

因此 $\{u_n\}$ 在 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(E,F)}$ 下收敛到 u

Corollary 3.2.2

设 E, F 是赋范空间

(1) 若 $\dim F < \infty$，则 $\mathcal{B}(E,F)$ 是 Banach 空间；

(2) 特别地，设 $E, \|\cdot\|_E$ 是 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间，则 E 的对偶空间 $E^* = \mathcal{B}(E,\mathbb{K})$ 是 Banach 空间，E^* 中的元素被称为连续线性泛函；

(3) 若 $\dim E < \infty$，F 是任一赋范空间，则 $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{B}(E,F)$.

Theorem 3.2.4

设 E, F, G 都是 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间，$\forall u \in \mathcal{B}(E,F),\ v \in \mathcal{B}(F,G)$，则 $v \circ u \in \mathcal{B}(E,G)$，且

$$\|v \circ u\|_{\mathcal{B}(E,G)} \le \|u\|_{\mathcal{B}(E,F)} \cdot \|v\|_{\mathcal{B}(F,G)}.$$

Corollary 3.2.3

$$\forall u \in \mathcal{B}(E),\ u^k = \overbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}^{k} \in \mathcal{B}(E),\ \|u^k\| \leq \|u\|^k$$

Definition 3.2.4 核空间

$\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(O_F) = \{x \in E : \varphi(x) = O_F\}$ 是子向量空间.

Proposition 3.2.2

线性泛函连续 $\iff$ 它的核空间是闭的.

Proof:

- $(\Rightarrow)$ 若 $\varphi : E \to \mathbb{K}$ 连续，则 $\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(0_F)$ 是闭的（因单点集是闭集.）
- $(\Leftarrow)$ 假设 φ 不是连续的线性泛函，则

$$\exists\, \{x_n\} \subset E,\ s.t.\ \|x_n\| = 1, \quad |\varphi(x_n)| \to \infty, \quad n \to \infty$$

又 $\exists\, z \in E\ s.t.\ \varphi(z) \neq 0_{\mathbb{K}}$，令

$$y_n = \frac{x_n}{|\varphi(x_n)|} - \frac{z}{\varphi(z)} \Rightarrow \varphi(y_n) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow y_n \in \mathrm{Ker}(\varphi)$$

又 $y_n \to -z/\varphi(z)$，但 $\varphi(-z/\varphi(z)) = -1 \neq 0$，与 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 闭矛盾.

Example 3.2.3

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

方法一：在 $\mathbb{R}^2$ 上赋予 1-范数 $\|(x,y)^T\|_1 = |x| + |y|$，则

$$\left\|\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_1 = \left\|\begin{pmatrix} 2x-3y \\ 4x+7y \end{pmatrix}\right\|_1 = |2x-3y| + |6x+7y| \leq 6|x| + 10|y| \leq 10(|x|+|y|)$$

从而 $\|\varphi\| \leq 10$，取 $(x,y)^T = (0,1)^T$，则

$$\left\|\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_1 = \left\|\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}\right\|_1 = 10 \Rightarrow \|\varphi\|_1 \geq 10$$

从而 $\|\varphi\|_1 = 10$.

方法二：在 $\mathbb{R}^2$ 上赋予 ∞-范数 $\|(x,y)^T\|_\infty = \max\{|x| + |y|\}$，则

$$\left\|\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix} 2x-3y \\ 4x+7y \end{pmatrix}\right\|_\infty = \max\{|2x-3y|, |4x-7y|\} \leq 11\max\{|x|,|y|\} \Rightarrow \|\varphi\|_\infty \leq 11$$

取 $(x,y)^T = (1,1)$，则

$$\left\|\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}\right\|_\infty = 11 \Rightarrow \|\varphi\| \geq 11$$

从而 $\|\varphi\|_\infty = 11$.

Example 3.2.4

$E = L^1((a,b),\mathbb{R})$, $\psi(f)(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $\forall f \in E$，显然 ψ 是 $E \to E$ 的线性映射.

$$\|\psi(f)\|_E = \int_a^b |\psi(f)(x)|\mathrm{d}x = \int_a^b \left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \mathrm{d}x \le \int_a^b \int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t \le (b-a)\|f\|_E$$

从而 $\|\psi\| \le b-a$，考虑 $f_n = n \cdot \mathbb{1}_{[a,a+1/n]}(x)$，则

$$\psi(f_n)(x) = \begin{cases} nx & 0 \le x \le a + \frac{1}{n} \\ 1 & a + \frac{1}{n} \le x \le b \end{cases} \Rightarrow \|\psi(f_n)(x)\| = b - a - \frac{1}{2n}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\psi(f_n)\|_E}{\|f_n\|_E} = b - a \Rightarrow \|\psi\| = b - a$$

Theorem 3.2.5 延拓定理

设 E,F 是 Banach 空间，G 是 E 的稠密子空间，则任意连续线性映射 $u: G \to F$ 可唯一延拓为有界线性映射 $\tilde{u}: E \to F$，且 $\|\tilde{u}\| = \|u\|$

Proof: $\forall x \in E$, $\overline{G} = E \Rightarrow \exists\ \{x_n\} \subset G$, $s.t.\ \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$，故 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，且

$$\|u(x_m) - u(x_n)\| \le \|u\| \cdot \|x_m - x_n\| \to 0$$

则 $\{u(x_n)\}$ 是 F 中 Cauchy 列，由 F 的完备性知 $\lim u(x_n)$ 存在，记作

$$\tilde{u}(x) = \lim_{n\to\infty} u(x_n)$$

显然 $\tilde{u}$ 与 $\{x_n\}$ 选取无关，即

$$\lim_{n\to\infty} \|u(x_n) - \tilde{u}(x)\| = 0$$

$\forall x,y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$，设 $x_n \to x$, $y_n \to y$，从

$$u(\lambda x_n + y_n) = \lambda u(x_n) + u(y_n)$$

取极限，可得

$$\tilde{u}(\lambda x + y) = \lambda\tilde{(u)}(x) + \tilde{u}(y) \Rightarrow \tilde{u} \in \mathcal{L}(E,F)$$

下证 $\tilde{u} \in \mathcal{B}(E,F)$.

$$\|\tilde{u}(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|u(x_n)\| \le \lim_{n\to\infty} \|u\| \cdot \|x_n\| = \|u\| \cdot \|x\|$$

从而 $\tilde{u}$ 连续且 $\|\tilde{u}\| \le \|u\|$，又因为

$$\|u\| = \sup_{0\ne x\in G} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \le \sup_{0\ne x\in E} \frac{\|\tilde{u}(x)\|}{\|x\|} = \|\tilde{u}\|$$

唯一性显然.

Definition 3.2.5 同构

设 E,F 是赋范空间，若 $u \in \mathcal{B}(E,F)$ 是双射，且其逆映射 u^{-1} 是连续的，则称 u 是 E 到 F 的同构映射. 若赋范空间 E 到 F 上存在同构映射，则称 E,F 同构.

Remark 3.2.4

$E=F$ 时，$u\in\mathcal{B}(E)$，约定 $u^0=\mathrm{id}_E$，$\forall n\in N$, $u^{n+1}=u^n\circ u=u\circ u^n$

Theorem 3.2.6

设 E 为 Banach 空间，令 $u\in\mathcal{B}(E)$，且 $\|u\|<1$，则存在 $v\in\mathcal{B}(E)$，使得

$$(\mathrm{id}_E-u)v=v(\mathrm{id}_E-u)$$

这意味着 id_E-u 依旧是一个同构映射，即它在 $\mathcal{B}(E)$ 中可逆.

Proof: 考虑级数

$$\sum_{n\geqslant 0}u^n\in\mathcal{B}(E)$$

由复合函数性质 $\|u^n\|=\|\overbrace{u\circ u\circ\cdots\circ u}^{n}\|\leq\|u\|^n$，由于 $\|u\|<1$，故 $\sum_{n\geqslant 0}u^n$ 绝对收敛，又因 $\mathcal{B}(E)$ 是 Banach 空间，故 $\sum_{n\geqslant 0}u^n$ 收敛，记 $v:=\sum_{n\geqslant 0}u^n$，则

$$(\mathrm{id}_E-u)v=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{id}_E-u)\sum_{k=0}^{n}u^n=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{id}_E-u^{n+1})=\mathrm{id}_E$$

另一边同理，因此 v 是 id_E-u 的逆映射.

3.3 L^p 空间

具体内容可参考实分析课程.

Definition 3.3.1 L^p 空间

设 $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 是一个测度空间，其中 Ω 是底空间，$\mathscr{A}$ 是 Ω 上的一个 σ-代数，即对补运算，以及可数并运算封闭，μ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个测度：$\mathscr{A}\to\mathbb{R}^+$，满足 $\forall\{A_i\}$ 两两不交，

$$\mu(\bigcup A_i)=\sum\mu(A_i),\quad \mu(\varnothing)=0.$$

Definition 3.3.2 简单函数

设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 是可测的，若 $A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{A}$ 是有限个可测集，$a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{K}$，则称

$$f=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}$$

是 $(\Omega,\mathscr{A})$ 上的**简单函数**.

Definition 3.3.3 正简单函数的积分

设 $a_i > 0$，定义简单函数积分

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Definition 3.3.4 正可测函数的积分

若 $f \in m(\Omega, \mathbb{R}_+)$ 即为可测函数，定义

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \sup_g \left\{ \int_\Omega g \mathrm{d}\mu \middle| 0 \leqslant g \leqslant f,\ \mu - \text{a.e.} \right\}.$$

Definition 3.3.5 可积函数

称可测函数 $f : \Omega \to \mathbb{K}$ 在 $\Omega, \mathscr{A}, \mu$ 上可积，若 $\int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu < \infty$，记 $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ 是所有可积函数构成的向量空间.

Definition 3.3.6

设 $1 \leqslant p < \infty$，若可测函数 $f : \Omega \to \mathbb{K}$ 满足 $\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty$，则称 f 为 p 次可积函数，记 $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ 是所有 p 次可积函数构成的向量空间，定义其上范数为

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

Definition 3.3.7 本性上确界

若对可测函数 $f : \Omega \to \mathbb{K}$，存在 $M \geqslant 0$，使得

$$\mu\{x \in \Omega \big| |f(x)| > 0\} = 0$$

则称 f 为**本性有界**的，记

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geqslant 0 : \mu(|f| > M) = 0\} = \inf_{\mu(E)=0} \left\{ \sup_{x \in \Omega \setminus E} |f(x)| \right\}$$

称为 f 的**本性上确界**，令 $\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ 为所有本性有界函数的全体.

Remark 3.3.1

$\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ 可定义一个等价关系，若 $f, g \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$，且

$$\mu\left(\{x \in \Omega | f \neq g\}\right) = 0$$

则 $f \sim g$.

Definition 3.3.8

令 $L^p(\Omega,\mathscr{A},\mu)=\mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu)/\sim$ 为线性空间，其上范数为 $\|\cdot\|_p$

Theorem 3.3.1 Hölder 不等式

设 $1\leqslant p,q\leqslant+\infty$，且 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$，并且 $f\in L^p$，$g\in L^q$，则 $f,g\in L^r$ 且 $\|fg\|_r\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$.

Remark 3.3.2

当 $p=q=2$ 时，Hölder 不等式即为 Cauchy-Schwarz 不等式；当 $r=1$ 时，称 p,q 为一对共轭数；在上述定义中，定义 $1/\infty=0$.

Theorem 3.3.2 Minkowski 不等式

设 $1\leqslant p\leqslant\infty$，则 L^p 是向量空间，且 $\forall f,g\in L^p$，有

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$$

离散情形

当 $\Omega=\mathbb{N},\mathscr{A}=\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu$ 为计数测度，则

$$L^p(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)=l_p=\{x=(x_i)_{i=1}^{\infty},x_i\in\mathbb{K}\mid\|x\|_p<\infty\}$$

其中

$$\|x\|_p=\begin{cases}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p} & 1<p<\infty\\ \sup\limits_{n\geqslant1}|x_p| & p=\infty\end{cases}$$

Theorem 3.3.3

$\forall 1\leqslant p<\infty$，$(L^p(\Omega,\mathscr{A},\mu),\|\cdot\|_p)$ 是一个 Banach 空间

证明用到实分析中如下三个重要定理：

(1) **单调收敛定理**：$\{f_n\}\subset m(\Omega,\mathbb{R}_+)$，$f_n\leqslant f_{n+1}$，$\mu-\text{a.e.}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\mathrm{d}\mu=\int_\Omega\lim_{n\to\infty}f_n\mathrm{d}\mu$$

(2) **Fatou 引理**：若 $\{f_n\}\subset m(\Omega,\mathbb{R}_+)$，则

$$\int_\Omega\liminf_{n\to\infty}f_n\mathrm{d}\mu\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\mathrm{d}\mu$$

(3) **控制收敛定理**：$\{f_n\}\subset m(\Omega,\mathbb{R})$，$f_n\to f$，$\mu-\text{a.e.}$，且 $\exists\, g\in L^1(\Omega,\mu)$ 使得 $|f_n|\leqslant g$，$\mu-\text{a.e.}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\mathrm{d}\mu=\int_\Omega\lim_{n\to\infty}f_n\mathrm{d}\mu.$$

回到定理证明：

Proof: 任取 $L^p(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 中的一个 Cauchy 列 $\{f_n\}$，由数学归纳法，存在子列 $\{f_{n_k}\}$，满足

$$\|f_{n_k}-f_{n_{k-1}}\|_p \leqslant \frac{1}{2^{k-1}},\quad k\geqslant 2$$

我们希望证明 $\{f_{n_k}\}$ 收敛. 考虑 $g_k=f_{n_k}-f_{n_{k-1}}$，$k\geqslant 2$,$g_1=f_{n_1}$，则

$$\left[\int_\Omega\left(\sum_{k=1}^N|g_k|\right)^p\mathrm{d}\mu\right]^{1/p}\overset{Minkowski}{\leqslant}\sum_{k=1}^n\left(\int_\Omega|g_k|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\leqslant\|f_{n_1}\|_p+\sum_{k=2}^N\frac{1}{2^{k+1}}<\infty$$

由单调收敛定理，令 $N\to\infty$，则

$$\int_\Omega\left(\sum_{k=1}^\infty|g_k|\right)^p\mathrm{d}\mu<\infty$$

因此

$$\left(\sum_{k=1}^\infty g_k\right)^p<\infty,\ \mu-\text{a.e.}\Rightarrow\sum_{k=1}^\infty|g_k|<\infty,\ \mu-\text{a.e.}$$

即无穷级数 $\sum_{k=1}^\infty g_k$，$\mu-$a.e. 绝对收敛，再令 $S:=\{x\in\Omega|\sum_{k=1}^\infty g_k\text{发散}\}$，则 $\mu(S)=0$，令

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^\infty g_k(x)=\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x) & x\in\Omega\backslash S\\ 0 & x\in S\end{cases}$$

则 f 可测，且 $f_{n_k}\to f$，$\mu-$a.e.，且

$$\left(\int_\Omega|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}=\left(\int_{\Omega\backslash S}|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}=\left(\int_{\Omega\backslash S}\left|\sum_{k=1}^\infty g_k(x)\right|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\leqslant\sum_{k=1}^\infty\|g_k\|_p\leqslant\|f_n\|_p<\infty$$

推出 $f\in L^p(\Omega,\mathscr{A},\mu)$，接下来只需证明 $\|f_{n_k}-f\|_p\to 0$. 注意到 $\forall x\in\Omega\backslash S$，$|f(x)-f_{n_k}(x)|=|\sum_{i=k+1}^\infty g_i(x)|$ 因此当 $k\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}\|f-f_{n_k}\|_p&=\left(\int_\Omega|f-f_{n_k}|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}=\left(\int_{\Omega\backslash S}\left|\sum_{i=k+1}^\infty g_i\right|^p\mathrm{d}\mu\right)\\&\leqslant\sum_{i=k+1}^\infty\left(\int_\Omega|g_i|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\leqslant\sum_{i=k+1}^n\frac{1}{2^{i+1}}\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}\to 0,\quad k\to\infty\end{aligned}$$

从而 $f_n\xrightarrow{\|\cdot\|_p}f$，当 $k\to\infty$.

Proposition 3.3.1

$\forall f\in m(\Omega,\mathbb{R})$，$|f|\leqslant\|f\|_\infty$，a.e.

Proof:

- 若 $\|f\|_\infty=\infty$，结论平凡；
- 若 $\|f\|_\infty=M_0<\infty$，则由 $\|f\|_\infty$ 的定义，$\forall\varepsilon>0$

$$E_\varepsilon:=\{x||f(x)|>M_0+\varepsilon\}$$

满足 $\mu(E_\varepsilon)=0$ 且 $|f(x)|\leqslant M_0+\varepsilon$, $\forall x\in\Omega\backslash E_\varepsilon$，取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，得到

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{1/n}\right)=0$$

但 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{1/n}=\{x\in\Omega|f(x)>M\}.$，从而在 $\Omega\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{1/n}$ 上 $|f(x)|\leqslant M=\|f\|_\infty$.

Theorem 3.3.4

$L^\infty(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 是 Banach 空间.

Proof: $\forall\{f_n\}$ 是 $L^\infty(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 中的 Cauchy 列，$\|f_n-f_m\|\to 0$，由前述命题，

$$|f_n-f_m|\leqslant\|f_n-f_m\|_\infty,\quad \mu-\text{a.e.}$$

令

$$E_{m,n}=\{x\in\Omega\big||f_n-f_m|>\|f_n-f_m\|_\infty\}$$

则 $\mu(\bigcup_{m,n\geqslant 1}E_{m,n})=0$，记其并为 S. 任给定 $x\in\Omega\backslash S$，$\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列，存在 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$，在 S 上，定义 $f(x)=0$，则 f 可测，只需证明 $f\in L^\infty(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 且 $\|f_n-f\|_\infty\to 0$

- 容易得到
$$\big|\|f_n\|_\infty-\|f_m\|_\infty\big|\leqslant\|f_n-f_m\|_\infty\to 0,\quad m,n\to\infty$$
从而 $\{\|f_n\|_\infty\}$ 是 Cauchy 列，存在 $M>0$，使得 $\|f_n\|_\infty\leqslant M$, $\forall n\in\mathbb{N}$，也就得到
$$|f_n(x)|\leqslant M,\ \mu-\text{a.e.}\Rightarrow|f(x)|\leqslant M,\ \mu-\text{a.e.}$$
从而 $f\in L^\infty(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 且 $\|f\|_\infty\leqslant M$.
- $\forall x\in\Omega\backslash S$
$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\|f_n-f_m\|_\infty\to 0,\quad m,n\to\infty$$
即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_0$，当 $m,n\geqslant N_0$ 时，$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\varepsilon$，令 $m\to\infty$，得到
$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon\Rightarrow\|f-f_n\|_\infty,\quad\forall n\geqslant N_0$$
可推出 $\|f_n-f\|_\infty\to 0$, $n\to\infty$.

Chapter 4
Hilbert 空间

回顾 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积，如何从有限维推广到无穷维?

4.1 内积空间

Definition 4.1.1 内积

设 H 是域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，若映射 $\varphi: H\times H\to\mathbb{K}$ 满足

(1) φ 对第一个分量线性，即 $\forall x_1,x_2,y\in H$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\varphi(\lambda x_1+x_2,y)=\lambda\varphi(x_1,y)+\varphi(x_2,y)$

(2) φ 共轭对称，即 $\forall x,y\in H$, $\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$

(3) φ 正定，即 $\forall x\in H$, $\varphi(x,x)\geqslant 0$，且 $\varphi(x,x)=0\iff x=0$

则称 φ 是 H 上的一个内积，称 (H,φ) 是一个内积空间.

Remark 4.1.1

- 通常用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 来表示内积，即 $\varphi(x,y)=\langle x,y\rangle$.
- 由性质 (1) 和 (2) 知 φ 对第二个分量是共轭线性的.

Example 4.1.1

$\mathbb{K}^n$ 上的标准内积，$x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n)$，

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}.$$

Example 4.1.2

$C[0,1]$ 上的内积，$\forall f,g\in C[0,1]$，

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

Definition 4.1.2

若 φ 是 H 上的一个内积，称 $q(x)=\varphi(x,x)=\langle x,x\rangle$ 为对应于这个内积的二次型，其为半正定的，且有 $q(x)=0\iff x=0$.

Theorem 4.1.1 Cauchy-Schwarz 不等式

$|\varphi(x,y)|^2\leqslant q(x)\cdot q(y)=\varphi(x,x)\cdot\varphi(y,y)$，等号成立当且仅当 x,y 成比例.

Proof:

- 当 $\varphi(x,y)=0$ 时平凡；
- 当 $\varphi(x,y)\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned} q(x+\lambda y) &= \varphi(x,x)+\overline{\lambda}\varphi(x,y)+\lambda\varphi(y,x)+|\lambda|^2\varphi(y,y) \\ &= q(x)+|\lambda|^2 q(y)+2\operatorname{Re}(\overline{\lambda}\varphi(x,y))\geqslant 0 \end{aligned}$$

取 $\lambda=t\dfrac{\varphi(x,y)}{|\varphi(x,y)|}$，$t\in\mathbb{R}$，则得到

$$q(x)+t^2q(y)+2t|\varphi(x,y)|\geqslant 0,\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

因此由判别式 $\Delta\leqslant 0\Rightarrow|\varphi(x,y)|^2\leqslant q(x)\cdot q(y)$；另一方面，等号成立当且仅当

$$q(x)+t^2q(y)+2t|\varphi(x,y)|=0$$

该关于 t 的实系数一元二次方程有二等根 t_0，此时 $\Delta=0$，

$$q(x+\lambda_0 y)=0 \iff x+\lambda_0 y=0.$$

Remark 4.1.2

若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$，则 $\cos\theta=\dfrac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{q(x)q(y)}}$ 为夹角，但 $\mathbb{K}\neq\mathbb{R}$ 时不成立.

Proposition 4.1.1

若 (H,φ) 是内积空间，则 $\|x\|=\sqrt{q(x)}$ 是 H 上的一个范数，即 $(H,\|\cdot\|)$ 是赋范线性空间.

Remark 4.1.3

度量 $d:X\times X\to\mathbb{R}$ 是连续的，实际上，可以验证其为 1-Lipschitz 的.

内积空间对应二次型的基本性质

Proposition 4.1.2

- $q(\lambda x)=\varphi(\lambda x,\lambda x)=|\lambda|^2q(x),\forall x\in H,\ \lambda\in\mathbb{K}$;
- $q(x+y)=\varphi(x+y,x+y)=q(x)+q(y)+2\operatorname{Re}\varphi(x,y)$.

Theorem 4.1.2 平行四边形公式

$q(x+y)+q(x-y)=2q(x)+2q(y),\forall x,y\in H$

Proof: 由命题 4.1.2 第二条，有

$$q(x+y)+q(x-y)=2q(x)+2q(y)+2\operatorname{Re}\varphi(x,y)-2\operatorname{Re}\varphi(x,y)=2q(x)+2q(y).$$

Theorem 4.1.3 极化恒等式

设 (H,φ) 是内积空间，q 是其对应的二次型，则

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{4}\big[q(x+y)-q(x-y)\big]+\frac{i}{4}\big[q(x+iy)-q(x-iy)\big]$$

Proof:

$$q(x+iy)=\varphi(x+iy,x+iy)=\varphi(x,x)+\varphi(y,y)+2\operatorname{Re}\varphi(x,y)+2i\operatorname{Im}\varphi(x,y)$$

$$q(x-iy)=\varphi(x-iy,x-iy)=\varphi(x,x)+\varphi(y,y)-2\operatorname{Re}\varphi(x,y)+2i\operatorname{Im}\varphi(x,y)$$

Theorem 4.1.4

设 $(H,\|\cdot\|)$ 是赋范空间，若 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形公式，则范数可由内积诱导.

Definition 4.1.3 Hilbert 空间

一个内积空间 $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 称为 Hilbert 空间，若其在范数 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ 下是完备的.

Remark 4.1.4

Hilbert 空间又称为完备的内积空间.

Example 4.1.3

有限维内积空间 $(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|_2)$，其上内积为 $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$

Example 4.1.4

设 $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 是一个测度空间，$L^2(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 是平方可积函数的集合，其上内积与范数为

$$\langle f,g\rangle=\int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}\mu(x),\quad \|f\|_{L^2}=\left(\int_\Omega |f|^2\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}.$$

Example 4.1.5

取 $\Omega=\mathbb{N}_+$，$\mathscr{A}=\mathcal{P}(\mathbb{N}_+)$，$\mu=\sum_{i=1}^\infty\delta_i$ 为狄拉克测度，即指标 i 处为 1，其余为 0，则

$$L^2(\Omega,\mathscr{A},\mu)=\ell^2(\mathbb{N}_+)=\{(a_i)\text{是}\,\mathbb{N}_+\,\text{中数列，}\sum_{i=1}^\infty|a_i|^2<\infty\}$$

其上内积与范数为

$$\langle(a_i),(b_i)\rangle_{\ell^2}=\sum_{i=1}^\infty a_i\overline{b_i},\quad \|(a_i)\|_{\ell^2}=\left(\sum_{i=1}^\infty|a_i|^2\right)^{1/2}$$

Corollary 4.1.1

设 $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间，且 $|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$

(1)（内积的连续性）若 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x, y_n\xrightarrow{\|\cdot\|}y$，则 $\langle x_n,y_n\rangle\xrightarrow{|\cdot|}\langle x,y\rangle$

(2) $\forall x\in H,\ \|x\|=\sup_{\|a\|\leqslant1}|\langle x,a\rangle|=\sup_{\|a\|\leqslant1}\mathrm{Re}\langle x,a\rangle=\sup_{\|a\|\leqslant1}|\langle a,x\rangle|$

Proof:

(1) 由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y\rangle|\leqslant|\langle x_n,y_n-y\rangle|+|\langle x_n-x,y\rangle|\leqslant\|x_n\|\cdot\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\cdot\|y\|\to0$$

(2) $\forall a\in H$ 使得 $\|a\|\leqslant1$，有

$$|\langle x,a\rangle|\leqslant\|x\|\cdot\|a\|\leqslant\|x\|$$

对 a 取 sup，得 $\|x\|=\sup_{\|a\|\leqslant1}|\langle x,a\rangle|$；当 $x\neq0_H$ 时，取 $a=\frac{x}{\|x\|}$ 得 $\|x\|=\sup_{\|a\|\leqslant1}|\langle x,a\rangle|$ 成立.

4.2 投影算子

什么是空间中的点在集合上的投影？——距离最近的点.

Theorem 4.2.1 投影定理

设 M 是内积空间 $H,\langle\cdot,\cdot\rangle$ 中的非空完备凸子集，则

(1) $\forall x\in H,\ \exists!y\in M$ 使得 $\|x-y\|=d(x,M)=\inf_{z\in M}\|x,z\|$，称 y 为 x 到 M 的**最短距离投影**，记作 $P_M(x)$，进一步，y 由以下性质刻画：

(2) $y=P_M(x)\iff\mathrm{Re}\langle x-y,z-y\rangle\leqslant0,\ \forall z\in M$;

(3) $\forall x,x'\in H,\ \|P_M(x)-P_M(x')\|\leqslant\|x-x'\|$;

(4) $P_M\circ P_M=P_M$，且 $P_M(H)=M$.

Proof:

(1) 记 $\delta=d(x,M)=\inf_{z\in M}\|x-z\|$，则由确界的定义，存在 $\{z_n\}\subset M$，使得

$$\delta\leqslant\|x-z_n\|\leqslant\delta+\frac{1}{n},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

由平行四边形公式，有

$$\begin{aligned}\|z_n-z_m\|^2&=2\|x-z_n\|^2+2\|x-z_m\|^2-4\left\|\frac{z_n+z_m}{2}-x\right\|^2\\&\leqslant2\left(\delta+\frac{1}{n}\right)^2+2\left(\delta+\frac{1}{m}\right)^2-4\left\|\frac{z_n+z_m}{2}-x\right\|^2\to0(m,n\to\infty)\end{aligned}$$

从而 $\{z_n\}$ 是 M 中的 Cauchy 列，由 M 完备性，存在 $y \in M$，使得 $z_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$，因此由范数的连续性，有 $\|x-y\| = \delta = d(x,M)$，即 y 是 x 到 M 的一个最短距离投影.

下证唯一性：若存在 $y' \in M$，使得 $\|x-y'\| = d(x,M)$，则由平行四边形公式，有

$$\begin{aligned}\|y-y'\|^2 &= 2\|x-y\|^2 + 2\|x-y'\|^2 - 4\left\|\frac{y+y'}{2} - x\right\|^2 \\ &= 4\delta^2 - 4\left\|\frac{y+y'}{2} - x\right\|^2 \leqslant 0\end{aligned}$$

因此 $y = y'$，即最短距离投影唯一.

(2)
- $(\Leftarrow)$：$\forall z \in M$ 满足 $\mathrm{Re}\langle x-y, z-y\rangle \leqslant 0$，有

$$\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x-y, y-z\rangle \geqslant \|x-y\|^2$$

  因此 $\|x-y\| = d(x,M)$，即 $y = P_M(x)$.
- $(\Rightarrow)$：设 $y = P_M(x)$，则 $\forall z \in M$, $\forall t \in (0,1)$，由凸性，有 $(1-t)y + tz \in M$，令

$$F(t) = \|x - [(1-t)y + tz]\|^2$$

  则可得到

$$\begin{aligned}F(0) = \|x-y\|^2 \leqslant F(t) &= \|x - [(1-t)y+tz]\|^2 = \|(x-y) + t(y-z)\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 + t^2\|y-z\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}\langle x-y, y-z\rangle\end{aligned}$$

  同时 $F'_+(0) \geqslant 0$，即

$$2\,\mathrm{Re}\langle x-y, y-z\rangle \geqslant 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\langle x-y, z-y\rangle \leqslant 0$$

(3) 设 $x, x' \in H$，记 $y = P_M(x)$，$y' = P_M(x')$，则

$$\|y-y'\|^2 = \langle y-y', y-y'\rangle = \langle x'-y', y-y'\rangle + \langle x-x', y-y'\rangle + \langle y-x, y-y'\rangle.$$

对上式取实部，则

$$\begin{aligned}\|y-y'\|^2 &= \mathrm{Re}\langle x'-y', y-y'\rangle + \mathrm{Re}\langle x-x', y-y'\rangle + \mathrm{Re}\langle y-x, y-y'\rangle \\ &\leqslant \mathrm{Re}\langle x-x', y-y'\rangle \leqslant |\langle x-x', y-y'\rangle| \leqslant \|x-x'\| \cdot \|y-y'\|.\end{aligned}$$

因此 P_M 是 Lipschitz 连续的，特别是连续的.

(4) 设 $y = P_M(x) \in M \Rightarrow P_M(y) = y$，即

$$P_M \circ P_M(x) = P_M(x) \Rightarrow P_M \circ P_M = P_M$$

显然 $P_M(H) = M$.

Definition 4.2.1

设 $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积空间

- 对 $x, y \in H$，称 x, y 正交，若 $\langle x, y\rangle = 0$，记作 $x \perp y$.
- $x \in H$, $A \subset H$，若 $x \perp A$，则 $\forall y \in A$, $\langle x, y\rangle = 0$.
- $A, B \subset H$，称 $A \perp B$，若 $\forall x \in A, \forall y \in B$, $\langle x, y\rangle = 0$.

Definition 4.2.2 正交补空间

任意 $\varnothing \neq A \subset H$，定义其正交补空间为

$$A^{\perp} = \{x \in H \mid x \perp A\}.$$

Proposition 4.2.1

$\forall A \subset H$ 非空，$A^{\perp}$ 是一个闭子空间.

Proof:

- 先证 $A^{\perp}$ 是子空间：$\forall x, y \in A^{\perp}$，$\forall \lambda \in \mathbb{K}$，考虑 $\forall z \in A$

$$\langle \lambda x + y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \lambda x + y \in A^{\perp}.$$

  从而 $A^{\perp}$ 是子空间.

- 下证闭性：

方法一：设 $\{x_n\} \subset A^{\perp}$，且 $x_n \to x \in H$，则 $\forall y \in A$，有 $\langle x_n, y\rangle = 0$，对上式取极限，得 $\langle x, y\rangle = 0$，即 $x \in A^{\perp}$.

方法二：$A^{\perp} = \bigcap_{z \in A}\{z\}^{\perp}$，而 $\{z\}^{\perp} = \{x \in H \mid \langle x, z\rangle = 0\} = \mathrm{Ker}(\varphi_z)$，其中 $\varphi_z : x \mapsto \langle x, z\rangle$ 是连续线性泛函，由命题 3.2.2 知 $\{z\}^{\perp}$ 是闭的，从而 $A^{\perp}$ 是闭的.

Proposition 4.2.2

$A^{\perp} = \overline{A}^{\perp} = (\mathrm{Span}(A))^{\perp} = (\overline{\mathrm{Span}(A)})^{\perp}$.

Proof:

- $A \subset \overline{A}$，显然 $\overline{A}^{\perp} \subset A^{\perp}$.
- 设 $x \in A^{\perp}$，$\forall y \in \overline{A}$，则 $\exists\ \{y_n\} \subset A$，使得 $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$，则

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \lim_{n\to\infty} y_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x, y_n\rangle = 0$$

  由 y 的任意性，$x \in \overline{A}^{\perp}$，又由 x 的任意性，知 $\overline{A}^{\perp} \subset A^{\perp}$.

Proposition 4.2.3

$\overline{\mathrm{Span}(A)} \subset A^{\perp\perp} = (A^{\perp})^{\perp}$.

Proof: 由定义可知，

$$A \perp A^{\perp} \Rightarrow \mathrm{Span}(A) \perp A^{\perp} \Rightarrow \mathrm{Span}(A) \subset (A^{\perp})^{\perp}$$

因此 $\forall A \subset H$ 非空，有 $\overline{\mathrm{Span}(A)} \subset (A^{\perp})^{\perp}$.

Theorem 4.2.2 勾股定理

$x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$，当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时候，反向也成立.

Definition 4.2.3 夹角

当 $x, y \neq 0_H$，定义

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{Re}\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}, \quad \theta \in [0, \pi]$$

Theorem 4.2.3 正交投影定理

设 $F \subset (H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为一个完备的（凸）子空间，则 $\forall x \in H$, $y = P_F(x) \iff x - y \perp F$，即 $P_F(x)$ 是 F 中唯一使得 $x - y \perp F$ 的点，且 P_F 是 H 和 F 的线性算子，满足 $\|P_F\| \leqslant 1$.

Proof: 由 F 是非空完备凸子集，由投影定理可知，$\forall x \in H$，存在唯一 $y = P_F(x) \in F$，使得 $\|x - y\| = d(x, F)$.

- $(\Rightarrow)$：$y = P_F(x) \Rightarrow \operatorname{Re}\langle x - y, z - y\rangle \leqslant 0$, $\forall z \in F$，$\forall a \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$，取

$$z = y + \lambda a \in F \Rightarrow \operatorname{Re}\langle x - y, \lambda a\rangle \leqslant 0$$

取 $\lambda = \pm 1 \Rightarrow \operatorname{Re}\langle x - y, a\rangle \leqslant 0$. 取 $\lambda = \pm i \Rightarrow \operatorname{Rg}\langle x - y, a\rangle \leqslant 0$，因此 $\langle x - y, a\rangle = 0$，即 $x - y \perp F$.

- $(\Leftarrow)$：设 $x - y \perp F$，则 $\forall z \in F$, $\langle x - y, z - y\rangle = 0$，因此

$$\|x - z\|^2 = \|x - y + y - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geqslant \|x - y\|^2 \Rightarrow y = P_F(x)$$

唯一性显然.

下证 P_F 线性，$\forall x, x' \in H$

$$(x + x') - \big(P_F(x) + P_F(x')\big) = \big(x - P_F(x)\big) + \big(x' - P_F(x')\big) \perp F$$

从而 $P_F(x + x') = P_F(x) + P_F(x')$，$P_F(\lambda x) = \lambda P_F(x)$ 同理可得.

再证 $\|P_F\| \leqslant 1$：

$$\|P_F(x)\| = \|P_F(x) - P_F(0)\| \leqslant \|x - 0\| = \|x\| \Rightarrow \|P_F\| \leqslant 1$$

当 $F \neq \{0_H\}$ 时，$\forall y \in F$, $P_F(y) = y \Rightarrow \|P_F\| \geqslant 1$.

Corollary 4.2.1 正交分解定理

设 H 是一个 Hilbert 空间，$F \subset H$ 为子空间，则有

$$H = \overline{F} \oplus F^{\perp}$$

即 $\forall x \in H$，存在唯一 $y \in \overline{F}$, $z \in F^{\perp}$，使得 $x = y + z$，且 $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

Proof: $\overline{F}$ 是完备空间 H 的闭集 $\Rightarrow F$ 完备，$\forall x \in H$，令 $y = P_F(x) \in \overline{F}$，由上述定理知

$$z := x - y \perp \overline{F} \Rightarrow z \in \overline{F}^{\perp} = F^{\perp}$$

故有 $x = y + z$，$(y, z) \in \overline{F} \times F^{\perp}$，唯一性的证明留作练习.
若 $x \in \overline{F} \cap F^{\perp}$，则 $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0_H$，因此 $\overline{F} \cap F^{\perp} = \{0_H\}$. 综上：

$$H = \overline{F} + F^{\perp}.$$

Corollary 4.2.2

设 H 为 Hilbert 空间，$F \subset H$ 为子空间，则有 $(F^{\perp})^{\perp} = \overline{F}$.

Proof:

- 由定义 $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$，又由 $\overline{F} \subset (F^{\perp})^{\perp}$，故有 $(F^{\perp})^{\perp} = \overline{F}$，由 $(F^{\perp})^{\perp}$ 的闭性，$\overline{F} \subset (F^{\perp})^{\perp}$.
- $\forall x \in F^{\perp} \perp$，由于 H 是一个 Hilbert 空间，因此 $F^{\perp}$ 完备 $\Rightarrow P_{F^{\perp}}$ 有定义，又

  $$x - 0 \perp F^{\perp} \Rightarrow P_{F^{\perp}}(x) = 0$$

  故 $x = P_{\overline{F}}(x) + P_{F^{\perp}}(x) \in \overline{F} \Rightarrow F^{\perp\perp} \subset \overline{F}$.

Proposition 4.2.4

设 H 为 Hilbert 空间，$A \subset H$ 为非空子集，则 $\overline{\mathrm{Span}(A)} = A^{\perp\perp}$.

Proof:

- 由命题 4.2.3 知，$\overline{\mathrm{Span}(A)} \subset A^{\perp\perp}$.
- 取 $x \in A^{\perp\perp}$，希望证明 $x \in G := \overline{\mathrm{Span}(A)}$，由于 G 是 H 中的闭子空间，则 G 完备，由正交分解定理 4.2.1 ，$H = G \oplus G^{\perp}$，故 $\forall x \in A^{\perp\perp}$，$\exists\, y \in G$，$z \in G^{\perp}$ 使得 $x = y + z$，只需证明 $z = 0$. 注意到 $A \subset G$，则

  $$G^{\perp} \subset A^{\perp} \Rightarrow z \in A^{\perp}$$

  故 $x \perp z \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x \in G$. 综上

  $$\overline{\mathrm{Span}(A)} = A^{\perp\perp}.$$

4.3 对偶和共轭

Theorem 4.3.1 Riesz 表示定理

设 H 是 $\mathbb{K}$ 上的 Hilbert 空间，$\forall \varphi \in H^*$，$\exists! a \in H$，使得

$$\varphi(x) = \langle x, a\rangle, \ \forall x \in H.$$

考虑 $\Phi : H \to H^*$，$a \mapsto \varphi_a(: H \to \mathbb{K}, x \mapsto \langle x, a\rangle)$，则 Φ 是一个共轭线性等距同构.

Proof:

(1) $\forall a \in H$，φ_a 是线性的，且

$$|\varphi_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \leqslant \|x\|\|a\| \Rightarrow \|\varphi_a\| \leqslant \|a\| \Rightarrow \varphi_a \in H^*.$$

(2) $\forall a, b \in H,\ \lambda \in \mathbb{K}$

$$\Phi(a+\lambda b)(x) = \varphi_{a+\lambda b}(x) = \langle x, a+\overline{\lambda} b\rangle = \langle x, a\rangle + \overline{\lambda}\langle x, b\rangle = \Phi(a)(x) + \overline{\lambda}\Phi(b)(x).$$

故 Φ 是共轭线性的.

(3) $\|\Phi(a)\| = \|\varphi_a\|_{H^*} = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, a\rangle| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|x\|\|a\| = \|a\|.$，则 Φ 是等距的.

(4) 同构：只需说明有逆映射，即 Φ 是满射. 设 $\varphi \in H^*$，则 $F = \operatorname{Ker}\varphi$ 为 H 的闭子空间

- 若 $F = H$，则 $\varphi = 0$，取 $a = 0$ 即可；
- 若 $F \neq H$，则由正交分解定理知 $H = F \oplus F^\perp$. 且 $\exists\, x_0 \in F^\perp$，且 $x_0 \neq 0$，则 $\varphi(x_0) \neq 0$，取 $\lambda \in \mathbb{K}$ 使得 $\varphi(\lambda x_0) = 1$，则 $\forall y \in H$，记 $z = y - \varphi(y)\lambda x_0$，则

$$\varphi(z) = 0 \Rightarrow z \in F \Rightarrow \langle z, x_0\rangle = 0$$

即

$$\langle y, x_0\rangle = \varphi(y)\langle \lambda x_0, x_0\rangle.$$

取 $a = \overline{\lambda}\dfrac{x_0}{\|x_0\|^2}$，则 $\varphi(y) = \langle y, a\rangle, \forall y \in H$. 而 a 的唯一性显然，故 Φ 是满射.

- 等距保证逆映射 Φ^{-1} 是连续的.

综上所述，Φ 是一个共轭线性等距同构.

> **Remark 4.3.1**
> 由 Riesz 表示定理，$H \cong H^*$.

> **Theorem 4.3.2** Hahn-Banach 定理
> 设 H 是 $\mathbb{K}$ 上的 Hilbert 空间
>
> (1) $F \subset H$ 是一个闭子空间，$x_0 \notin F$，则 $\exists\, y \in H^*$，使得 $\varphi|_F \equiv 0,\ \varphi(x_0) = 1$
>
> (2) M 是一个闭凸集，$x_0 \notin M$，则 $\exists\, \varphi \in H^*$，使得 $\operatorname{Re}\varphi(y) < C_0 < \operatorname{Re}\varphi(x_0),\ \forall x \in M$.

Proof:

(1) 由正交分解定理，$H = F \oplus F^\perp$，则对 x_0，存在 $y_0 \in F$，$z_0 \in F^\perp$，使得 $x_0 = y_0 + z_0$. 则取 $\varphi(y) = \left\langle y, \dfrac{z_0}{\|z_0\|^2}\right\rangle$，则显然满足要求.

(2) 由投影定理，存在 $y_0 \in M$，使得 $\mathrm{Re}\langle x_0 - y_0, z - y_0\rangle \leqslant 0$, $\forall z \in M$，定义

$$\varphi(z) = \langle z, x_0 - y_0\rangle$$

则

$$\varphi(z) - \varphi(x_0) = \langle z - x_0, x_0 - y_0\rangle = \langle z - y_0, x_0 - y_0\rangle - \|x_0 - y_0\|^2 \leqslant 0$$

取 $C_0 = \mathrm{Re}\,\varphi(x_0) - \frac{1}{2}\|x_0 - y_0\|^2$，则

$$\mathrm{Re}\,\varphi(z) \leqslant \mathrm{Re}\,\varphi(x_0) - \|x_0 - y_0\|^2 < C_0 < \mathrm{Re}\,\varphi(x_0).$$

Theorem 4.3.3

设 H, K 是两个 Hilbert 空间，$u \in \mathcal{B}(H, K)$，则存在唯一 $u^* \in \mathcal{B}(K, H)$，使得

$$\langle u^*(x), y\rangle_H = \langle x, u(y)\rangle_K, \quad \forall x \in K,\ y \in H.$$

且 $\|u^*\| = \|u\| = \|u^* u\|^{1/2}$.

Remark 4.3.2

映射 u^* 称为 u 的**伴随算子**.

Proof: 任取 $x \in K$，构造连续线性泛函 $v: H \to \mathbb{K}$, $y \mapsto \langle u(y), x\rangle$, $\forall y \in H$. 由 Riesz 表示定理，存在唯一 $z \in H$，使得

$$v(y) = \langle y, z\rangle\ \forall y \in H$$

且 $\|v\| = \|u\|$，令 $u^*(x) = z$，则

$$\langle y, u^*(x)\rangle = \langle y, z\rangle = u(y) = \langle u(y), x\rangle,\ \forall y \in H, x \in K.$$

于是

$$\langle u^*(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

- u^* 线性：$\forall x_1, x_2 \in K$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\forall y \in H$

$$\begin{aligned}\langle y, u^*(x_1 + \lambda x_2)\rangle &= \langle u(y), x_1 + \lambda x_2\rangle \\ &= \langle u(y), x_1\rangle + \overline{\lambda}\,\langle u(y), x_2\rangle \\ &= \langle y, u^*(x_1)\rangle + \overline{\lambda}\,\langle y, u^*(x_2)\rangle\,.\end{aligned}$$

  即

$$u^*(x_1 + \lambda x_2) = u^*(x_1) + \overline{\lambda} u^*(x_2).$$

- 唯一性：若存在 u_1^*, u_2^*，则 $\forall x \in K$, $y \in H$

$$\langle y, u_1^*(x) - u_2^*(x)\rangle = 0 \Rightarrow u_1^*(x) - u_2^*(x) = (u_1^* - u_2^*)(x) = 0 \Rightarrow u_1^* = u_2^*.$$

- $\|u^*\| = \|u\| = \|u^*u\|^{1/2}$:

$$\begin{aligned}\|u^*\| &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|u^*(x)\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\left(\sup_{\|y\|\leqslant 1}\left|\langle u^*(x), y\rangle\right|\right)\\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\left(\sup_{\|y\|\leqslant 1}\left|\langle x, u(y)\rangle\right|\right) = \sup_{\|y\|\leqslant 1}\left(\sup_{\|x\|\leqslant 1}\left|\langle x, u(y)\rangle\right|\right)\\ &= \sup_{\|y\|\leqslant 1}\|u(y)\| = \|u\|.\end{aligned}$$

同时考虑

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, u^*u(x)\rangle \leqslant \|x\|\cdot\|u^*u(x)\| \leqslant \|x\|\cdot\|u^*u\|\cdot\|x\|.$$

故 $\|u\|^2 \leqslant \|u^*u\| \Rightarrow \|u\| \leqslant \|u^*u\|^{1/2}$，另一方面

$$\|u^*u\|^{1/2} \leqslant \left(\|u^*\|\cdot\|u\|\right)^{1/2} = \|u\|$$

综上可知 $\|u^*\| = \|u\| = \|u^*u\|^{1/2}$.

Lemma 4.3.1

设 H, K 是两个 Hilbert 空间，$T, S \in \mathcal{B}(H, K)$，则 $(aS + bT)^* = \overline{a}S^* + \overline{b}T^*$.

Remark 4.3.3

$\Phi : T \mapsto T^*$ 是一个共轭线性等距同构，若 T 可逆，则 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Corollary 4.3.1

设 H 是一个 Hilbert 空间，$T \in \mathcal{B}(H)$，则存在唯一 $T^* \in \mathcal{B}(H)$，使得

$$\langle T^*(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

称 T^* 为 T 的**共轭算子**.

Proposition 4.3.1

设 H 是一个 Hilbert 空间，$T \in \mathcal{B}(H)$，则

(1) $\operatorname{Ker}(T) = \left(\operatorname{Rg}(T^*)\right)^{\perp}$;

(2) $\operatorname{Ker}(T)^{\perp} = \overline{\operatorname{Rg}(T^*)}$.

Proof:

(1) $\forall x \in \operatorname{Ker}(T)$，$\forall z \in \operatorname{Rg}(T^*)$，存在 $y \in H$ 使得 $z = T^*y$

$$\langle x, z\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle = 0 \Rightarrow x \perp \operatorname{Rg}(T^*)$$

由 x 的任意性，知 $\operatorname{Ker}(T) \subset (\operatorname{Rg}(T^*))^{\perp}$. 反之，$\forall x \in (\operatorname{Rg}(T^*))^{\perp}$

$$\|Tx\| = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker}(T)$$

(2) 由 (1) 式，两边取正交补得 $\mathrm{Ker}(T)^{\perp} = \left(\mathrm{Rg}(T^*)\right)^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Rg}(T^*)}$.

Definition 4.3.1 自伴算子

$T \in \mathcal{B}(H)$ 称为**自伴算子**，若 $T = T^*$，即 $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, $\forall x, y \in H$.

Definition 4.3.2 可逆算子

$T \in \mathcal{B}(H)$ 称为**可逆算子**，若存在 $S \in \mathcal{B}(H)$，使得 $ST = TS = \mathrm{id}_H$.

Definition 4.3.3 酉算子

$T \in \mathcal{B}(H)$ 称为**酉算子**，若 $T^{-1} = T^*$，即 $TT^* = T^*T = \mathrm{id}_H$.

Definition 4.3.4 规范算子

$T \in \mathcal{B}(H)$ 称为**规范算子**，若 $TT^* = T^*T$.

Remark 4.3.4

- 自伴算子是 $\mathcal{B}(H)$ 的实闭子空间，即 $\forall S, T$ 自伴，$\forall \lambda \in \mathbb{R}$，有 $S + \lambda T$ 自伴;
- 自伴算子和酉算子均为规范算子;
- 酉算子全体是 $\mathcal{B}(H)$ 中的闭集，即 $\forall S, T$ 是酉算子，$S \circ T$ 是酉算子;
- 酉算子一定是等距算子，反之不成立.

4.4 正交基

目标：可分的 Hilbert 空间特有的性质，结构只有一种.

Definition 4.4.1 正交基

设 H 为 Hilbert 空间，I 是指标集，$\{e_i\}_{i\in I}$ 是 H 中的一族向量，

(1) 若 $e_i \perp e_j$, $\forall i \neq j$，则称 $\{e_i\}_{i\in I}$ 是**正交**的;

(2) 若 $\{e_i\}_{i\in I}$ 是正交的，且 $\|e_i\| = 1$, $\forall i \in I$，则称 $\{e_i\}_{i\in I}$ 是**规范正交**的;

(3) 若 $\overline{\mathrm{Span}\{e_i\}_{i\in I}} = H$，则称 $\{e_i\}_{i\in I}$ 是**完全**的;

(4) 若 $\{e_i\}_{i\in I}$ 是规范正交且完全的，则称为 H 的**规范正交基**，也称为 **Hilbert 基**.

Remark 4.4.1

任何一组规范正交基都是线性无关的.

Example 4.4.1

$\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ 在标准内积下是规范正交基.

Example 4.4.2

$\ell^2(\mathbb{N}_+)$ 的标准正交基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在内积 $\langle a, b\rangle = \sum a_i\bar{b}_i$ 下是规范正交基.（但不是 Hamel 基，即不能张成全空间）

Example 4.4.3

$L^2([0,2\pi],\mathbb{C}) = \left\{ f : [0,2\pi] \to \mathbb{C} \middle| \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty \right\}$ 的一组规范正交基为 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{int}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

- **规范性**：$\forall n \in \mathbb{Z}$, $|e_n(t)| = 1/\sqrt{2\pi} \Rightarrow \|e_n\| = 1$，由 $\forall m, n \in \mathbb{Z}$，有

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-m)t}\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

  故 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 正交且规范.

- **完全性**：设 $E = \mathrm{Span}\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，则 E 为所有三角多项式的集合，且 $\overline{E} = L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$（由 Weierstrass 逼近定理和 L^2 空间的完备性可知）.

Theorem 4.4.1

设 H 是 Hilbert 空间，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为 H 中的规范正交系，$F = \mathrm{Span}\{e_1, \cdots, e_n\}$，则

$$\forall x \in H,\ P_F(x) = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i$$

且满足

$$\|x\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

Proof: $\forall x \in H$，设

$$y = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle x_i$$

则 $y \in F$，由

$$\langle x-y, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \langle y, e_j\rangle = 0 \Rightarrow x - y \perp F \Rightarrow y = P_F(x)$$

由于 e_i 相互正交，由勾股定理

$$\|P_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

因此可得

$$\|x\|^2 = \|x-y+y\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

Theorem 4.4.2

设 H 为无穷维 Hilbert 空间，$\{e_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 H 中的规范正交系，则以下命题等价

(1) $\{e_i\}$ 是 Hilbert 基（规范正交基）;

(2) $\forall x\in H$, $\exists!$ 序列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}:=\{\langle x,e_n\rangle\}_{n\geqslant 1}\subset\mathbb{K}$ 使得 $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n$ 收敛至 x;

(3) $x\in H$ 且 $\forall i\in\mathbb{N}$, $x\perp e_i$，那么 $x=0_H$（H 中和任意 e_i 正交的元素是 0 元素）.

(4) $\forall x\in H$, $\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2$（Parseval 恒等式）;

Proof:

- $\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ 设 $\{e_i\}$ 是标准正交基，记 $E_n=\mathrm{Span}\{e_1,\cdots,e_n\}$，则 $\forall x\in H$ 设

$$S_n:=P_{E_n}(x)=\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$$

且成立

$$\sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|+\|x-S_n\|^2=\|x\|^2 \tag{4.1}$$

故 $\mathbb{R}$ 中级数 $\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle$ 收敛，假设 $m>n$，则

$$\|S_m-S_n\|=\sum_{i=n+1}^{m}|\langle x,e_i\rangle|^2\to 0$$

即 S_n 为 Cauchy 列，由 H 的完备性，存在 $x_0\in H$ 使得 $S_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x_0$，在令 $E=\mathrm{Span}\{e_n\}_{n\geqslant 1}$，则 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，且 $\overline{E}=H$，由于 $x\in H$，$\forall\varepsilon>0$, $\exists y\in E$ 使得 $\|x-y\|<\varepsilon$，而

$$\|x-S_n\|=\|x-P_{E_n}(x)\|=\|x-y\|+\|y-P_{E_n}(y)\|+\|P_{E_n}(y)-P_{E_n}(x)\|$$

对 n 充分大，有 $y\in E_n\Rightarrow\|y-P_{E_n}(y)\|=0$，于是

$$\limsup_{n\to\infty}\|x-S_n\|\leqslant 2\varepsilon$$

由 ε 的任意性可知

$$x=\lim_{n\to\infty}S_n=x_0$$

也即

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n$$

下证唯一性：对任一序列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}\subset\mathbb{K}$，使得 $x=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n$，则

$$\langle x,e_n\rangle=\lim_{k\to\infty}\left\langle\sum_{i=1}^{k}a_ie_i,e_n\right\rangle=a_n$$

唯一性成立.

- $\boxed{(2)\Rightarrow(1)}$ 已知 $\forall x\in H$, $\exists\{a_n\}\in\mathbb{K}$ 使得

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n$$

而级数的部分和

$$\sum_{k=1}^{n} a_k e_k \in E \Rightarrow E = \mathrm{Span}\{e_n\}_{n\geqslant 1}\text{在}H\text{中稠密}$$

- $\boxed{(1) \Rightarrow (3)}$ 假设 $x \perp e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$，则 $x \perp \mathrm{Span}\{e_n\}_{n\geqslant 1} \Rightarrow x \perp H \Rightarrow x = 0$
- $\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$ $E^{\perp} = (\mathrm{Span}\{e_n\}_{n\geqslant 1})^{\perp} = \{0_H\} \Rightarrow (\mathrm{Span}\{e_n\}_{n\geqslant 1})^{\perp\perp} = H$，即 $\{e_n\}_{n\geqslant 1}$ 是规范正交基.
- $\boxed{(2) \Rightarrow (4)}$ 由 $S_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$ 以及 $S_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, $n \to \infty$ 以及内积的连续性可知

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|S_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

- $\boxed{(4) \Rightarrow (3)}$ 设 $x \in H$ 且 $x \perp e_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$，则

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Remark 4.4.2

由定理可得 $\forall x, y \in H$，有 $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}$

Theorem 4.4.3 Bessel 不等式

设 H 是 Hilbert 空间，$\{e_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 H 中的规范正交系，则

$$\forall x \in H, \ \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$$

Proof: 由 (4.1) 式直接可得.

Remark 4.4.3

以上定理可知，若 Hilbert 空间上有 Hilbert 基时，其上有漂亮的线性结构

问题：给出一组线性无关的序列 $\{f_n\} \subset H$，如何得到一组与之等价的规范正交系?

Theorem 4.4.4 Gram-Schmidt 正交化

设 H 为 Hilbert 空间，$\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset H$ 为线性无关（任意有限子集线性无关）的序列，则存在与之等价的规范正交系 $\{e_n\}_{n\geqslant 1} \subset H$，满足

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathrm{Span}\{e_1, \cdots, e_n\} = \mathrm{Span}\{f_1, \cdots, f_n\}$$

Proof: 令 $g_1 = f_1$，令 $g_2 = f_2 - \dfrac{\langle f_2, g_1\rangle}{\|g_1\|^2} g_1$，容易验证 $g_1 \perp g_2 \neq 0$，接着令

$$g_n = f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle f_n, g_k\rangle}{\|g_k\|^2} g_k$$

则构造出一组正交系 $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ * & 1 & 0 & \cdots \\ * & * & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

再令 $e_n = \dfrac{g_n}{\|g_n\|}$，则得到所需规范正交系.

Definition 4.4.2 可分

若赋范空间 E 有可数稠密子集，则称 E 为可分的.

Example 4.4.4

$L^p(a,b), 1 \leqslant p < \infty$ 是可分的.

Theorem 4.4.5

任意可分的非零 Hilbert 空间均有至多可数的 Hilbert 基.

Proof: 设 $\{u_n\}$ 是 H 的可数稠密子集，且 $u_n \neq 0$，$n \geqslant 1$，依次去掉可由前向量线性表示的向量，得到一组线性无关的子集 $\{v_n\} \subset \{u_n\}$，由 Gram-Schmidt 正交化过程，得到与之等价的规范正交系 $\{e_n\}$，记 $M = \mathrm{Span}\{e_n\}$，则 $\overline{M} = H$，否则存在 $x \in H \backslash \overline{M}$，则 $x \perp M \Rightarrow x \perp e_n$，$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$，矛盾.

Remark 4.4.4

任意 Hilbert 空间都有规范正交基.

Theorem 4.4.6 Hilbert 空间结构定理

设 H 为可分的非零 Hilbert 空间，则 $\dim H = n < \infty$ 时，$H \cong \ell^2(n)$，否则 $H \cong \ell^2(\mathbb{N}_+)$，且保内积.

Proof: 由定理 4.4.5，存在 $\{e_i\}$ 成为 H 的 Hilbert 基，用等价刻画的 (3) 和 (4), 考虑等距同构

$$\varphi : H \to \ell^2(\mathbb{N}_+), x \mapsto (\langle x, e_i \rangle)_{i \geqslant 1}$$

则 φ 是线性等距双射.

Chapter 5
Baire 纲定理及其应用

5.1 Baire 纲定理

Goal：研究完备度量空间中的一个基本性质（Baire 定理），这可以推出泛函分析的三大基本定理.

Theorem 5.1.1 Baire 纲定理

设 (E,d) 为完备度量空间，$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 中一列闭集，若 $\mathring{F}_n=\varnothing$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$，则

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)^{\circ}=\varnothing.$$

Remark 5.1.1

可数多个无内点的并集依然无内点.

Theorem 5.1.2 Baire 定理的等价形式

设 (E,d) 是完备度量空间，

(1) 设 F_n 是 E 中一列闭集，若

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)^{\circ}\neq\varnothing$$

则 $\exists\, n_0$，使得 $(F_{n_0})^{\circ}\neq\varnothing$.

(2) 设 G_n 是 E 中一列稠密开集，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ 稠密.

Proof: 证明等价性：(1) 为逆否命题，直接得到等价性，下证 (2)：令 $G_n=F_n^c$，则 F_n 闭 $\iff$ G_n 开，$\mathring{F}_n=\varnothing\iff(G_n^c)^{\circ}=(G_n)=\varnothing\iff\overline{G}_n=E$，即 G_n 稠密. 则 Baire 定理等价于

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n^c\right)^{\circ}=\varnothing\iff\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n^c\right)^{\circ}\right)^{c}=E\iff\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n^c\right)^{c}=E$$
$$\iff\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n}=E\iff\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\text{稠密}.$$

下面回到定理 5.1.1 的证明：

Proof: 反证法：设 F_n 为一列闭集，$\forall n$，$\mathring{F}_n=\varnothing$，但 $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)^{\circ}\neq\varnothing$，则 $\exists\, x_0\in E$，$r_0>0$，使得

$$B(x_0,r_0)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n.$$

取 $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap F_1^c$，则存在 $r_1 \in (0, r_0/2]$，使得

$$\overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap F_1^c.$$

依此类推，取 $x_n \in B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap F_n^c$，则存在 $r_n \in (0, r_{n-1}/2]$，使得

$$\overline{B}(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap F_n^c.$$

注意到 $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$，易证 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列. 由完备性，序列 $\{x_n\}$ 收敛于某个点 $y \in E$. 由于

$$d(y, x_n) \leq d(y, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) < r_{n+1} + r_n < 2r_n,$$

所以 $y \in \overline{B}(x_n, r_n) \subset B(x_0, r_0) \cap F_n^c$, $\forall n \in \mathbb{N}_+$，即 $y \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^c$，且 $y \in B(x_0, r_0) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，矛盾，故定理成立.

Corollary 5.1.1

若完备的度量空间 (E, d) 可以写成可数个闭集之并，即 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，则存在 $n_0 \in \mathbb{N}_+$，使得 $\mathring{F}_{n_0} \neq \varnothing$.

Proof: 反证法，若 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $\mathring{F}_n = \varnothing$，则由 Baire 定理知 $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^\circ = \varnothing$，与 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 矛盾.

Definition 5.1.1 Baire 空间

称拓扑空间 E 是一个 Baire 空间，若 E 中任意可数个稠密开集的交仍然稠密，或等价的，E 中任意可数个无内点闭集的并仍然无内点.

Corollary 5.1.2

若一个拓扑空间可由一个完备的度量诱导，则它是 Baire 空间.

Theorem 5.1.3

$E = C([a, b], \mathbb{R})$，赋予 $\|\cdot\|_\infty$ 范数，其中处处不可微的函数集合是稠密的.

Proof: 令 $A = \{f \in C[a, b] \mid \forall x,\ \limsup_{y\to x} |(f(y) - f(x))/(y - x)| = \infty\}$，则其为处处不可微函数集合的子集，我们将证明其为一列稠密开集 G_n 的交集. 令

$$G_n = \{f \in C[a, b] \mid \forall x,\ \exists\ y \text{ s.t. } |f(x) - f(y)| > n|y - x|\}$$

$$F_n = G_n^c = \{f \in C[a, b] \mid \exists\ x_f \text{ s.t. } |f(y) - f(x_f)| \leqslant n|y - x_f|,\ \forall y\}$$

要证明 F_n 是闭集且无内点，以及若 $f \in E$ 在 $x_0 \in [a, b]$ 可导，则 $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，又因为 $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = (F_n)^c$ 中的函数处处不可导，从而证明定理.

- 证明 F_n 闭：设 $f_k \in F_n$, $k \in \mathbb{N}$，且 $f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$，存在 $x_k \in [a, b]$，使得

$$|f_k(x_k) - f_k(y)| \leqslant n|x_k - y|,\ \forall y \in [a, b]$$

  由于 $[a, b]$ 的紧性，存在子列 $\{x_{k_l}\}$ 使得 $x_{k_l} \xrightarrow{l\to\infty} \overline{x} \in [a, b]$.

$$|f_{k_l}(x_{k_l}) - f_{k_l}(y)| \leqslant n|x_{k_l} - y|$$

取极限即得

$$|f(\overline{x})-f(y)|\leqslant n|\overline{x}-y|,\ \forall y\in[a,b].$$

从而 F_n 为闭集.

- 证明 F_n 无内点: 等价于证明 G_n 稠密, 即 $\forall f\in E$, $\forall\varepsilon>0$, $B(f,\varepsilon)\cap G_n\neq\varnothing$: 给定 $f\in E$ 和 $\varepsilon>0$, 可构造分段线性连续函数 $g\in E$, 使得 $\|g-f\|_\infty<\varepsilon$, 且 g 在每段上的斜率为 $\pm 2n$, 则 $g\in G_n$: 具体的, 选取 $k\in\mathbb{N}$, 使得 $k\varepsilon>(b-a)n$, 且 f 在每个区间 $V_j=[a+(b-a)j/k,a+(b-a)(j+1)/k]$ 上的振幅

$$\max_{x,y\in V_j}|f(x)-f(y)|<\varepsilon,\quad j=0,1,\cdots,k-1$$

令 $c_j=f(a+(b-a)j/k)+(-1)^j\varepsilon$, 令 $g(a+(b-a)j/k)=c_j$, 并在每个区间上线性插值定义 g, 则 g 在每个区间 V_j 上的斜率

$$|l_j|=\frac{|c_{j+1}-c_j|}{(b-a)/k}=\frac{k\left|\big(f(a+(b-a)(j+1/k)\pm\varepsilon)\big)-\big(f(a+(b-a)j/k)\mp\varepsilon\big)\right|}{b-a}\geqslant\frac{k\varepsilon}{b-a}>n$$

从而 $g\in G_n=F_n^c$, 且 $\|f-g\|_\infty=\max_j\|f-g\|_{V_j}\leqslant\varepsilon$

- 证明 $f\in A$ 不可导: 反设 f 在 $x_0\in[a,b]$ 可导, 则

$$\lim_{\substack{y\to x_0\\ y\in[a,b]\setminus\{x_0\}}}=\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}=l$$

取 $\varepsilon=1$, $\exists\,\delta>0$ 使得 $|y-x_0|\leqslant\delta$, 则

$$\frac{f(y)-f(x_0)}{|y-x_0|}\leqslant|l|+1\iff|f(y)-f(x_0)|\leqslant(|l|+1)|y-x_0|$$

当 $|y-x_0|>\delta$ 时

$$\left|\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}\right|\leqslant\frac{2\|f\|_\infty}{\delta}\Rightarrow|f(y)-f(x_0)|\leqslant\frac{2\|f\|_\infty}{\delta}|y-x_0|$$

因此, 取 $n_0\geqslant\max(2\|f\|_\infty/\delta,|l|+1)$, 则

$$f\in F_{n_0}\subset\bigcup_{n=1}^\infty F_n\Rightarrow f\notin A.$$

Example 5.1.1

不存在范数使得多项式空间 E 完备.

Proof: 反证法, 假设 E 在某个范数下完备, 记 $F_n=\mathbb{R}_n[x]$ 即阶数不超过 n 的多项式空间, 则显然为有限维真子空间, 故完备且闭, 再证明

$$\mathring{F}_n=\varnothing$$

反设不成立, 则 $\exists\,B(x,r)\subset F_n$,

$$B(0,2r)=B(x,r)-B(x,r)\subset F_n\Rightarrow\lambda B(0,2r)\subset F_n,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

故任意开球均在 F_n 中, 则 $F_n=E$, 矛盾. 由 Baire 定理知 $\left(\bigcup_{n=0}^\infty F_n\right)^\circ=\varnothing$, 但显然 $\bigcup_{n=0}^\infty F_n=E$, 矛盾, 故定理成立.

Example 5.1.2

不存在范数使 c_{00} 完备.

5.2 Banach-Steinhaus 定理

Theorem 5.2.1 Banach-Steinhaus 定理

设 E, F 都是 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间，设 E 是 Banach 空间，$\{u_i\}_{i\in I}$ 是一族从 E 到 F 的有界线性算子，若 $\forall x\in E$, $\sup_{i\in I}\|u_i(x)\|<\infty$，则 $\sup_{i\in I}\|u_i\|_{\mathcal{B}(E,F)}<\infty$，即算子族 $\{u_i\}_i\in I$ 在 $\mathcal{B}(E,F)$ 中有界.

Proof: $\forall x\in E$，令 $M(x)=\sup_{i\in I}\|u_i(x)\|$，再令

$$F_n=\{x\in E\mid M(x)\leqslant n\}$$

由 u_i 的连续性和范数的连续性，知 $\varphi_i: x\mapsto \|u_i(x)\|$ 连续，故

$$F_n=\bigcap_{i\in I}\varphi_i^{-1}([0,n])$$

也是闭集，$\forall x\in E$, $M(x)<\infty$，故存在 m 使得 $x\in F_m\Rightarrow E=\bigcup_{n\geqslant 1}F_n$，由 Baire 定理和 E 的完备性，

$$\exists\ n_0\in\mathbb{N}_+,\ \text{s.t.}\ \mathring{F}_{n_0}\neq\varnothing$$

因此存在 $\overline{B}(x_0,r)\subset\mathring{F}_n$，即 $\forall x\in\overline{B}(x_0,r)$，有 $M(x)\leqslant n_0$，也就是

$$\|u_i(x)\|\leqslant n_0,\ \forall i\in I.$$

则 $\forall y\in\overline{B}(0,1)$, $\forall i\in I$，有

$$\|u_i(y)\|=\frac{1}{r}\|u_i(ry)\|=\frac{1}{r}\|u_i(x_0+ry)-u_i(x_0)\|\leqslant\frac{1}{r}\big(\|u_i(x_0+ry)\|+\|u_i(x_0)\|\big)\leqslant\frac{2n_0}{r}$$

因此

$$\|u_i\|_{\mathcal{B}(E,F)}=\sup_{\|y\|\leqslant 1}\|u_i(y)\|\leqslant\frac{2n_0}{r}$$

Corollary 5.2.1

设 E 是 Banach 空间，F 是赋范空间，$\{u_n\}_{n\geqslant 1}\subset\mathcal{B}(E,F)$，若 $\{u_n\}\geqslant 1$ 逐点收敛到 u，则 $u\in\mathcal{B}(E,F)$，且

$$\|u\|_{\mathcal{B}(E,F)}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|_{\mathcal{B}(E,F)}$$

Proof: 由题设，

$$\forall x\in E,\ \sup_{n\geqslant 1}\|u_n(x)\|=\|u(x)\|<\infty$$

由 Banach-Steinhaus 定理知 $\sup_{n\geqslant 1}\|u_n\|_{\mathcal{B}(E,F)}<\infty$，记为 M. 则 $\forall x\in E$，有

$$\|u(x)\|=\lim_{n\to\infty}\|u_n(x)\|\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|_{\mathcal{B}(E,F)}\|x\|\leqslant M\|x\|$$

故 u 为有界线性算子，且满足不等式.

Example 5.2.1

设 H 是 Hilbert 空间，$\{x_n\}_{n\geqslant 1}\subset H$，且满足 $\forall y\in H$，极限 $\lim_{n\to\infty}\langle x_n,y\rangle$ 存在，则存在 $x\in H$，使得 $\forall y\in H$，有 $\lim_{n\to\infty}\langle x_n,y\rangle=\langle x,y\rangle$，且 $\|x\|\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|$.

Proof: 设 $u_n(y)=\langle y,x_n\rangle$，则 $\|u_n\|=\|x_n\|$（由 Riesz 表示定理），$\forall y\in H$, $\lim_{n\to\infty}u_n(y)$ 存在，定义为 $u(y)$，由前述推论可知 u 线性且

$$\|u\|\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|=\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|$$

故 $u\in H^*$，由 Riesz 表示定理，存在唯一的 $x\in H$，使得 $\forall y\in H$, $u(y)=\langle y,x\rangle$，$\|u\|=\|x\|$，$\langle x_n,y\rangle\to\langle x,y\rangle$ 且 $\|x\|\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|$.

Example 5.2.2

考虑 $\ell^2(\mathbb{N}_+)$，取 e_n，考虑 $T_n(x)=\langle x,e_n\rangle$，则 $\forall x\in\ell^2(\mathbb{N}_+)$，有

$$\lim_{n\to\infty}T_n(x)=0\Rightarrow T=0$$

而 $\|T_n\|=1$.

Remark 5.2.1

H 中的闭球在例 5.2.1 这种“弱拓扑”下，$x_n\rightharpoonup x\iff\langle x_n,y\rangle\to\langle x,y\rangle$，称 x 为 $\{x_n\}$ 的弱极限.

Claim 5.2.1

无穷维 Hilbert 空间中闭球是弱紧的，但在范数拓扑下非紧.

一致有界原理的另一种陈述

Theorem 5.2.2

若 E 为 Banach 空间，$\{u_n\}_{n\geqslant 1}\subset\mathcal{B}(E,F)$ 无一致上界，则 $\exists\,x\in E$，使得 $\{u_n(x)\}$ 无界.

Theorem 5.2.3 奇性聚集原理

设 E 是 Banach 空间，F 是赋范空间，且 $\{u_i\}_{i\in I}\subset\mathcal{B}(E,F)$ 满足

$$\sup_{i\in I}\|u_i\|=\infty$$

则

$$G=\left\{x\in E\mid M(x)=\sup_{i\in I}\|u_i(x)\|=\infty\right\}$$

为 E 中的稠密 G_δ 集.

Proof: 令 $\Omega_n=\{x\in E\mid M(x)>n\}$，是开集，且 $\Omega=E\backslash F_n$（定义同前），则

$$G=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n$$

是 G_δ 集. 现证其稠密性：由反证法，若不稠密，则 $\mathring{F}_n \neq \varnothing$，类似定理 5.2.1 的证明过程，可得 $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$ 一致有界，得到矛盾，故定理成立.

Example 5.2.3

$u_n : \ell^2(\mathbb{N}_+) \to \ell^2(\mathbb{N}_+)$，定义为

$$u_n(e_m) = \begin{cases} me_m & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

则 $\|u_n\| = n$，$\sup_n \|u_n\| = \infty$，从而

$$\left\{x \in \ell^2(\mathbb{N}_+) \mid \sup_n \|u_n(x)\| = \infty\right\}$$

是稠密的 G_δ 集.

Example 5.2.4

考虑例 4.4.3 中空间的子空间 $E_0 = C_{per}([0,2\pi],\mathbb{C})$，表示 2π 周期连续函数全体，存在稠密的 G_δ 集 A，使得 $\forall f \in A$

$$\limsup_{n\to\infty} \|S_n f\|_\infty = \infty$$

Proof: 考虑

$$T_n : (E_0, \|\cdot\|_\infty) \to (E_0, \|\cdot\|_\infty), f \mapsto S_n(f)$$

只需证明 $\|T_n\| \to \infty$，再用奇性聚集原理 5.2.3 即可.

$$T_n(f) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_0^{2\pi} f(y)\mathrm{e}^{ik(x-y)}\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)D_n(x-y)\mathrm{d}y$$

此处 $D_n = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ 是周期为 2π 的偶实函数且 $|D_n(x)| \leqslant 2n+1$ 且可化简为

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = \frac{\mathrm{e}^{-inx}(1-\mathrm{e}^{i(2n+1)x})\mathrm{e}^{-ix/2}}{(1-\mathrm{e}^{ix})} = \frac{\mathrm{e}^{-i(n+1/2)x} - \mathrm{e}^{i(n+1/2)x}}{\mathrm{e}^{-ix/2} - \mathrm{e}^{ix/2}} = \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}$$

于是有

$$|T_n(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(x-y)|\mathrm{d}y \cdot \|f\|_\infty \Rightarrow \|T\|_\infty \leqslant \frac{1}{2\pi}\|D_n\|_{L^1(0,2\pi)}$$

另一方面，

$$|T_n f(0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} D_n(y)g(y)\mathrm{d}y\right|$$

取 $g = \mathrm{sgn}(D_n)$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists f_\varepsilon \in E_0$，$\|f_\varepsilon\| = 1$ 且

$$\mu\{f_\varepsilon \neq g\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2n+1}$$

记 $I = \{x \in [0,2\pi] \mid f_\varepsilon(x) \neq g(x)\}$，则

$$\begin{aligned} T_n f_\varepsilon(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(y)g(y)\mathrm{d}y - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(y)\big(g(y) - f_\varepsilon(y)\big)\mathrm{d}y \\ &\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(y)|\mathrm{d}y - \frac{2}{2\pi}(2n+1)\cdot\frac{\varepsilon}{2n+1} = \frac{1}{2\pi}\|D_n\|_{L^1(0,2\pi)} - \frac{\varepsilon}{\pi} \end{aligned}$$

因此

$$\|T_n\|_\infty = \frac{1}{2\pi}\|D_n\|_{L^1(0,2\pi)}$$

考虑

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |D_n(y)|\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(n+1/2)\sigma}{\sin(\sigma/2)}\right|\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)y}{\sin y}\right|\mathrm{d}y \\
(\sin y < y) &\geqslant 2\int_0^{\pi}\frac{|\sin(2n+1)y|}{y}\mathrm{d}y = 2\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|\sin(z)|}{z}\mathrm{d}z \\
&\geqslant \frac{1}{2\pi}\left(2\cdot\sum_{k=0}^{2}n\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin z|}{z}\mathrm{d}z\right) \\
&\geqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\left(\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin z|\mathrm{d}z\cdot\frac{1}{(k+1)\pi}\right) \\
&= \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}\to\infty,\quad n\to\infty
\end{aligned}$$

于是 $\|f_\varepsilon\|_\infty = 1 \Rightarrow \|T_n\| \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D_n(y)|\mathrm{d}y$，令 $n\to\infty$，则得证.

5.3 开映射定理与闭图象定理

Definition 5.3.1 开映射

设 E,F 为拓扑空间，若映射 $u:E\to F$ 把开集映到开集，则称 u 为**开映射**.

Example 5.3.1

$u_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto(x+y,x-y)$ 是开映射；

$u_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,(x,y)\mapsto(x+y,x-y,0)$ 不是开映射.

Theorem 5.3.1 开映射定理

设 E,F 都是 Banach 空间，$u\in\mathcal{B}(E,F)$ 为满射，则 u 为开映射，且存在 $r>0$，使得

$$u(B_E)\supset rB_F.$$

其中 B_E 和 B_F 分别为 E 和 F 中的单位开球.

Proof: B_E 是 E 中单位球，则 $E=\bigcup_{i=1}^\infty nB_E$，

$$F=u(E)=u\left(\bigcup_{n=1}^\infty nB_E\right)\subset\bigcup_{n=1}^\infty\overline{u(nB_E)}\subset F$$

因 $\overline{u(nB_E)}$ 是闭集，F 是 Banach 空间，由 Baire 定理知：存在 $n_0\in\mathbb{N}$，使得

$$\left(\overline{u(n_0B_E)}\right)^\circ\neq\varnothing$$

因此存在 $y_0\in F$，$r_0>0$，使得

$$y_0+r_0B_F\subset\overline{u(n_0B_E)}$$

由于 $y_0 \in \overline{u(n_0B_E)}$ 以及 u 的线性性，平移可得

$$r_0B_F \subset \overline{u(n_0B_E)} - y_0 \subset \overline{u(n_0B_E)} - \overline{u(n_0B_E)} \subset \overline{u(2n_0B_E)}$$

因此

$$B_F \subset \overline{u\left(\frac{2n_0}{r_0}B_E\right)} = \overline{u(cB_E)}.$$

其中 $c = 2n_0/r_0$，接下来我们希望去除“闭包”负号，任意 $y \in B_F$ 固定，存在 $x_0 \in cB_E$ 使得

$$\|y - u(x_0)\| < 1/2$$

记 $y_1 = 2[y - u(x_0)]$，则 $\|y_1\| < 1$，同理存在 $x_1 \in cB_E$，使得 $\|y_1 - u(x_1)\| < 1$，记 $y_2 = 2[y_1 - u(x_1)]$，则 $\|y_2\| < 1$，依此类推，得到序列 $\{x_n\} \subset cB_E$，使得

$$y = u(x_0) + \frac{1}{2}u(x_1) + \cdots + \frac{1}{2^n}u(x_n) + \frac{1}{2^{n+1}}y_{n+1} = u\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}y_{n+1} \tag{5.1}$$

注意到级数 $\sum x_k/2^k$ 绝对收敛且 E 是 Banach 空间，故 $\sum_{k\geqslant 0}\frac{x_k}{2^k}$ 收敛于 $x \in E$，且

$$\|x\| \leqslant \frac{\infty}{k=0}\frac{\|x_k\|}{2^k} \leqslant 2c$$

即 $x \in 2cB_E$ 令 $n \to \infty$，对 (5.1) 式求极限可得 $y = u(x)$，即 $y \in u(2cB_E)$，由于 y 的任意性可知

$$B_F \subset u(2cB_E) \Rightarrow \frac{1}{2c}B_F \subset u(B_E), \quad r = \frac{1}{2c}$$

最后只需证明 u 是开映射：设 $O \subset E$ 为开集，$\forall y_0 \in u(O)$，存在 $x_0 \in O$，使得 $u(x_0) = y_0$，由 O 的开性，存在 $\varepsilon > 0$，使得

$$x_0 + \varepsilon B_E \subset O$$

由上述证明可知存在 $r > 0$，使得

$$rB_F \subset u(B_E) \Rightarrow r\varepsilon B_F \subset u(\varepsilon B_E)$$

因此

$$y + r\varepsilon B_F \subset u(x_0) + u(\varepsilon B_E) = u(x_0 + \varepsilon B_E) \subset u(O)$$

故 $u(O)$ 为开集，u 为开映射.

Corollary 5.3.1 逆映射定理 (Banach 定理)

设 E, F 为 Banach 空间，$u \in \mathcal{B}(E,F)$ 为双射，则 $u^{-1} \in \mathcal{B}(F,E)$，即 u 是同构映射.

Proof:

- **法 1**：开集的原象是开集 $\iff$ 连续，故由开映射定理易知 u^{-1} 连续.
- **法 2**：由开映射定理，存在 $r > 0$，

$$rB_F \subset u(B_E) \Rightarrow B_F \subset u\big(B_E(0,1/r)\big) \Rightarrow u^{-1}(B_F) \subset B_E(0,1/r) \Rightarrow \|u^{-1}\| \leqslant \frac{1}{r}$$

Corollary 5.3.2

$(E, \|\cdot\|_1)$ 和 $(E, \|\cdot\|_2)$ 均为完备空间，存在常数 $C > 0$，使得

$$\|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1, \ \forall x \in E$$

则两个范数等价.

Proof: 考虑恒等映射

$$\mathrm{id} : (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_1), \ x \mapsto x$$

由条件知 id 连续，显然是双射，线性，有界，由逆映射定理知 id^{-1} 连续，即存在常数 $\tilde{C} > 0$，使得

$$\|x\|_2 = \|\mathrm{id}^{-1}(x)\|_2 \leqslant \tilde{C}\|x\|_1, \ \forall x \in E$$

Example 5.3.2

考虑 $u : \ell^2 \to \ell^2$, $e_n \mapsto e_n/n$，满足 $\|u\| \leqslant 1$ 连续，反之 $u^{-1} : \ell^2 \to \ell^2$, $e_n \mapsto ne_n$ 不连续，这是因为 u 并非满射，考虑 $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n^{3/2}}$，则 $u(y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{\sqrt{n}} \notin \ell^2$.

Example 5.3.3

令 $E = \big(C[0,1], \mathbb{R}\big)$，$(E, \|\cdot\|_\infty)$ 是 Banach 空间，而 $(E, \|\cdot\|_p)$, $1 \leqslant p < \infty$ 不是 Banach 空间.

Proof: 法一可见第三章，法二：用反证法，设 $(E, \|\cdot\|_p)$ 完备，又 $(E, \|\cdot\|_\infty)$ 完备，显然

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \|f\|_\infty$$

由上一个推论，存在常数 $C > 0$，使得

$$\|x\|_\infty \leqslant C\|x\|_p, \ \forall x \in E$$

取 $f_n(x) = x^n$，则 $\|f_n\|_p = (1/(np+1))^{1/p} \to 0$，但 $\|f_n\|_\infty = 1$，矛盾，故定理成立.

Example 5.3.4

利用 Hölder 不等式可类似证明 $L^p([0,1], \mathbb{R})$ 取 $\|\cdot\|_q$, $1 \leqslant q < p$ 也不是 Banach 空间.

考虑

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{1/q} & 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 & 1/n < x \leqslant 1 \end{cases}$$

则 $\|f_n\|_q$ 有界，但 $\|f_n\|_p$ 无界.

Definition 5.3.2 图像

设 E,F 为拓扑空间，$u: E \to F$ 为映射，集合

$$G(u) = \{(x,y) \mid x \in E,\ y = u(x)\}$$

称为映射 u 的**图像**.

Remark 5.3.1

若 E,F 完备，则 $E \times F$ 完备，此时 $\|\cdot\|_p$ 等价，且 $(x_n,y_n) \xrightarrow{E\times F} (x,y)$ 当且仅当 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} x$ 且 $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_F} y$.

Theorem 5.3.2 闭图象定理

设 E,F 为 Banach 空间，$u: E \to F$ 为线性映射，则 $u \in \mathcal{B}(E,F) \iff G(u) \in E \times F$ 为闭图像.

Proof:

($\Leftarrow$) 设 $G(u)$ 为闭子向量空间，从而 $G(u)$ 也是 Banach 空间，定义线性映射：

$$\Phi: G(u) \to E, (x, u(x_0)) \mapsto x$$

则 Φ 是连续线性映射，且

$$\|x\|_E \leqslant \|(x,u(x))\|_p = (\|x\|_E^p + \|u(x)\|_F^p)^{1/p}$$

Φ 为双射，由逆映射定理，Φ^{-1} 连续，即存在常数 $C > 0$，使得

$$\|(x,u(x))\|_p \leqslant C\|x\|_E,\ \forall x \in E$$

因此 $\|u\| \leqslant \|\Phi^{-1}\|$，即 $u \in \mathcal{B}(E,F)$.

($\Rightarrow$) $G(u)$ 中任意收敛列 $(x_n, u(x_n)) \xrightarrow{E\times F} (x,y) \in E \times F$，有 $x_n \to x$ 且 $u(x_n) \to y$
另一方面，由 $u \in \mathcal{B}(E,F)$，

$$u(x_n) \xrightarrow{F} u(x)$$

于是 $u(x) = y$，即 $(x,y) \in G(u)$，从而 $G(u)$ 为闭子空间.

Remark 5.3.2

一般拓扑空间中上述结论不一定成立.

Example 5.3.5

$f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$，则 $G(f) \in \mathbb{R}^2$ 但 f 不连续，故 $G(f)$ 非闭，但这与上述定理不矛盾，因为 f 并非线性映射.

Chapter 6
连续线性算子的谱

6.1 连续线性算子的谱

本节中 $(E, \|\cdot\|)$ 表示赋范线性空间，$\mathcal{I}$ 表示 id_E 为恒同映射.

Definition 6.1.1 正则算子

$\varphi \in \mathcal{B}(E)$ 称为**可逆**的，若 φ 是双射且 $\varphi^{-1} \in \mathcal{B}(E)$，记 $GL(E)$ 为全体 $\mathcal{B}(E)$ 中可逆算子的集合.

以下假设 E 为 Banach 空间：

Remark 6.1.1

- $(GL(E), \circ)$ 是一个群.
- $\forall T \in \mathcal{B}(E)$，若 $\|T\| < 1$，则 $\mathcal{I} - T \in GL(E)$，$(\mathcal{I} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$，且
$$\|\mathcal{I} - T\| \leqslant \frac{1}{1 - \|T\|}, \quad \|(\mathcal{I} - T)^{-1} - \mathcal{I}\| \leqslant \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}$$
- $GL(E)$ 为 $\mathcal{B}(E)$ 中的开集，且 $GL(E) \to GL(E), u \mapsto u^{-1}$ 为连续映射.

Definition 6.1.2 正则值

设 $T \in \mathcal{B}(E)$，若 $\lambda \in \mathbb{K}$ 使得 $T - \lambda\mathcal{I}$ 可逆，则称 λ 为 T 的**正则值**，所有正则值的集合称为**预解集**，记为 $\rho(T)$；$\forall \lambda \in \rho(T)$，$R(\lambda) = (T - \lambda\mathcal{I})^{-1}$ 称为对应 λ 的预解式.

Definition 6.1.3 谱

$\sigma(T) = \mathbb{K} \backslash \rho(T)$ 称为 T 的**谱**，$\forall \lambda \in \sigma(T)$，称为 T 的**谱点**.

一般而言，谱点可分为以下三类：

(1) 若 $T - \lambda\mathcal{I}$ 非单射，$\mathrm{Ker}(T - \lambda\mathcal{I}) \neq \{0_E\}$，这样的 λ 称为 T 的**特征值**，全体特征值称为 T 的**点谱**，记为 $\sigma_p(T)$.

(2) 若 $T - \lambda\mathcal{I}$ 单射但不满.

(3) 若 $T - \lambda\mathcal{I}$ 是双射，但 $(T - \lambda\mathcal{I})^{-1}$ 不连续.

Remark 6.1.2

在 Banach 空间中，情况 (3) 不会发生，记 $\sigma(T) \backslash \sigma_p(T) = \sigma_c(T)$ 称为**连续谱**.

Definition 6.1.4 谱半径

定义

$$r(T)=\sup\{|\lambda| \mid \lambda\in\sigma(T)\}$$

称为 T 的**谱半径**，显然有 $r(T)\leqslant\|T\|$.

Proposition 6.1.1

设 E 是 Banach 空间，$T\in\mathcal{B}(E)$

(1) $\sigma(T)$ 为 $\mathbb{K}$ 中闭集，$\rho(T)$ 为 $\mathbb{K}$ 中开集.

(2) $\forall\lambda\in\sigma(T)$，$|\lambda|\leqslant\|T\|\Rightarrow\sigma(T)$ 有界 $\Rightarrow\sigma(T)$ 是紧集.

(3) 若 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$，则 $\sigma(T)\neq\varnothing$，$\forall T\in\mathcal{B}(E)$.

Proof:

(1) 考虑 $\varphi:\mathbb{K}\to\mathcal{B}(E),\lambda\mapsto T-\lambda\mathcal{I}$ 是一个连续映射，且 $\rho(T)=\varphi^{-1}(GL(E))$，由 $GL(E)$ 为开集可知 $\rho(T)$ 为开集，进而 $\sigma(T)$ 为闭集.

(2) $\forall|\lambda|>\|T\|$，有

$$T-\lambda\mathcal{I}=-\lambda\left(\mathcal{I}-\frac{1}{\lambda}T\right)\Rightarrow\left\|\frac{T}{\lambda}\right\|<1$$

从而 $\mathcal{I}-\frac{1}{\lambda}T\in GL(E)$，即 $T-\lambda\mathcal{I}\in GL(E)$，所以 $\lambda\in\rho(T)$，因此 $\sigma(T)$ 有界，进而为紧集.

(3) 用反证法，假设 $\sigma(T)=\varnothing\Rightarrow\rho(T)=\mathbb{C}$ ，考虑 $R:\mathbb{C}\to\mathcal{B}(E),\lambda\mapsto(T-\lambda\mathcal{I})^{-1}$，

$$R(\lambda)=R(\mu)+(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)\Rightarrow\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\lambda-\mu}=R(\lambda)R(\mu)\xrightarrow{\mu\to\lambda}R^2(\lambda)$$

对任意的 $y\in\mathcal{B}(E)^*=\mathcal{B}(\mathcal{B}(E),\mathbb{K})$，考虑

$$\varphi\circ R:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

其为解析函数，且

$$\|R(\lambda)\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}$$

因此 $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}\varphi\circ R(\lambda)=0$，由 Liouville 定理可知 $\varphi\circ R\equiv C$，考虑任意 $\lambda_1\neq\lambda_2$，$R(\lambda_1)\neq R(\lambda_2)$，由如下 Hahn-Banach 定理可知存在 $\varphi\in\mathcal{B}(E)^*$ 使得 $\varphi(R(\lambda_1)-R(\lambda_2))\neq0$，与假设矛盾.

Theorem 6.1.1 Hahn-Banach 定理

对任意的 $x\in\mathcal{B}(E)$，存在 $\varphi\in\mathcal{B}(E)^*$ 使得 $\|\varphi(x)\|=\|x\|$.

Remark 6.1.3

上述性质 (2) 可以推出：$\rho(T)\supset\{\lambda\in\sigma(T)\mid|\lambda|>\|T\|\}$.

Example 6.1.1

$E = C([0,1],\mathbb{R})$ 赋予 $\|\cdot\|_\infty$ 范数是 Banach 空间，考虑算子

$$T : E \to E,\ f \mapsto Tf(x) = xf(x)$$

显然 $T \in \mathcal{B}(E)$ 且 $\|T\| = 1$. 此外

$$\sigma_p(T) = \varnothing, \quad \sigma(T) = [0,1] \Rightarrow r(T) = 1.$$

Example 6.1.2

$E = c_{00}(\mathbb{N})$，赋予范数 $\|u\| = \max \|u_n\|$，考虑

$$f(u) = \left(\frac{u_1}{2}, \frac{u_2}{3}, \cdots, \frac{u_n}{n+1}, \cdots\right)$$

则有 $f \in \mathcal{B}(c_{00})$，$\|f\| = 1/2$，此外考虑 $\sigma_p(f)$:

$$(f - \lambda\mathcal{I})(u) = 0 \iff \left(\frac{1}{n+1} - \lambda\right)(u) = 0, \quad \forall n$$

因此 $\sigma_p(f) = \{(k+1)^{-1} \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$，令 $\Lambda = \{0\} \cup \sigma_p(f)$，因为 f 是双射，

$$f^{-1}(u) = (\{(n+1)u_n\}) \notin \mathcal{B}(c_{00}) \Rightarrow 0 \in \sigma(f)$$

再考虑 $\Lambda^c \subset \rho(f) \Rightarrow \Lambda = \sigma(f)$.

6.2 紧线性算子

Definition 6.2.1 相对紧集

(X,d) 是度量空间，称 $Y \subset X$ 是**相对紧的**，若 $\overline{Y}$ 是紧集.

Proposition 6.2.1

$Y \subset (X,d)$ 是相对紧的，当且仅当 $\forall \{x_n\} \subset$，存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 在 X 中收敛.

Corollary 6.2.1

设 (X,d) 是完备度量空间，Y 相对紧 $\iff$ Y 全有界/预紧 $\iff$ Y 列紧.

证明见第三次作业习题 4.

Remark 6.2.1

相对紧 $\iff$ 紧集的子集；在有限维赋范空间中，相对紧 $\iff$ 有界.

Definition 6.2.2 紧线性算子

设 E,F 为赋范线性空间，线性映射 $f:E\to F$ 称为**紧**的，若任给 E 中有界集 A，$f(A)$ 在 F 中相对紧. 记所有紧线性算子构成的集合为 $\mathcal{K}(E,F)$.

Proposition 6.2.2

设 f 是 $E\to F$ 的线性算子，则下列命题等价：

(i) $f\in\mathcal{K}(E,F)$;

(ii) $f(B_E(0,1))$ 在 F 中相对紧；

(iii) 任给有界序列 $\{x_n\}\subset E$，存在子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $\{f(x_{n_k})\}$ 在 F 中收敛.

Proof:

- $\boxed{\text{(i)}\Rightarrow\text{(ii)}}$ 由定义显然；
- $\boxed{\text{(ii)}\Rightarrow\text{(iii)}}$ 设 $\{x_n\}$ 为 E 中有界序列，则存在 $M>0$，使得 $\|x_n\|\leqslant M$, $\forall n$，令 $z_n=x_n/(M+1)$，则 $\|z_n\|\leqslant 1$，从而 $z_n\in B_E(0,1)$，$\{f(z_n)\}\subset f(B_E(0,1))$，由相对紧的性质，存在子列 $f(z_{n_k})$ 收敛，从而 $\{f(x_{n_k})\}$ 收敛；
- $\boxed{\text{(iii)}\Rightarrow\text{(i)}}$ 任给 $A\subset E$ 有界，希望证明 $f(A)$ 相对紧：任给 $\{y_n\}\subset f(A)$，存在 $\{x_n\}\subset A$，使得 $y_n=f(x_n)$，且 $\{x_n\}$ 是有界序列，由 (iii)，存在子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $\{f(x_{n_k})\}$ 收敛，即 $\{y_{n_k}\}$ 收敛，因此 $f(A)$ 相对紧.

Example 6.2.1

一些紧算子的例子：

- $0_{\mathcal{B}(E,F)}$ 是紧算子；
- 若 $\dim(E)<\infty$，则 $\mathcal{K}(E,F)=\mathcal{B}(E,F)$;（可用第一次作业习题 6 中连续的等价刻画证明）
- 若 $\varphi\in\mathcal{B}(E,F)$，秩有限维，即 $\dim(\mathrm{Rg}\,\varphi)<\infty$，则 φ 是紧算子;
- F 是 Banach 空间，一列秩有限的连续线性映射的极限是紧的.

Proposition 6.2.3

若 F 是 Banach 空间，$f\in\mathcal{K}(E,F)\iff f(B_E((0,1)))$ 是预紧/全有界的.

Theorem 6.2.1

设 F 是 Banach 空间，$\mathcal{K}(E,F)$ 是 $\mathcal{B}(E,F)$ 的闭子向量空间.

Lemma 6.2.1

设 $f\in\mathcal{B}(E,F)$，$g\in\mathcal{B}(F,G)$

(1) 若 $f \in \mathcal{K}(E,F)$，则 $g \circ f \in \mathcal{K}(E,G)$;

(2) 若 $g \in \mathcal{K}(F,G)$，则 $g \circ f \in \mathcal{K}(E,G)$.

Proof: 利用紧算子的等价刻画 (iii)：设 $\{x_n\}$ 是 E 中的有界序列：

(1) $f \in \mathcal{K}(E,F)$，则由 (iii) 知存在 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $f(x_{n_k}) \to y \in F$，则 $g(f(x_{n_k}))$ 在 G 中收敛于 $g(y)$，因此 $g \circ f \in \mathcal{K}(E,G)$;

(2) 考虑 $\{x_n\}$ 有界，则 $f(x_n)$ 在 F 中有界，由 $g \in \mathcal{K}(F,G)$，存在子列 $\{f(x_{n_k})\}$ 使得 $g(f(x_{n_k}))$ 在 G 中收敛，因此 $g \circ f \in \mathcal{K}(E,G)$.

Corollary 6.2.2

$\mathcal{K}(E)$ 是 $\mathcal{B}(E)$ 的一个闭理想.

下面回到定理 6.2.1 的证明：

Proof:

- $0_{\mathcal{B}(E,F)} \in \mathcal{K}(E,F)$
- 对任意 $T, S \in \mathcal{K}(E,F)$，考虑
$$(T+S)(B_E(0,1)) \subset T(B_E(0,1)) + S(B_E(0,1)) \subset \overline{T(B_E(0,1))} + \overline{S(B_E(0,1))}$$
因此 $(T+S)(B_E(0,1))$ 是相对紧的，从而 $T+S \in \mathcal{K}(E,F)$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(E,F)$，$\lambda T = (\lambda \mathcal{I}_F) \circ T \Rightarrow \lambda T \in \mathcal{K}(E,F)$，即为子向量空间.
- 闭性的证明略去.

Example 6.2.2

$(E = L^2[a,b], \mathbb{C})$，令 $K : [a,b] \to \mathbb{C}$ 满足 $K \in {}^2([a,b]^2, \mathbb{C})$，定义算子

$$T_K : E \to E, \quad f \mapsto Tf(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) \mathrm{d}y$$

则 $T_K \in \mathcal{K}(E)$.

Theorem 6.2.2

设 H 是 Hilbert 空间，则 $\forall T \in \mathcal{K}(H)$，存在一列有限秩算子 $T_k \in \mathcal{K}(H)$，使得 $T_k \xrightarrow{\mathcal{B}(H)} T$.

Proof: 设 B 为 H 中的单位球，则 $\overline{T(B)}$ 为紧集，因此预紧；$\forall \varepsilon > 0$，存在 $y_1, \cdots, y_n$ 使得

$$\overline{T(B)} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \varepsilon)$$

记 $F_\varepsilon = \mathrm{Span}\{y_1, \cdots, y_n\}$，则 $\dim F_\varepsilon < \infty$，故为闭子向量空间，由正交分解定理，$H = F_\varepsilon \oplus F_\varepsilon^\perp$. 定义映射：$T_\varepsilon = P_{F_\varepsilon} \circ T$，自然有

$$\mathrm{Rg}(T_\varepsilon) \subset F_\varepsilon$$

因此 T_ε 为秩有限的.
下面估计 $\|T_\varepsilon - T\|$：任取 $x \in B$，则存在 $1 \leqslant i_0 \leqslant n$，使得 $\|T(x) - y_{i_0}\| < \varepsilon$，因此

$$\|T_\varepsilon(x) - T(x)\| = \|P_{F_\varepsilon} \circ T(x) - T(x)\| \leqslant \|y_{i_0} - T(x)\| < \varepsilon$$

取 $\varepsilon = 1/n$，令 $T_{1/n} = T_\varepsilon$，则 $T_{1/n} \xrightarrow{\mathcal{B}(H)} T$.

Remark 6.2.2

上述定理在一般的 Banach 空间中不一定成立.

Theorem 6.2.3

设 H 是一个 Hilbert 空间，则 $T \in \mathcal{K}(H) \iff T^* \in \mathcal{K}(H)$.

Proof: 设 T 是一个有限秩算子，$\mathrm{Rg}(T)$ 是有限维的，不妨假设 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 为 $T(H)$ 的规范正交基，

$$T(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle T(x), e_i \rangle e_i$$

对任意的 $x, y \in H$，

$$\begin{aligned}
\langle T(x), y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{m} \langle T(x), e_i \rangle e_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle T(x), e_i \rangle \langle e_i, y \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle x, T^*(e_i) \rangle \langle e_i, y \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^{m} \langle y, e_i \rangle T^*(e_i) \right\rangle = \langle x, T^*(y) \rangle
\end{aligned}$$

故 $T^*(y) = \sum_{i=1}^{m} \langle y, e_i \rangle T^*(e_i) \in \mathrm{Span}\{T^*(e_1), \cdots, T^*(e_m)\}$，从而 $\dim(\mathrm{Rg}(T^*)) < \infty$，即 T^* 有限秩.
下面对一般的紧算子：由定理 6.2.2 存在一列有限秩算子 $T_n \xrightarrow{\mathcal{B}(H)} T$，则 $T_n^* \xrightarrow{\mathcal{B}(H)} T^*$，由 $\mathcal{K}(H)$ 的闭性知 T^* 为紧算子.

Chapter 7
习题

本章中的“课本习题”均指课程参考书 [1] 中的习题.

第一次作业 (1.1 至 2.2)

Exercise 1 [集合的内部]

设 (X,d) 是一个度量空间，$A\subset X$. 记 $\mathring{A}$ 或 A° 为 A 的内部，$A^c=X\setminus A$. 证明以下结论:

(1) $\mathring{A}$ 是包含于 A 的所有开集的并，等价地说，$\mathring{A}$ 是包含于 A 的最大开集.

(2) A 是开集当且仅当 $A=\mathring{A}$.

(3) $(\mathring{A})^c=\overline{A^c}$, $(\overline{A})^c=(A^c)^\circ$.

(4) $\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}A_n\right)^c=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}A_n^c$，其中 $A_n\subset X, n=1,2,\cdots$.

Exercise 2 [欧氏空间 $\mathbb{R}$]

设 $\mathbb{R}$ 是欧式距离空间.

(1) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的开集还是闭集? $\mathbb{Z}$ 呢? 为什么?

(2) 令 $E=(-5,3]$ 并赋予 $\mathbb{R}$ 的度量. 请问 $A=(-5,1]$ 在 E 中是开集吗? 是闭集吗? $B=(0,3]$ 在 E 中是开集吗? 是闭集吗?

Exercise 3 [度量函数]

设 (E,d) 是一个度量空间.

(1) 证明 $d_1=\sqrt{d}$ 和 $d_2=\ln(d+1)$ 也是 E 上的度量.

(2) 设 $f:E\to E$ 是一个单射，对任意 $x,y\in E$，定义 $\delta(x,y)=d(f(x),f(y))$. 证明 (E,δ) 也是一个度量空间.

(3) 令 (2) 中的 $E=\mathbb{R}$ 以及 $f(x)=\arctan x$. 证明 $x_n\xrightarrow{\delta}x$ 当且仅当 $|x_n-x|\to 0$. 由此说明由 δ 诱导的 $\mathbb{R}$ 上的拓扑与欧式距离诱导的拓扑是一样的.

Exercise 4 [闭集的分离性质]

设 (E,d) 是一个度量空间，$A\subset E$ 为一个非空集合.

(1) 证明: 对任意 $A,B\subset E$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

(2) 定义 $d_A(x)=\inf_{y\in A}d(x,y)$. 证明 $d_A(x)=0$ 当且仅当 $x\in\overline{A}$;

(3) 证明 d_A 是 1-Lipschitz 的，因此 d_A 是从 E 到 $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ 的连续映射;

(4) 令 F_1 和 F_2 是 E 中不相交的闭集. 证明 $f = \dfrac{d_{F_1}}{d_{F_1}+d_{F_2}}$ 是 E 上的连续函数. 由此推出结论: 存在不相交的开集 O_1, O_2 (即 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$) 使得 $F_i \subset O_i, i = 1, 2$.

Exercise 5 [距离]

设 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$，定义 $d(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, 2|x_2 - y_2|\}$.

(1) 证明 $(\mathbb{R}^2, d)$ 是一个度量空间;

(2) 准确的画出开球 $B(O,2)$，其中 O 是 $\mathbb{R}^2$ 中的原点;

(3) 在同一副图中画出闭球 $\overline{B}((3,2),1)$.

Exercise 6 [连续映射]

设 f 是一个从 (E, d_1) 到 (F, d_2) 的映射. 证明 f 是连续的与以下结论中任意一个都等价:

(1) 对任意 F 中的开集 O, $f^{-1}(O)$ 是 E 中的开集;

(2) 对任意 F 中的闭集 A, $f^{-1}(A)$ 是 E 中的闭集;

(3) 对任意 $A \subset E$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

第二次作业 (2.3 至 2.4)

Exercise 1 [不完备的度量空间]

令 $E = \mathbb{R}$ 以及 $f(x) = \arctan x$. 对任意 $x, y \in E$，定义 $\delta(x,y) = |f(x) - f(y)|$. 我们在第一次作业中习题 3 证明了 (E, δ) 也是一个度量空间，并且由 δ 诱导的 $\mathbb{R}$ 上的拓扑与欧式距离诱导的拓扑是一样的. 请证明 $(\mathbb{R}, \delta)$ 不完备.

Exercise 2 [拓扑不等价的度量]

在 $C[0,1]$ 上定义如下两个度量:

$$d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|, \quad d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

请利用课堂所讲的拓扑等价的定义，说明 d_1 和 d_∞ 不是拓扑等价的，并进一步说明两者分别诱导的拓扑 τ_∞ 和 τ_1 的强弱（细粗）关系. （提示: 考虑 $(C[0,1], d_\infty) \to (C[0,1], d_1)$ 上的恒同映射及其逆映射，并利用连续映射的等价刻画: 开集的原像仍是开集. ）

Exercise 3 [c_{00} 不完备]

记 $c_{00} := \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mid x_n \in \mathbb{R}$ 且 x_n中只有有限项不为 $0\}$. 对任意 $x, y \in c_{00}$，定义 $d(x,y) = \max_n |x_n - y_n|$. 证明度量空间 (c_{00}, d) 不完备.

Exercise 4 [发散的 Cauchy 列]

设 (X,d) 是一个度量空间. 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个发散的 Cauchy 列.

(1) 证明对任意 $x \in X$，数列 $\{d(x,x_n)\}$ 收敛，我们记其极限为 $g(x)$.

(2) 证明函数 $x \mapsto g(x)$ 是 1-Lipschitz 的.

(3) 证明函数 $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ 是一个无界连续函数.

Exercise 5 [Banach 压缩映射原理]

设 (X,d) 是一个完备的度量空间. 设 $f : X \to X$ 是一个映射且满足如下性质：存在常数 $C > 1$ 使得对任意 $x, y \in X$，$d(f(x), f(y)) \geqslant Cd(x,y)$.

(1) 假设 f 是一个满射. 证明 f^{-1} 存在并且是 Lipschitz 的.

(2) 复述 Banach 压缩映射原理. 证明：如果 f 是满射，则 f 有唯一的不动点.

Exercise 6 [几乎压缩映射]

设 (X,d) 是一个完备的度量空间. 我们称映射 $g : X \to X$ 在 X 上减少距离，如果对任意 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$，$d(g(x), g(y)) < d(x,y)$.

(1) 在 $\mathbb{R}$ 赋予欧式距离空间并定义函数 $h(x) = \sqrt{x^2+1}$. 证明 h 在 $\mathbb{R}$ 上减少距离. 证明 h 没有不动点.

(2) 令 $E = \mathbb{N}^* = \{1,2,3,\cdots\}$. 令

$$d_1(p,q) = \begin{cases} 0 & \text{if } p = q, \\ 2024 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} & \text{if } p \neq q. \end{cases}$$

- 证明 (E, d_1) 是一个完备的度量空间.
- 定义映射 $f : E \to E$ 满足 $f(1) = 1$，当 $p \geqslant 2$ 时 $f(p) = p+1$. 证明 f 在 E 上减少了距离，1 是 f 唯一的不动点. 证明对任意 $p \geqslant 2$，$\{f^n(p)\}$ 不可能收敛到 1.

第三次作业 (2.4 至 3.1)

Exercise 1 [紧空间里的闭集和紧子集的等价性]

证明：度量空间的紧子集是有界闭集，紧空间的闭子集是紧集.

Exercise 2 [紧集上连续函数的一致连续性]

设 K 是度量空间 (X,d) 中的紧子集. $f \in C(K,\mathbb{R})$. 证明：f 一致连续.

Exercise 3 [紧集上连续函数的最值定理]

设 K 是度量空间 (X,d) 中的紧子集. $f \in C(K,\mathbb{R})$. 证明：f 有界并且可以取到最大值和最小值.

Exercise 4 [相对紧]

设 (X, d) 为度量空间，$A \subset X$. 我们称 A 相对紧，如果 $\overline{A}$ 是紧集. 证明：设 (X, d) 是完备的度量空间，则 A 相对紧当且仅当 A 是预紧集/全有界集.

Exercise 5 [紧空间里的不动点]

设 (E, d) 是一个紧的度量空间，映射 $f : E \to E$ 满足如下性质：对任意的 $x \neq y$，$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. 请按照如下的步骤证明 f 有唯一的不动点.

(1) 证明 f 是 E 上的连续映射.

(2) 叙述压缩映射原理. 解释为什么我们无法直接运用该定理证明 f 存在唯一不动点.

(3) 记 $h(x) = d(x, f(x))$，$\forall x \in E$. 证明 h 是 E 上的连续函数.

(4) 说明 h 为什么在 E 上可以达到极小值和极大值. 证明 $\min_{x \in E} h = 0$. [提示：反证法]

(5) 证明 f 在 E 上有不动点. 证明 f 有唯一的不动点. [提示：如何通过函数 h 刻画 f 的不动点?]

Exercise 6 [等度连续]

设 (X, d_1) 和 (Y, d_2) 是度量空间，$C(X, Y)$ 表示 X 到 Y 的所有连续映射全体. $F \subset C(X, Y)$. 若对任意 $x \in X$ 以及 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ 使得当 $y \in X$ 且 $d_1(x, y) < \delta$ 时，都有

$$d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall f \in F,$$

则称 F 在 X 上**等度连续**. 若对任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ 使得当 $y \in X$ 且 $d_1(x, y) < \delta$ 时，都有

$$d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall f \in F,$$

则称 F 在 X 上**一致等度连续**.

(1) 设 (X, d_1) 是紧度量空间. 证明：F 在 X 上等度连续的充分必要条件是 F 在 X 上一致等度连续.

(2) 设 (X, d_1) 是紧度量空间，$\{f_n\}$ 是 $C(X, Y)$ 中的等度连续的序列. 若 $\{f_n\}$ 逐点收敛到 f，证明 $f \in C(X, Y)$ 且 $\{f_n\}$ 一致收敛到 f.

Exercise 7 [完备度量空间的等价刻画-1]

设 (X, d) 是一个度量空间，$A \subset X$. 我们定义 $\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y)$ 为集合 A 的直径.

(1) 假设 $A \subset B$，试比较 $\operatorname{diam}(A)$ 和 $\operatorname{diam}(B)$. 如果 $\operatorname{diam}(A) = 0$，这说明 A 有什么性质?

(2) 证明 A 有界且仅当 $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

(3) 对任意 $A \subset X$，证明 $\operatorname{diam}(\overline{A}) = \operatorname{diam}(A)$.

(4) 设 X 是完备的. $\{F_n\}$ 是 X 中非空单调下降的闭子集列，即对所有的 $n \geqslant 1$，F_n 是闭集，$F_n \neq \varnothing$ 以及 $F_{n+1} \subset F_n$. 假设 $\{F_n\}$ 满足 $\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$，证明存在 $x \in X$ 使得

$\bigcap_{n\geqslant 1} F_n = \{x\}$. (提示：考虑序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n \in F_n$)

(5) 如果条件 $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$ 不成立，试在 $\mathbb{R}$ 上给出上述结论的反例.

Exercise 8 [完备度量空间的等价刻画-2]

度量空间 (X,d) 是完备的当且仅当如下结论成立：

（†）如果 $\{F_n\}$ 是 X 中非空单调下降的闭子集列，且满足 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$，则 $\bigcap_n F_n \neq \varnothing$ 且为单点集.

(1) 由习题 7 的结论，说明 X 完备时，结论（†）成立.

(2) 对任意序列 $\{x_n\}$，证明 $\{x_n\}$ 的聚点集是 $\bigcap_{k\geqslant 1} \overline{\{x_n, n \geqslant k\}}$.

(3) 假设结论 (†) 成立，证明 X 中的任意 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 都有唯一的一个聚点. 由此说明 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛.

(4) 说明等价刻画确实成立.

第四次作业 (3.1 至 3.2)

Exercise 1 [赋范线性空间里的集合]

设 E 是一个赋范线性空间，$A, B \subseteq E$. 定义 $A + B = \{z = x + y \mid x \in A, y \in B\}$.

(1) 假设 A 是开集，证明 $A + B$ 也是开集.

(2) 假设 A 和 B 都是紧集，证明 $A + B$ 也是紧集.

(3) 假设 A 是紧集，B 是闭集，证明 $A + B$ 是闭集.

(4) 给出如下的例子：A, B 都是闭集，但 $A + B$ 不是闭集.

Exercise 2 [课本习题三的第 1 题]

设 $C([0,1],\mathbb{R})$ 表示 $[0,1]$ 上所有的连续实函数构成的空间. 定义

$$\|f\|_\infty = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(t)| \quad 且 \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

(1) 证明 $\|\cdot\|_\infty$ 和 $\|\cdot\|_1$ 都是 $C([0,1],\mathbb{R})$ 上的范数.

(2) 证明 $C([0,1],\mathbb{R})$ 关于范数 $\|\cdot\|_\infty$ 是完备的（即成为一个 Banach 空间）.

(3) 证明 $C([0,1],\mathbb{R})$ 关于范数 $\|\cdot\|_1$ 不完备.

Exercise 3 [Banach 空间 c_0]

设 c_0 是实数域中满足 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 的序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的全体. 对于 $X = (x_n) \in c_0$，定义 $\|X\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. 证明 $\|\cdot\|_\infty$ 是 c_0 上的一个范数. 证明 $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ 是一个 Banach 空间.

Exercise 4 [范数和等价性]

令 $E = C([0,1],\mathbb{R})$. $\forall f \in E$,

$$N_1(f) = \int_0^1 x^4|f(x)|\mathrm{d}x, \quad N_2(f) = \left(\int_0^1 x^2 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

- 证明 N_1 和 N_2 定义了 E 上的两个范数.
- 证明对任意的 $f \in E$，$N_1(f) \leqslant \frac{1}{\sqrt{7}} N_2(f)$.
- 考虑函数 $f_n(x)$：当 $x \in [0, n^{-1}]$ 时，$f_n(x) = (1 - nx)$. 当 $x \in [n^{-1}, 1]$ 时，$f_n(x) = 0$. 证明 N_1 和 N_2 是不等价的.

Exercise 5 [Banach 空间里的绝对收敛]

在赋范空间 $(E, \|\cdot\|)$ 中，回顾一个级数 $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ 是绝对收敛的，如果 $\sum_{n\geqslant 1}\|x_n\| < \infty$，即实数里的级数 $\sum_{n\geqslant 1}\|x_n\|$ 收敛. 此外我们知道赋范空间 E 是完备的当且仅当 E 中的绝对收敛级数必收敛

(1) 令 E 是一个 Banach 空间. 证明对任意 $A \in \mathcal{B}(E)$，级数 $\sum_{k\geqslant 0}\frac{A^k}{k!}$ 在 $\mathcal{B}(E)$ 中收敛. 这里，对任意 $A \in \mathcal{B}(E)$，$A^0 = \mathrm{id}_E$. 我们记这个级数的和为 e^A，即

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k\geqslant 0}\frac{A^k}{k!}.$$

(2) 证明对任意 $A \in \mathcal{B}(E)$，$\|\mathrm{e}^A\|_{\mathcal{B}(E)} \leqslant \mathrm{e}^{\|A\|_{\mathcal{B}(E)}}$.

(3) 说明通常情况下，对于 $A, B \in \mathcal{B}(E)$，$\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B}$ 不再成立；但是当 $AB = BA$ 时，等式是成立的. [提示：证明可以在网上找到]. 推出对任意 $A \in \mathcal{B}(E)$，e^A 是一个同构映射并且 $(\mathrm{e}^A)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$

Exercise 6 [Banach 紧致空间中的等距映射]

设 (E, d) 是一个紧的度量空间，$f : E \to E$ 满足对任意 $x, y \in E$，都有

$$d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y)$$

我们将证明 f 确实是一个等距映射.

- 给定 $x \in E$，考虑序列 $x_n = f^n(x)$，证明存在一个子序列 $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ 使得 (x_{n_p}) 收敛到 x.
- 用同样的方法证明：对任意 $x, y \in E$，存在一个序列 $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ 使得 (x_{n_p}) 收敛到 x，且 (y_{n_p}) 收敛到 y. （提示：关键点是找到一个共同的序列 (n_p)，使得 (x_{n_p}) 和 (y_{n_p}) 同时收敛.）
- 证明 f 是 E 到自身的一个等距映射.

第五次作业 (3.2)

Exercise 1 [课本习题三的第 3 题]

设 E 是 $\mathbb{R}$ 上所有的实系数多项式构成的向量空间，对任意 $P \in E$，定义

$$\|P\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |P(x)|.$$

设 $(E, \|\cdot\|_\infty)$ 是如上定义的赋范空间，并设 E_0 是 E 中没有常数项的多项式构成的向量子空间（即多项式 $P \in E_0$ 等价于 $P(0)=0$）.

(1) 证明 $N(P) = \|P'\|_\infty$ 定义 E_0 上的一个范数，并且对任意 $P \in E_0$，有

$$\|P\|_\infty \leqslant N(P).$$

(2) 证明 $L(P) = \displaystyle\int_0^1 \frac{P(x)}{x}\mathrm{d}x$ 定义了 E_0 关于 N 的连续线性泛函，并求它的范数.

(3) 上面定义的 L 是否关于范数 $\|\cdot\|_\infty$ 连续?

(4) 范数 $\|\cdot\|_\infty$ 和 N 在 E_0 上是否等价?

Exercise 2 [课本习题三的第 8 题]

设 E 为数域 $\mathbb{K}$ 上有限维向量空间，其维数 $\dim E = n$，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ 表示 E 上的一组基，任取 $u \in \mathcal{L}(E)$，令 $[u]$ 表示 u 在这组基下对应的矩阵.

(1) 证明映射 $u \mapsto [u]$ 建立了从 $\mathcal{L}(E)$ 到 $n\times n$ 矩阵构成的向量空间 $M_n(\mathbb{K})$ 之间的同构映射.

(2) 假设 $E = \mathbb{K}^n$ 且 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是经典基（即 $e_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$），对应于第 k 个向量，它仅在第 k 个位置取 1，其他位置取 0）. 并约定 $E = \mathbb{K}^n$ 赋予欧氏范数. 证明若 u（或等价地 $[u]$）可正交对角化，则 $\|u\| = \max\{|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|\}$，这里 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 u 的特征值.

(3) $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 如上，试由 $[u]$ 中的元素分别确定在 $p=1$ 和 $p=\infty$ 时的范数 $\|u : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)\|$.

Exercise 3 [连续线性映射范数的计算]

对任意 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$，令 $\|x\|_* = |x_1| + 3|x_2|$. 假设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 证明 $\|\cdot\|_*$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个范数. 记 $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_*)$，$\varphi(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{R}^2$. 证明 $\|\varphi\|_{\mathcal{B}(E)} = 3$.

Exercise 4 [连续线性映射]

令 $E = C([0,1], \mathbb{R})$ 且被赋予 $\|\cdot\|_\infty$ 范数. 定义映射 T:

$$(Tf)(x) = \int_0^x t f(t)\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t, \quad \forall f \in E,\ x \in [0,1].$$

(1) 证明 T 是 E 到自身的一个线性映射.

(2) 证明对任意 $f \in E$ 和 $x \in [0,1]$，$|Tf(x)| \leqslant \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right) \|f\|_\infty$.

(3) 证明 $T \in \mathcal{B}(E)$ 并计算 $\|T\|_{\mathcal{B}(E)}$.

(4) 请问方程 $Tf = f$ 有非平凡解吗?

Exercise 5 [不连续线性映射的核]

设 E 和 F 是数域 $\mathbb{K}$ 上的两个赋范空间，对任意 $f \in \mathcal{L}(E,F)$，定义 $\mathrm{Ker}(f) := \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$，它是 E 的一个子向量空间. 令 $\varphi : E \to \mathbb{K}$ 是一个不连续的线性泛函.

(1) 说明 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 不是闭集 [提示：反证法]. 推出 $\exists\, u \in \overline{\mathrm{Ker}(\varphi)} \backslash \mathrm{Ker}(\varphi)$ 使得 $\varphi(u) = 1$.

(2) 给定 $x \in E$. 利用表达式 $x_1 = x - \varphi(x)u$ 和 $x_2 = \varphi(x)u$，证明 $x \in \overline{\mathrm{Ker}(\varphi)}$.

(3) 由此推出 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 在 E 中稠密.

Exercise 6 [不连续线性映射核空间闭]

令 E 是 $\mathbb{R}$ 上所有实系数多项式构成的向量空间.

(1) 考虑映射 $\varphi(P) = xP'(x)$，证明 φ 是 E 到自身的线性映射.

(2) 考虑 $\varphi(x^n)$，证明无论在 E 上赋予什么样的范数，φ 都不可能连续.

(3) 计算 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ ，证明 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 是一个闭集. 该结论是否与 φ 的不连续性矛盾?

第六次作业 (3.2)

Exercise 1 [习题三第 9 题]

设 E 是 Banach 空间.

(1) 设 $u \in \mathcal{B}(E)$ 且 $\|u\| < 1$. 证明 $\mathrm{I}_E - u$ 在 $\mathcal{B}(E)$ 中可逆.

(2) 设 $GL(E)$ 表示 $\mathcal{B}(E)$ 中可逆元构成的集合. 证明 $GL(E)$ 关于复合运算构成一个群且是 $\mathcal{B}(E)$ 中的开集.

(3) 证明 $u \mapsto u^{-1}$ 是 $GL(E)$ 上的同胚映射.

Exercise 2 [习题三第 19 题]

设 $A = (a_{ij})_{i,j\geqslant 1}$ 是元素在 $\mathbb{K}$ 中的无穷矩阵, 定义对任意有穷序列 $x = (x_j)_{j\geqslant 1} \subset \mathbb{K}$, 即 x_j 仅有有限多个非零,

$$A(x) = \left(\sum_{j\geqslant 1} a_{ij}x_j\right)_{i\geqslant 1}.$$

(1) 证明 A 可以拓展成 c_0 到 ℓ^∞ 上的有界线性映射当且仅当

$$\|A\|_\infty = \sup_{i\geqslant 1} \sum_{j\geqslant 1} |a_{ij}| < \infty.$$

在此情形下, 我们有

$$\|A\|_{\mathcal{B}(c_0,\ell^\infty)} = \|A\|_\infty.$$

并且, 当 $\|A\|_\infty < \infty$ 时, A 也定义了在 ℓ^∞ 上的线性映射.

(2) 证明 A 可以拓展成 ℓ^1 上的有界线性映射当且仅当

$$\|A\|_1 = \sup_{j\geqslant 1}\sum_{i\geqslant 1}|a_{ij}| < \infty.$$

在此情形下, 我们有

$$\|A\|_{\mathcal{B}(\ell^1)} = \|A\|_1.$$

Exercise 3 [矩阵的 Schur 范数]

令 $E = M_n(\mathbb{C})$ 是 $\mathbb{C}$ 上 $n\times n$ 矩阵构成的向量空间，定义 $\|A\|_s = \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)}$，此处 $M^* = \overline{M}^t$

(1) 证明 $\|\cdot\|_s$ 定义了 $M_n(\mathbb{C})$ 上的一个范数;

(2) 证明 $(M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|_s)$ 是一个 Banach 空间;

(3) 证明对任意 $A, B \in E$，成立 $\|AB\|_s \leqslant \|A\|_s\|B\|_s$

第七次作业 (3.3)

Exercise 1 [课本练习三第 10 题]

设 $f \in L^2(\mathbb{R})$, $g(x) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$,

(1) 证明 $fg \in L^1(\mathbb{R})$.

(2) 给出例子说明 $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$, 但是 $f_1f_2 \notin L^1(\mathbb{R})$.

Exercise 2 [课本练习三第 11 题]

设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为有限测度空间, 即有 $\mu(\Omega) < \infty$.

(1) 证明若 $0 < p < q \leqslant \infty$, 则 $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. 用反例说明当 $\mu(\Omega) = \infty$ 时, 结论不成立.

(2) 证明若 $f \in L^\infty(\Omega)$, 则 $f \in \bigcap_{p<\infty} L^p(\Omega)$ 且 $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\|f\|_p$.

(3) 设 $f \in \bigcap_{p<\infty} L^p(\Omega)$ 且满足 $\limsup_{p\to\infty}\|f\|_p < \infty$, 证明 $f \in L^\infty(\Omega)$.

Exercise 3 [卷积]

在实数集 $\mathbb{R}$ 上取 Lebesgue σ-代数及 Lebesgue 测度, 并设 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

(1) 证明

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(u)g(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \left[\int_{\mathbb{R}} f(u)\mathrm{d}u\right]\left[\int_{\mathbb{R}} g(v)\mathrm{d}v\right] = \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

由此导出函数 $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处有定义.

(2) 我们定义 f 和 g 的卷积 $f*g$ 为

$$f*g(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y, & \text{当积分存在,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

证明 $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ 且 $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$.

(3) 取 $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$, 计算 $f*f$.

第八次作业 (4.1 至 4.2)

Exercise 1 [课本练习四第 6 题]

设 H 是内积空间, $x_n, x \in H$. 并假设

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\| \quad \text{且} \quad \lim_{n\to\infty} \langle y, x_n\rangle = \langle y, x\rangle, \ \forall y \in H.$$

证明 $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Exercise 2 [课本练习四第 10 题]

(1) 设 H 是 Hilbert 空间, $D_n = \{-1,1\}^n$. 证明

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_k)\in D_n} \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2, \quad \forall x_1, \cdots, x_n \in H.$$

(2) 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, 并假设有一个 X 上的内积范数 $|\cdot|$ 等价于 $\|\cdot\|$. 证明存在正常数 a 和 b, 使得

$$a\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_k)\in D_n} \left\|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k\right\|^2 \leqslant b\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2, \quad \forall x_1, \cdots, x_n \in X.$$

(3) 设 $1 \leqslant p \neq 2 \leqslant \infty$, 证明空间 c_0, ℓ^p 和 $L^p(0,1)$ 没有等价的内积范数.

Exercise 3 [正交]

设 $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个内积空间.

(a) 设 $A, B \subset E$, 回顾如果 $A \subset B$, 则 $B^\perp \subset A^\perp$. 证明

$$(1)\ (A\cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp; \quad (2)\ A^\perp + B^\perp \subset (A\cap B)^\perp; \quad (3)\ A^\perp \cap B^\perp \subset (A+B)^\perp$$

- 如果 $0 \in A \cap B$, 证明 (3) 中的包含是等于.
- 证明 $A \subset A^{\perp\perp}$ 和 $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.

(b) 假设 E 是一个 Hilbert 空间. 如果 F, G 是 E 的两个闭子空间且满足 $F \perp G$, 证明 $F+G$

是闭的.（提示：对于 $x \in F, y \in G$，我们对 $x+y$ 的范数可以如何刻画?）

Exercise 4 [投影算子和正交]

令 E 是一个赋范空间. 设 $p \in \mathcal{B}(E)$ 是一个投影算子，即 $p \circ p = p$. 回顾 $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Rg}(p)$ ($\oplus$ 表代数直和).

(1) 证明 $\mathrm{Rg}(p)$ 是闭的.（提示：找到集合 $\mathrm{Rg}(p)$ 的一个等价刻画）

进一步假设 E 是一个内积空间，我们称 p 是一个正交投影算子，若对任意 $x \in E$，有 $x - p(x) \perp \mathrm{Rg}(p)$.

(2) 证明如果 p 是一个正交投影算子，则 $\|p\| \leqslant 1$，并且当 $p \neq 0$ 时，$\|p\| = 1$.

(3) 证明如果 p 是一个满足 $\|p\| \leqslant 1$ 的投影算子，则 p 是正交的.（提示：考虑 $h(\lambda) = \|p(x+\lambda y)\|^2 - \|x+\lambda y\|^2$，其中 $x \in E, y \in \mathrm{Rg}(p), \lambda \in \mathbb{K}$; 证明 $x - p(x) \perp y$）

第九次作业 (4.3 至 4.4)

Exercise 1 [正交和密度]

令 $E = c_{00}(\mathbb{N})$ 是仅有有限个分量非零的实序列组成的空间. 在 E 上定义内积 $\langle u, v\rangle = \sum_{n \geqslant 0} u_n v_n$，其中 $u = (u_n), v = (v_n)$. 并考虑 E 上由此内积诱导的范数.

(1) 定义 $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{u_n}{n+1}$，证明 $f \in E^*$ 并且 $F = \mathrm{Ker}(f)$ 是闭的. 计算 $\|f\|_{E^*}$.

(2) 证明 $F^{\perp} = \{0\}$，推出 $F^{\perp\perp} \neq \overline{F}$. 这和我们课堂讲的内容矛盾吗?

Exercise 2 [课本习题四第 13 题]

设 $E = C([0,1])$ 上装备有如下的内积

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t.$$

并设 E_0 表示在 $[0,1]$ 上积分为 0 的函数组成的 E 的向量子空间. 考虑 E 的向量子空间:

$$H = \{f \in E : f(1) = 0\} \text{ 且 } H_0 = E_0 \cap H.$$

(a) 验证 H_0 是 H 的闭的真向量子空间.

(b) 设 $h(t) = t - \frac{1}{2}, t \in [0,1]$. 证明

(i) $E = \mathrm{Span}(H, h)$ 且有 $E_0 = \mathrm{Span}(H_0, h)$;

(ii) h 属于 H_0 在 E 中的闭包.

(c) 证明在 E_0 中 $H_0^{\perp} = \{0\}$. 解释所得结果蕴含的意义.

Exercise 3 [自伴算子的范数]

设 H 为一个 Hilbert 空间，$T \in \mathcal{B}(H)$ 是自伴算子（即 $T^* = T$）.
我们将证明 $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle|, \|x\| \leqslant 1\}$. 记 $M = \sup\{|\langle Tx, x\rangle|, \|x\| \leqslant 1\}$. 证明:

- $M \leqslant \|T\|$，并且 $|\langle Tx, x\rangle| \leqslant M\|x\|^2, \forall x \in H$.
- 对任意 $x, y \in H$，有 $\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle = 4\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle$.
- 推出 $\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle \leqslant M\|x\|\|y\|$，并进一步证明 $|\langle Tx, y\rangle| \leqslant M\|x\|\|y\|$.
- 证明 $\|T\| \leqslant M$，从而得证.
- 一个应用：令 $S \in \mathcal{B}(H)$ 且满足 $\langle Sx, x\rangle = 0, \forall x \in H$. 通过计算 $\langle S(x+iy), x+iy\rangle$，证明 S 是自伴算子. 由此推出 $S = 0$. 如果 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$，该结论是否依旧成立?

Exercise 4 [共轭算子]

我们来计算几个算子的共轭算子.

(1) 设 H 是一个 Hilbert 空间，给定 $u, v \in H$. 定义映射 $\varphi(x) = \langle x, u\rangle v$，其中 $x \in H$. 计算 $\|\varphi\|_{\mathcal{B}(H)}$ 和 φ^*.

(2) 定义 T 为:

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \quad \text{对所有的 } f \in E = L^2(0,1;\mathbb{R}).$$

证明 $T \in \mathcal{B}(E)$. 利用富比尼定理，计算 T^*.

(3) 考虑左移算子 $S_l : \ell^2(\mathbb{N}^*) \to \ell^2(\mathbb{N}^*)$, 定义为 $S_l(u) = (u_{n+1}) = (u_2, u_3, \cdots)$, 其中 $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$. 证明 $S_l \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}^*))$. 计算 $\|S_l\|$ 和 S_l^*.

Exercise 5 [算子和共轭算子]

设 H 为 Hilbert 空间. 设 $T \in \mathcal{B}(H)$，记它的伴随算子（或称共轭算子）为 T^*.

(1) 证明 $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*T)$.

(2) 设 E 是 H 的子向量空间，满足 $T(E) \subset E$. 证明 $T^*(E^\perp) \subset E^\perp$.

Exercise 6 [两个子空间的和]

令 $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 表示 $\ell^2(\mathbb{N})$ 中的标准正交基. 令

$$E = \mathrm{Span}\{e_{2n+1} \mid n \geqslant 0\}^\perp \quad \text{和} \quad F = \mathrm{Span}\{e_{2n} - (2n+2)e_{2n+1} \mid n \geqslant 0\}^\perp.$$

(1) 快速说明 E, F 是 $\ell^2(\mathbb{N})$ 的两个闭子向量空间.

(2) 证明 $E = \overline{\mathrm{Span}\{e_{2n} \mid n \geqslant 0\}}$. 你能将 F 也表示出来吗? 证明 $E \cap F = \{0\}$.

(3) 设 $x \in \mathrm{Span}\{e_k \mid k \geqslant 0\}$，证明 $x \in E + F$. [提示：令 $x = u + v$，其中 $u \in E, v \in F$，先确定 v_{2n+1}，即 v 的奇分量.]

(4) 设 $y = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}$，请问 $y \in E+F$ 是否成立? 证明 $E+F$ 在 $\ell^2(\mathbb{N})$ 中稠密但不是闭集.

第十次作业 (5.1 至 5.3)

Exercise 1 [内积]

令 $E = \mathbb{R}_2[X]$ 是所有阶数小于等于 2 的多项式的全体. 对任意 $P, Q \in E$，设

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{0\leqslant i\leqslant 2} 2^i P(i)Q(i).$$

(1) 证明 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 定义了 E 上的一个内积，快速说明 $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个 Hilbert 空间.

(2) 针对 $\{1, x, x^2\}$，利用 Gram-Schmidt 正交化法，找到 E 的一组正交基.

Exercise 2 [最优化或最小距离]

令 $E = L^2(\mathbb{R}_+, \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x)$.

(1) 在 E 上给定自然的内积，证明 E 是一个 Hilbert 空间. 计算

$$\int_0^\infty x^k \mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad p > 0.$$

(2) 利用正交投影确定 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 使其最小化

$$J = \int_0^\infty |\mathrm{e}^{-x} - ax^2 - bx - c|^2 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

Exercise 3 [课本习题四第 12 题]

设 H 是内积空间. $(x_1, \cdots, x_n)$ 是 H 中的任一向量组, 称矩阵 $(\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 的行列式为向量组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的 Gram 行列式, 记作 $G(x_1, \cdots, x_n)$.

(1) 证明 $G(x_1, \cdots, x_n) \geqslant 0$；且 $G(x_1, \cdots, x_n) > 0$ 当且仅当向量组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 线性独立.

(2) 假设向量组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 线性独立. 令 $E = \operatorname{span}(x_1, \cdots, x_n)$. 证明

$$d(x, E)^2 = \frac{G(x, x_1, x_2, \cdots, x_n)}{G(x_1, x_2, \cdots, x_n)}, \quad \forall x \in H.$$

Exercise 4 [Baire 定理的应用]

设 f 是一个从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数，且满足对任意 $x > 0$，$\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$. 我们将证明 $\lim_{y\to\infty} f(y) = 0$. 令 $\varepsilon > 0$，记 $F_k = \{y \geqslant 0 : |f(ny)| \leqslant \varepsilon, \forall n \geqslant k\}$.

(1) 证明：对任意 $k \in \mathbb{N}$，F_k 是闭集. 证明 $(0, \infty) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$.

(2) 利用 Baire 定理推出：存在 $y_0 > 0$ 使得对所有的 $x \geqslant y_0$，都有 $|f(x)| \leqslant \varepsilon$. 由此得出我们要证明的结论. （提示：我们什么时候可以说两个区间的并集仍是一个区间?）

Exercise 5 [课本习题六第 13 题]

(1) 设 E 是赋范空间，F 是 E 的向量子空间. 证明：若 $F \neq E$，则 F 在 E 中的内部是空集.

(2) 由此证明所有的多项式构成的空间不能赋予完备范数.

Exercise 6 [课本习题六第 6 题]

设 E 和 F 都是 Banach 空间，(u_n) 是 $\mathcal{B}(E,F)$ 的序列. 证明下列命题等价：

(1) $(u_n(x))$ 在每个 $x \in E$ 处收敛.

(2) $A \subset E$ 且 $\mathrm{span}(A)$ 在 E 中稠密，$(u_n(a))$ 在每个 $a \in A$ 处收敛，且 (u_n) 有界

Exercise 7 [课本习题六第 7 题]

考虑空间 $E = (C([0,1]),\mathbb{R})$，其上赋予一致范数 $\|\cdot\|_\infty$. 定义 $(C([0,1]))^*$ 中的连续泛函序列 (u_n) 如下

$$u_n(f) = n\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

(1) 证明：如果 f 是 Lipschitz 函数，则

$$\frac{u_n(f)}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad 当n \to \infty.$$

(2) 证明：$\|u_n\| = 2n$.

(3) 由此导出集合

$$\left\{f \in E : \frac{u_n(f)}{n} \neq O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

是 $C([0,1])$ 中稠密的 G_δ 集.

Exercise 8 [课本习题六第 16 题]

设 $X = C^1([0,1],\mathbb{R})$，即由 $[0,1]$ 上有连续导数的函数构成的集合，其上赋予连续一致范数 $\|\cdot\|_\infty$，并设 $Y = C([0,1],\mathbb{R})$，其上也赋予一致范数. 考虑映射 $u : X \to Y$，$u(f) = f'$.
证明：u 的图像是闭的，但 u 不连续. 解释该结论的意义.

第十一次作业 (6.1 至 6.2)

Exercise 1 [特征值和谱半径]

在 $E = C([0,1],\mathbb{R})$ 上赋予范数 $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. 考虑算子 T 定义如下：$Tf(0) = \frac{\pi}{2} f(0)$ 并且

$$Tf(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}}\mathrm{d}t, \quad \forall x \in (0,1].$$

(1) 利用变量替换 $t = x\sin\theta$，证明对任意 $f \in E$，$Tf \in E$.

(2) 证明 $T \in \mathcal{B}(E)$ 且 $\|T\| = \frac{\pi}{2}$.

(3) 考虑 $g(x) = x^r$，其中 $r > 0$. 证明任意 $\lambda \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 都是 T 的特征值.

(4) 是否成立 $0 \in \sigma(T)$? T 的谱半径 $r(T)$ 是多少?

Exercise 2 [左移算子]

令 $E = \ell^2(\mathbb{N}_+, \mathbb{R})$，$S$ 为左移算子，即 $S(u) = (u_2, u_3, \cdots)$，其中 $u = (u_n)_{n\geqslant 1} \in E$.

(1) 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，记 $v^\lambda = (\lambda^n)_{n\geqslant 1}$. 证明 $v^\lambda \in E$ 当且仅当 $|\lambda| < 1$. 计算 $\|v^\lambda\|$.

(2) 证明 $\sigma_p(S) = (-1, 1)$. 证明对任意 $\lambda \in (-1, 1)$，$\ker(S - \lambda I) = \operatorname{span}\{v^\lambda\}$. 这里 I 是 E 到 E 的恒等映射.

(3) 计算 $\|S\|, \rho(S), \sigma(S)$ 以及 S 的谱半径 $r(S)$.

Exercise 3 [复合算子的谱]

设 E 是一个 Banach 空间. 设 $T, S \in \mathcal{B}(E)$.

(1) 假设 $\|T\|, \|S\| < 1$. 证明算子 $I - TS, I - ST$ 都是可逆的并且

$$(I - TS)^{-1} = I + T(I - ST)^{-1}S.$$

(2) 对任意 $T, S \in \mathcal{B}(E)$，证明 $(I - TS)$ 可逆当且仅当 $(I - ST)$ 是可逆的.

(3) 推出对任意 $T, S \in \mathcal{B}(E)$，$\sigma(TS) \cup \{0\} = \sigma(ST) \cup \{0\}$.

(4) 假设 $E = \ell^2(\mathbb{N}_+), S$ 为左移算子. 是否成立 $\sigma(S^*S) = \sigma(SS^*)$?

名词索引

参考文献

[1] 许全华, 马涛, and 尹智. *泛函分析讲义*. 高等教育出版社, 北京, 2017.