五一数学建模竞赛

承　诺　书

我们仔细阅读了五一数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白,在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式(包括电话、电子邮件、网上咨询等）与本队以外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道,抄袭别人的成果是违反竞赛规则的, 如果引用别人的成果或其它公开的资料（包括网上查到的资料）,必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺,严格遵守竞赛规则,以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为,我们愿意承担由此引起的一切后果。

我们授权五一数学建模竞赛组委会,可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示,在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

参赛题号（从 A/B/C 中选择一项填写）: B

参赛队号: T20689375728128

参赛组别（研究生、本科、专科、高中）: 本科

所属学校（学校全称）: 四川大学锦城学院

参赛队员: 队员 1 姓名: 李佳讯

队员 2 姓名: 余梓菱

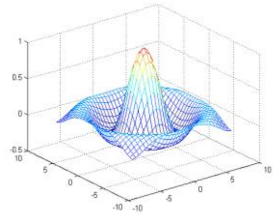
队员 3 姓名: 郭森民

联系方式: Email: l15882742927@163.com 联系电话: 15882742927

日期: 2021 年 5 月 1 日

（除本页外不允许出现学校及个人信息）

五 一 数 学 建 模 竞 赛



题 目： 消防救援问题

关键词： 数据分析模型、拟合函数、事件密度

摘 要： 本文针对消防救援问题,对于不同情况建立合理的数学模型。

针对问题一,在值班人员为 30 人确定的情况下,为使值班人数有一定的合理性。以时间和月份为区分标准,以年份为参考表建立一个二维数表,将所需数据填入表中,建立数据分析模型,对出警次数进行比例分析得出每年 2 月第一天时段 1、2、3 分别需要 5 人、13、12 人。5 月时段 1、2、3 分别需要 5 人、13 人、12 人。8 月时段 1、2、3 分别需要 8 人、11 人、11 人。11 月时段 1、2、3 分别需要 6 人、12 人、12 人。

针对问题二,通过对题目的分析建立拟合函数推测出 2020 年数据为 1 月:53，2 月:80,3 月:94,4 月:98,5 月:93,6 月:84,7 月:71,8 月:57,9 月:46,10 月:40,11 月:39,12 月:49 与附件 2 中 2020 年的数据分布和走向大致相同。同样的方法用拟合函数预测出 2021 年的数据为 1 月:46,2 月:71,3 月:84,4 月:88,5 月:84,6 月:76,7 月:64,8 月:53,9 月:44,10 月:39,11 月:41,12 月:52。

针对问题三，通过分析数据建立拟合函数，对比不同的拟合函数模型确认其函数为

$0007x^7-0.0358x^6+0.7018x^5-7.0494x^4+38.1266x^3-106.6332\,x^2+133.2636x-26.3939$

针对问题四，根据表的变化观察事件密度与地区的相关性。

针对问题五,建立不同类型事件的事件密度与人口密度的折线图观察折线图的走向得出该地事件类型的事件密度与人口密度的关系。

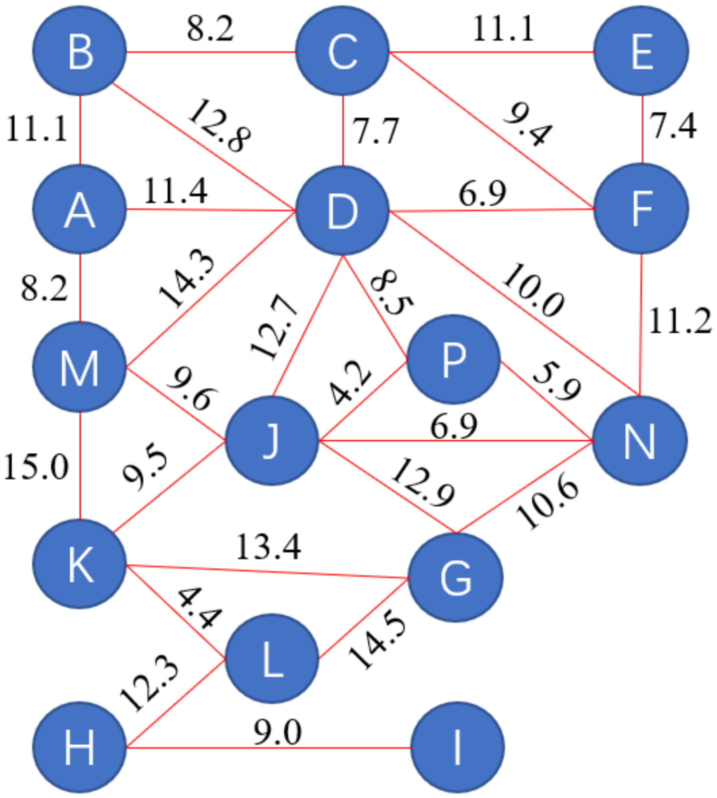
针对问题六,根据事件频率和最短距离确认消防站建立在 D 区，在 D 区建立的情况下剩余两个消防站建立在 K 和 G 区。

1、 问题重述

随着我国经济的高速发展，城市空间环境复杂性急剧上升，各种事故灾害频发，安全风险不断增大，消防救援队承担的任务也呈现多样化、复杂化的趋势。对于每一起出警事件，消防救援队都会对其进行详细的记录。

某地有 15 个区域，分别用 A、B、C…表示，各区域位置关系及距离如图 1 所示，附件 1 为各区域的人口及面积，附件 2 为该地消防救援队出警数据。

依据该地的消防出警数据，建立数学模型，完成以下问题：



图一：各区域位置关系及距离

（1）将每天分为三个时间段（0:00-8:00 为时段Ⅰ，8:00-16:00 为时段Ⅱ，16:00-24:00 为时段Ⅲ），每个时间段安排不少于 5 人值班。假设消防队每天有 30 人可安排值班，要求根据该地消防救援队出警数据，建立数学模型确定消防队在每年 2 月、5 月、8 月、11 月中第一天的三个时间段各应安排多少人值班。

（2）根据该地 2016 年 1 月 1 日至 2019 年 12 月 31 日的数据，以月份为单位，建立消防救援出警次数的预测模型；以 2020 年 1 月 1 日至 2020 年 12 月 31 日的数据作为模型的验证数据集，评价模型的准确性和稳定性，并对 2021 年各月份的消防救援出警次数进行预测，将所得结果填入表 1。

（3)依据 7 种类别事件的发生时间,建立各类事件发生次数与月份关系的多种数学模型,以拟合度最优为评价标准,确定每类事件发生次数的最优模型。

（4）根据各区域位置关系及距离,要求建立数学模型,分析该地区 2016-2020 年各类事件密度在空间上的相关性,并且给出不同区域相关性最强的事件类别（事件密度指每周每平方公里内的事件发生次数）。

（5）依据附件中给出的某地消防救援出警数据,要求建立数学模型,分析该地各类事件密度与人口密度之间的关系（人口密度指每平方公里内的人口数量）。

（6）目前该地有两个消防站,分别位于区域 J 和区域 N,请依据附件中各区域的人口、面积和某地消防救援出警数据,综合考虑各种因素,建立数学模型,确定新建 1 个消防站,建在哪个区域。在 2021-2029 年每隔 3 年新建 1 个消防站,则依次建在哪些区域。

2、问题的分析

2.1 对问题一的分析

问题一要求在保证每天有 30 人值班且每个班次不少于五人的情况下,依据附件数据建立数学模型,合理分配 2、5、8、11 月第一天三个时间段的值班人员数量。

针对合理分配值班人员数量这个问题,需综合考虑不同时间段的出警次数和人员分配的合理性。对于这个问题应从某地消防救援出警数据中挑选出 2016-2020 年的 2、5、8、11 月的第一天三个时间段的出警次数,以时间和月份为区分标准,以年份为参考表建立一个二维数表。将所需数据填入 Excel 中,将每年同一月份第一天不同时间段的出警次数进行数据统一,将所得数据填入二维数表,进行观察其中比例,对所得比例进行合理的数据分析,得到合理的人员分配数。

2.2 对问题二的分析

问题二包含三个子问题。首先通过消防救援出警数据建立出模型,并利用 2020 年数据进行验证,再进行 2021 年的数据预测。

针对第一个子问题应从月份和出警次数建立模型。对附件 2 消防救援出警数据中 2016-2019 年的各个月份出警次数进行统计并求出每个月的平均出警次数。通过 MATLAB 建立以月份为横轴,出警次数为纵轴的有关月份与出警次数的散点图,通过观察散点图的分布与走势来确定拟合函数,并用 MATLAB 画出拟合函数的图像。

针对第二个子问题需利用 2020 年数据对所建模型进行准确性和稳定性的评价。结合 2020 年的各个月份出警次数作为模型的验证数据集，评价模型的准确性和稳定性。

针对第三个子问题是利用所建模型对 2021 年数据进行预测。结合 2016-2020 年的各月份出警次数的数据求平均,再次通过 MATLAB 按照子问题一的建模方法得出 2016 至 2020 年的各月份出警次数拟合函数图像。利用图像预测出 2021 年的各月份出警次数。

2.3 对问题三的分析

问题三要求确定每类事件发生次数的最优模型。依据附件消防救援出警数据找出五年各月不同事件类型的总数。根据 MATLAB 代码可以看出各月份和各类型事件次数具有拟合关系，因此我们可以建立多种拟合函数。模型如下，$F=n+n_1x+n_2x^1+n_3x^2+n_4x^3+n_5x^4+n_6x^5+\cdots\cdots n_nx^{n-1}$.根据方差和判断其拟合效果，其方差和越小，效果越好。

2.4 对问题四的分析

问题四要求根据各区域之间的邻接关系及距离图建立数学模型来分析该地 2016-2020 年各类事件密度在空间上的相关性，并给出区域相关性最强的事件类别。对附件中某地消防出警数据进行分析，统计各区域内不同事件类型在五年内发生次数的总数将其记为数据 A。根据事件密度为每周每平方公里内的事件发生次数，对数据 A 进行处理求出每周事件发生次数的平均数，将平均数带入事件密度公式求出各区域内不同事件的事件密度并将结果记为数据 B，联立数据 B 与地区变量建立 MATLAB 表，根据表的变化观察事件密度与地区的相关性。

2.5 对问题五的分析

问题五要求根据消防出警数据建立模型为得到各类事件密度与人口密度的关系。通过附件一的数据求出每个区域的人口密度，将人口密度进行由小到大排列。因为不同人口密度对应着不同的区域，所以可把事件类型进行分类。用 MATLAB 建立 7 种以各区域人口密度为自变量，各类型事件在不同区域的事件密度为纵轴的散点图，对散点图的走向和布局进行分析，找到对应拟合函数的大致图像，结合拟合函数的图像得出该地各类事件密度与人口密度的关系。

2.6 对问题六的分析

针对问题六，建立消防站的影响因素有总事件密度、人口密度和距离因素，通过使出警次数更加均衡和出警路径更短，首先对数据 A 进行处理得到总事件密度，然后对附表 1 进行数据处理得到人口密度，再对图一:各区域之间的邻接关系及距离图进行数据处理得到不同地区之间的最短距离。消防站建立的大致区域需根据总事件密度判断，再根据人口密度进行数据对比，最后利用最短路径模型决定消防站的建立区域。

3、模型假设和符号说明

3.1 模型假设

（1）值班人员可以处理任何事件。。

（2）在三个时间段值班分配时每人只值班一次。

（3）消防车不受交通路况影响和地区面积影响。

（4）五年内人口密度变化不大。

（5）各事件类型之间不存在相互影响的关系。

（6）消防站接收到报警信号的时间相同。

3.2 符号说明

A：各区域内不同事件类型在五年内发生次数的总数。

B：各区域内不同事件的事件密度。

a：时段Ⅰ安排的值班人数。

b：时段Ⅱ安排的值班人数。

c：时段Ⅲ安排的值班人数。

D：五年内 2、5、8、11 月的第一天消防出警次数与对应月份构成的矩阵。

y1：2016 年 1 月 1 日至 2019 年 12 月 31 日的各月消防救援出警总次数的平均

数与各月份的拟合函数。

y2: 2016-2020 年的各月消防救援出警总次数的平均数与各月份的拟合函数。

e: 拟合函数的系数或常数。

q:拟合函数中的自变量（月份）。

4、模型的建立与求解

4.1 值班人数分配合理性选择模型

4.1.1 模型的建立

建立一个矩阵，以五年内 2、5、8、11 月的第一天不同时间段出警次数为行向量，各时间段为列向量。设时段 I 需要安排 a(a≥5)人值班，时段Ⅱ需要安排 b(b≥5)人值班，时段Ⅲ需要安排 c(c≥5)人值班。通过 Excel 将附件 2 中五年内 2、5、8、11 月的第一天的出警总数进行统计，然后根据不同时间段近一步将各月第一天出警次数分成三类，并建立如下矩阵 D：

$$D=\begin{bmatrix} 0 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

4.1.2 模型的求解

由矩阵 D 可得：a(2,1)=0,b(2,2)=8,c(2,3)=7;a(5,1)=2,b(5,2)=7,c(5,3)=8; a(8,1)=1,b(8,2)=3,c(8,3)=4;a(11,1)=0,b(11,2)=3,c(11,3)=2。(注:括号里面第一个数字表示月份第二个数字表示时段数。)

由上面数据分析可知,在二月第一天时段 I 事件发生次数频率接近于 0,但每次值班人数最低为 5 人，故 a_2=5,剩下的 25 人按比例安排在 b_2，c_2 中，及 b_2：c_2=8:7； b_2+ c_2=25,联立求解得 b_2=40/3≈13.3 c_2=35/3≈11.6，整数相加后，剩余一人，又因为 0.6>0.3，故时段Ⅲ更需要增加一名值班人员，所以将剩余一人派遣到 c_2，, 故 b_2 向下取整, c_2 向上取整, 即 b_2=13, c_2=12, 因此消防队在每一年 2 月的第一天三个时段安排值班人员分别为:5 人、13 人、12 人。

五月的每一时段都存在消防出警数据,所以按数据比例分配人数，即 a_5: b_5: c_5=2:7:8；a_5 +b_5+c_5=30，联立求解可得 a_5=60/17≈3.5，b_5 =210/17≈12.4，c_5=240/17≈14.1，因为 3.5<最低值班人数 5，所以使得 a_5=5，剩下 25 人用来安排时段Ⅱ和时段Ⅲ的值班人员。设 b_5=7x, c_5=8x;可建立如下方程:7x+8x=25;解得 x=5/3,故 b_5=35/3≈11.6, c_5=40/3≈13.3,因为值班人员必须为正整数且 0.3<0.6,故时段Ⅱ更需要增加一名值班人员,故 b_5 向上取整, c_5 向下取整,即 b_5=12, c_5=13,因此消防队在每一年 5 月的第一天三个时段安排值班人员分别为:5 人、12 人、13 人。

八月的每一时段都存在数据,所以按数据比例分配人数，即 a_8: b_8: c_8=1:3:4; a_8 +b_8+c_8=30，联立求解可得 a_8=15/4=3.75，b_8 =45/4=11.25，c_8=15，因为 3.75<最低值班人数 5,所以使得 a_8=5,剩下 25 人用来安排时段Ⅱ和时段Ⅲ的值班人员。设 b_8=3x, c_8=4x;可建立如下方程:3x+4x=25;解得 x=25/7,故 b_5=75/7≈10.7, c_5=100/7≈14.2,因为值班人员必须为正整数且 0.7>0.2,故时段Ⅱ更需要增加一名值班人员,故 b_8 向上取整, c_8 向下取整,即 b_8=11, c_8=14,因此消防队在每一年 8 月的第一天三个时段安排值班人员分别为:5 人、11 人、14 人。

十一月第一天时段Ⅰ事件发生次数频率接近于 0,但每次值班人数最低为 5 人，故 $a_{11}=5$, 剩下的 25 人按比例安排在 b_{11}，c_{11} 中，由 b_{11}：$c_{11}=3:2$； $b_{11}+c_{11}=25$, 联立求解得 $b_{11}=15$，$c_{11}=10$，因此消防队在每一年 11 月的第一天三个时段安排值班人员分别为:5 人、15 人、10 人。

4.2 消防救援出警次数选择模型

4.2.1 模型的建立

以该地 2016 年 1 月 1 日至 2019 年 12 月 31 日的各月消防救援出警总次数的平均数为因变量，以月份为自变量，建立散点图，通过散点图的分布和走向，找到它的拟合函数 y1，通过拟合函数 y1 的结果与 2020 年的每个月消防救援出警次数进行比较，评价模型的准确性和稳定性，再建立五年所有各月消防救援出警总次数与月份的拟合函数 y2，通过拟合函数 y2 预测 2021 年各月份的消防救援出警次数。

4.2.2 模型的求解

对附件一 2016 年-2019 年的各月份消防出警次数进行统计,并用 Excel 绘制成如下表 1:

表 1：2016 年-2019 年的各月份消防出警次数

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
2	2016年	79	95	98	51	275	67	63	40	50	31	38	43
3	2017年	58	28	44	14	148	87	23	42	49	33	65	68
4	2018年	54	129	68	71	107	119	59	50	46	44	40	63
5	2019年	67	76	73	44	138	146	72	30	41	26	25	36
6	4年内求和	258	328	283	180	668	419	217	162	186	134	168	210
7	2020年	28	23	28	46	62	55	25	29	36	25	51	62
8	5年内求和	286	351	311	226	730	474	242	191	222	159	219	272
9	4年内平均	64.5	82	70.75	45	167	104.75	54.25	40.5	46.5	33.5	42	52.5
10	5年内平均	57.2	70.2	62.2	45.2	146	94.8	48.4	38.2	44.4	31.8	43.8	54.4

通过 MATLAB 绘制 2016 年-2019 年的各月份消防出警次数与月份的散点图:

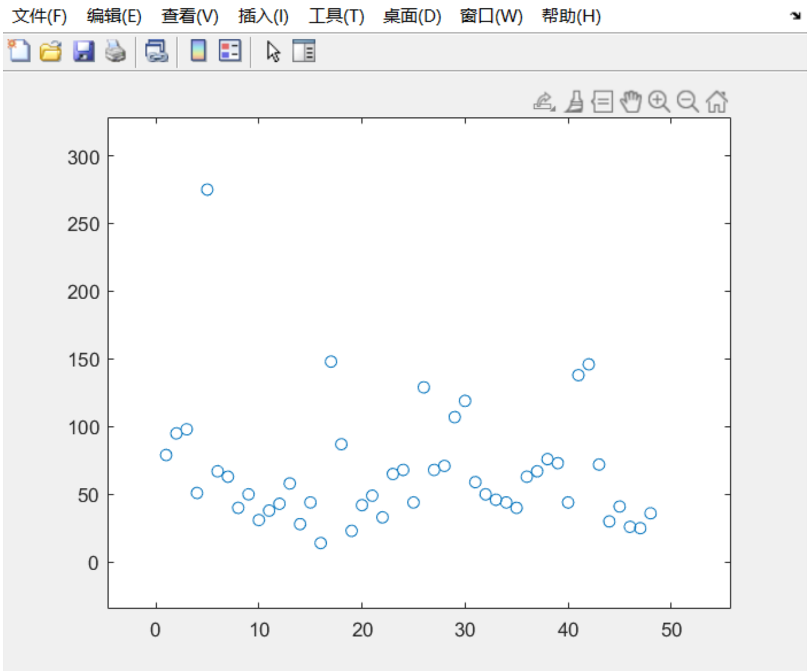


图 2：2016 年-2019 年的各月份消防出警次数与月份的散点图

由图可知该散点图的拟合函数 y1 是一个三次函数：

$y1 = e_{11}q_1^{\ 3} + e_{12}q_1^{\ 2} + e_{13}q_1 + e_{14}$ （q_1=1,2,3…12）其中由 MATLAB 的代码可知该拟合函数的 e_{11}=0.4177, e_{12}=−9.0196, e_{13}=51.3214, e_{14}=10.1212。

故 $y1 = 0.4177q_1^{\ 3} - 9.0196q_1^{\ 2} + 51.3214q_1 + 10.1212$ 。

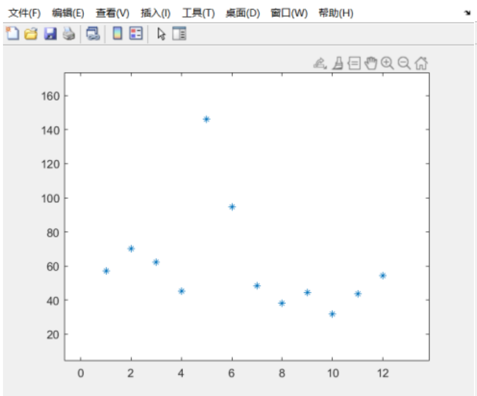
根据函数 y1 图像上的结果绘制下表:

表 2：统计 2020 年出警次数与拟合函数 y1 所预测的消防出警次数

	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
y1	53	80	94	98	93	84	71	57	46	40	39	49
2020 年消防出警次数	28	23	28	46	62	55	25	29	36	25	51	62

通过 Excel 将五年内各月份所有消防出警次数全部求平均,再通过上述方法画出 2016-2020 年的拟合函数: $y2 = e_{21}q_2^{\ 3} + e_{22}q_2^{\ 2} + e_{23}q_2 + e_{24}$ (q_2=1,2,3…12)由 MATLAB 代码可知该拟合函数的 e_{21}=0.3909,e_{22}=-8.3198,e_{23}=47.3206,e_{24}=6.2889。

故 $y2 = 0.3909q_2^{\ 3} - 8.3198q_2^{\ 2} + 47.3206q_2 + 6.2889$



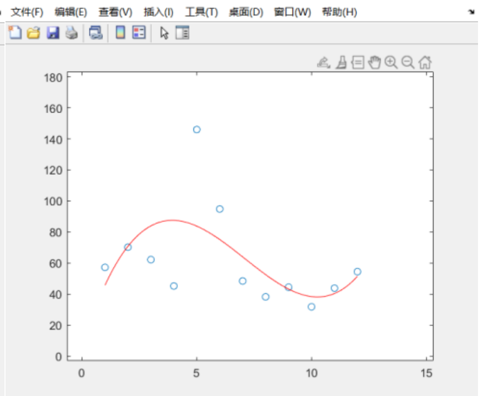


图 3 与图 4：五年内平均数散点图与拟合函数

根据拟合函数 y2 进行预测 2021 年各月份消防出警次数如下表:

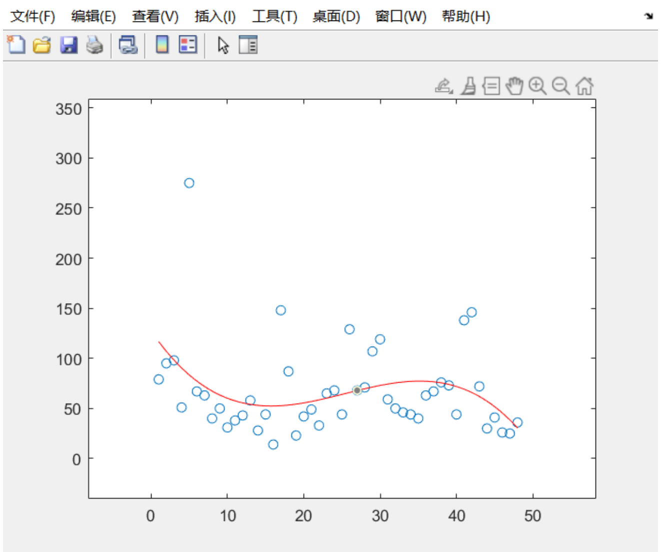


图 5：所有数据拟合函数

表 3：2021 年各月份消防出警次数

月份	预测值（次）
2021 年 1 月	46
2021 年 2 月	71
2021 年 3 月	84
2021 年 4 月	88
2021 年 5 月	84
2021 年 6 月	76
2021 年 7 月	64
2021 年 8 月	53
2021 年 9 月	44
2021 年 10 月	39
2021 年 11 月	41
2021 年 12 月	52

4.3 各类事件发生次数与月份关系选择模型

4.3.1 模型的建立

根据五年内每月每类型的事件数总和，建立拟合函数

4.3.2 模型的求解

根据附件 2 的数据得到各类型在五年内各月份发生事件次数的总和，带入代码（见附录）得到同事件类型模型对比表。

表 4：同事件类型模型对比表

A	B	C	D	E	F	G	H
	1	2次	3	4	5	6	7
1	1.45E+03	9.10E+02	6.31E+02	3.39E+02	3.11E+02	2.27E+02	1.73E+02
2	7.89E+01	78.53546	60.58364	59.50359	50.85346	46.16874	45.94271
3	3.31E+04	3.31E+04	2.65E+04	2.60E+04	2.26E+04	2.20E+04	1.61E+04
4	4.31E+02	3.25E+02	3.16E+02	1.95E+02	1.86E+02	1.60E+02	1.44E+02
5	1.44E+02	7.31E+01	7.27E+01	5.20E+01	4.91E+01	46.86626	38.54986
6	9.74E+02	7.85E+02	6.96E+02	4.59E+02	3.89E+02	3.85E+02	3.28E+02
7	8.36E+04	6.60E+04	5.29E+04	4.81E+04	4.07E+04	3.91E+04	2.31E+04

对比数据可得在类型一定时,拟合函数的次数越高,拟合方差越低,拟合度越高。当次数大于 7 次时,数据缺失不能精准计算。将拟合函数定为 7 次,再将各类型在五年内各月份发生事件次数的总和带入各个事件类型的拟合函数中,比较其方差和,得表 5:不同事件类型模型对比表。

表 5:不同事件类型模型对比表

	1	2	3	4	5	6	7
1	1.73E+02	8.80E+03	3.53E+04	2.21E+03	1.33E+04	4.71E+03	2.83E+05
2	8.92E+03	45.94271	5.82E+04	2.83E+03	6.05E+02	3.21E+03	3.71E+05
3	1.94E+04	4.22E+04	1.61E+04	2.95E+04	4.99E+04	3.37E+04	1.94E+05
4	2.24E+03	2.74E+03	4.54E+04	1.44E+02	5.48E+03	1.26E+03	3.21E+05
5	1.35E+04	6.13E+02	6.59E+04	5.58E+03	38.54986	5.15E+03	3.92E+05
6	4.56E+03	2.93E+03	4.95E+04	1.07E+03	4.86E+03	3.28E+02	3.23E+05
7	2.61E+05	3.48E+05	1.87E+05	2.98E+05	3.69E+05	3.00E+05	2.31E+04

最后通过对比得最佳模型为事件四的 7 次模型。

$$0.0007x^7-0.0358x^6+0.7018x^5-7.0494x^4+38.1266x^3-106.6332x^2+133.2636x-26.3939$$

4.4 各类事件密度在空间上的相关性选择模型

4.4.1 模型的建立

各区域内不同事件的事件密度与地区变量建立 MATLAB 表,根据表的变化观察事件密度与地区的相关性。

4.4.2 模型的求解

对附件中某地消防出警数据进行分析,统计各区域内不同事件类型在五年内发生次数的总数将其记为数据 A。根据事件密度为每周每平方公里内的事件发生次数,对数据 A 进行处理求出每周事件发生次数的平均数,将平均数带入事件密度公式求出各区域内不同事件的事件密度并将结果记为数据 B,联立数据 B 与地区变量建立 MATLAB 表,根据表的变化观察事件密度与地区的相关性。

4.5 各类事件密度与人口密度关系的选择模型

4.5.1 模型的建立

通过附件一求出各个区域的不同人口密度,找到每个区域的不同事件类型的事件密度

4.5.2 模型的求解

求出人口密度，参考表 7 分别找到不同类型事件在不同区域对应的事件密度。

表六:不同区域对应的人口密度表

编号	人口（万人）	面积（km^2）	人口密度（万人/km^2）
P	15.90	10	1.606060606
J	5.40	74	0.072972973
D	6.07	75	0.080953333
F	6.58	85	0.077502945
C	5.56	88	0.063148864
N	7.50	89	0.084175084
A	6.62	90	0.073574444
H	6.09	93	0.065443011
E	9.24	111	0.08325045
G	7.73	113	0.06840708
M	9.80	119	0.082361345
B	8.76	120	0.073014167
I	7.76	125	0.0620432
L	5.86	128	0.045797656
K	8.79	132	0.066559091

表七：不同区域对应的不同事件类型事件密度表

	p	j	d	f	c	n	a	h	e	g	m	b	i	l	k
1	0.06705	0.00104	0.00097	0.00117	0.00183	0.00056	0.00081	0.00062	0.00086	0.00068	0.00048	0.00061	0.00018	0.00015	0.00058
2	0.01916	0.00067	0.00046	4.5E-05	4.4E-05	0.00022	0.00026	0.00025	0.00014	6.8E-05	0.00019	9.6E-05	3.1E-05	6E-05	8.7E-05
3	0.09004	0.00145	0.00128	0.00113	0.00061	0.00129	0.00094	0.00045	0.00217	0.00112	0.00161	0.00051	0.00031	0.00069	0.00093
4	0.04904	0.00062	0.00066	0.00041	0.00039	0.00026	0.00081	0.00045	0.00031	0.00064	0.00039	0.00022	0.00018	0.00042	0.00029
5	0.00728	5.2E-05	0.0001	9E-05	8.7E-05	0	4.3E-05	8.2E-05	6.9E-05	0.0001	9.7E-05	0	0	9E-05	0
6	0.08927	0.00041	0.0001	4.5E-05	0	4.3E-05	0.00013	0	0.0001	6.8E-05	0.00019	6.4E-05	3.1E-05	0.00018	5.8E-05
7	0.3069	0.00378	0.00424	0.00401	0.00235	0.00189	0.0037	0.00247	0.0048	0.00397	0.00399	0.00223	0.0015	0.00144	0.00328

表八：将表七中的数据扩大 10 万倍后的表

	p	j	d	f	c	n	a	h	e	g	m	b	i	l	k
1	6704.98	103.552	97.0626	117.196	182.863	55.9645	80.8855	61.7971	86.2932	67.8127	48.2952	60.6641	18.3908	14.9665	58.0518
2	1915.71	67.3087	45.977	4.50755	4.35388	21.5248	25.5428	24.7188	13.8069	6.78127	19.3181	9.57854	3.06513	5.98659	8.70777
3	9003.83	144.973	127.714	112.689	60.9544	129.149	93.6569	45.3178	217.459	111.891	160.984	51.0856	30.6513	68.8458	92.8829
4	4904.21	62.1311	66.4112	40.568	39.185	25.8298	80.8855	45.3178	31.0655	64.4221	38.6361	22.3499	18.3908	41.9061	29.0259
5	727.969	5.17759	10.2171	9.0151	8.70777	0	4.25713	8.23961	6.90346	10.1719	9.65904	0	0	8.97989	0
6	8927.2	41.4207	10.2171	4.50755	0	4.30496	12.7714	0	10.3552	6.78127	19.3181	6.3857	3.06513	17.9598	5.80518
7	30689.7	377.964	424.01	401.172	235.11	189.418	370.37	247.188	479.79	396.704	399.24	223.499	150.192	143.678	327.993

根据事件密度的定义求出不同区域对应的不同事件的事件密度,由于计算出的事件密度数据过于小,不方便我们找到事件密度与人口密度的关系,因此将事件密度数据扩大十万倍得到表八。

以人口密度为横坐标,不同类型事件在不同区域对应的事件密度为纵坐标（参考指标为表八中的数据）,过 MATLAB 建立 7 种不同的折线图如下图:

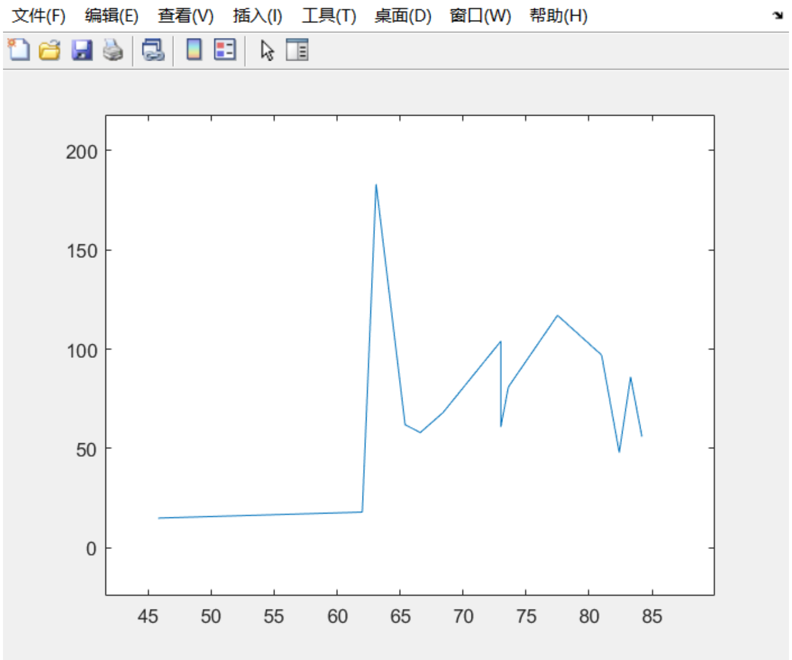


图 6:①事件的事件密度在不同人口密度下的折线图

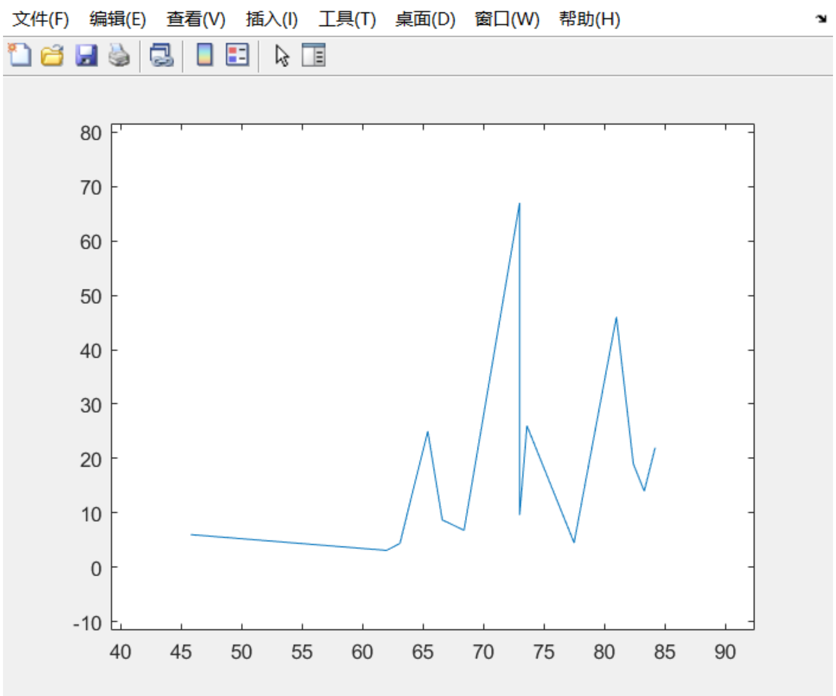


图 7:②事件的事件密度在不同人口密度下的折线图

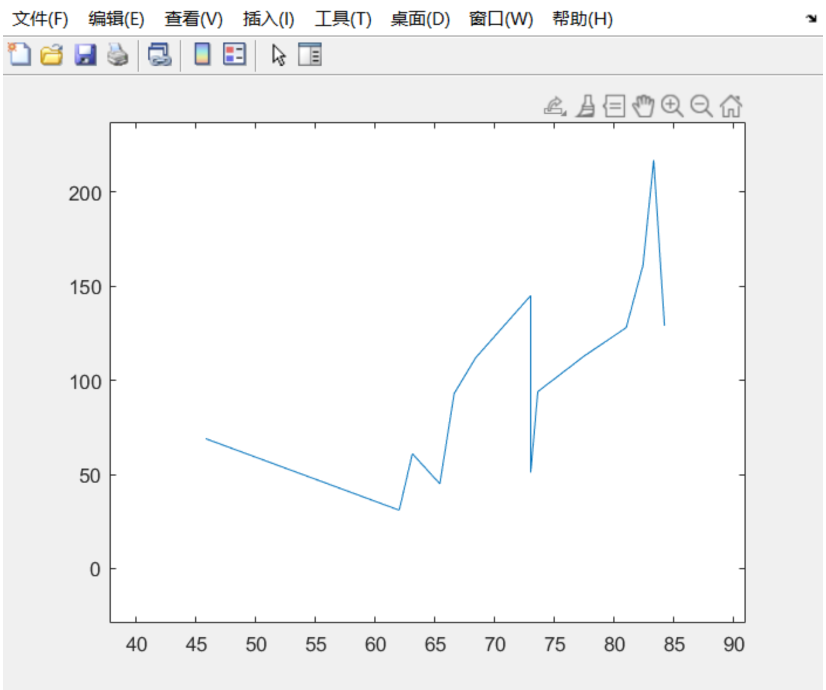


图 8:③事件的事件密度在不同人口密度下的折线图

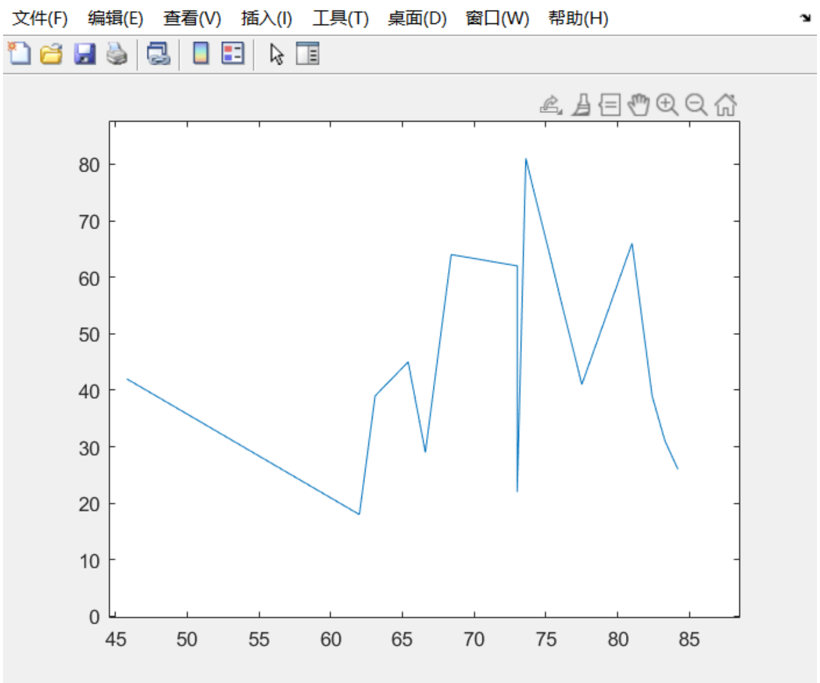


图 9:④事件的事件密度在不同人口密度下的折线图

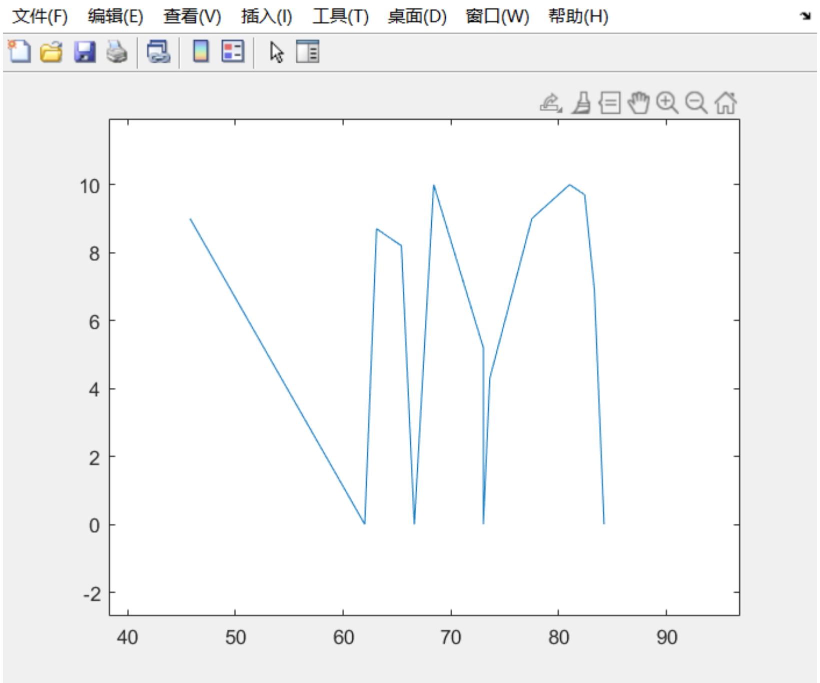


图 10:⑤事件的事件密度在不同人口密度下的折线图

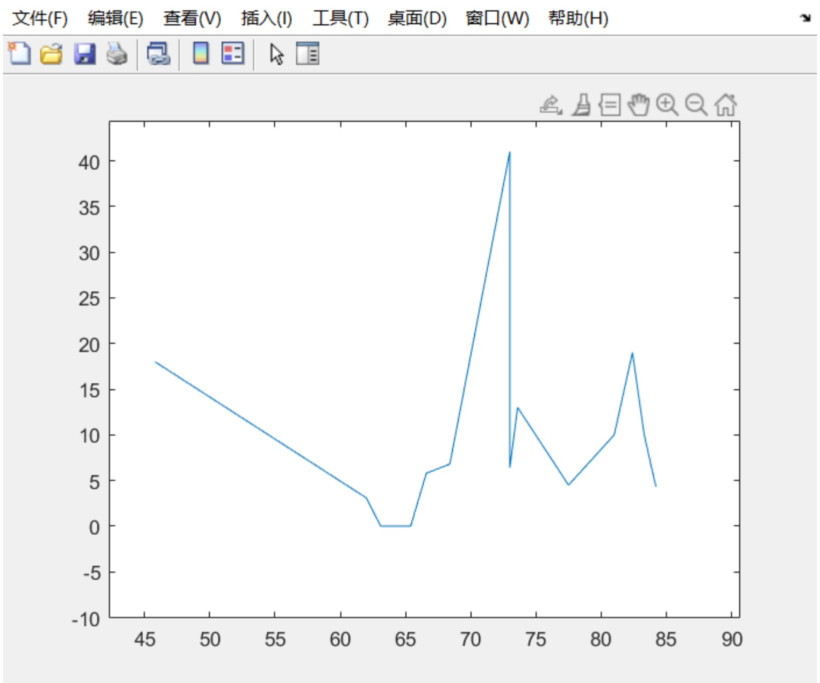


图 11:⑥事件的事件密度在不同人口密度下的折线图

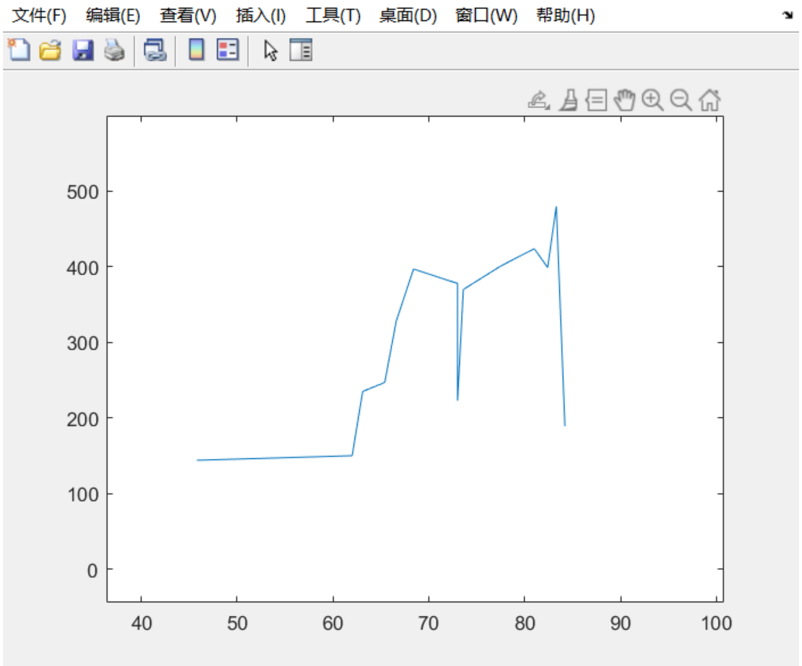


图 12:⑦事件的事件密度在不同人口密度下的折线图

通过图(6)当人口密度较小时,①事件的事件密度受人口密度的影响不大,当到一定数值时突然急剧增长,超过峰值时急剧降低,最后①事件的事件密度随人口密度的增加产生周期性的变化。

通过图（7）当人口密度较小时，②事件的事件密度随人口密度的增加而缓慢减小，当达到一定数值时②事件的事件密度开始增加，增加到一定数值又开始减小，最后随着人口密度的增加呈周期性变化。

通过图（8）当人口密度较小时，③事件的事件密度随人口密度的增加而减小，当达到一定数值时随着人口密度的增加而增加。

通过图（9）当人口密度较小时，④事件的事件密度随人口密度的增加而减小，当达到一定数值时开始增加而后保持在一定程度。

通过图(10)当人口密度较小时，⑤事件的事件密度随人口密度的增加而急剧减小,后面随着人口密度的增大进行周期性的急剧增长和降低。

通过图(11)当人口密度较小时，⑥事件的事件密度随人口密度的增加而急剧减小,当达到一定数值时急剧增加，超过峰值时开始急剧降低，后面随着人口密度的增加而缓慢增加和减少。

通过图(12)当人口密度较小的时候，⑦事件的事件密度不受人口密度的影响,当人口密度达到一定数值的时候,⑦事件的密度随着人口密度的增加而增加。人口密度过大时，⑦事件的事件密度反而急剧下降。

4.6. 消防站的确定选择模型

4.6.1 模型的建立

建立一个表,以距离为横向量，地点名为纵向量，另建立一张，以 5 年内所有事件密度为横向量，地点名为纵向量。将图一用矩阵表示。

4.6.2 模型的求解

针对第一个子问题，将图一表示出的矩阵如下表：

表九：地区距离矩阵

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	L	m	n	p
a	0	11.1	∞	11.4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	8.2	∞	∞
b	11.1	0	8.2	12.8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
c	∞	8.2	0	7.7	11.1	9.4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
d	11.4	12.8	7.7	0	∞	6.9	∞	∞	∞	12.7	∞	∞	14.3	10	8.5
e	∞	∞	11.1	∞	0	7.4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
f	∞	∞	9.4	6.9	7.4	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	11.2	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	12.9	13.4	14.5	∞	10.6	∞
h	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	9	∞	∞	12.3	∞	∞	∞
i	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	9	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
j	∞	∞	∞	12.7	∞	∞	12.9	∞	∞	0	9.5	∞	9.6	6.9	4.2
k	∞	∞	∞	∞	∞	∞	13.4	∞	∞	9.5	0	4.4	15	∞	∞
L	∞	∞	∞	∞	∞	∞	14.5	12.3	∞	∞	4.4	0	19.4	19.4	19.4
m	8.2	∞	∞	14.3	∞	∞	∞	∞	∞	9.6	15	∞	0	∞	∞
n	∞	∞	∞	10	∞	11.2	10.6	∞	∞	6.9	∞	∞	∞	0	5.9
p	∞	∞	∞	8.5	∞	∞	∞	∞	∞	4.2	∞	∞	∞	5.9	0

用 floyd 算法进行求解,得到每个区域与其他区域的最短路径如下表:

表十：各区域之间最短路径矩阵

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	L	m	n	p
i	48.9	60	55.6	47.9	60.7	53.3	35.8	9	0	35.2	25.7	21.3	40.7	42.1	39.4
h	39.9	51	46.6	38.9	51.7	44.3	26.8	0	9	26.3	16.7	12.3	31.7	33.1	30.4
e	25.7	19.3	11.1	14.3	0	7.4	29.2	51.7	60.7	25.5	35	39.4	28.6	18.6	22.8
b	11.1	0	8.2	12.8	19.3	17.6	38.4	51	60	25.5	34.3	38.7	19.3	22.8	21.3
a	0	11.1	19.1	11.4	25.7	18.3	30.7	39.9	48.9	17.8	23.2	27.6	8.2	21.4	19.9
L	27.6	38.7	34.3	26.6	39.4	32	14.5	12.3	21.3	13.9	4.4	0	19.4	20.8	18.1
g	30.7	38.4	28.3	20.6	29.2	21.8	0	26.8	35.8	12.9	13.4	14.5	22.5	10.6	16.5
c	19.1	8.2	0	7.7	11.1	9.4	28.3	46.6	55.6	20.4	29.9	f	22	17.7	16.2
f	18.3	17.6	9.4	6.9	7.4	0	21.8	44.3	53.3	18.1	27.6	32	21.2	11.2	15.4
m	8.2	19.3	22	14.3	28.6	21.2	22.5	31.7	40.7	9.6	15	19.4	0	16.5	13.8
k	23.2	34.3	29.9	22.2	35	27.6	13.4	16.7	25.7	9.5	0	4.4	15	16.4	13.7
d	11.4	12.8	7.7	0	14.3	6.9	20.6	38.9	47.9	12.7	22.2	26.6	14.3	10	8.5
n	21.4	22.8	17.7	10	18.6	11.2	10.6	33.1	42.1	6.9	16.4	20.8	16.5	0	5.9
j	17.8	25.5	20.4	12.7	25.5	18.1	12.9	26.3	35.2	0	9.5	13.9	9.6	6.9	4.2
p	19.9	21.3	16.2	8.5	22.8	15.4	16.5	30.4	39.4	4.2	13.7	18.1	13.8	5.9	0

观察可得距离该区域最远的区域及其距离并将其记为 v（）记作表十一，

表十一：各点最远距离

地区	最大距离
a	48.9
b	60
c	55.6
d	47.9
e	60.7
f	53.3
g	38.4
h	51.7
i	60.7
j	35.2
k	35
l	39.4
m	40.7
n	42.1
p	39.4

将得到的数据进行比较可以得出最小的五个数据 v(K), v(J), v(G), v(L), v(P),根据事件密度可以得知事件频发区以及人口密度最大的区域为 p 区。因为在 J 和 N 建立了消防站,所以我们根据 j 和 n 将图划分为 2 个

区块,ABCDEFMP 所在地为上区,KGHLI 所在地为下区,删去其中与 J 和 N 直接相连的区域,上区剩余地区为 ABCE,下区剩余地区为 HLI。将其事件密度相加可得上区大于下区,所以消防站应建立在上区。又因为 v(d)小于上区其他地域，所以建立在 D。

针对第二个子问题，为了使出警次数更加均衡和出警速度更快,可计算出一共需建立 3 个消防站,又因为第一个子问题可知,已在 d 区域建立了一个消防站，所以还需建立两个消防站。又因为 v（k）为最小，所以在 K 建立一个消防站，又因为除去 DKJN 后 G 为最小，故在 G 地建立一个消防站。

五、模型的评价与推广

5.1 模型评价

本模型可以推测未来数据，让出警次数更加均衡和出警时间更加快捷，保护人民的利益。

5.2 改进方向

本文没有考虑出警路途的交通路况，在实际生活中会受到一定影响。

本文没有考虑各地区形状和消防站应建立于各地区的何处。

5.3 模型推广

本模型对于消防救援推算出高发地,可使消防站出警次数更加的均衡，使各地消防救援时间更快。且该模型不仅对于消防站的建立适用，对于医院，警察局的建立同样适用。

六、参考文献：

[1]: 方世昌，离散数学，西安：西安电子科技大学出版社，2009 年

[2]: 王沫然，MATLAB 与科学，北京：电子工业出版社，2008 年

[3]: 吴美文，基于离散定位模型的城市消防站优化布局方法*，系统仿真技术，2006 年

[4]: 运筹学教学编写组,运筹学教程(第 2 版),北京：国防工业出版社,2014 年

[5]: 王继强，数学模型、算法与程序，北京：经济科学出版社，2019 年

七、附录

第二题 散点图：

```
x1=[1:12];
y1=[57.2,70.2,62.2,45.2,146,94.8,48.4,38.2,44.4,31.8,43.8,54.4];
plot(x1,y1,'*');
hold on
x=[1:48];
y=[79,95,98,51,275,67,63,40,50,31,38,43,58,28,44,14,148,87,23,42,49,33,65,68,44,129,68,71,107,119,59,50,46,44,40,63,67,76,73,44,138,146,72,30,41,26,25,36];
plot(x,y,'o');
```

求解：

```
x=[1:12];
y=[57.2,70.2,62.2,45.2,146,94.8,48.4,38.2,44.4,31.8,43.8,54.4];
y1=polyfit(x,y,3)
plot(x,y,'o');
```

```
hold on
xi=1:0.05:12;
yi=polyval(y1,xi);
plot(xi,yi,'r');
64.5,82,70.75,45,167,104.75,54.25,40.5,46.5,33.5,42,52.5
57.2,70.2,62.2,45.2,146,94.8,48.4,38.2,44.4,31.8,43.8,54.4
52.8,80.0,94.2,97.8,93.5,83.6,70.7,57.3,46.0,39.1,39.3,49.0,
y=[57.2,70.2,62.2,45.2,146,94.8,48.4,38.2,44.4,31.8,43.8,54.4];
```

第三题：

```
x=[1:12];
y1=[53,46,37,29,44,43,25,17,21,14,32,48,];
y2=[9,10,9,10,15,7,11,6,8,5,12,10];
y3=[56,86,60,24,219,60,13,3,7,7,36,46];
y4=[32,26,18,22,20,35,18,19,20,17,25,32];
y5=[1,2,2,6,4,8,6,11,0,0,0,0];
y6=[22,19,17,9,25,37,32,23,39,15,12,20];
y7=[113,162,168,126,403,284,137,112,127,101,102,116];
plot(x,y6,'o');
yl=polyfit(x,y6,1);
plot(x,y6,'o');
hold on
xa=1:12;
ya=polyval(yl,xa);
plot(xa,ya,'r');
z=0;
for k=1:12
a=ya(k);
c=y1(1,k);
b=(a-c)^2;
z=z+b;
end
d=z;
```