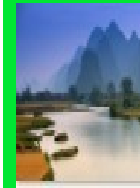
现代数值计算方法

第六章 常微分方程的数值解法



Back
Close

第六章 常微分方程的数值解法

在工程计算中的许多实际问题的数学模型可以用常微分方程来描述. 但是除了常系数线性微分方程和少数特殊的微分方程可以用解析方法求解外, 绝大多数常微分方程难以求得其精确解. 因此研究常微分方程的近似解法 (数值解法) 具有十分重要的应用意义.

本章主要讨论一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad (a \le x \le b) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6.1}$$

的数值解法. 根据常微分方程解的存在唯一性定理, 在 $f(x, y)$ 满足一定的条件下, 解函数 $y = y(x)$ 是唯一存在的.

Back
Close

取步长 h, 记 $x_n = x_0 + nh\,(n = 1, 2, \cdots)$, 按一定的递推公式依次求得各节点 x_n 上解函数值 $y(x_n)$ 的近似值 y_n, 称 $y_0, y_1, \cdots, y_n, \cdots$ 为初值问题 (6.1) 的数值解.

常微分方程初值问题的数值解法一般分为两大类:

(1) 一步法: 这类方法在计算 y_{n+1} 时只用到 x_{n+1}, x_n 和 y_n, 即前一步的值. 因此在有了初值之后就可以逐步往下计算, 其代表是龙格-库塔 (Runge-Kutta) 方法.

(2) 多步法: 这类方法在计算 y_{n+1} 时除用到 x_{n+1}, x_n 和 y_n 以外, 还要用到 $x_{n-p}, y_{n-p}\,(p = 1, \cdots, k; k > 0)$, 即前面 k 步的值. 其代表是亚当斯 (Adams) 方法.

§6.1 欧拉方法及其改进

§6.1.1 欧拉格式和隐式欧拉格式

由数值微分的向前差商公式可以解决初值问题 (6.1) 中导数 y' 的数值计算问题：

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_n+h)-y(x_n)}{h} = \frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h},$$

由此可得

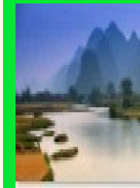
$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hy'(x_n).$$

(6.1) 实际上给出

$$y'(x) = f(x, y(x)) \;\Rightarrow\; y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)).$$

于是有

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)).$$



再由 $y_n \approx y(x_n)$, $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$ 得

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \cdots \tag{6.2}$$

递推公式 (6.2)称为 欧拉格式. 同样, 由向后差商公式可导出下面的差分格式:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, 1, \cdots \tag{6.3}$$

公式 (6.3) 为一关于 y_{n+1} 的非线性方程, 称为隐式欧拉格式. 隐式格式使用不方便, 但它一般比显示格式具有更好的数值稳定性.

例 **6.1** 考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = -y + x, \ \ 0 \le x \le 0.5 \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

其精确解为 $y(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1$. 试分别用欧拉格式和隐式欧拉格式计算其数值解, 并与精确解进行比较.

解 本题中的 $f(x,y)=-y+x$, 故欧拉格式为

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=(1-h)y_n+hx_n,\quad n=0,1,\cdots,\ y_0=0.$$

隐式欧拉格式为

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})=y_n-hy_{n+1}+hx_{n+1},\quad n=0,1,\cdots,\ y_0=0,$$

整理得

$$y_{n+1}=\frac{1}{1+h}(y_n+hx_{n+1}),\quad n=0,1,\cdots,\ y_0=0,$$

取 $h=0.1$, 计算结果如下表:

x_n	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
欧拉格式	0	0.0000	0.0100	0.0290	0.0561	0.0905
隐式欧拉格式	0	0.0091	0.0264	0.0513	0.0830	0.1209
精确解	0	0.0048	0.0187	0.0408	0.0703	0.1065

常微分方程数值解的误差分析一般比较困难, 通常只考虑第 $n+1$ 步的所谓"局部"截断误差. 我们首先给出局部截断误差的定义.

定义 6.1 对于求解初值问题 (6.1) 的某差分格式, h 为步长. 假设 $y_1, \cdots, y_n$ 是准确的, 称

$$\varepsilon_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} \tag{6.4}$$

为该差分格式的局部截断误差. 当 $\varepsilon_{n+1} = O(h^{p+1})$ 时, 称该差分格式具有 p 阶精度.

例 6.2 讨论欧拉格式 (6.2) 和隐式欧拉格式 (6.3) 的精度.

解 将 $y(x)$ 在 x_n 处泰勒展开得

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x-x_n) + \frac{y''(x_n)}{2!}(x-x_n)^2 + \frac{y'''(x_n)}{3!}(x-x_n)^3 + \cdots$$

Back
Close

即有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + \cdots \tag{6.5}$$

(1) 对应于欧拉格式 (6.2), 当 $y_n = y(x_n)$ 时,

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) = y(x_n) + hy'(x_n),$$

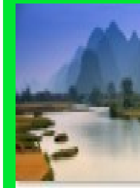
从而比较 (6.5) 得

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^2),$$

即欧拉公式为 1 阶精度.

(2) 对应隐式欧拉公式 (6.3), 由二元函数的泰勒展式

$$\begin{aligned} f(x,y) \;&=\; f(x_n,y_n) + f_x(x_n,y_n)(x-x_n) \\ &\quad + f_y(x_n,y_n)(y-y_n) + O[(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2], \end{aligned}$$



Back
Close

当 $y_n = y(x_n)$ 时,

$$
\begin{aligned}
& f(x_{n+1}, y_{n+1}) \\
&= f(x_n, y_n) + hf_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)(y_{n+1} - y_n) + O[h^2 + (y_{n+1} - y_n)^2] \\
&= f(x_n, y(x_n)) + h[f_x(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y_{n+1})f_y(x_n, y_n) + O(h)] \\
&= y'(x_n) + O(h).
\end{aligned}
$$

由此得

$$y_{n+1} = y(x_n) + hy'(x_n) + O(h^2).$$

从而比较 (6.5) 式得 $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^2)$, 知隐式欧拉格式也是 1 阶格式.

§6.1.2 欧拉格式的改进

对于初值问题 (6.1), 还可以根据导数与积分的关系, 利用数值积

分法导出新的求解格式, 可望提高欧拉格式的精度. 事实上, 对 (6.1) 两边在区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上求积分得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\mathrm{d}x. \tag{6.6}$$

应用数值积分公式求解 (6.6) 中的积分, 可得相应的差分格式. 例如, 由左矩形公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f(a),$$

可导出欧拉公式 (6.2):

$$\begin{aligned} & y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f(x_n, y(x_n)) \\ \Rightarrow \quad & y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n). \end{aligned}$$

而由右矩形公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f(b),$$

Back
Close

可导出隐式欧拉公式 (ref7.3):

$$
\begin{aligned}
y(x_{n+1}) &\approx y(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \\
\Rightarrow \quad y_{n+1} &= y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}).
\end{aligned}
$$

此外, 由梯形公式

$$
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)],
$$

可导出下面的差分格式

$$
y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \frac{h}{2}\big[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))\big],
$$

即

$$
y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\big] \tag{6.7}
$$

公式 (6.7) 称为梯形格式. 同隐式欧拉格式的局部截断误差的推导过

程相类似, 可以证明, 对于梯形格式 (6.7) 的局部截断误差为

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3),$$

即梯形格式具有 2 阶精度.

但梯形格式不便于使用, 也是一个隐格式. 为此, 可以考虑用其它的显格式对 (6.7) 式右端的 y_{n+1} 进行预报, 再用 (6.7) 式求解, 这种方法称之为“预报-校正”法.

如先用欧拉格式 (6.2) 对 y_{n+1} 进行计算, 并将结果记为 $\bar{y}_{n+1}$, 再代入 (6.7) 可得“预报-校正”形式的差分格式:

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\big[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})\big]. \end{cases} \tag{6.8}$$

公式 (6.8) 称为改进欧拉格式.

对于改进欧拉格式, 也可以证明其精度是 2 阶的. 事实上, 当 $y_n = y(x_n)$ 时, 由二元函数的泰勒展式

$$
\begin{aligned}
&f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) = f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)) \\
&= f(x_n, y_n) + hf_x(x_n, y_n) + hf(x_n, y_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^2) \\
&= f(x_n, y(x_n)) + hf_x(x_n, y(x_n)) + hf(x_n, y(x_n))f_y(x_n, y(x_n)) + O(h^2).
\end{aligned}
$$

注意到

$$
y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)), \quad y''(x_n) = f_x(x_n, y(x_n)) + y'(x_n)f_y(x_n, y(x_n)),
$$

于是有

$$
f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) = y'(x_n) + hy''(x_n) + O(h^2),
$$

代入 (6.8) 的第二式得

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y(x_n) + \frac{h}{2}\left[y'(x_n) + y'(x_n) + hy''(x_n) + O(h^2)\right] \\
&= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + O(h^3)
\end{aligned}
$$

从而比较 (6.5) 式得 $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$, 即改进欧拉格式的精度是 2 阶的.

§6.1.3 改进欧拉格式通用程序

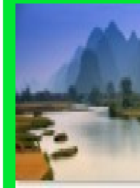
下面, 我们给出改进欧拉格式的 MATLAB 通用程序.

- 改进欧拉格式 MATLAB 程序

```
%maeuler.m
function [x, y]=maeuler(dyfun,xspan,y0,h)
```

Back
Close

```
%用途：改进欧拉格式解常微分方程y'=f(x,y),y(x0)=y0
%格式：[x,y]=maeuler(dyfun,xspan,y0,h)  dyfun为
%      函数f(x,y),xspan为求解区间[x0,xn],y0为初
%      值y(x0),h为步长，x返回节点，y返回数值解
x=xspan(1):h:xspan(2);
y(1)=y0;
for n=1:(length(x0)-1)
    k1=feval(dyfun,x(n),y(n));
    y(n+1)=y(n)+h*k1;
    k2=feval(dyfun,x(n+1),y(n+1));
    y(n+1)=y(n)+h*(k1+k2)/2;
end
x=x'; y=y';
```



例 6.3 取 $h=0.1$, 用改进欧拉格式的通用程序 maeuler.m 求解下列初值问题：

$$\begin{cases} y' = x + y,\ 0 \le x \le 0.5, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

并与精确解 $y(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 1$ 进行比较.

解 在 MATLAB 命令窗口执行：

```
>>clear;dyfun=inline('x+y');
>>[x,y]=maeuler(dyfun,[0,0.5],1,0.1);  [x';y']
ans=
          0 0.1000 0.2000 0.3000 0.4000 0.5000
     1.0000 1.1100 1.2421 1.3985 1.5818 1.7949
>>y1=2.*exp(x)-x-1;  y1'      %精确解
ans =
```

Back
Close

```
    1.0000 1.1103 1.2428 1.3997 1.5836 1.7974
>>(y1-y)'     %误差
ans=
    0.0000 0.0003 0.0008 0.0013 0.0018 0.0025
```

作业： P144: 6.4; 6.5.