现代数值计算方法

第五章 数值积分和数值微分

Back
Close

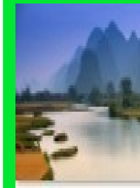
第五章 数值积分和数值微分

§5.5 高斯型求积公式

§5.5.1 算法原理

对已知求积公式 (5.2) 可以讨论它的代数精度, 反之也可以按照代数精度要求导出求积公式. 对于求积公式 (5.2), 当求积节点 $x_k\,(k=0,1,\cdots,n)$ 固定时, 公式 (5.2) 有 $n+1$ 个待定参数, 故此时可要求它满足对 $1,x,\cdots,x^n$ "准确" 这样 $n+1$ 个约束条件, 从而使之至少具有 n 次代数精度.

进一步, 可考虑将 $x_k\,(k=0,1,\cdots,n)$ 也视为待定参数, 这样公式 (5.2) 的待定参数就有 $2n+2$ 个, 从而可望公式 (5.2) 的代数精度



达到 $2n+1$. 此类高精度的求积公式称为高斯型公式, 而对应的节点 $x_k\,(k=0,1,\cdots,n)$ 称为区间 $[a,b]$ 上的高斯点.

例 5.10 导出一点高斯公式

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0). \tag{5.27}$$

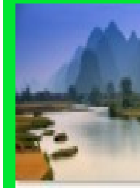
解 由 (5.27), 有 $2\times 0+1=1$ 次代数精度, 因此 (5.27) 对 $f(x)=1$ 和 $f(x)=x$ 是准确的. 故有

$$\begin{cases} A_0=b-a \\ x_0A_0=\dfrac{b^2-a^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0=b-a \\ x_0=\dfrac{b+a}{2} \end{cases} \Rightarrow I\approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

因此, $[a,b]$ 上的 1 阶高斯点为 $(a+b)/2$, 恰为区间的中点.

例 5.11 导出两点高斯公式

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1). \tag{5.28}$$

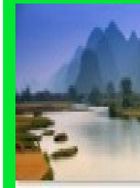


解　由 (5.28), 有 $2\times 1+1=3$ 次代数精度, 因此 (5.28) 对 $f(x)=1$, $f(x)=x$, $f(x)=x^2$ 和 $f(x)=x^3$ 是准确的. 由此可得一个四元线性方程组, 求解困难. 简化运算的方法是, 先设 $a=-1$, $b=1$, 此时有

$$
\begin{aligned}
&A_0+A_1=2, && \text{ⓐ}\\
&x_0A_0+x_1A_1=0, && \text{ⓑ}\\
&x_0^2A_0+x_1^2A_1=2/3, && \text{ⓒ}\\
&x_0^3A_0+x_1^3A_1=0, && \text{ⓓ}
\end{aligned}
$$

当已知 x_0, x_1 时, 上面的方程ⓑ,ⓓ 是关于 A_0, A_1 的齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
x_0A_0+x_1A_1=0,\\
x_0^3A_0+x_1^3A_1=0.
\end{cases}
$$



由于 A_0, A_1 不全为零, 故由 克莱姆规则有

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_0^3 & x_1^3 \end{vmatrix} = x_0 x_1 (x_1^2 - x_0^2) = 0.$$

又易知 $x_0 x_1 \neq 0$, 故 $x_0^2 = x_1^2 = t$, 代入方程ⓐ,ⓒ 得, $t = 1/3$, 导出

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

由此, 再根据方程ⓐ,ⓑ 得 $A_0 = A_1 = 1$, 即有

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx f\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) + f\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big). \tag{5.29}$$

在一般情形下, 只需通过线性变换

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$$

将 $[a,b]$ 变为 $[-1,1]$. 事实上,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 f\Big(\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}\Big)\frac{b-a}{2}\mathrm{d}t\\ &\approx \frac{b-a}{2}\Big[f\Big(-\frac{b-a}{2\sqrt{3}}+\frac{a+b}{2}\Big)+f\Big(\frac{b-a}{2\sqrt{3}}+\frac{a+b}{2}\Big)\Big].\end{aligned}$$

于是得到 3 次代数精度的两点高斯公式

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}\Big[f\Big(-\frac{b-a}{2\sqrt{3}}+\frac{a+b}{2}\Big)+f\Big(\frac{b-a}{2\sqrt{3}}+\frac{a+b}{2}\Big)\Big].$$

$[a,b]$ 上的 2 阶高斯点为

$$x_0=-\frac{b-a}{2\sqrt{3}}+\frac{a+b}{2},\quad x_1=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}+\frac{a+b}{2}.$$

更高阶的高斯公式的直接导出比较困难. 以下不加证明地给出 $[-1,1]$ 上高斯点的一般求解方法.

定理 5.2 区间 $[-1,1]$ 上 n 阶高斯点恰为勒让德多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]$$

的根.

例 5.12 当 $n=1$ 时, 由

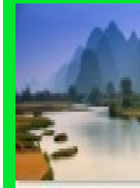
$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^2-1)] = 2x,$$

得 $[-1,1]$ 上 1 阶高斯点 $x_0=0$ (结果与例 5.10 一致).

当 $n=2$ 时, 由

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[(x^2-1)^2] = 12x^2-4,$$

得 $[-1,1]$ 上 2 阶高斯点 $x_0=-1/\sqrt{3}$, $x_1=1/\sqrt{3}$ (结果与例 5.11 一致).



Back
Close

当 $n=3$ 时, 由

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]=\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}[(x^2-1)^3]=120x^3-72x,$$

得 $[-1,1]$ 上 3 阶高斯点

$$x_0=-\sqrt{\frac{3}{5}},\quad x_1=0,\quad x_2=\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

然后再用待定系数法解一线性方程组可得相应的求积系数 $A_0=A_2=5/9$, $A_1=8/9$. 于是 $[-1,1]$ 上的三点高斯公式为

$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{5}{9}f\Big(-\sqrt{\frac{3}{5}}\Big)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\Big(-\sqrt{\frac{3}{5}}\Big),\tag{5.30}$$

该公式具有 5 次代数精度.

6 阶以下高斯求积公式的高斯点和求积系数如下表.

n	高斯点	求积系数	代数精度
1	0	2	1
2	± 0.577350	1	3
3	0 ± 0.774597	0.888889 0.555556	5
4	± 0.861136 ± 0.339981	0.347855 0.652145	7
5	0 ± 0.906180 ± 0.538469	0.568889 0.236927 0.478629	9
6	± 0.932470 ± 0.661209 ± 0.238619	0.131725 0.360762 0.467914	11

表 1　高斯求积公式的高斯点和对应的求积系数

Back
Close

§5.5.2 通用程序

根据高斯积分表 1, 我们可以编制 6 阶以下高斯求积公式的 MATLAB 通用程序如下：

- 高斯求积公式 MATLAB 程序

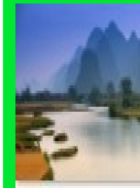
```
%magsint.m
function g=magsint(fname,a,b,n,m)
%用途：用定步长高斯求积公式求函数的积分
%格式：g=magsint(fname,a,b,n,m)  fname是被积函数，a,b
%      分别为积分下上限，n为等分数，m为每段高斯点数
switch m
case 1
t=0; A=1;
```

Back
Close

```
case 2
t=[-1/sqrt(3), 1/sqrt(3)]; A=[1,1];
case 3
t=[-sqrt(0.6), 0.0, sqrt(0.6)]; A=[5/9, 8/9, 5/9];
case 4
t=[-0.861136, -0.339981, 0.339981, 0.861136];
A=[0.347855, 0.652145,  0.652145, 0.347855];
case 5
t=[-0.906180,-0.538469,0.0,0.538469,0.906180];
A=[0.236927,0.478629,0.568889,0.478629,0.236927];
case 6
t=[-0.93247,-0.661209,-0.238619,0.238619,0.661209,0.93247];
A=[0.171325,0.360762,0.467914,0.467914,0.360762,0.171325];
```

Back
Close

```
otherwise
error('本程序高斯点数只能取1,2,3,4,5,6!');
end
x=linspace(a,b,n+1);
g=0;
for i=1:n
   g=g+gsint(fname,x(i),x(i+1),A,t);
end
%子函数
function g=gsint(fname,a,b,A,t)
g=(b-a)/2*sum(A.*feval(fname,(b-a)/2*t+(a+b)/2));
```



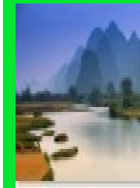
例 **5.13** 利用高斯求积公式的通用程序 magsint.m 计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x \quad 和 \quad I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

的近似值.

解 在 MATLAB 命令窗口执行

```
>> magsint(inline('4./(1+x.^2)'),0,1,2,3)

ans =

      3.14159122238283

>> magsint(inline('4./(1+x.^2)'),0,1,4,4)

ans =

      3.14159265529323

>> magsint(inline('sin(x)./x'),eps,1,2,3)

ans =
```



```
      0.94608307134303
>> magsint(inline('sin(x)./x'),eps,1,4,4)
ans =
      0.94608307062383
```

作业： P117: 5.12; P118: 5.14.