



1/23

现代数值计算方法

第四章 插值法与最小二乘拟合



Back

Close



2/23

第四章 插值法与最小二乘拟合

§4.3 样条插值法

§4.3.1 高阶插值的 Runge 现象

从拉格朗日插值余项公式的分母部分可以发现, 节点数的增加对提高插值精度是有利的, 但这只是问题的一个方面. 以下讨论的著名例子揭示了问题的另一方面, 即并非插值节点越多精度越高.

例 4.7 设

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

分别讨论将区间 $[-5, 5]$ 5 等分和 10 等分后, 拉格朗日插值的效果.



Back

Close

解 根据拉格朗日插值法通用程序 malagr.m, 编写下面的 MATLAB 程序:

```
%marunge.m  
function marunge()  
xx=-5:0.05:5; y=1./(1+xx.^2);  
x1=-5:2:5; y1=1./(1+x1.^2);  
x2=-5:1:5; y2=1./(1+x2.^2);  
yy1=malagr(x1,y1,xx);  
yy2=malagr(x2,y2,xx);  
plot(xx,yy1,'-'); hold on  
plot(xx,yy2,'r-'); plot(xx,y);  
text(1.5,0.5,'L5'); text(4.0,1.5,'L10');
```

在 MATLAB 命令窗口执行



3/23



Back

Close

```
>> marunge
```

得到 $L_5(x)$ 和 $L_{10}(x)$ 的图像, 如图 1.

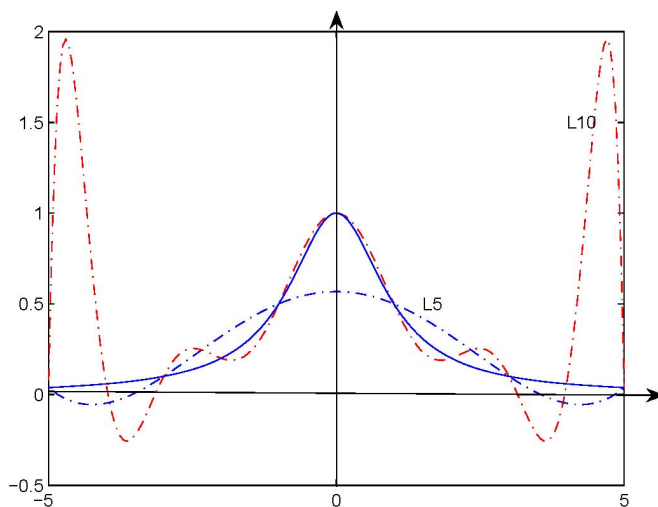


图 1 高阶插值的 Runge 现象

分析插值结果可以发现, 在 $[-5, -4] \cup [4, 5]$ 部分, $L_{10}(x)$ 比 $L_5(x)$



4/23



Back

Close

效果更差, 这种高阶插值的振荡现象称为 Runge 现象. 从拉格朗日插值余项公式 (4.4) 不难找出 Runge 现象发生的原因. 事实上, 由于

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right),$$

可得

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2i} (n+1)! \left[\frac{1}{(x-i)^{n+2}} - \frac{1}{(x+i)^{n+2}} \right].$$

从而

$$\begin{aligned} f(x) - L_n(x) &= \frac{(-1)^{n+1}}{2i} \left[\frac{1}{(\xi-i)^{n+2}} - \frac{1}{(\xi+i)^{n+2}} \right] \omega(x) \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \omega(x)}{(\xi^2+1)^{n/2+1}} \sin(n+2)\theta, \end{aligned}$$

其中, $\theta = \arctan \frac{1}{\xi}$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 无法保证余项的收敛性.



5/23



Back

Close

§4.3.2 分段插值

避免高阶插值 Runge 现象的基本方法是使用分段函数进行分段插值. 我们在此介绍分段线性插值 $I_1(x)$ 和分段 3 阶 Hermite 插值 $I_3(x)$.

1. 分段线性插值

设已知 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 及 $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \cdots, n$), $I_1(x)$ 为区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上不超过 1 次的多项式, 且满足 $I_1(x_{i-1}) = y_{i-1}$, $I_1(x_i) = y_i$ ($i = 1, \cdots, n$). 由线性插值公式得

$$I_1(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} y_i, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i. \quad (4.23)$$

可以证明, 分段线性插值是收敛的. 事实上, 分段线性插值的余项为

$$R_1(x) = f(x) - I_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2} (x - x_{i-1})(x - x_i), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i. \quad (4.24)$$



6/23



Back

Close

由于

$$\max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} |(x - x_{i-1})(x - x_i)| = \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4},$$

由故 (4.24) 得误差上界

$$|R_1(x)| = |f(x) - I_1(x)| \leq \frac{h^2}{8} M_2, \quad (4.25)$$

其中

$$h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}), \quad M_2 = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f''(x)|.$$

由 (4.25) 立知, 当 $h \rightarrow 0$ 时, $I_1(x) \rightarrow f(x)$.

分段线性插值简单, 易于应用. 同时由 (4.25) 可知, 可通过选取适当的步长 h 控制精度. 但它不具有光滑性, 使用 Hermite 插值原理可得到具有光滑性的分段插值.

2. 分段 3 阶 Hermite 插值



7/23



Back

Close



8/23

设已知 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, $y_i = f(x_i)$ 及 $y'_i = f'(x_i)$ ($i = 0, 1, \cdots, n$). $I_3(x)$ 为区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上不超过 3 次的多项式, 且满足

$$\begin{cases} I_3(x_{i-1}) = y_{i-1}, & I_3(x_i) = y_i, \\ I'_3(x_{i-1}) = y'_{i-1}, & I'_3(x_i) = y'_i, \end{cases} \quad (i = 1, \cdots, n).$$

由 3 阶 Hermite 插值公式 (4.17) 得

$$\begin{aligned} I_3(x) = & \alpha_0\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right)y_{i-1} + \alpha_1\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right)y_i \\ & + h_i\beta_0\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right)y'_{i-1} + h_i\beta_1\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right)y'_i, \end{aligned} \quad (4.26)$$
$$(x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad i = 1, \cdots, n),$$

其中, $h_i = x_i - x_{i-1}$, 基函数 $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_0(x)$, $\beta_1(x)$ 的表达式见 (4.16).



Back

Close

再来看看分段 3 阶 Hermite 插值的截断误差. 由 (4.18) 可得

$$R_3(x) = f(x) - I_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_{i-1})^2(x - x_i)^2, \quad (4.27)$$
$$(x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad i = 1, \cdots, n).$$

由此得误差估计式

$$|R_3(x)| = |f(x) - I_3(x)| \leq \frac{h^4}{384} M_4, \quad (4.28)$$

其中

$$h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}), \quad M_4 = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(4)}(x)|.$$

由 (4.28) 立知, 当 $h \rightarrow 0$ 时, $I_3(x) \rightarrow f(x)$, 即分段 3 阶 Hermite 插值是收敛的.

分段 3 阶 Hermite 插值多项式显然有 1 阶连续导数, 但在实际应用中一般不知道, 我们可以利用这一自由度得到光滑性更好的、在实际工程计算中应用最广泛的三阶样条插值.



9/23



Back

Close

§4.3.3 三阶样条插值及其通用程序

1. 算法推导

设已知 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 及 $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \cdots, n$), 插值函数 $S(x)$ 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上是不超过 3 次的多项式且具有 2 阶连续导数, 则称 $S(x)$ 为三阶样条插值. 具体地说, 三阶样条插值是满足下列条件的分段三次多项式:

(1) 插值条件:

$$S(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n);$$

(2) 连接条件:

$$S(x_i - 0) = S(x_i + 0), \quad S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0),$$

$$S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0), \quad (i = 1, \cdots, n - 1).$$



10/23



Back

Close

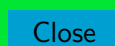
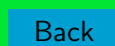


11/23

我们来分析一下三阶样条插值的存在性. 这里, $S(x)$ 是 n 个不超过 3 次的多项式, 共含 $4n$ 个待定参数. 插值条件给出了 $n+1$ 个约束, 连接条件给出了 $3(n-1)$ 个约束. 故插值条件和连接条件一共给出了 $4n-2$ 个约束. 与待定参数相比还少 2 个约束, 为此可按实际需要, 人为地添加 2 个边界条件. 常用的边界条件有下列 4 类:

- (1) 一阶导数: $S'(x_0) = y'_0, S'(x_n) = y'_n$;
- (2) 二阶导数: $S''(x_0) = y''_0, S''(x_n) = y''_n$;
- (3) 周期样条: $S'(x_0) = S'(x_n), S''(x_0) = S''(x_n)$, 前提条件是 $S(x_0) = S(x_n)$, 当被插函数是周期函数或封闭曲线时, 宜用周期条件;
- (4) 非扭结: 第一段和第二段多项式 3 次项系数相同, 最后一段和倒数第二段多项式 3 次项系数相同.

下面我们利用分段 3 阶 Hermite 插值给出三阶样条插值的一种算法.



设 $S'(x_i) = m_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$), 由分段 3 阶 Hermite 插值式 (4.26)

得

$$\begin{aligned} S(x) = & \alpha_0\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right)y_{i-1} + \alpha_1\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right)y_i \\ & + h_i\beta_0\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right)m_{i-1} + h_i\beta_1\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right)m_i, \quad (4.29) \\ & (x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad i = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

其中, $h_i = x_i - x_{i-1}$, 基函数 $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_0(x)$, $\beta_1(x)$ 的表达式由 (4.16) 定义.

由分段 3 阶 Hermite 插值的性质在写出 $S(x)$ 的表达式的过程中实际上已使插值条件和连接条件的连续性和一阶光滑性得到满足, 故余下的只需要根据 $n-1$ 个二阶光滑性约束条件 $S''(x_i-0) = S''(x_i+0)$



12/23



Back

Close

和 2 个边界条件来求 $n + 1$ 个待定参数 m_0, m_1, \dots, m_n . 直接计算得

$$\alpha_0''(x) = 12x - 6, \quad \alpha_1''(x) = -12x + 6,$$

$$\beta_0''(x) = 6x - 4, \quad \beta_1''(x) = 6x - 2.$$

由此不难求得

$$\alpha_0''(1) = 6, \quad \alpha_1''(1) = -6, \quad \beta_0''(1) = 2, \quad \beta_1''(1) = 4,$$

$$\alpha_0''(0) = -6, \quad \alpha_1''(0) = 6, \quad \beta_0''(0) = -4, \quad \beta_1''(0) = -2.$$

利用 $[x_{i-1}, x_i]$ 上 $S(x)$ 的表达式求得

$$\begin{aligned} S''(x) = & \frac{y_{i-1}}{h_i^2} \alpha_0''\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right) + \frac{y_i}{h_i^2} \alpha_1''\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right) \\ & + \frac{m_{i-1}}{h_i} \beta_0''\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right) + \frac{m_i}{h_i} \beta_1''\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right) \end{aligned}$$



13/23



Back

Close

故



14/23

$$\begin{aligned} S''(x_i - 0) &= \frac{y_{i-1}}{h_i^2} \alpha_0''(1) + \frac{y_i}{h_i^2} \alpha_1''(1) + \frac{m_{i-1}}{h_i} \beta_0''(1) + \frac{m_i}{h_i} \beta_1''(1) \\ &= \frac{2}{h_i} m_{i-1} + \frac{4}{h_i} m_i - \frac{6}{h_i^2} (y_i - y_{i-1}). \end{aligned} \quad (4.30)$$

同样, 利用 $[x_i, x_{i+1}]$ 上 $S(x)$ 的表达式求得

$$\begin{aligned} S''(x) &= \frac{y_i}{h_{i+1}^2} \alpha_0''\left(\frac{x - x_i}{h_{i+1}}\right) + \frac{y_{i+1}}{h_{i+1}^2} \alpha_1''\left(\frac{x - x_i}{h_{i+1}}\right) \\ &\quad + \frac{m_i}{h_{i+1}} \beta_0''\left(\frac{x - x_i}{h_{i+1}}\right) + \frac{m_{i+1}}{h_{i+1}} \beta_1''\left(\frac{x - x_i}{h_{i+1}}\right) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} S''(x_i + 0) &= \frac{y_i}{h_{i+1}^2} \alpha_0''(0) + \frac{y_{i+1}}{h_{i+1}^2} \alpha_1''(0) + \frac{m_i}{h_{i+1}} \beta_0''(0) + \frac{m_{i+1}}{h_{i+1}} \beta_1''(0) \\ &= -\frac{4}{h_{i+1}} m_i - \frac{2}{h_{i+1}} m_{i+1} + \frac{6}{h_{i+1}^2} (y_{i+1} - y_i). \end{aligned} \quad (4.31)$$



由 $S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0)$ 得

$$\frac{2}{h_i}m_{i-1} + \frac{4}{h_i}m_i - \frac{6}{h_i^2}(y_i - y_{i-1}) = -\frac{4}{h_{i+1}}m_i - \frac{2}{h_{i+1}}m_{i+1} + \frac{6}{h_{i+1}^2}(y_{i+1} - y_i),$$

即

$$\begin{aligned} & \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}m_{i-1} + 2m_i + \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}m_{i+1} \\ &= \frac{3h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{3h_i}{h_i + h_{i+1}}\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}. \end{aligned}$$

令

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i, \quad \theta_i = 3\lambda_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + 3\mu_i\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}, \quad (4.32)$$

则有

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = \theta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.33)$$



15/23



Back

Close



16/23

(1) 如果是第一类（一阶导数）边界条件, 则 $m_0 = y'_0$, $m_n = y'_n$, 于是 (4.33) 可写成

$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 - \lambda_1 y'_0 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \\ \theta_{n-1} - \mu_{n-1} y'_n \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

(2) 如果是第二类（二阶导数）边界条件, 在 (4.31) 中取 $i = 0$, 在 (4.30) 中取 $i = n$, 得

$$\begin{cases} -\frac{4}{h_1}m_0 - \frac{2}{h_1}m_1 + \frac{6}{h_1^2}(y_1 - y_0) = y''_0, \\ \frac{2}{h_n}m_{n-1} + \frac{4}{h_n}m_n - \frac{6}{h_n^2}(y_n - y_{n-1}) = y''_n. \end{cases}$$



Back

Close

整理得

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = 3\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{h_1}{2}y_0'', \\ m_{n-1} + 2m_n = 3\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} + \frac{h_n}{2}y_n''. \end{cases}$$

令

$$\mu_0 = 1, \quad \lambda_n = 1, \quad \theta_0 = 3\frac{y_1 - y_0}{h_1}, \quad \theta_n = 3\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \quad (4.35)$$

这样, 结合 (4.32) 和 (4.33) 得

$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_0 & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ & & & \lambda_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 - h_1 y_0''/2 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-1} \\ \theta_n + h_n y_n''/2 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

方程组 (4.34) 和 (4.36) 都是三对角线性方程组, 可以用追赶法进



17/23



Back

Close

行数值求解. 其它边界条件也可以转化为线性方程组来求解.

2. 算法通用程序

我们给出具有一阶导数边界条件的三阶样条插值的 MATLAB 通用程序. 分为 4 步: (1) 由 (4.32) 式计算 $\lambda_i, \mu_i, \theta_i$ 等辅助量; (2) 用追赶法求解 (4.34) 得 m_1, \dots, m_{n-1} ; (3) 判断插值点所在区间; (4) 用 (4.29) 计算插值. 下列程序中包含了 5 个子函数, 一个是追赶法, 另外四个是基函数.

```
%maspline.m
```

```
function m=maspline(x,y,dy0,dyn,xx)
```

```
%用途: 三阶样条插值 (一阶导数边界条件)
```

```
%格式: m=maspline(x,y,dy0,dyn,xx)  x为节点向量,y为数
```

```
%      据,dy0,dyn为左右两端点的一阶导数如果xx缺省,则
```

```
%      输出各节点的一阶导数值, m为xx的三阶样条插值
```



18/23



Back

Close

```
n=length(x)-1; % 计算小区间的个数
h=diff(x); lambda=h(2:n)./(h(1:n-1)+h(2:n));
mu=1-lambda;
theta=3*(lambda.*diff(y(1:n))./h(1:n-1);
theta=theta+mu.*diff(y(2:n+1))./h(2:n));
theta(1)=theta(1)-lambda(1)*dy0;
theta(n-1)=theta(n-1)-lambda(n-1)*dyn;
% 追赶法解三对角方程组
dy=machase(lambda,2*ones(1:n-1),mu,theta);
% 若给插值点, 计算插值
m=[dy0;dy;dyn];
if nargin>=5
    s=zeros(size(xx));
```



19/23



Back

Close



20/23

```
for i=1:n
    if i==1
        kk=find(xx<=x(2));
    else if i==n
        kk=find(xx>x(n));
    else
        kk=find(xx>x(i)&xx<=x(i+1));
    end
    xbar=(xx(kk)-x(i))/h(i);
    s(kk)=alpha0(xbar)*y(i)+alpha1(xbar)*y(i+1)...
        +h(i)*beta0(xbar)*m(i)+h(i)*beta1(xbar)*m(i+1);
end
m=s;
```



Back

Close

```
end
% 追赶法
function x=machase(a,b,c,d)
n=length(a);
for k=2:n
    b(k)=b(k)-a(k)/b(k-1)*c(k-1);
    d(k)=d(k)-a(k)/b(k-1)*d(k-1);
end
x(n)=d(n)/b(n);
for k=n-1:-1:1
    x(k)=(d(k)-c(k)*x(k+1))/b(k);
end
x=x(:);
```



21/23



Back

Close

% 基函数

```
function y=alpha0(x)
```

```
y=2*x.^3-3*x.^2+1;
```

```
function y=alpha1(x)
```

```
y=-2*x.^3+3*x.^2;
```

```
function y=beta0(x)
```

```
y=x.^3-2*x.^2+x;
```

```
function y=beta1(x)
```

```
y=x.^3-x.^2;
```



22/23

例 4.8 利用程序 maspline.m, 求满足下列数据的三阶样条插值

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	0	1	0
$f'(x)$	0			-1



Back

Close

其中, 插值点为 $-0.8, -0.3, 0.2, 0.7, 1.2, 1.7, 2.1$.

解 在 MATLAB 命令窗口执行

```
>> x=[-1 0 1 2]; y=[-1 0 1 0];
```

```
>> xx=[-0.8 -0.3 0.2 0.7 1.2 1.7 2.1];
```

```
>> s=maspline(x,y,0,-1,xx)
```

s =

```
-0.9451 -0.4414 0.3045 0.9002 0.9109 0.3546 -0.0905
```

作业: P91: 4.16; 4.22.



23/23



Back

Close