现代数值计算方法

第五章 数值积分和数值微分

第五章 数值积分和数值微分

§5.4 龙贝格求积公式

§5.4.1 算法推导

在数值求积过程中, 步长的选取是一个很困难的问题. 由余项公式确定步长时, 由于涉及到高阶导数估计, 实际中很难应用. 实际应用中数值求积主要依靠自动选择步长的方法. 对于给定的 n, 当由复化梯形公式 T_n 计算不能满足精度要求时, 可进一步考虑对分每个小区间, 计算 T_{2n}. 由前面的讨论知, T_{2n} 与 T_n 之间存在下面的递推关系:

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}).$$

Back
Close

上式也称为变步长梯形公式. 由此可方便地计算 $T_1, T_2, T_4, \cdots$, 在增加新节点时, 不浪费原先的计算量, 并且可由 $|T_{2n} - T_n| \le \varepsilon$ 控制计算精度.

由复化梯形公式的余项公式 (5.17) 得

$$R[T_{2n}] = -\frac{b-a}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\bar{\xi}),$$

如果 $f''(\bar{\xi}) \approx f''(\xi)$, 那么有

$$\frac{R[T_{2n}]}{R[T_n]} = \frac{I^* - T_{2n}}{I^* - T_n} \approx \frac{1}{4}.$$

于是, 由上式可以推得

$$I^* \approx \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n.$$

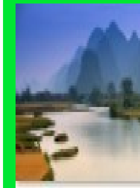
上式的右端是否比 T_{2n} 的精度更高呢？通过实际计算得

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n &= \frac{4}{3}\Big[\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})\Big]-\frac{1}{3}T_n \\
&= \frac{1}{3}T_n+\frac{2h}{3}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{1}{3}\Big\{\frac{h}{2}\Big[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\Big]\Big\}+\frac{2h}{3}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{h}{6}\Big[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})\Big],
\end{aligned}
$$

上式的右端恰为复化辛普森公式, 即

$$
S_n=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n. \tag{5.20}
$$

公式 (5.20) 说明, 复化辛普森公式可以简单地由复化梯形公式的线性



Back
Close

组合得到, 这种由较低精度的计算结果通过线性组合得到精度较高的计算结果的方法叫做外推法.

下面我们阐述通过适当的线性组合, 把复化梯形公式的近似值组合成更高精度的积分近似值的方法.

用复化梯形公式, 取区间长度为 h, 公式的值 $T(h)$ 与原积分值

$$I^* = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

之间存在如下关系：

$$I^* = T(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + \cdots \tag{5.21}$$

其中 $a_2, a_4, \cdots$ 是与 h 无关的常数. 上式表明, 用 $T(h)$ 来近似 I^*, 其截断误差为

$$R[T(h)] = a_2h^2 + a_4h^4 + \cdots = O(h^2).$$

若对分区间, 新区间的长度变为 $h/2$, 将新区间长度代入 (5.21) 得

$$
\begin{aligned}
I^* &= T\left(\frac{h}{2}\right) + a_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \cdots \\
&= T\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{4}a_2h^2 + \frac{1}{16}a_4h^4 + \cdots
\end{aligned} \tag{5.22}
$$

用 (5.22) 的 4 倍减去 (5.21) 得

$$
3I^* = 4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h) + \left(\frac{1}{4} - 1\right)a_4h^4 + \cdots
$$

则

$$
I^* = \frac{4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)}{3} + O(h^4). \tag{5.23}
$$

上式消去了 h^2 项. 若记

$$
T_0(h) = T(h), \quad T_1(h) = \frac{4T_0\left(\frac{h}{2}\right) - T_0(h)}{3},
$$

Back
Close

则用 $T_1(h)$ 作为 I^* 的近似值, 其误差为 $O(h^4)$.

这样, (5.23) 可以写成

$$I^* = T_1(h) + b_4 h^4 + b_6 h^6 + \cdots \tag{5.24}$$

同理, 可用 $T_1(h)$ 的线性组合表示 I^*, 即再将区间对分, 消去 h^4 项, 得

$$I^* = \frac{4^2 T_1\left(\dfrac{h}{2}\right) - T_1(h)}{4^2 - 1} + O(h^6) = T_2(h) + O(h^6), \tag{5.25}$$

其中

$$T_2(h) = \frac{4^2 T_1\left(\dfrac{h}{2}\right) - T_1(h)}{4^2 - 1}$$

这个推导过程继续下去就得到了龙贝格求积公式. 将它完整地写出来就是

$$T_0(h) = T(h), \quad T_j(h) = \frac{4^j T_{j-1}\left(\dfrac{h}{2}\right) - T_{j-1}(h)}{4^j - 1}, \quad j = 1, 2, \cdots \tag{5.26}$$

下面我们给出龙贝格求积公式的算法步骤：

算法 5.1（龙贝格求积算法）

步 1 输入 a, b 及精度 ε;

步 2 置 $h=b-a$, $T_1^1=\dfrac{h}{2}(f(a)+f(b))$;

步 3 置 $i=1$, $j=1$, $n=2$, 对分区间 $[a,b]$，并计算 T_j^{i+1}, T_{j+1}^{i+1}:

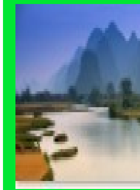
$$T_1^{i+1}=\frac{1}{2}T_1^i+\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-\frac{1}{2}}),\qquad T_{j+1}^{i+1}=\frac{4^jT_j^{i+1}-T_j^i}{4^j-1};$$

步 4 若不满足终止条件，作循环：

$$i:=i+1,\ h:=h/2,\ n:=2n,$$

计算：$T_1^{i+1}=\dfrac{1}{2}T_1^i+\dfrac{h}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-\frac{1}{2}})$,

对 $j=1,\cdots,i$, 计算：$T_{j+1}^{i+1}=\dfrac{4^jT_j^{i+1}-T_j^i}{4^j-1}$.



Back
Close

在上面的算法中, 终止条件一般取为

$$|T_{i+1}^{i+1} - T_i^i| \leq \varepsilon.$$

§5.4.2 通用程序

根据上面的算法 5.1 可编制 MATLAB 通用程序如下：

- 龙贝格求积公式 MATLAB 程序

```
%maromb.m
function s=maromb(fun,a,b,tol)
%用途：用龙贝格公式求积分
%格式：s=maromb(fun,a,b,tol)，fun是被积函数，a,b是
%        积分下、上限tol允许误差，s返回积分近似值
if nargin<4,tol=1e-4;end
```

```
i=1; j=1; h=b-a;
T(1,1)=h*(feval(fun,a)+feval(fun,b))/2;
T(i+1,j)=T(i,j)/2+sum(feval(fun,a+h/2:h:b-h/2))*h/2;
T(i+1,j+1)=(4^j*T(i+1,j)-T(i,j))/(4^j-1);
while (abs(T(i+1,i+1)-T(i,i))>tol)
   i=i+1;h=h/2;
   T(i+1,1)=T(i,1)/2+sum(feval(fun,a+h/2:h:b-h/2))*h/2;
   for j=1:i
      T(i+1,j+1)=(4^j*T(i+1,j)-T(i,j))/(4^j-1);
   end
end
T
s=T(i+1,j+1);
```

例 5.9 取 $\varepsilon = 10^{-6}$, 利用龙贝格求积程序 maromb.m 计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

的近似值.

解 在 MATLAB 命令窗口执行

```
>>s=maromb(inline('4./(1+x.^2)'),0,1,1e-6)
```

计算结果为

```
s=
  3.14159265363824
```

作业: P117: 5.8; 5.11.