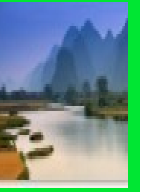


现代数值计算方法

第三章 解线性方程组的直接法

第三章 解线性方程组的直接法

本章研究 n 阶线性方程组的直接解法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.1}$$

若用矩阵和向量的记号来表示, (3.1) 可写成

$$Ax = b. \tag{3.2}$$

其中, n 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 称为方程组的系数矩阵, n 维向量 $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ 称为右端项, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为所求的解. 所谓

Back
Close

直接法, 是指经过有限步运算后能求得方程组精确解的方法. 若 A 非奇异, 方程组 (3.1) 有唯一解. 下面介绍几种比较实用的直接法.

§3.1 顺序 Gauss 消去法及其程序实现

Gauss 消去法的基本思想是：首先使用初等行变换将方程组转化为一个同解的上三角形方程组 (称为消元), 再通过回代法求解该三角形方程组 (称为回代). 按行原先的位置进行消元的 Gauss 消去法成为顺序 Gauss 消去法.

例 3.1 用顺序 Gauss 消去法解线性方程组

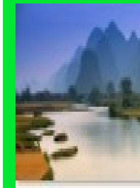
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 7, \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

解 1. 消元过程：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ -1 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -2 & 7 \\ -4 & 5 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+4r_1]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & 3 & -5 & -23 \\ 0 & 9 & 6 & 1 & 40 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-3r_2]{r_3+2r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 12 & -5 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4+12r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -68 \end{pmatrix}.$$

2. 回代过程：



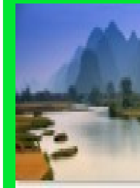
Back
Close

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\
3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 8, \\
-x_3 - x_4 = -7, \\
-17x_4 = -68
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x_4 = 4, \\
x_3 = 7 - x_4 = 3, \\
x_2 = (8 + 2x_3 - 2x_4)/3 = 2, \\
x_1 = 10 - x_1 - x_2 - x_3 = 1.
\end{cases}
$$

对于一般线性方程组, 使用顺序 Gauss 消去法求解

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}, \\
a_{21}^{(1)} x_1 + a_{22}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)}, \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}^{(1)} x_1 + a_{n2}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_n^{(1)}.
\end{cases}
\tag{3.3}
$$

1. 消元过程:



Back
Close

$$
\begin{pmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)}
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)}
\end{pmatrix}
$$

$$
\to \cdots \to
\begin{pmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)}
\end{pmatrix}
$$

Back
Close

其中

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1}a_{1j}^{(1)}, \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1}b_1^{(1)}, \quad m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad i, j = 2, \cdots, n.$$

一般地,

$$\begin{gathered} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)}, \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)}, \quad m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \\ i, j = k+1, \cdots, n; \ k = 1, \cdots, n-1. \end{gathered} \tag{3.4}$$

2. 回代过程:

$$\left\{ \begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)}, \end{aligned} \right.$$

$$
\Longrightarrow \begin{cases} x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}, \\ x_k = \Big(b_k^{(k)} - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j \Big) / a_{kk}^{(k)}, \\ \quad k = n-1, \cdots, 2, 1. \end{cases} \tag{3.5}
$$

在此基础上, 我们得到顺序 Gauss 消去法的算法步骤:

算法 3.1 (顺序 Gauss 消去法)

步 1　输入系数矩阵 A, 右端项 b, 置 $k := 1$;

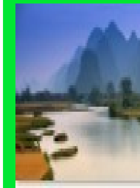
步 2　消元: 对 $k = 1, \cdots, n-1$, 计算

$$
m_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, \quad a_{ik}^{(k+1)} = 0,
$$

$$
a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}, \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)}.
$$

$$
(i = k+1, \cdots, n; \quad j = k+1, \cdots, n.)
$$

步 3　回代:



$$x_n = b_n^{(n)}/a_{nn}^{(n)},$$

对 $k = n-1, \cdots, 1$, 计算

$$x_k = \left(b_k^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j\right) \Big/ a_{kk}^{(k)}.$$

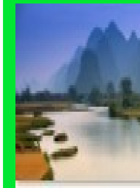
现在我们来统计顺序 Gauss 消去法的计算量. 由于加减法的计算量可忽略不计, 我们只统计乘除法次数.

消元过程：第 k $(k = 1, \cdots, n-1)$ 步消元有

$$(n-k)(n-k+1) + (n-k) = (n-k)(n-k+2)$$

次乘除法, 共

$$\begin{aligned} N_1 &= \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+2) = \sum_{i=1}^{n-1}(i^2+2i) \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n(n-1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6} \end{aligned}$$



Back
Close

次乘除法.

回代过程：计算 x_k $(k = n, \cdots, 2, 1)$ 时, 有 $n-k+1$ 次乘除法, 共

$$N_2 = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

次乘除法.

消元和回代过程共计

$$N_1 + N_2 = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$$

次乘除法.

可见消元过程的计算量为 $O(n^3)$, 而回代过程的计算量为 $O(n^2)$, 因此顺序 Gauss 消去法的计算量主要在消元过程部分.

可以证明, 如果 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的顺序主子式

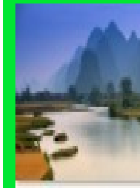
$$D_1=a_{11},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\cdots,D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

均不为 0, 则算法 3.1 是可行的.

根据算法 3.1, 编制 MATLAB 程序如下：

- 顺序 Gauss 消去法 MATLAB 程序

```
%magauss.m
function x=magauss(A,b,flag)
%用途：顺序Gauss消去法解线性方程组Ax=b
%格式：x=magauss(A,b,flag)，A为系数矩阵，b为右端项，
%        若flag=0,则不显示中间过程，否则显示中间过程，
```



Back
Close

```
%       默认为0，x为解向量
if nargin<3, flag=0; end
n=length(b);
%消元
for k=1:(n-1)
    m=A(k+1:n,k)/A(k,k);
    A(k+1:n,k+1:n)=A(k+1:n,k+1:n)-m*A(k,k+1:n);
    b(k+1:n)=b(k+1:n)-m*b(k);
    A(k+1:n,k)=zeros(n-k,1);
    if flag~=0, Ab=[A,b], end
end
%回代
x=zeros(n,1);
```

```
x(n)=b(n)/A(n,n);
for k=n-1:-1:1
    x(k)=(b(k)-A(k,k+1:n)*x(k+1:n))/A(k,k);
end
```

例 3.2 利用通用程序 magauss.m 计算下列方程组的解：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=10, \\ -x_1+2x_2-3x_3+x_4=-2, \\ 3x_1-3x_2+6x_3-2x_4=7, \\ -4x_1+5x_2+2x_3-3x_4=0. \end{cases}$$

解 在 MATLAB 命令窗口执行

```
>> A=[1 1 1 1;-1 2 -3 1;3 -3 6 -2;-4 5 2 -3];
>> b=[10 -2 7 0]';
>> x=magauss(A,b); x'
```

得计算结果：

```
x =

   1    2    3     4
```

例 **3.3** 证明: 顺序 Gauss 消去法可行的充分必要条件是系数矩阵 A 的所有顺序主子式 $D_i \neq 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$.

证　必要性. 若顺序 Gauss 消去法是可行的, 即 $a_{ii}^{(i)} \neq 0$, 则可进行消去法的 $k-1$ 步 $(k \leq n)$. 由于 $A^{(k)}$ 是由 A 逐行实行初等变换 (某数乘以某一行加到另一行) 得到的, 这些运算不改变相应顺序主子式的值, 故有

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & a_{kk}^{(k)} \end{vmatrix} = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{kk}^{(k)} \neq 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Back
Close

充分性. 用归纳法证明. 当 $k=1$ 时显然成立. 设命题对 $k-1$ 成立. 现设 $D_1 \neq 0, \cdots, D_{k-1} \neq 0, D_k \neq 0$. 由归纳法假设有 $a_{11}^{(1)} \neq 0, \cdots, a_{k-1,k-1}^{(k-1)} \neq 0$. 因此, 消去法可以进行第 $k-1$ 步, A 约化为

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k-1)} & A_{12}^{(k-1)} \\ & A_{22}^{(k)} \end{bmatrix},$$

其中 $A_{11}^{(k-1)}$ 是对角元为 $a_{11}^{(1)}, \cdots, a_{k-1,k-1}^{(k-1)}$ 的上三角矩阵, 因 $A^{(k)}$ 是通过行初等变换由 A 逐步得到的, 故 A 的 k 阶顺序主子式与 $A^{(k)}$ 的 k 阶顺序主子式相等, 即

$$D_k = \det \begin{pmatrix} A_{11}^{(k-1)} & A_{12}^{(k-1)} \\ & a_{kk}^{(k)} \end{pmatrix} = a_{11}^{(1)} \cdots a_{k-1,k-1}^{(k-1)} a_{kk}^{(k)}.$$

故由 $D_k \neq 0$ 及归纳法假设可推出 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$. $\square$

作业: P57: 3.4; 3.5.