现代数值计算方法

第六章 常微分方程的数值解法

1/16

Back

Close

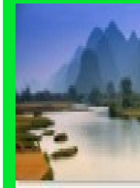
第六章 常微分方程的数值解法

§6.4 Adams 格式

§6.4.1 Adams 格式推导

一步格式在计算时只用到前面一步的近似值 (比如龙格-库塔格式), 这是一步格式的优点. 但正因为如此, 要提高精度, 需要增加中间函数值的计算, 这就加大了计算量. 下面我们介绍多步格式, 它在计算 y_{n+1} 时除了用到 x_n 上的近似值 y_n 外, 还用到 $x_{n-p}\,(p=1,2,\cdots)$ 上的近似值 y_{n-p}.

线性多步格式的典型代表是 Adams 格式, 它直接利用求解节点的斜率值来提高精度. 其中, 将 $y(x)$ 在 $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots$ 处斜率值的加



Back
Close

权平均作为平均斜率值 K^* 的近似值所得到的格式称为显式 Adams 格式；而将 $y(x)$ 在 $x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \cdots$ 处斜率值的加权平均作为平均斜率值 K^* 的近似值所得到的格式称为隐式 Adams 格式.

为简化讨论, 记

$$f_k = f(x_k, y_k), \quad k = n+1, n, n-1, \cdots$$

定义 6.4 若差分格式

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_{n-k+1}, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1 \tag{6.23}$$

为 r 阶格式, 则称之为 r 阶显式 Adams 格式. 又若差分格式

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_{n-k+2}, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1 \tag{6.24}$$

为 r 阶格式, 则称之为 r 阶隐式 Adams 格式.

例 6.9 分别导出 2 阶显式与隐式 Adams 格式.

解 设 $f_k = y'(x_k)\,(k = 1, 2, \cdots, n)$.

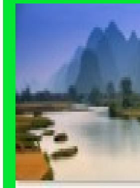
(1) 由

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h[(1-\lambda)f_n + \lambda f_{n-1}] \\ &= y(x_n) + h[(1-\lambda)y'(x_n) + \lambda y'(x_{n-1})] \\ &= y(x_n) + h\big\{(1-\lambda)y'(x_n) + \lambda[y'(x_n) - hy''(x_n) + O(h^2)]\big\} \\ &= y(x_n) + hy'(x_n) - \lambda h^2 y''(x_n) + O(h^3) \end{aligned}$$

及 $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$, 比较 (6.5) 得 $\lambda = -1/2$, 从而有 2 阶显式 Adams 格式:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(3f_n - f_{n-1}\big). \tag{6.25}$$

(2) 为简便计, 分别用 f, f'_x, f'_y 表示 $f(x_n, y_n), f'_x(x_n, y_n), f'_y(x_n, y_n)$,



Back
Close

由二元函数的泰勒展式

$$
\begin{aligned}
f_{n+1} &= f(x_{n+1}, y_{n+1}) \\
&= f + hf'_x + f'_y \cdot (y_{n+1} - y_n) + O[h^2 + (y_{n+1} - y_n)^2]
\end{aligned}
$$

利用

$$y_{n+1} = y_n + h[(1-\lambda)f_n + \lambda f_{n+1}],$$

得

$$f_{n+1} = f + hf'_x + (1-\lambda)hf \cdot f'_y + \lambda h f_{n+1} \cdot f'_y + O(h^2).$$

Back
Close

那么

$$
\begin{aligned}
f_{n+1} &= \frac{f + hf'_x + (1-\lambda)hf\cdot f'_y + O(h^2)}{1-\lambda h f'_y} \\
&= \left[f + hf'_x + (1-\lambda)hf\cdot f'_y + O(h^2)\right]\cdot\left[1 + \lambda h f'_y + O(h^2)\right] \\
&= f + h(f'_x + f\cdot f'_y) + O(h^2) \\
&= y'(x_n) + hy''(x_n) + O(h^2).
\end{aligned}
$$

这样, 由

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h[(1-\lambda)f_n + \lambda f_{n+1}] \\
&= y(x_n) + h\Big\{(1-\lambda)y'(x_n) + \lambda[y'(x_n) + hy''(x_n) + O(h^2)]\Big\} \\
&= y(x_n) + hy'(x_n) + \lambda h^2 y''(x_n) + O(h^3)
\end{aligned}
$$

及 $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$, 比较 (6.5) 得 $\lambda = 1/2$, 从而有 2 阶隐式

Adams 格式：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f_n + f_{n+1}\big), \tag{6.26}$$

恰为梯形格式.

例 6.10 导出 3 阶显式 Adams 格式.

解 设 $f_k = y'(x_k)\,(k = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(\lambda_1 f_n + \lambda_2 f_{n-1} + \lambda_3 f_{n-2}) \\ &= y(x_n) + h[\lambda_1 y'(x_n) + \lambda_2 y'(x_{n-1}) + \lambda_3 y'(x_{n-2})] \\ &= y(x_n) + h\Big\{\lambda_1 y'(x_n) + \lambda_2\Big[y'(x_n) - hy''(x_n) + \frac{h^2}{2}y'''(x_n)\Big] \\ &\qquad + \lambda_3\Big[y'(x_n) - 2hy''(x_n) + 2h^2 y'''(x_n)\Big] + O(h^3)\Big\}. \end{aligned}$$

整理得

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} \;&=\; y(x_n) + h(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)y'(x_n) + h^2(-\lambda_2-2\lambda_3)y''(x_n) \\
&\quad + h^3\left(\frac{\lambda_2}{2}+2\lambda_3\right)y'''(x_n) + O(h^4).
\end{aligned}
$$

由上式及 $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^4)$, 比较 (6.5) 得

$$
\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 1, \quad -\lambda_2-2\lambda_3 = \frac{1}{2}, \quad \frac{\lambda_2}{2}+2\lambda_3 = \frac{1}{6}.
$$

解得

$$
\lambda_1 = \frac{23}{12}, \quad \lambda_2 = -\frac{16}{12}, \quad \lambda_3 = \frac{5}{12}.
$$

从而有 3 阶显式 Adams 格式

$$
y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\big(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}\big). \tag{6.27}
$$

例 6.11 用待定系数法导出 4 阶隐式和显式 Adams 格式.

解 (1) 对于隐式 Adams 格式, 设

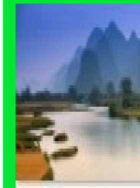
$$y_{n+1} = y_n + h(\lambda_1 f_{n-2} + \lambda_2 f_{n-1} + \lambda_3 f_n + \lambda_4 f_{n+1}).$$

局部截断误差

$$\begin{aligned} R[y] &= y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_n + h) - y_{n+1} \\ &= y(x_n + h) - y(x_n) - h\big[\lambda_1 y'(x_n - 2h) \\ &\quad + \lambda_2 y'(x_n - h) + \lambda_3 y'(x_n) + \lambda_4 y'(x_n + h)\big] \end{aligned}$$

令 $R[x^k] = 0\,(k = 1 \sim 4)$ 及 $x_n = 0$, 代入上式得

$$\begin{cases} h(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 - 1) = 0, \\ h^2(4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_4 + 1) = 0, \\ h^3(12\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_4 - 1) = 0, \\ h^4(32\lambda_1 + 4\lambda_2 - 4\lambda_4 + 1) = 0. \end{cases}$$



Back
Close

解得

$$\lambda_1=\frac{1}{24},\quad \lambda_2=-\frac{5}{24},\quad \lambda_3=\frac{19}{24},\quad \lambda_4=\frac{9}{24}.$$

得 4 阶隐式格式

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\big(f_{n-2}-5f_{n-1}+19f_n+9f_{n+1}\big). \tag{6.28}$$

公式 (6.28) 称为四阶 Adams 内插公式, 它是一个线性三步四阶隐式公式, 应用十分广泛.

(2) 对于显式 Adams 格式, 设

$$y_{n+1}=y_n+h(\lambda_1f_n+\lambda_2f_{n-1}+\lambda_3f_{n-2}+\lambda_4f_{n-3}).$$

局部截断误差

$$\begin{aligned} R[y] &= y(x_{n+1})-y_{n+1}=y(x_n+h)-y_{n+1} \\ &= y(x_n+h)-y(x_n)-h\big[\lambda_1y'(x_n)+\lambda_2y'(x_n-h) \\ &\quad +\lambda_3y'(x_n-2h)+\lambda_4y'(x_n-3h)\big] \end{aligned}$$

Back
Close

$R[x^k]=0\,(k=1\sim 4)$ 及 $x_n=0$, 代入上式得

$$\begin{cases} h(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4-1)=0, \\ h^2(2\lambda_2+4\lambda_3+6\lambda_4+1)=0, \\ h^3(3\lambda_2+12\lambda_3+27\lambda_4-1)=0, \\ h^4(4\lambda_2+32\lambda_3+108\lambda_4+1)=0. \end{cases}$$

解得

$$\lambda_1=\frac{55}{24},\quad \lambda_2=-\frac{59}{24},\quad \lambda_3=\frac{37}{24},\quad \lambda_4=-\frac{9}{24}.$$

得 4 阶显式格式

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\big(55f_n-59f_{n-1}+37f_{n-2}-9f_{n-3}\big). \tag{6.29}$$

公式 (6.29) 称为四阶 Adams 外推公式, 它是一个四步四阶显式公式.

实际应用中, 常将四阶 Adams 外推公式 (6.29) 与内插公式 (6.28)

配套使用, 构成预测-校正公式, 即

$$\begin{cases} p_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{24}\left(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\right), \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{24}\left(f_{n-2} - 5f_{n-1} + 19f_n + 9f(x_{n+1}, p_{n+1})\right). \end{cases} \tag{6.30}$$

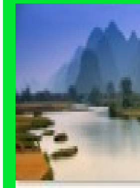
注意到, 外插公式 (6.29) 需要 4 个初值, 通常需要借助于其它差分格式 (如龙格-库塔格式) 计算初值才能启动.

§6.4.2 四阶 Adams 格式通用程序

下面给出四阶 Adams 预测-校正公式的 MATLAB 通用程序.

- 四阶 Adams 预测-校正公式 MATLAB 程序

```
%maadams4.m
function [x, y]=maadams4(dyfun,xspan,y0,h)
```



```
%用途：4阶Adams预报-校正格式解方程y'=f(x, y),y(x0)=y0
%格式：[x, y]=maadams4(dyfun,xspan,y0,h)   dyfun为函数
%      f(x,y),xspan为求解区间[x0,xn],y0为初值,h为步长,
%      x返回节点,y返回数值解
x=xspan(1):h:xspan(2);
[xx,yy]=marunge4(dyfun,[x(1),x(4)],y0,h);
y(1)=yy(1);y(2)=yy(2);
y(3)=yy(3);y(4)=yy(4);
for n=4:(length(x)-1)
  p=y(n)+h/24*(55*feval(dyfun,x(n),y(n)) ...
    -59*feval(dyfun,x(n-1),y(n-1)) ...
    +37*feval(dyfun,x(n-2),y(n-2)) ...
    -9*feval(dyfun,x(n-3),y(n-3)));
```

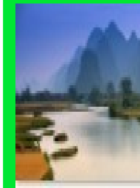
```
    y(n+1)=y(n)+h/24*(feval(dyfun,x(n-2),y(n-2)) ...
              -5*feval(dyfun,x(n-1),y(n-1)) ...
              +19*feval(dyfun,x(n),y(n))...
              +9*feval(dyfun,x(n+1),p));
  end
  x=x'; y=y';
```

例 6.12 取 $h = 0.1$, 用四阶 Adams 预报-校正公式的通用程序 maadams4.m 求解下列初值问题:

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y}, \quad 0 \le x \le 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

并与精确解 $y(x) = \sqrt{1+2x}$ 进行比较.

解 在 MATLAB 命令窗口执行



```
>> clear; dyfun=inline('y-2*x./y');
>> [x,y]=maadams4(dyfun,[0,1],1,0.1);
>> y1=sqrt(1+2*x);
>> [x,y,y1]
ans =
         0    1.0000    1.0000
    0.1000    1.0954    1.0954
    0.2000    1.1832    1.1832
    0.3000    1.2649    1.2649
    0.4000    1.3416    1.3416
    0.5000    1.4142    1.4142
    0.6000    1.4832    1.4832
    0.7000    1.5492    1.5492
```

```
     0.8000     1.6125     1.6125

     0.9000     1.6733     1.6733

     1.0000     1.7321     1.7321

>> (y-y1)'

ans =

1.0e-005 *

         0    0.0417   0.0789    0.1164    0.0571    0.0271

              0.0127   0.0042   -0.0013   -0.0054   -0.0088
```

作业： P145: 6.14; 6.15.