$\sin(\sin x)$ の級数展開

Yuki Sakishita

2022 年 8 月 22 日

0 Introduction

$\sin(\sin x)$ のような 2 重の三角関数はフーリエ級数展開表示を求めようとしても Mathematica では答えが得られないが，実際は

$$\cos(\xi \sin\theta) = J_0(\xi) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(\xi)\cos(2m\theta)$$
$$\sin(\xi \sin\theta) = 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m-1}(\xi)\sin((2m-1)\theta)$$

という公式が知られている．

この等式の導出を示し，応用例として交流 Josephson 効果を紹介する．

1 Bessel 関数

パラメータ α（次数と呼ぶ）をもつ Bessel 微分方程式

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2-\alpha^2)y = 0 \tag{1}$$

の解 $J_\alpha(x)$, $Y_\alpha(x)$ を第 1 種，第 2 種 Bessel 関数という．前者は正則，後者は $x=0$ で特異性を持つ．$J_\alpha(x)$ はべき級数で記述できる．

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+a+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2m+\alpha} \tag{2}$$

実際に代入してみれば方程式 (1) を満たすことがわかる．整数次数の Bessel 関数は図 1 のように振動しながら減衰していくものになる．

歴史的には，第 1 種 Bessel 関数は惑星軌道に関する微分方程式の解として

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(nz - x\sin z)\mathrm{d}z \tag{3}$$

という積分表示で得られた定義が初出である．これも同じく方程式 (1) を満たすことが確認できる（参考：[1]）．

整数次数の第 1 種 Bessel 関数の母関数は

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)t^m = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] \tag{4}$$

と表されることが知られている．実際，

$$\begin{aligned}\exp\left[\frac{xt}{2}\right]\exp\left[\frac{x}{2t}\right] &= \left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{xt}{2}\right)^k\right\}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{x}{2t}\right)^k\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{k!l!}\left(\frac{x}{2}\right)^k\left(-\frac{x}{2}\right)^l t^{k-l}\end{aligned} \tag{5}$$

$m = k - l$ とおいて

$$\begin{aligned}&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{\infty}\frac{1}{(l+m)!m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{l+m}\left(-\frac{x}{2}\right)^l t^m \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(l+m)!m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+m} t^m\end{aligned} \tag{6}$$

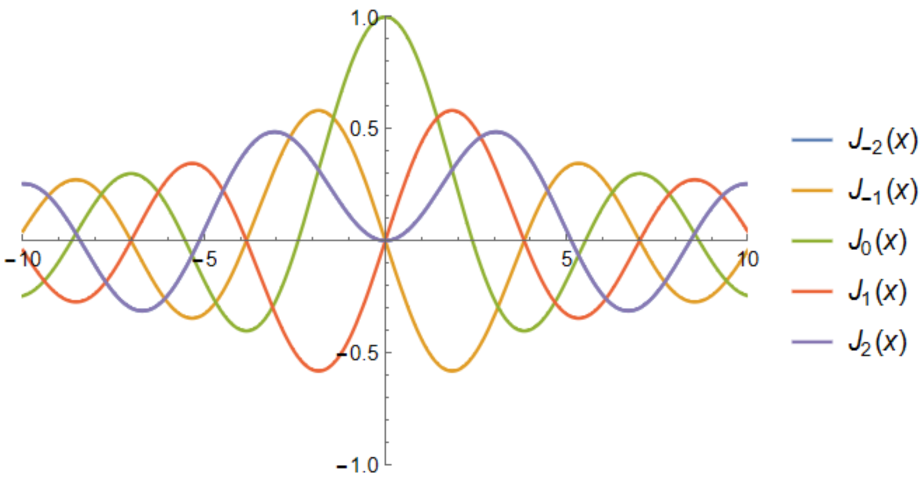

図 1　Bessel 関数のプロット例.

式 (2) より $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+m)!m!}(\frac{x}{2})^{2l+m} = J_m(x)$ であるから，式 (4) が示された.

2　2 重三角関数

※一般に「2 重三角関数」というと周期を多重周期性に拡張した多重三角関数を指すので注意.

$\sin(\sin(x))$ のような三角関数を 2 重適用した関数をより扱いやすい形に展開する．母関数

$$\exp\left[\frac{\xi}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\xi)t^n$$

で $t = e^{i\theta}$ とおくと

$$\begin{aligned} \exp(i\xi\sin\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\xi)e^{in\theta} \\ \cos(\xi\sin\theta) + i\sin(\xi\sin\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\xi)(\cos n\theta + i\sin n\theta) \end{aligned} \tag{7}$$

各項の虚部を比較すると

$$\begin{aligned} \cos(\xi\sin\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\xi)\cos(n\theta) \\ &= J_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty}(J_n(\xi) + J_{-n}(\xi))\cos(n\theta) \\ &= J_0(\xi) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(\xi)\cos(2m\theta) \end{aligned} \tag{8}$$

ただし，$J_{-n}(\xi) = (-1)^n J_n(\xi)$ である．同様に，実部を比較すると，

$$\begin{aligned} \sin(\xi\sin\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\xi)\sin(n\theta) \\ &= J_0(\xi)\cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty}(J_n(\xi) - J_{-n}(\xi))\sin(n\theta) \\ &= 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m-1}(\xi)\sin((2m-1)\theta) \end{aligned} \tag{9}$$

θ の関数としてみれば，sin/cos と θ に依存しない定数係数に分離できたことになる.

sin のなかに定数項が存在する場合は

$$
\begin{aligned}
\sin(\eta + \xi \sin\theta) &= \sin(\eta)\cos(\xi\sin\theta) + \cos(\eta)\sin(\xi\sin\theta) \\
&= \sin(\eta)\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\xi)\cos(n\theta) + \cos(\eta)\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\xi)\sin(n\theta) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\xi)\{\sin(\eta)\cos(n\theta) + \cos(\eta)\sin(n\theta)\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\xi)\sin(\eta + n\theta)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

のように変形できる．

3 Josephson 効果

これを用いた例を示す．2 つの超伝導体を薄い絶縁体などを挟んで近づけた場合，Josephson 効果と呼ばれる，絶縁されているにも関わらず電流が流れる効果が発生する．

量子力学的考察から，流れる電流 I，2 つの超伝導体の電位差 V は，2 つの超伝導体の BCS 波動関数の位相差 ϕ を用いて

$$
I(t) = I_{\mathrm{c}} \sin\phi(t) \tag{11}
$$

$$
\frac{4\pi e}{h} V(t) = \frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} \tag{12}
$$

と表されることが導かれる．ここで I_{c} は接合の材質・形状や温度によって決まる定数，e は電気素量，h はプランク定数である．

このような接合に外部電源によるバイアス電圧 V_0 とマイクロ波照射による振動電圧 $v_{\mathrm{rf}}\cos(2\pi f t)$ を印加する．

$$
V(t) = V_0 + v_{\mathrm{rf}}\cos(2\pi f t) \tag{13}
$$

ここで V_0，v_{rf} はバイアス電圧とマイクロ波の強度，f はマイクロ波の周波数，を表す定数である．このときの電流は

$$
\phi(t) = \int V \mathrm{d}t = \phi_0 + \frac{4\pi e}{h} V_0 t + \frac{4\pi e}{h}\frac{v_{\mathrm{rf}}}{2\pi f}\sin(2\pi f t) \tag{14}
$$

$$
I(t) = I_c \sin\left(\phi_0 + \frac{4\pi e}{h} V_0 t + \frac{4\pi e}{h}\frac{v_{\mathrm{rf}}}{2\pi f}\sin(2\pi f t)\right) \tag{15}
$$

のように二重の三角関数で表される．式 (10) の Bessel 級数による展開を用いると，

$$I(t) = I_{\mathrm{c}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{2ev_{\mathrm{rf}}}{hf}\right) \sin\left(\phi_0 + \left(\frac{4\pi e}{h} V_0 + 2\pi n f\right) t\right) \tag{16}$$

と表せる．電流測定では，サンプリング周期に渡った平均値が観測される．一般的な電流測定ではサンプリング周波数は数 kHz 程度であるのに対し，摂動項の周波数 f は数 100 MHz〜数 100 GHz と十分に小さい．すなわち，$I(t)$ の波数 $\frac{4\pi e}{h} V_0 + 2\pi n f$ は V_0 が $-hf/2e$ の定数倍に近い非常に狭い領域を取る場合を除いて長時間の平均により 0 になる．すなわち，Josephson 定数 $K_{\mathrm{J}} = 2e/h$ を用いて

$$I(t) = \begin{cases} I_{\mathrm{c}} J_n\left(\frac{v_{\mathrm{rf}} K_{\mathrm{J}}}{f}\right) \sin(\phi_0 + \omega t) & |V_0 + nf/K_{\mathrm{J}}| \lesssim f_0/K_{\mathrm{J}} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{17}$$

のように表せる．f_0 は測定のサンプリング周波数で，例えば $f_0 = 1\,\mathrm{kHz}$，$f = 1\,\mathrm{GHz}$ の場合，$n = 1$ となる V_0 の相対誤差は 1×10^{-6} 程度である．これはすなわち，バイアス電圧 V_0 を掃引し電流を計測すると，電圧が f/K_{J} の整数倍のときのみ，高さ $J_n(v_{\mathrm{rf}} K_{\mathrm{J}}/f)$ のスパイク状の振動電流が流れ，それ以外では 0 となるような I-V 特性が観測されることを意味する．

このような効果を交流 Josephson 効果と呼ぶ．スパイクの間隔 f/K_{J} は物理定数 $K_{\mathrm{J}} = 483\,597.848\,416\,983\ldots\,\mathrm{GHz/V}$ と照射するマイクロ波の振動数 f のみによって決まるため，この効果は電圧標準として用いられている．

参考文献

[1]「ニュートン法で求めるベッセル関数の零点｜藤澤篤仁（ふじぽん）｜ note」, note（ノート）. `https://note.com/atz2238/n/n3e2a0fb0bfdb` (参照 2022 年 8 月 22 日).

[2] C. C. Grimes and S. Shapiro, “Millimeter-Wave Mixing with Josephson Junctions,” Phys. Rev., vol. 169, no. 2, pp. 397–406, May 1968, doi: 10.1103/PhysRev.169.397.