现代数值计算方法

第三章 解线性方程组的直接法

1/15
Back
Close

第三章 解线性方程组的直接法

§3.4 LU 分解法

§3.4.1 算法原理及其程序实现

首先看一个例题.

例 3.8 设 $A \in R^{n\times n}$ 非奇异, 若其顺序主子式 D_i $(i = 1, \cdots, n-1)$ 均不为零, 则存在唯一的单位下三角矩阵 L 和上三角矩阵 U, 使得 $A = LU$.

证 由例 3.3 可知, 顺序 Gauss 消去法是可行的. 从消去法的过程, 可得

$$L_{n-1}^{-1} \cdots L_2^{-1} L_1^{-1} A = U,$$

其中 U 是一个上三角矩阵, L_i^{-1} 是对角线元素为 1, 第 i 对角线元素以下的元素为 $-m_{ik}\big(=-a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}\big)$, 其余元素全为零的单位下三角矩阵 $(i=1,\cdots,n-1,\ k=i+1,\cdots,n)$. 由此可得

$$A=L_1L_2\cdots L_{n-1}U.$$

令 $L=L_1L_2\cdots L_{n-1}$, 则 L 是一个单位下三角矩阵. 从而有 $A=LU$.

□

现在我们来讨论矩阵的 LU 分解. 设 $A=LU$, 其中 L 为一个单位下三角矩阵, U 为一个上三角矩阵, 即

$$L=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix},\tag{3.10}$$

Back
Close

则称 $A = LU$ 为一个 LU 分解. 这时线性方程组

$$Ax = b \;\Rightarrow\; LUx = b \;\Rightarrow\; \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases} \tag{3.11}$$

转化为 $Ly = b$ 及 $Ux = y$ 两个三角形方程组. 由于三角形方程组很容易通过回代方法求解, 只有 $O(n^2)$ 的计算量.

下面我们来推导 LU 分解的计算公式. 由等式 $A = LU$, 可得

$$a_{ij} = (l_{i1}, \cdots, l_{i,i-1}, 1, 0, \cdots, 0) \times (u_{1j}, \cdots, u_{jj}, 0, \cdots, 0)^T. \tag{3.12}$$

当 $j \geq i$ 时,

$$a_{ij} = l_{i1}u_{1j} + \cdots + l_{i,i-1}u_{i-1,j} + u_{ij},$$

于是

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} l_{ir}u_{rj};$$

Back
Close

当 $j < i$ 时,

$$a_{ij} = l_{i1}u_{1j} + \cdots + l_{i,j-1}u_{j-1,j} + l_{ij}u_{jj},$$

于是

$$l_{ij} = \Big(a_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} l_{ir}u_{rj}\Big)/u_{jj}.$$

即

$$u_{1j} = a_{1j}, \quad j = 1, \cdots, n; \quad l_{i1} = a_{i1}/u_{11}, \quad i = 2, \cdots, n; \tag{3.13}$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} l_{ir}u_{rj}, \quad i = 2, \cdots, n; \ j = i, \cdots, n; \tag{3.14}$$

$$l_{ij} = \Big(a_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} l_{ir}u_{rj}\Big)/u_{jj}, \quad i = 2, \cdots, n; \ j = 2, \cdots, i-1. \tag{3.15}$$

Back
Close

为了便于编程计算, 将 (3.14) 中的下标 i 换成 k, 将 (3.15) 中的下标 j 换成 k, 则有

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj}, \quad k = 2, \cdots, n;\ j = k, \cdots, n; \tag{3.16}$$

$$l_{ik} = \Big(a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir}u_{rk}\Big)\Big/u_{kk},$$

$$k = 2, \cdots, n-1;\ i = k+1, \cdots, n. \tag{3.17}$$

下面是用 LU 分解求解线性方程组的算法步骤:

算法 3.3 (LU 分解法)

步 1 输入系数矩阵 A, 右端项 b;

步 2 LU 分解:

$$u_{1j} = a_{1j}, \quad j = 1, \cdots, n;$$

$$l_{i1} = a_{i1}/u_{11}, \quad i = 2, \cdots, n;$$

对 $k = 2, \cdots, n$, 计算

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj}, \quad j = k, \cdots, n;$$

$$l_{ik} = \Big(a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk}\Big)/u_{kk}, \quad i = k+1, \cdots, n.$$

步 3 用向前消去法解下三角方程组 $Ly = b$:

$$y_1 = b_1,$$

对 $k = 2, \cdots, n$, 计算

$$y_k = b_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} y_j;$$

步 4 用回代法解上三角方程组 $Ux = y$:

$$x_n = y_n/u_{nn},$$

对 $k = n-1, \cdots, 1$, 计算

Back
Close

$$x_k = \Big(y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj}x_j\Big)/u_{kk}.$$

根据算法 3.3, 编制 MATLAB 程序如下：

- LU 分解 MATLAB 程序

```
%malu.m
function [x,l,u]=malu(A,b)
%用途: 用LU分解法解方程组Ax=b
%格式: [x,l,u]=malu(A,b)    A为系数矩阵,b为右端向量,
%       x返回解向量,l返回下三角矩阵,u返回上三角矩阵
%LU分解
n=length(b); u=zeros(n,n);
l=eye(n,n);
u(1,:)=A(1,:);
```

```
l(2:n,1)=A(2:n,1)/u(1,1);
for k=2:n
    u(k,k:n)=A(k,k:n)-l(k,1:k-1)*u(1:k-1,k:n);
    l(k+1:n,k)=A(k+1:n,k)-l(k+1:n,1:k-1)*u(1:k-1,k);
    l(k+1:n,k)=l(k+1:n,k)/u(k,k);
end
%解下三角方程组Ly=b
y=zeros(n,1);
y(1)=b(1);
for k=2:n
    y(k)=b(k)-l(k,1:k-1)*y(1:k-1);
end
%解上三角方程组Ux=y
```

```
x=zeros(n,1); x(n)=y(n)/u(n,n);
for k=n-1:-1:1
   x(k)=(y(k)-u(k,k+1:n)*x(k+1:n))/u(k,k);
end
```

例 **3.9** 利用程序 malu.m 计算下列线性方程组的解

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 4 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}$$

解 在 MATLAB 命令窗口执行

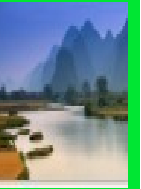
```
>> A=[2 -1 4 -3 1; -1 1 2 1 3; 4 2 3 3 -1;
      -3 1 3  2 4;  1 3 -1 4 4];
```

Back
Close

```
>> b=[11 14 4 16 18]';
>> [x,l,u]=malu(A,b); x'
```

得计算结果：

```
x =

     1.0000    2.0000    1.0000   -1.0000    4.0000

l =

     1.0000         0         0         0         0
    -0.5000    1.0000         0         0         0
     2.0000    8.0000    1.0000         0         0
    -1.5000   -1.0000   -0.3514    1.0000         0
     0.5000    7.0000    0.8378   -1.2069    1.0000

u =

     2.0000   -1.0000    4.0000   -3.0000     1.0000
```

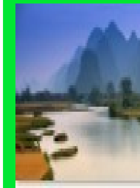


0	0.5000	4.0000	-0.5000	3.5000
0	0	-37.0000	13.0000	-31.0000
0	0	0	1.5676	-1.8919
0	0	0	0	2.6897

§3.4.2 LU 分解与 Gauss 消去法的关系

现在我们来讨论 LU 分解与 Gauss 消去法的关系. 由算法 3.1 可知, 顺序 Gauss 消去法的第一步消元相当于用矩阵

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -m_{21} & 1 & & & \\ -m_{31} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -m_{n1} & & & & 1 \end{pmatrix}$$



左乘 $(A^{(1)}, b^{(1)})$, 这里 m_{i1} 由 (3.4) 所定义, 即

$$(A^{(2)}, b^{(2)}) = M_1(A^{(1)}, b^{(1)}).$$

第二步消元相当于用矩阵

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & -m_{32} & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & -m_{n2} & & & 1 \end{pmatrix}$$

左乘 $(A^{(2)}, b^{(2)})$, 即

$$(A^{(3)}, b^{(3)}) = M_2(A^{(2)}, b^{(2)}) = M_2M_1(A^{(1)}, b^{(1)}).$$

一般地, 第 k 步相当于用矩阵

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -m_{k+1,\,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -m_{nk} & & & 1 \end{pmatrix}$$

左乘 $(A^{(k)}, b^{(k)})$, 即

$$\begin{aligned} \left(A^{(k+1)}, b^{(k+1)}\right) &= M_k\left(A^{(k)}, b^{(k)}\right) = \cdots \\ &= M_k \cdots M_2 M_1 \left(A^{(1)}, b^{(1)}\right), \quad k = 1, \cdots, n-1. \end{aligned}$$

由 Gauss 消去法可知, 经过 $n-1$ 步消元后, 系数矩阵 A 被化成了上三角矩阵, 即 $A^{(n)} = U$, 从而

$$U = A^{(n)} = M_{n-1} A^{(n-1)} = M_{n-1} \cdots M_2 M_1 A,$$

Back
Close

于是

$$A = M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} U = LU,$$

这里,

$$L = M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & 1 & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{n,\,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

是单位下三角矩阵. 由此可见, 顺序 Gauss 消去法实际上就是将方程组的系数矩阵分解成单位下三角矩阵与上三角矩阵的乘积. 对比算法 3.1 和算法 3.3, 不难看出, 顺序 Gauss 消去法的消元过程相当于 LU 分解过程和 $Ly = b$ 的求解, 而回代过程则相当于解线性方程组 $Ux = y$.

作业: P58: 3.7; 3.8.