第 31 卷第 1 期 数学的实践与认识 Vol. 31 No. 1
2001 年 1 月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Jan. 2001

have the mathematical model—— a model of indefinite output.

After designing the model, firstly we use the method of improved minimal factors and the method of improved algorithm to get an initial solution; Secondly we use the method of iteration and the method of trial to adjust and modify it; Lastly we draw a conclusion.

# 钢管订购和运输策略

段晓军, 俞昌盛, 吴建德
指导老师: 张胜贵

(西北工业大学, 西安 710072)

**编者按**: 本文节选的是原论文中模型的分析与建立以及之前的准备工作部分. 该部分通过单位钢管的最小运购费, 建立了问题求解的二次规划模型, 特点是思路、表述简明、清晰, 尤其是第 3 问的模型具有较强的一般性, 适用于树形结构的通常情形. 值得注意的是, 模型中有关铺设费的假设和表达式与常见情形略有不同.

**摘要**: 在铺设管道为一条线的情况下, 我们建立了解决钢管订购和运输问题的非线性规划模型. 由于变量较少, 约束条件大都为线性的, 目标函数为二次函数, 所以利用Lingo 软件, 可以很快求得比较满意的订购和运输方案. 我们利用Matlab 软件, 对所得到的数据进行拟合, 得到相应的反映销价变化对总费用影响的曲线, 然后比较各个钢厂钢管销价变化对总费用影响的大小. 对于钢厂钢管产量上限变化对总费用和购运计划的影响, 我们也作了类似的处理. 如果要铺设的管道是树形图, 我们对树形图的每条边定向, 建立了与铺设管道为一条线时类似的数学模型, 从而大大拓广了模型的使用范围. 在论文中, 我们还对所建立的模型的优缺点和需要改进的方向进行了讨论.

## 1 符号说明

- $s_i$: 钢厂 $S_i$ 在指定期限内钢管的最大产量;
- $w_{i,j}$: $A_i$ 到$A_j$ 之间铺设管道的里程数;
- $c_{ij}$: 单位钢管从钢厂 $S_i$ 运到$A_j$ 所需最小订购和运输费用;
- $x_i$: 钢厂 $S_i$ 是否承担制造这种钢管;
- $y_{ij}$: 钢厂 $S_i$ 运抵$A_j$ 点的钢管数量, 不含路过$A_j$ 的部分;
- $z_j$: 运到$A_j$ 的所有钢管沿$A_j \to A_{j+1}$ 铺设的数量;
- $z_{ij}$: 运抵$A_i$ 的所有钢管沿$A_i \to A_j$ 铺设的数量;
- $d(A_j)$: 树中$A_j$ 的度数;
- $d^-(A_j)$: 树中$A_j$ 的入度;
- $d^+(A_j)$: 树中$A_j$ 的出度;
- $\mu$: 单位钢管 1 公里的公路运输费用.

## 2 基本假设

根据题目的要求, 并为达到简化问题的目的, 我们有以下假设:

1. 假设运到$A_j$ 的钢管, 只能在$A_{j-1}$ 到$A_{j+1}$ 之间包含$A_j$ 的某个区段内铺设. 并且到达

© 1994-2008 ... served. http://www.cnki.net
更多数学建模资料请关注微店店铺"数学建模学习交流"
https://k.weidian.com/RHO6PSpA

$A_j$ 的钢管在 $A_{j-1}$ 到 $A_{j+1}$ 之间包含 $A_j$ 的铺设区段和到达 $A_{j+1}$ 的钢管在 $A_j$ 到 $A_{j+2}$ 之间包含 $A_{j+1}$ 的铺设区段不相交. 否则的话, 总可以调节铺设方案, 使得总费用减少.

2. 在考虑问题 2 时, 假设钢管价格不可能有太大幅度变化. 所以, 我们只考虑钢管价格在其原售价 10% 的范围内波动. 同时, 我们假定, 钢厂的产量不可能成倍的增加或减少. 我们在减少 300 个单位, 增加 600 个单位的范围内讨论, 这意味着我们不考虑钢厂破产或者超大规模扩大生产的情况.

3. 在具体铺设每一公里时, 我们只把钢管运到每一公里开始的地方, 沿运送方向向前铺, 然后往前铺设的运送费用我们不予考虑.

## 3 模型建立

1. 问题 1 的模型

(1) 决策变量

我们首先引入一组 0 - 1 变量 $x_1, x_2, \cdots, x_7$, 其中 $x_i$ 表示钢厂 $S_i$ 是否承担制造这种钢管. 如果钢厂 $S_i$ 承担制造这种钢管, 则 $x_i = 1$, 否则 $x_i = 0$.

所有的钢管, 都是先运到 $A_1, A_2, \cdots, A_{15}$ 后, 或者转运到其它地方, 或者在包含 $A_j$ 的一个区段内铺设. 我们设从钢厂 $S_i$ 运抵 $A_j$ 且在包含 $A_j$ 的一个区段内铺设的钢管数量为 $y_{ij}$, 这里 $i = 1, 2, \cdots, 7$; $j = 1, 2, \cdots, 15$.

我们用变量 $z_j$ 来表示从所有的钢厂运到 $A_j$ 的钢管总量中沿 $A_j \to A_{j+1}$ 铺设的部分, 这里 $j = 1, 2, \cdots, 14$.

这样, 我们一共引入了三组决策变量: $x_i (i = 1, 2, \cdots, 7)$; $y_{ij} (i = 1, 2, \cdots, 7;\ j = 1, 2, \cdots, 15)$; $z_k (k = 1, 2, \cdots, 14)$.

(2) 目标函数

问题 1 的目的是寻求好的订购和运输方案, 使得总费用最小. 事实上, 总费用可以分成两部分. 第一部分包括钢管的订购费用和钢管从钢厂运抵 $A_1, A_2, \cdots, A_{15}$ 所需的运费; 我们用 $c_{ij}$ 来表示单位钢管从钢厂 $S_i$ 运抵 $A_j$ 所需的最小订购和运输费用, 则第一部分费用为

$$u_1 = \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{15} c_{ij} y_{ij}.$$

第二部分费用是指钢管运抵 $A_1, A_2, \cdots, A_{15}$ 后, 再运到具体铺设地点的费用. 由假设 3, 从 $A_j$ 到 $A_{j+1}$ 区段部分所需的费用为

$$\frac{\mu z_j (z_j - 1)}{2} + \frac{\mu (w_{j,j+1} - z_j)(w_{j,j+1} - z_j - 1)}{2},$$

其中 $w_{j,j+1}$ 表示 $A_j$ 到 $A_{j+1}$ 铺设管道的长度. 这样, 我们不难得知第二部分费用为

$$u_2 = \frac{\mu}{2} \sum_{j=1}^{14} [(z_j - 1) z_j + (w_{j,j+1} - z_j)(w_{j,j+1} - z_j - 1)].$$

(3) 约束条件

首先, 由于一个钢厂如果承担制造这种钢管, 则至少需要生产 500 个单位, 而钢厂 $S_i$ 在指定期限内能生产钢管的最大数量为 $s_i$ 个单位. 所以, 我们得到以下一组约束条件

$$500 x_i \le \sum_{j=1}^{15} y_{ij} \le s_i x_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, 7.$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由于订购的所有钢管总量等于 $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{15}$ 的里程数, 那么

$$\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} y_{ij} = 5171.$$

很显然, 我们可以设 $z_j \le w_{j,j+1}$. 因为如果 $z_j > w_{j,j+1}$, 则相当于有 $z_j - w_{j,j+1}$ 数量的钢管是从 $A_j$ 直接运送到 $A_{j+1}$ 后再送到具体铺设地点.

运抵 $A_j$ 的钢管总数量, 等于向包含 $A_j$ 的区段铺设的里程数, 那么

$$\sum_{i=1}^{7} y_{ij} = z_j + (w_{j-1,j} - z_{j-1}), \quad j = 2, 3, \cdots, 14.$$

并且, 我们还有 $\sum_{i=1}^{7} y_{i1} = z_1$ 和 $\sum_{i=1}^{7} y_{i,15} = w_{14,15} - z_{14}$.

(4) 数学模型

通过上面的分析, 我们得到问题 1 的如下模型

$$\min \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} c_{ij} y_{ij} + \frac{\mu}{2}\sum_{j=1}^{14}\left[z_j(z_j - 1) + (w_{j,j+1} - z_j)(w_{j,j+1} - z_j - 1)\right]$$

$$(A)\ s.t.\begin{cases} 500 x_i \le \sum_{j=1}^{15} y_{ij} \le s_i x_i, & j = 1, 2, \cdots, 7 \\ \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} y_{ij} = 5171 & \\ \sum_{i=1}^{7} y_{ij} = z_j + (w_{j-1,j} - z_{j-1}), & j = 2, 3, \cdots, 14 \\ \sum_{i=1}^{7} y_{i1} = z_1 & \\ \sum_{i=1}^{7} y_{i,15} = w_{14,15} - z_{14} & \\ 0 \le z_j \le w_{j,j+1}, & j = 1, 2, \cdots, 14 \\ x_i = 0, 1, & i = 1, 2, \cdots, 7 \\ y_{ij} \ge 0, & i = 1, 2, \cdots, 7;\ j = 1, 2, \cdots, 15 \end{cases}$$

可以看出, 这是一个非线性规划问题.

2. 问题 2 的模型

为了分析钢厂钢管销价的变化对购运计划和总费用的影响, 对于每个钢厂, 利用模型 (A), 我们分别算出它的钢管销价发生一系列的变化后, 所得到的总费用和购运计划; 并根据所得到的数据, 利用 Matlab 软件拟合出销价变化和总费用变化量关系的曲线, 对所得到的曲线进行分析和对比, 找到钢管销价变化对购运计划和总费用影响最大的钢厂. 类似地, 我们用同样的方法, 对钢厂产量上限发生变化对购运计划和总费用的影响进行了分析.

3. 问题 3 的模型

如果要铺设的管道不是一条线, 而是一个树形图, 我们首先给树形图的每条边指定一个方向, 使得所得到的有向树有一个度数为 1 的顶点的入度为 0, 而其它每个顶点的入度均为 1. 与问题 1 一样, 我们可以引入 0-1 变量 $x_i (i = 1, 2, \cdots, 7)$ 以及变量 $y_{ij} (i = 1, 2, \cdots, 7, j = 1, 2, \cdots, 21)$, 它们的含义与问题 1 中的定义完全一致. 类似于问题 1, 对于有向树的有向边 $(A_i, A_j)$, 我们用 $z_{ij}$ 表示运抵 $A_i$ 的所有钢管沿 $A_i \to A_j$ 铺设的里程数. 数学模型为

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\min \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} c_{ij} y_{ij} + \frac{\mu}{2} \sum_{(A_i, A_j) \in E(T)} [z_{ij}(z_{ij} - 1) + (w_{i,j} - z_{ij})(w_{i,j} - z_{ij} - 1)]$$

$$(B)\ s.t. \begin{cases} 500x_i \le \sum_{j=1}^{21} y_{ij} \le s_i x_i, & j = 1, 2, \cdots, 7 \\ \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{21} y_{ij} = 5903 \\ \text{当 } d(A_j) > 1 \text{ 时}, \sum_{i=1}^{7} y_{ij} = \sum_{(A_j, A_k) \in E(T)} z_{jk} + (w_{h,j} - z_{hj}), \text{其中} (A_h, A_j) \in E(T) \\ \text{当 } d^{+}(A_j) = 0 \text{ 时}, \sum_{i=1}^{7} y_{j1} = w_{k,j} - z_{kj}, \text{其中} (A_k, A_j) \in E(T) \\ \text{当 } d^{-}(A_j) = 0 \text{ 时}, \sum_{i=1}^{7} y_{ij} = z_{jk}, \text{其中} (A_j, A_k) \in E(T) \\ 0 \le z_{ij} \le w_{i,j}, & (A_i, A_j) \in E(T) \\ x_i = 0, 1, & i = 1, 2, \cdots, 7 \\ y_{ij} \ge 0, & i = 1, 2, \cdots, 7;\ j = 1, 2, \cdots, 21 \end{cases}$$

**参考文献**:

[1] 甘应爱, 田丰等著. 运筹学. 清华大学出版社, 北京, 1994.
[2] 袁亚湘, 孙文瑜著. 最优化理论与方法. 科学出版社, 北京, 1997.
[3] 徐俊明著. 图论及其应用. 中国科学技术大学出版社, 合肥, 1997.

# The Strategy of Ordering and Transporting Steel Tubes

DUAN Xiao-jun, YU Chang-sheng, WU Jian-de

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

**Abstract**: In the case the pipelines are in line-shape, we provide a nonlinear programming model for the problem. Since there are not too much variables, most of the constraints are linear, and the goal function is quadratic, one can get satisfactory strategies quickly by using the software Lingo. With the software Matlab, for each plant we get the curve that reflects the influence of the variation of its 'steel tubes' price to the total cost. Comparing these curves, we determine for which plant, the variation of its 'steel tubes' price has the serious influence to the total cost. As to the influences of the variations of the upper bound of the output of the steel tube to the total cost and the strategy of ordering and transporting, we treat the problem in a similar way. In the case the main pipelines are in tree-shape, we assign a direction to each edge of the tree and establish a model similar to the model in the line-shape case.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net