五一数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了五一数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与本队以外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其它公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们愿意承担由此引起的一切后果。

我们授权五一数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

参赛题号（从 A/B/C 中选择一项填写）： A

参赛队号： T20778189334528

参赛组别（研究生、本科、专科、高中）： 专科

所属学校（学校全称）： 四川大学锦城学院

参赛队员： 队员 1 姓名： 廖浩宇

队员 2 姓名：

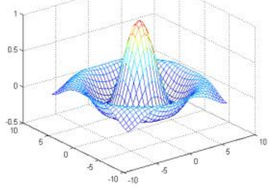
队员 3 姓名：

联系方式： Email： 403231479@qq.com 联系电话： 15528444464

日期： 2021 年 5 月 4 日

（除本页外不允许出现学校及个人信息）

五 一 数 学 建 模 竞 赛



题 目：基于疫苗生产问题的研究

关键词：统计分析　优化模型　目标规划模型　自适应概率标记法　MATLAB

摘　要：

本文主要针对疫苗的生产策略进行研究，针对每个疫苗在不同工位不能同时生产不同类型的疫苗，不允许插队等前提对生产疫苗的时间情况将进行讨论，对各个不同问题的要求下，给出具体解决方法。

针对问题一：需要对每种疫苗在不同工位上生产时间进行均值，方差，最值及概率分布等统计分析。我们首先用 Excel 对数据均值，方差，最值进行计算并绘制直方图，再结合直方图的大致形状，进行正态分布检验。通过 SPSS 进行相关统计分析，最后得到不同疫苗类型在不同工位的工序时间上呈正态分布。

针对问题二：需要计算出最短交付的时间。首先我们将第一问的每种型号疫苗事件均值绘制成一个总合表，所有均值总和最小时开始加工，这样才能保证时间是最少的，随即建立优化模型并利用 MATLAB 进行求解得到，疫苗加工的最短时间为 3 小时 8 分钟。

针对问题三：为了解决以最大概率完成疫苗生产时间的任务，首先建立目标优化模型，表示出概率分布函数。因为是以最大概率分布函数和最短时间为目标，交货时间较上一个问减少 5%，其余条件与问题二相同，由此建立双目标规划模型。最后利用 MATLAB 算出疫苗加工的最短时间为 2 小时 27 分钟。再对正态分布概率函数进行标记，利用自适应概率标记法，得到缩短的时间比例与最大概率之间成正比关系，缩短的时间越多，概率越大。

针对问题四：需要算出可靠性为 90%的前提下，多少天可以完成任务。我们采用正态分布概率密度函数生成每种疫苗到每个工位的生产时间表，并且建立优化模型，最后用 MATLAB 求解各个种类疫苗的生产时间及总时间，总时间至少 12007 天能完成任务。

针对问题五：每个工位每天生产时间不能超过 16 个小时，每种类型的疫苗可以只完成一部分，需要以最大销售额为目标，建立属性模型安排生产计划。在问题一中我们已经计算出每种疫苗的出厂价格，于是我们算出单位时间的盈利，最后以最大销售额为目标，建立优化模型。

一、问题的重述

1.1 问题的背景

新冠肺炎肆虐全球，给世界带来了深重的灾难。各国为控制疫情纷纷研发新冠疫苗。假定疫苗生产需要经过 CJ1 工位、CJ2 工位、CJ3 工位以及 CJ4 工位等 4 个工艺流程。每个工艺流程一次性均能处理 100 剂疫苗，这 100 剂疫苗装进一个加工箱一起送进工位的设备进行处理。而且，只有按照 CJ1-CJ2-CJ3-CJ4 的顺序在 4 个工位都进行了加工以后，才算完成生产。为防止疫苗包装出现混乱，某疫苗生产公司生产部门规定，每个工位不能同时生产不同类型的疫苗，疫苗生产不允许插队，即进入第一个工位安排的每类疫苗的生产顺序一旦确定就要一直保持不变，而且前一种类型的疫苗离开某个工位后，后一种类型的疫苗才能进入这个工位。

现有 YM1-YM10 等 10 种不同类型的疫苗需要生产。为安全起见，每种类型每箱（内装疫苗 100 剂）疫苗在每个工位上均进行了 50 次模拟生产。发现，由于生产设备、疫苗纯化等多种原因，每个工位生产不同类型的每箱疫苗所需的时间并不稳定，详细的数据见附件 1。

1.2 问题的提出

问题 1：请对每箱疫苗在所有工位上的生产时间进行均值、方差、最值、概率分布等统计分析，以方便疫苗生产公司管理者能够直观的掌握每个工位生产疫苗的能力水平，为疫苗生产提供参考。

问题 2：某国疫苗检测部门紧急需要 YM1-YM10 各 100 剂疫苗进行检测。为赶时间，疫苗生产公司需要对疫苗的生产顺序进行规划，以便能在最短时间内交付，以每个工位生产每箱疫苗平均时间为依据。请建立数学模型，制定疫苗生产顺序，初始时刻为 00:00，计算生产总时间，并将结果填入表 1。

问题 3：在实际生产中，每个工位生产每种疫苗的所需时间具有随机性。如果要求该公司疫苗交货总时间比问题 2 的总时间缩短 5%，请建立数学模型，以最大的概率完成这个任务为目标，确定生产顺序，并给出缩短的时间比例与最大概率之间的关系。

问题 4：现在该疫苗生产公司接收了 10 种类型疫苗不同规模的生产任务（见附件 2）。由于生产机器需要检修和维护，每个工位每天生产的时间不能超过 16 小时。为避免疫苗错误包装，要求每种类型疫苗的生产任务不可以拆分，即同种类型疫苗生产全部完成之后才能生产另外类型的疫苗。请建立数学模型，在可靠性为 90%的前提下安排生产方案，至少多少天可以完成任务？

问题 5：如果该疫苗生产公司计划在 100 天内选择部分数量的疫苗进行生产，每个工位每天生产的时间不能超过 16 小时，每种类型疫苗的生产任务可以适当拆分，即每种类型的疫苗可以只完成一部分。以最大销售额为目标，请建立数学模型安排生产计划。

二、问题的分析

结合生产部门规定，每个工位不能同时生产不同类型的疫苗，疫苗生产不允许插队，即进入第一个工位安排的每类疫苗的生产顺序一旦确定就要一直保持不变，而且前一种类型的疫苗离开某个工位后，后一种类型的疫苗才能进入这个工位。针对不同约束条件下，求疫苗加工的最短时间，建立相关模型进行求解。

2.1 问题一的分析

结合附件一每箱疫苗在所有工位上的生产时间表，用 Python 软件对均值，方差，最值进行计算，再根据计算结果利用 Excel 汇出直方图，观察直方图的大致形状，设想一种分布结构，并检验生产时间是否呈该种分布及分布概率函数。最后对其均值、方差、最值、概率分布进行统计分析。

2.2 问题二的分析

首先对各疫苗类型进行各疫苗类型的工序时间均值总和进行求解，结合问题一中的均值分布表，列出表格。考虑到每个工位不能同时生产不同类型的疫苗，疫苗生产不允许插队，所以均值总和最小的疫苗类型最先加工。建立目标优化模型，用 MATLAB 程序求解到最后结果。

2.3 问题三的分析

需要确定生产顺序，给出缩短的时间比例与最大概率之间的关系。为了解决以最大概率完成疫苗生产时间的任务，首先需要建立目标优化模型，表示出概率分布函数。因为是以最大概率分布函数和最短时间为目标，交货时间较上一个问减少 5%，其余条件与问题二相同，由此建立双目标规划模型。用 MATLAB 求解到最后结果。

2.4 问题四的分析

需要算出可靠性为 90%的前提下，多少天可以完成任务。我们采用正态分布概率密度函数生成每种疫苗到每个工位的生产时间表，并且建立优化模型，最后用 MATLAB 求解各个种类疫苗的生产时间及总时间。

2.5 问题五的分析

因为每个工位每天生产时间不能超过 16 给小时，每种类型的疫苗可以只完成一部分，需要以最大销售额为目标，建立属性模型安排生产计划。在问题一中我们已经计算出每种疫苗的出厂价格，随即我们算出单位时间的盈利，最后以最大销售额为目标，建立优化模型。

三、问题的假设

1.假设实验数据真实可靠，排除偶然因素对实验结果的影响。
2.假设每种类型的疫苗在各工序上一直在加工，无间断过程。
3.假设疫苗加工各工序之间相互独立，无直接影响。

四、符号说明

符号	符号说明
E_x	均值
σ^2	方差
a_{ij}	进入 CJ1 时间
b_{ij}	离开 CJ4 时间
i	疫苗类型（i=1,2,...,10）
j	生产工位(j=1,2,3,4)
p_k	优先因子

d	偏差变量
p_i	某个数据被标记的概率
U	疫苗加工数据包未被标记的概率
w	营销额
χ_i	各疫苗类型的单位盈利

五、模型建立与求解

5.1. 问题一模型建立与求解

对每箱疫苗在所有工位上的生产时间进行统计分析，首先用 Python 对其均值、方差、最值进行计算，展示出它的直方图，观察直方图的分布变化，并对分布情况进行验证，进行统计分析。

5.1.1 均值统计分析

设一组数据为：$x_1, x_2, ..., x_n$。

每箱疫苗在所有工位上的生产时间进行均值计算：$E_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

用 Matlab 求解得到：

YM1 疫苗的 CJ1 工序时间均值为 13.2840，YM1 疫苗的 CJ2 工序时间均值为 14.9621，YM1 疫苗的 CJ3 工序时间均值为 19.8460，等等。具体结果见下表所示：

表 5-1-1 每箱疫苗在所有工位上的生产时间均值

疫苗类型	生产工位	工序时间均值	疫苗类型	生产工位	工序时间均值
YM1	CJ1	13.2840	YM6	CJ1	19.0741
	CJ2	14.9621		CJ2	20.0944
	CJ3	19.8460		CJ3	14.1485
	CJ4	20.0129		CJ4	13.8839
YM2	CJ1	9.8709	YM7	CJ1	11.1601
	CJ2	19.9075		CJ2	16.4961
	CJ3	17.9282		CJ3	12.0137
	CJ4	18.9424		CJ4	19.0876
YM3	CJ1	20.0584	YM8	CJ1	16.0201
	CJ2	15.9726		CJ2	8.8275
	CJ3	14.9704		CJ3	18.1144
	CJ4	15.1164		CJ4	16.8314

YM4	CJ1	7.9887	YM9	CJ1	15.0146
	CJ2	9.9367		CJ2	12.0351
	CJ3	5.9359		CJ3	7.0419
	CJ4	18.1284		CJ4	8.9470
YM5	CJ1	8.7701	YM10	CJ1	12.9524
	CJ2	13.7220		CJ2	7.0110
	CJ3	13.0052		CJ3	9.0492
	CJ4	11.2495		CJ4	16.0524

观察上表可以得到不同疫苗类型不同工序的时间均值是不相等的，存在一定的差异。再采用 spss 对不同疫苗类型不同工序的时间进行均值分析，得到：

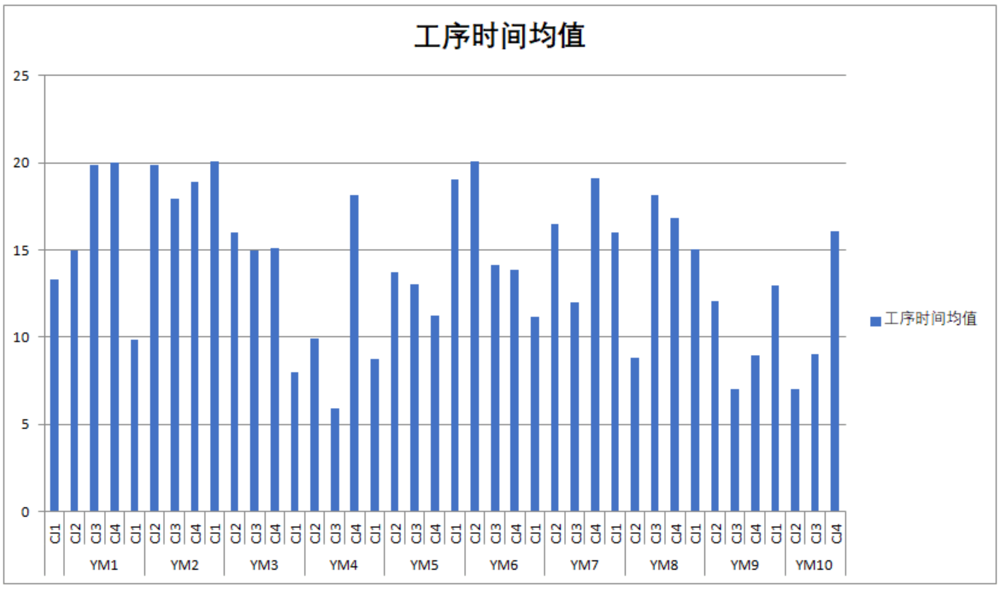
5-1-2 工序时间均值分析报告表

报告			
工序时间均值			
疫苗类型	平均值	个案数	标准差
1	17.026250	4	3.4222906
2	16.662250	4	4.5991230
3	16.529450	4	2.3938057
4	10.497425	4	5.3431390
5	11.686700	4	2.2044340
6	16.800225	4	3.2433878
7	14.689375	4	3.7516066
8	14.948350	4	4.1706595
9	10.759650	4	3.5042230
10	11.266250	4	4.0320713
总计	14.086593	40	4.2277946

5-1-3 工序时间均值分析 ANOVA 表

ANOVA 表							
			平方和	自由度	均方	F	显著性
工序时间均值 * 疫苗类型	组间	（组合）	269.510	9	29.946	2.101	0.042
		线性相关度	84.258	1	84.258	5.912	0.021
		偏离线性度	185.252	8	23.156	1.625	0.159
	组内		427.586	30	14.253		
	总计		697.096	39			

从组间方差显著性来看，显著性等于 0.042<0.05,表示各组间存在明显差异，即不同疫苗类型的工序时间存在明显差异。



5-1-4 工序时间均值直方图

由图可以看出，工序时间均值大致呈正态分布，用 spss 软件进行正态检验，得到：

5-1-5 工序时间均值正态分布表

正态性检验						
	柯尔莫戈洛夫-斯米诺夫[a]			夏皮洛-威尔克		
	统计	自由度	显著性	统计	自由度	显著性
工序时间均值	0.093	40	0.200*	0.948	40	0.065
*. 这是真显著性的下限。						
a. 里利氏显著性修正						

由上表可知，显著性为 0.2>0.05，服从正态分布。

5.1.2 方差统计分析

每箱疫苗在所有工位上的生产时间进行方差计算：

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

用 MATLAB 求解得到：

YM1 疫苗的 CJ1 工序时间方差为 1.5940，YM1 疫苗的 CJ2 工序时间方差为 1.0614，YM1 疫苗的 CJ3 工序时间方差为 1.1638，等等。具体结果见下表所示：

5-1-6 工序时间方差结果表

疫苗类型	生产工位	工序时间方差	疫苗类型	生产工位	工序时间方差
YM1	CJ1	1.5621	YM6	CJ1	1.3083
	CJ2	1.0614		CJ2	0.9540

	CJ3	1.1638		CJ3	0.8580
	CJ4	1.8519		CJ4	1.1287
YM2	CJ1	0.8167	YM7	CJ1	1.0058
	CJ2	1.2279		CJ2	0.9109
	CJ3	0.8841		CJ3	0.7705
	CJ4	0.8727		CJ4	0.6432
YM3	CJ1	0.8279	YM8	CJ1	1.1091
	CJ2	0.6795		CJ2	0.2562
	CJ3	1.0192		CJ3	1.0486
	CJ4	0.7959		CJ4	0.8945
YM4	CJ1	0.9135	YM9	CJ1	0.9543
	CJ2	0.9343		CJ2	1.1349
	CJ3	0.0372		CJ3	0.1310
	CJ4	1.1052		CJ4	0.1717
YM5	CJ1	0.7302	YM10	CJ1	0.2033
	CJ2	1.1168		CJ2	0.2765
	CJ3	0.8147		CJ3	0.2032
	CJ4	1.2062		CJ4	0.2581

用 spss 对每种类型的疫苗生产工位工序时间进行方差分析，如下所示：

5-1-7 工序时间方差齐性检验表

方差齐性检验			
工序时间方差			
莱文统计	自由度 1	自由度 2	显著性
23.193	9	30	0.000

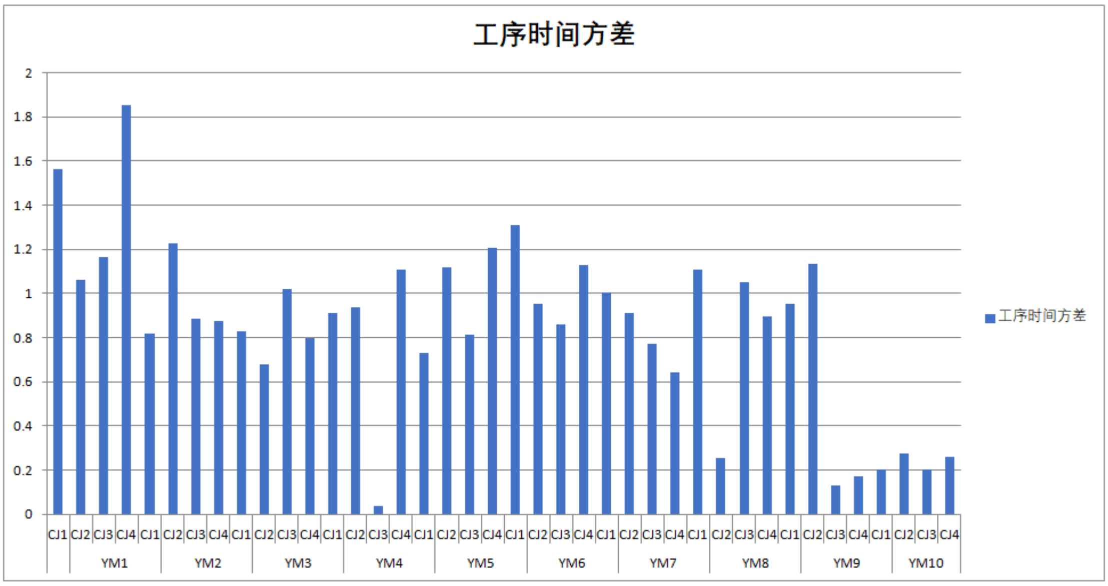
5-1-8 工序时间方差 ANOVA 表

ANOVA					
工序时间方差					
	平方和	自由度	均方	F	显著性

组间	400.471	9	44.497	13.220	0.000
组内	100.977	30	3.366		
总计	501.448	39			

由上表可知显著性检验为 0.000<0.05，表示每箱疫苗在所有工位上的生产时间有差异。

5-1-9 工序时间方差分布图



由图可以看出，工序时间方差大致呈正态分布，用 spss 软件进行正态检验，得到：

5-1-10 工序时间方差正态检验表

正态性检验						
	柯尔莫戈洛夫-斯米诺夫[a]			夏皮洛-威尔克		
	统计	自由度	显著性	统计	自由度	显著性
工序时间方差	0. 150	40	0. 124	0. 933	40	0. 121
a. 里利氏显著性修正						

由上表可知，显著性为 0.124>0.05，服从正态分布。

5. 1. 3 最值统计分析

每箱疫苗在所有工位上的生产时间进行最值计算：

最大值： $x = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

最小值： $x = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

用 Python 软件求解得到：

YM1 疫苗的 CJ1 工序时间最大值为 16.5784，最小值为 10.7412，YM1 疫苗的 CJ2 工序时间最大值为 11.6821，最小值为 13.5084，YM1 疫苗的 CJ3 工序时间最大

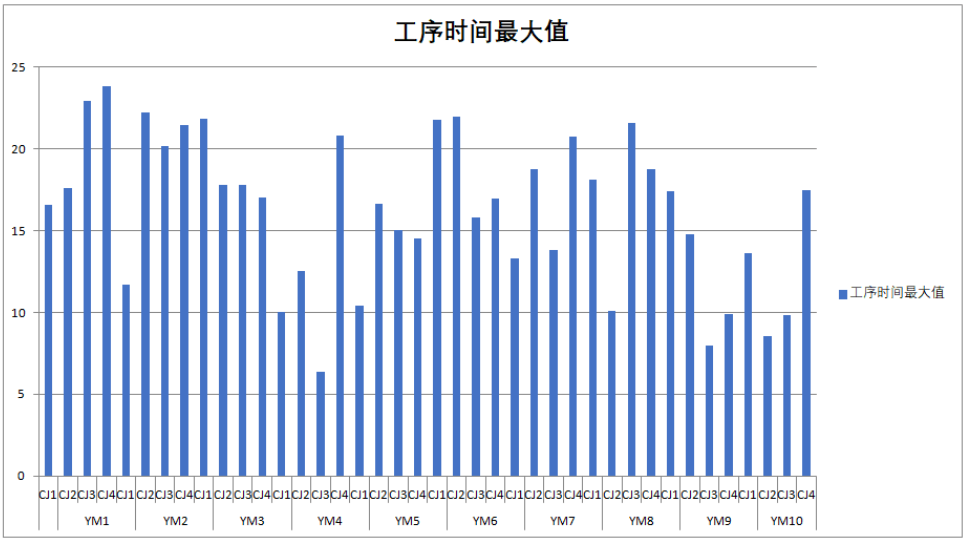
值为 22.908，最小值为 17.8616，等等。具体结果见下表所示：

5-1-11 工序时间最值结果表

疫苗类型	生产工位	工序时间最大值	疫苗类型	生产工位	工序时间最大值
YM1	CJ1	16.5784	YM6	CJ1	21.7526
	CJ2	17.5855		CJ2	21.9278
	CJ3	22.9080		CJ3	15.8136
	CJ4	23.7890		CJ4	16.9491
YM2	CJ1	11.6821	YM7	CJ1	13.2878
	CJ2	22.2294		CJ2	18.7304
	CJ3	20.1778		CJ3	13.7849
	CJ4	21.4245		CJ4	20.7553
YM3	CJ1	21.8140	YM8	CJ1	18.0783
	CJ2	17.8089		CJ2	10.1117
	CJ3	17.7873		CJ3	21.5699
	CJ4	17.0034		CJ4	18.7351
YM4	CJ1	10.0389	YM9	CJ1	17.4124
	CJ2	12.5088		CJ2	14.7485
	CJ3	6.3889		CJ3	7.9947
	CJ4	20.7891		CJ4	9.8984
YM5	CJ1	10.3845	YM10	CJ1	13.6186
	CJ2	16.6052		CJ2	8.5793
	CJ3	15.0108		CJ3	9.8025
	CJ4	14.5267		CJ4	17.4872
疫苗类型	生产工位	工序时间最小值	疫苗类型	生产工位	工序时间最小值
YM1	CJ1	10.7412	YM6	CJ1	16.4356
	CJ2	13.5084		CJ2	18.6951
	CJ3	17.8616		CJ3	12.3636
	CJ4	16.5052		CJ4	11.9716
	CJ1	6.9708		CJ1	9.1699

YM2	CJ2	17.7416	YM7	CJ2	14.6801
	CJ3	16.6019		CJ3	9.6528
	CJ4	17.1946		CJ4	16.7402
YM3	CJ1	18.5169	YM8	CJ1	13.5753
	CJ2	13.9780		CJ2	8.0403
	CJ3	12.6710		CJ3	16.3152
	CJ4	12.8065		CJ4	14.7471
YM4	CJ1	6.1037	YM9	CJ1	12.8237
	CJ2	7.6405		CJ2	10.0932
	CJ3	5.6861		CJ3	6.2319
	CJ4	16.4495		CJ4	8.3148
YM5	CJ1	7.1470	YM10	CJ1	11.4639
	CJ2	11.7967		CJ2	6.2157
	CJ3	11.5197		CJ3	7.9742
	CJ4	9.4434		CJ4	14.9571

用 EXCEL 绘制出最大值最小值的直方图，结合直方图的形状并验证相关概率分布，得到统计分布情况。



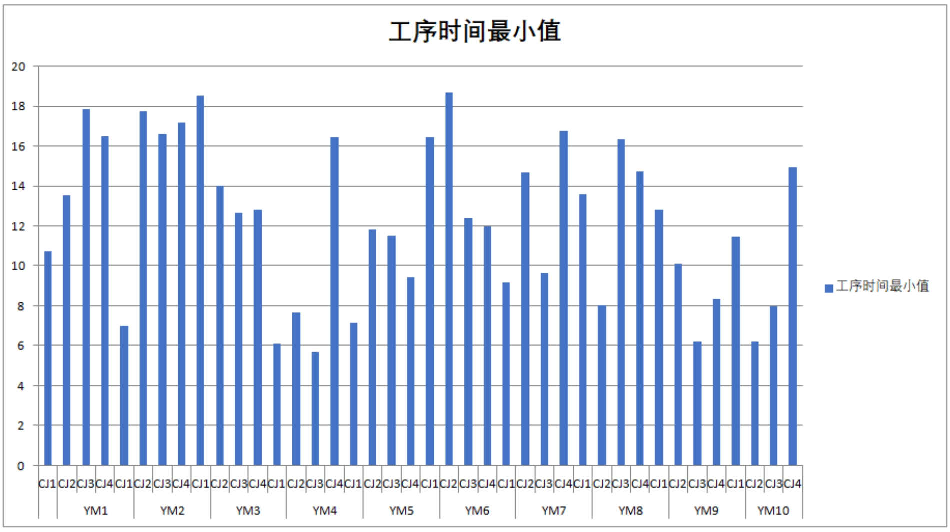
5-1-12 工序时间最大值直方图

由图可以看出，工序时间最大值大致呈正态分布，用 spss 软件进行正态检验，得到：

5-1-13 工序时间最大值正态性检验表

正态性检验						
	柯尔莫戈洛夫-斯米诺夫[a]			夏皮洛-威尔克		
	统计	自由度	显著性	统计	自由度	显著性
工序时间最大值	0.107	40	0.200*	0.958	40	0.141
*. 这是真显著性的下限。						
a. 里利氏显著性修正						

由上表可知，显著性为 0.200>0.05，服从正态分布。



5-1-14 工序时间最小值直方图

由图可以看出，工序时间最小值大致呈正态分布，用 spss 软件进行正态检验，得到：

5-1-14 工序时间最小值正态性检验表

正态性检验						
	柯尔莫戈洛夫-斯米诺夫[a]			夏皮洛-威尔克		
	统计	自由度	显著性	统计	自由度	显著性
工序时间最小值	0.120	40	0.150	0.947	40	0.060
a. 里利氏显著性修正						

由上表可知，显著性为 0.150>0.05，服从正态分布。

5.2 模型二的建立与求解

需要 YM1-YM10 对各 100 剂疫苗进行检测，为赶时间，疫苗生产公司需要对疫苗的生产顺序进行规划，以便能在最短时间内交付，以每个工位生产每箱疫苗平均时间为依据。即制定疫苗生产顺序，建立优化模型。

设 x_k 为第 k 种型号疫苗的均值总和。由第一问可以表示出每种型号疫苗均值综合，如下表所示：

表 5-2-1 各类型疫苗工序时间均值总和表

疫苗类型	工序时间均值总和	疫苗类型	工序时间均值总和
YM1	68.105	YM6	67.2009

YM2	66.649	YM7	58.7575
YM3	66.1178	YM8	59.7934
YM4	41.9897	YM9	43.0386
YM5	46.7468	YM10	45.065

因疫苗生产公司生产部门规定，每个工位不能同时生产不同类型的疫苗，疫苗生产不允许插队，即进入第一个工位安排的每类疫苗的生产顺序一旦确定就要一直保持不变，而且前一种类型的疫苗离开某个工位后，后一种类型的疫苗才能进入这个工位。所以均值总和最小时开始加工，即最先加工的是 YM4.

建立如下目标优化模型：

$$\min\{p_1 d_1^-, p_2(d_2^- + d_3^-)\}$$

$$st.\begin{cases} b_{ij} = b_{(i-1)j} + t_{(i-1)j} \\ a_{104} + d_1^- - d_1^+ = 41.9897 \\ a_{10j} - b_{1j} + d_2^- - d_2^+ = t_j \\ a_{j4} - b_{i1} + d_3^- - d_3^+ = t_i \\ a_{ij}, b_{ij}, d_n^+, d_n^- \ge 0 (i = 1,2,\ldots,10; j = 1,2,3,4; n = 1,2,3) \end{cases}$$

a_{ij} 表示进入 CJ1 时间，b_{ij} 表示离开 CJ4 时间，i 表示疫苗类型，j 表示生产工位。p_k 表示优先因子，是将决策目标按其重要程度排序并表示出来。d 表示偏差变量，正偏差变量记为 d^+，负偏差变量记为 d^-。t 表示进入或进出的时间段。

用 Matlab 程序求解得到如下结果：

表 5-2-2 各类型疫苗工序进出时刻表

加工顺序（填疫苗编号）	进入 CJ1 时刻	离开 CJ4 时刻
YM4	00:00	00:42
YM10	00:08	00:58
YM7	00:21	01:20
YM8	00:32	01:37
YM1	00:49	02:00
YM2	01:02	02:18
YM3	01:20	02:34
YM6	01:40	02:48
YM5	02:00	02:59
YM9	02:20	03:08

即疫苗加工最短时间为 3 小时 8 分钟。

5.3 模型三的建立与求解

为了解决以最大的概率完成疫苗生产时间的任务，建立目标优化模型，结合问

题一中所需时间呈正态分布，表示出概率分布函数：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

其中 $x\sim N(\mu,\sigma^2)$。μ表示均值，σ^2表示方差。

结合问题一中的均值、方差表，可以得到疫苗类型在每个工位上的生产时间概率分布函数。如 YM1 疫苗类型在 CJ1 生产工位上的概率分布函数为：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times1.5621}}e^{-\frac{(x-13.2840)^2}{2\times1.5621}}$$

具体结果见附录 8.3。

考虑以最大概率分布函数和最短时间为目标，交货总时间比问题二的总时间缩短 5%，其余与第二问的限制条件一致，建立双目标规划模型：

$$\min\left\{p_1d_1^-,p_2\left(d_2^-+d_3^-\right)\right\}$$

$$\max f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{ij}}}e^{-\frac{(x-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}}$$

$$st.\begin{cases} b_{ij}=b_{(i-1)j}+t_{(i-1)j} \\ a_{104}+d_1^- -d_1^+=41.9897 \\ a_{10j}-b_{1j}+d_2^- -d_2^+=t_j \\ a_{j4}-b_{i1}+d_3^- -d_3^+=t_i \\ t_{ij}'=t_{ij}\times(1-5\%) \\ a_{ij},b_{ij},d_n^+,d_n^-\geq0(i=1,2,\ldots,10;j=1,2,3,4;n=1,2,3) \end{cases}$$

用 Python 编程求解得到如下结果：

表 5-3 各类型疫苗工序进出时刻表

加工顺序（填疫苗编号）	进入 CJ1 时刻	离开 CJ4 时刻
YM4	00:00	00:08
YM10	00:08	00:20
YM7	00:20	00:31
YM8	00:31	00:46
YM1	00:46	00:57
YM2	00:57	01:16
YM3	01:16	01:36
YM6	01:36	01:54
YM5	01:54	02:13
YM9	02:13	02:27

即疫苗加工的最短时间为 2 小时 27 分钟。

为了求出缩短的时间比例与最大概率之间的关系，可以先对正态分布概率函数进行标记，我们选择自适应概率标记法，APMS 方法基于数据包的 TTL 值动态调整标记的概率，可以使每种疫苗再各工序上加工时间平均最少，并完全消除疫苗加工伪造的标记对加工时间的影响。

APMS 方法工作方式如下：标记概率为疫苗加工 R_i 对某个数据进行标记的概率，

记为p_i。下游疫苗可以覆盖上游疫苗在数据包中的标记。定义疫苗加工R_i的到达概率，记为r_i，为数据包被疫苗加工R_i标记后，该标记没有被下游疫苗加工覆盖的概率。也就是说，疫苗加工R_i的标记最终能够到达最短时间的概率为：

$$r_i=\begin{cases}p_i\prod_{k=i+1}^{d}(1-p_k), 1\le i\le d-1\\ p_d, i=d\end{cases}$$

定义疫苗加工数据包未被标记的概率为U,为数据包没有被疫苗加工中任何工序标记的概率：

$$U=\prod_{k=1}^{d}(1-p_k)$$

最后带入相关数据，采用 Matlab 编程求解得到：

缩短的时间比例与最大概率之间成正比关系，缩短的时间越多，概率越大。

5.4 问题四模型的建立与求解

为了在可靠性为 90%的前提下尽量提前完成任务，并且要求每个工位每天生产的时间不能超过 16 小时，每种类型疫苗的生产任务不可以拆分，即同种类型疫苗生产全部完成之后才能生产另外类型的疫苗。我们同样采用正态分布概率密度函数生成每种疫苗到每个工位的生产时间表，建立优化模型为：

$$\min\left\{p_1d_1^-,p_2\left(d_2^-+d_3^-\right)\right\}$$

$$\max f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}}e^{-\frac{(x-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}}$$

$$st.\begin{cases}b_{ij}=b_{(i-1)j}+t_{(i-1)j}\\ a_{104}+d_1^--d_1^+=41.9897\\ a_{10j}-b_{1j}+d_2^--d_2^+=t_j\\ a_{j4}-b_{i1}+d_3^--d_3^+=t_i\\ t_{ij}'=t_{ij}\times(1-5\%)\\ t_{ij}'\le 16\times 60\\ p\left\{\frac{|\bar{x}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}<t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=90\%\\ a_{ij},b_{ij},d_n^+,d_n^-\ge 0(i=1,2,\ldots,10;j=1,2,3,4;n=1,2,3)\end{cases}$$

最后用 Matlab 程序求解个种类型疫苗的生产时间：

表 5-4 各类型疫苗工序进出时刻表

加工顺序（填疫苗编号）	进入 CJ1 时刻	离开 CJ4 时刻
YM4	00:00	00:10
YM10	00:10	00:23
YM7	00:23	00:32
YM8	00:32	00:46
YM1	00:46	00:57

YM2	00:57	01:19
YM3	01:19	01:46
YM6	01:46	01:58
YM5	01:58	02:17
YM9	02:17	02:43

则总时间为：

$$T=10\times10+5\times(23-10)+6\times(32-23)+10\times(46-32)+16\times(57-46)+12\times(79-57)+$$
$$18\times(46-19)+8\times(58-46)+6\times(77-58)+9\times(43-17)=1729\text{万分钟}$$

因为 1729 万分钟≈12007 天，所以至少 12007 天能完成任务。

5.5 问题五模型的建立与求解

由于计划在 100 天内选择部分数量的疫苗进行生产，每个工位每天生产的时间不能超过 16 小时，每种类型疫苗的生产任务可以适当拆分，即每种类型的疫苗可以只完成一部分。在问题一中已经计算出每种疫苗生产所需的平均时间，见表 5-2-1。已经知道每种疫苗的出厂价格，出厂价格/所需时间得到单位时间的盈利，由下表展示出：

表 5-5 各类型疫苗工序单位时间盈利表

疫苗类型	出厂价格	工序平均时间	单位时间盈利
YM1	42	68.105	0.6167
YM2	54	66.649	0.8102
YM3	50	66.1178	0.7562
YM4	43	41.9897	1.0241
YM5	42	46.7468	0.8985
YM6	45	67.2009	0.6696
YM7	48	58.7575	0.8169
YM8	51	59.7934	0.8529
YM9	46	43.0386	1.0688
YM10	48	45.065	1.0652

以生产单位盈利最高的先排列，则由表可知排列顺序为：

YM9,YM10,YM4,YM5,YM8,YM7,YM2,YM3,YM1,YM6.

设 w 为营销额，χ_i 为各疫苗类型的单位盈利，其中 i=1,2,...,10。以最大销售额为目标，建立优化模型：

$$\min\left\{p_1 d_1^-, p_2\left(d_2^- + d_3^-\right)\right\}$$

$$\max w = \sum_{i=1}^{10} t_{ij}\chi_i$$

$$st.\begin{cases} b_{ij} = b_{(i-1)j} + t_{(i-1)j} \\ a_{104} + d_1^- - d_1^+ = 41.9897 \\ a_{10j} - b_{1j} + d_2^- - d_2^+ = t_j \\ a_{j4} - b_{i1} + d_3^- - d_3^+ = t_i \\ t_{ij}' = t_{ij} \times (1 - 5\%) \\ t_{ij}' \le 16 \times 60 \\ \sum_{i=1}^{n} tij \le 100 \times 24 \times 60 \\ a_{ij}, b_{ij}, d_n^+, d_n^- \ge 0 (i = 1,2,\ldots,10; j = 1,2,3,4; n = 1,2,3) \end{cases}$$

六、模型的评价与推广

6.1 模型的优点

针对最优化模型，能反映经济活动中的条件极值问题，即在既定目标下，如何最有效地利用各种资源，或者在资源有限制的条件下，如何取得最好的效果。在经济管理工作中运用线性规划、非线性规划、动态规划、整数规划以及系统科学方法所确定的表示最优方案的模型。

目标规划是解决企业多目标管理的有效方法，它是按照决策者事前确定的若干目标值及其实现的优先次序，在给定的有限资源下寻找偏离目标值最小的解的数学方法。

统计模型的意义在对大量随机事件的规律性做推断时仍然具有统计性。统计模型通常以相当理想化的形式表示数据生成过程。

6.2 模型的缺点

统计分析模型：定额的准确性差，可靠性差。

一是对历史统计数据的完整性和准确性要求高，否则制定的标准没有任何意义;

二是统计数据分析方法选择不当会严重影响标准的科学性;

三是统计资料只反映历史的情况而不反映现实条件的变化对标准的影响;

四是利用本企业的历史性统计资料为某项工作确定标准，可能低于同行业的先进水平，甚至是平均水平。

6.3 模型的推广

目标规划模型中，当规定的目标与求得的实际目标值之间的差值为未知时，可用偏差量 d 来表示。d 表示实际目标值超过规定目标值的数量，称为正偏差量，d 表示实际目标值未达到规定目标值的数量，称为负偏差量。

最优化模型方法常用来解决资源的最佳分配问题、最优部门结构问题、生产力合理布局问题、最优积累率问题、物资合理调运问题、最低成本问题等。

七、参考文献

[1] 叶保平,《运筹学在食品生产优化中的应用》,北京交通大学出版社
[2] 张宇锋,《用运筹学方法建模优化麦汁生产工艺配方》,爱学术，2012 年三期，37 页
[3] 罗平,《在线性规划中的应用》,现代经济信息，2014 年 24 期，3 页

八、附录

8.1 计算均值、方差、最值

Import numpy as npone = [13.5377,11.6923,11.6501,12.7950,13.6715,14.0347,13.8884,14.4384,12.8978,12.9699,14.8339,12.5664,16.0349,12.8759,11.7925,13.7269,11.8529,13.3252,12.7586,12.8351,10.7412,13.3426,13.7254,14.4897,13.7172,12.6966,11.9311,12.2451,13.3192,13.6277,13.8622,16.5784,12.9369,14.4090,14.6302,13.2939,12.1905,14.3703,13.3129,14.0933,13.3188,15.7694,13.7147,14.4172,13.4889,12.2127,10.0557,11.2885,12.1351,14.1093]two = [14.1363,16.5326,13.9109,15.0859,14.3844,13.5977,16.4193,15.6966,13.8520,15.1873,15.0774,14.2303,15.0326,13.5084,15.7481,13.5776,15.2916,15.8351,15.1049,14.9175,13.7859,15.3714,15.5525,14.2577,14.8076,15.4882,15.1978,14.7563,15.7223,13.0670,13.8865,14.7744,16.1006,13.9384,15.8886,14.8226,16.5877,15.2157,17.5855,14.5610,14.9932,16.1174,16.5442,17.3505,14.2352,14.8039,14.1955,13.8342,14.3331,13.2053]three = [14.1363,16.5326,13.9109,15.0859,14.3844,13.5977,16.4193,15.6966,13.8520,15.1873,15.0774,14.2303,15.0326,13.5084,15.7481,13.5776,15.2916,15.8351,15.1049,14.9175,13.7859,15.3714,15.5525,14.2577,14.8076,15.4882,15.1978,14.7563,15.7223,13.0670,13.8865,14.7744,16.1006,13.9384,15.8886,14.8226,16.5877,15.2157,17.5855,14.5610,14.9932,16.1174,16.5442,17.3505,14.2352,14.8039,14.1955,13.8342,14.3331,13.2053]four = [14.1363,16.5326,13.9109,15.0859,14.3844,13.5977,16.4193,15.6966,13.8520,15.1873,15.0774,14.2303,15.0326,13.5084,15.7481,13.5776,15.2916,15.8351,15.1049,14.9175,13.7859,15.3714,15.5525,14.2577,14.8076,15.4882,15.1978,14.7563,15.7223,13.0670,13.8865,14.7744,16.1006,13.9384,15.8886,14.8226,16.5877,15.2157,17.5855,14.5610,14.9932,16.1174,16.5442,17.3505,14.2352,14.8039,14.1955,13.8342,14.3331,13.2053]one_mean = np.mean(one)print("YM1 疫苗的 CJ1 工序时间的平均值为：%f" % one_mean)two_mean = np.mean(two)print("YM1 疫苗的 CJ2 工序时间的平均值

为：%f" % two_mean)three_mean = np.mean(three)print("YM1 疫苗的 CJ3 工序时间的平均值为：%f" % three_mean)four_mean = np.mean(four)print("YM1 疫苗的 CJ4 工序时间的平均值为：%f" % four_mean)one.sort()mid = int(len(one) / 2)if len(one) % 2 == 0:

median = (one[mid-1] + one[mid]) / 2.0else:

median = one[mid]print("YM1 疫苗的 CJ1 工序时间的中位数为:%f" % median)two.sort()mid = int(len(two) / 2)if len(two) % 2 == 0:

median = (two[mid-1] + two[mid]) / 2.0else:

median = two[mid]print("YM1 疫苗的 CJ2 工序时间的中位数为:%f" % median)three.sort()mid = int(len(three) / 2)if len(three) % 2 == 0:

median = (three[mid-1] + three[mid]) / 2.0else:

median = three[mid]print("YM1 疫苗的 CJ3 工序时间的中位数为:%f" % median)four.sort()mid = int(len(four) / 2)if len(four) % 2 == 0:

median = (four[mid-1] + four[mid]) / 2.0else:

median = four[mid]print("YM1 疫苗的 CJ4 工序时间的中位数为:%f" % median)age_std = np.std(one,ddof=1)print("YM1 疫苗的 CJ1 工序时间的标准差为:%f" % age_std)fat_std = np.std(two,ddof=1)print("YM1 疫苗的 CJ2 工序时间的标准差为:%f" % fat_std)fat_std = np.std(three,ddof=1)print("YM1 疫苗的 CJ3 工序时间的标准差为:%f" % fat_std)fat_std = np.std(four,ddof=1)print("YM1 疫苗的 CJ4 工序时间的标准差为:%f" % fat_std)

8.2.1 计算最短时间，最短时间对应的方案以及进出工件的时间

```
clear;clc;
load data1
global average

average=zeros(4,10);
for i=1:length(data_num)
    average(i)=mean(data_num{i});
end

order=perms(1:10);

whole_time=nan(size(order,1),1);
for i=1:length(whole_time)
    [whole_time(i),~]=Q_2_1(order(i,:));
end
clear average


[min_time,min_index]=min(whole_time);
min_sequence=order(min_index,:);
[~,time]=Q_2_1(min_sequence);
```

xlswrite('表 1 问题 2 结果',{'加工顺序（填疫苗编号）','进入 CJ1 时刻','离开 CJ4 时刻'},'A1:C1')

xlswrite('表 1 问题 2 结果',[min_sequence',time([1,end],:)'],'A2:C11')

8.2.2 计算时间

```
function [whole_time,time] = Q_2_1(o)
global average
time=nan(5,10);
for i=1:10
    if i==1
        time(1,1)=0;
        for j=2:5
            temp=average(j-1,o(i));
            time(j,i)=time(j-1,i)+temp;
        end
    else
        time(1,i)=time(2,i-1);
        for j=2:4
            temp=average(j-1,o(i));
            if temp+time(j-1,i)>time(j+1,i-1)
                time(j,i)=time(j-1,i)+temp;
            else
                time(j,i)=time(j+1,i-1);
            end
        end
        temp=average(4,o(i));
        time(5,i)=time(4,i)+temp;
    end
end

whole_time=time(end,end);
end
```

8.3 概率分布函数表

疫苗类型	生产工位	概率分布函数
YM1	CJ1	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times1.5621}}e^{-\frac{(x-13.2840)^2}{2\times1.5621}}$
	CJ2	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times1.0614}}e^{-\frac{(x-14.9621)^2}{2\times1.0614}}$
	CJ3	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times1.1638}}e^{-\frac{(x-19.8460)^2}{2\times1.1638}}$

	CJ4	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times1.0614}}e^{-\frac{(x-14.9621)^2}{2\times1.0614}}$
YM2	CJ1	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times0.8167}}e^{-\frac{(x-9.8709)^2}{2\times0.8167}}$
	CJ2	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times1.2279}}e^{-\frac{(x-19.9075)^2}{2\times1.2279}}$
	CJ3	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times0.8841}}e^{-\frac{(x-17.9282)^2}{2\times0.8841}}$
	CJ4	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times0.8727}}e^{-\frac{(x-18.9424)^2}{2\times0.8727}}$
YM3	CJ1	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times0.8279}}e^{-\frac{(x-21.8140)^2}{2\times0.8279}}$
	CJ2	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times0.6795}}e^{-\frac{(x-17.8089)^2}{2\times0.6795}}$
	CJ3	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times1.0192}}e^{-\frac{(x-14.9704)^2}{2\times1.0192}}$
	CJ4	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times0.7959}}e^{-\frac{(x-15.1164)^2}{2\times0.7959}}$
YM4	CJ1	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times0.9135}}e^{-\frac{(x-7.9887)^2}{2\times0.9135}}$
	CJ2	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times0.6795}}e^{-\frac{(x-9.9367)^2}{2\times0.6795}}$
	CJ3	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times1.0614}}e^{-\frac{(x-14.9621)^2}{2\times1.0614}}$
	CJ4	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times1.1052}}e^{-\frac{(x-18.1284)^2}{2\times1.1052}}$
YM5	CJ1	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times0.7302}}e^{-\frac{(x-8.7701)^2}{2\times0.7302}}$

	CJ2	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 1.1168}}e^{-\frac{(x-13.7220)^2}{2\times 1.1168}}$
	CJ3	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 0.8147}}e^{-\frac{(x-13.0052)^2}{2\times 0.8147}}$
	CJ4	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 1.2062}}e^{-\frac{(x-11.2495)^2}{2\times 1.2062}}$
YM6	CJ1	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 1.3083}}e^{-\frac{(x-19.0741)^2}{2\times 1.3083}}$
	CJ2	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 0.9540}}e^{-\frac{(x-20.0944)^2}{2\times 0.9540}}$
	CJ3	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 0.8580}}e^{-\frac{(x-14.1485)^2}{2\times 0.8580}}$
	CJ4	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 1.1287}}e^{-\frac{(x-13.8839)^2}{2\times 1.1287}}$
YM7	CJ1	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 1.0058}}e^{-\frac{(x-11.1601)^2}{2\times 1.0058}}$
	CJ2	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 0.9109}}e^{-\frac{(x-16.4961)^2}{2\times 0.9109}}$
	CJ3	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 0.7705}}e^{-\frac{(x-12.0137)^2}{2\times 0.7705}}$
	CJ4	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 0.6432}}e^{-\frac{(x-19.0876)^2}{2\times 0.6432}}$
YM8	CJ1	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 1.1091}}e^{-\frac{(x-16.0201)^2}{2\times 1.1091}}$
	CJ2	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 0.2562}}e^{-\frac{(x-8.8275)^2}{2\times 0.2562}}$
	CJ3	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 1.0486}}e^{-\frac{(x-18.1144)^2}{2\times 1.0486}}$

	CJ4	$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 0.8945}} e^{-\frac{(x-16.8314)^2}{2\times 0.8945}}$$
YM9	CJ1	$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 09543}} e^{-\frac{(x-15.0146)^2}{2\times 0.9543}}$$
	CJ2	$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 1.1349}} e^{-\frac{(x-12.0351)^2}{2\times 1.1349}}$$
	CJ3	$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 0.1310}} e^{-\frac{(x-7.0419)^2}{2\times 0.1310}}$$
	CJ4	$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 0.1717}} e^{-\frac{(x-8.9470)^2}{2\times 0.1717}}$$
YM10	CJ1	$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 0.2033}} e^{-\frac{(x-12.9524)^2}{2\times 0.2033}}$$
	CJ2	$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 0.2765}} e^{-\frac{(x-7.0110)^2}{2\times 0.2765}}$$
	CJ3	$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 0.2032}} e^{-\frac{(x-9.0492)^2}{2\times 0.2032}}$$
	CJ4	$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 0.2581}} e^{-\frac{(x-16.0524)^2}{2\times 0.2581}}$$