现代数值计算方法

第二章 解线性方程组的迭代法

第二章 解线性方程组的迭代法

§2.2 雅可比迭代法

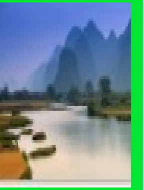
§2.2.1 迭代公式及其通用程序

对于方程组 (2.1), 设 $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, \cdots, n$, 可以得到

$$a_{ii}x_i = b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, \cdots, n,$$

即

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\Big), \quad i = 1, \cdots, n.$$



Back
Close

其相应的迭代公式为

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\Big), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{2.11}$$

迭代公式 (2.11) 称为雅可比 (Jacobi) 迭代法.

为便于收敛性分析, 可将分量形式的迭代公式 (2.11) 改写成矩阵形式. 令

$$N = D = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}),$$

因 $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \cdots, n$, 故 N 非奇异. 对 A 作分裂得

$$A = (A - D) + D,$$

则方程组 $Ax = b$ 可改写为

$$Dx = (D - A)x + b,$$

因此有

$$x = D^{-1}(D - A)x + D^{-1}b.$$

相应的迭代公式为

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(D - A)x^{(k)} + D^{-1}b \tag{2.12}$$

简记为

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f_J, \tag{2.13}$$

其中 $B_J = D^{-1}(D - A) = I - D^{-1}A$, $f_J = D^{-1}b$. 迭代公式 (2.12) 或 (2.13) 也称为 Jacobi 迭代, 同时称 (2.13) 中的 B_J 为 Jacobi 迭代矩阵.

下面给出 Jacobi 迭代法的具体算法步骤:

算法 2.1 (Jacobi 迭代法)

步 1 取初始点 $x^{(0)}$, 精度要求 ε, 最大迭代次数 N, 置 $k := 0$;

步 2 由 (2.11) 或 (2.12) 计算 $x^{(k+1)}$;

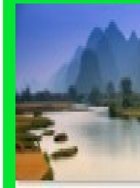
步 3　若 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty \le \varepsilon$, 则停算, 输出 $x^{(k+1)}$ 作为方程组的近似解；

步 4　若 $k = N$, 则停算, 输出迭代失败信息；否则置 $k := k + 1$, 转步 2.

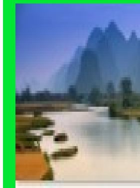
根据算法 2.1, 编制 MATLAB 程序如下：

- Jacobi迭代法 MATLAB 程序

```
%majacobi.m
function x=majacobi(A,b,x0,ep,N)
%用途： 用Jacobi迭代法解线性方程组Ax=b
%格式： x=majacobi(A,b,x0,ep,N)  A为系数矩阵,b为右端向
%       量,x0为初始向量(默认零向量),ep为精度(默认1e-6),
%       N为最大迭代次数(默认500次), x返回近似解向量
```



```
n=length(b);
if nargin<5,N=500; end
if nargin<4,ep=1e-6; end
if nargin<3,x0=zeros(n,1); end
x=zeros(n,1);
k=0;
while k<N
for i=1:n
x(i)=(b(i)-A(i,[1:i-1,i+1:n])*x0([1:i-1,i+1:n]))/A(i,i);
end
if norm(x-x0,inf)<ep, break; end
x0=x ;k=k+1;
end
```



```
if k==N, Warning('已达到迭代次数上限'); end
disp(['k=',num2str(k)])
```

例 2.1 用 Jacobi 迭代法程序 majacobi.m 解线性方程组:

$$\begin{pmatrix} 0.76 & -0.01 & -0.14 & -0.16 \\ -0.01 & 0.88 & -0.03 & 0.05 \\ -0.14 & -0.03 & 1.01 & -0.12 \\ -0.16 & 0.05 & -0.12 & 0.72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.68 \\ 1.18 \\ 0.12 \\ 0.74 \end{pmatrix}$$

取初始点 $x^{(0)} = (0,0,0,0)^T$, 精度要求 $\varepsilon = 10^{-6}$.

解 在 MATLAB 命令窗口执行程序 majacobi.m:

```
>>A=[0.76 -0.01 -0.14 -0.16; -0.01 0.88 -0.03 0.05;
     -0.14 -0.03 1.01 -0.12; -0.16 0.05 -0.12 0.72];
>> b=[0.68 1.18 0.12 0.74]';
```

```
>> x=majacobi(A,b)
```

得到计算结果：

```
k= 13
x =
    1.27616261026619
    1.29806392739565
    0.48904201392258
    1.30273287985933
```

§2.1.2 收敛性分析

对于 Jacobi 迭代法, 我们有下面的收敛性定理.

定理 2.7 若线性方程组 (2.1) 的系数矩阵 A 满足下列条件之一，则 Jacobi 迭代收敛：

$$(1)\quad \|B_J\|_\infty = \max_i \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1;$$

$$(2)\quad \|B_J\|_1 = \max_j \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1;$$

$$(3)\quad \|B_J^T\|_\infty = \max_i \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|} < 1.$$

证 (1) 对于 Jacobi 迭代，

$$\rho(B_J) \leq \|B_J\|_\infty = \max_i \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1,$$

所以 Jacobi 迭代收敛.

(2) 同理

$$\rho(B_J) \leq \|B_J\|_1 = \max_j \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1,$$

所以 Jacobi 迭代收敛.

(3) 由于

$$\begin{aligned}
\rho(B_J) &= \rho(I - D^{-1}A) = \rho[(I - D^{-1}A)^T] \\
&= \rho(I - A^T D^{-1}) \leq \|I - A^T D^{-1}\|_\infty \\
&= \max_i \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|} < 1,
\end{aligned}$$

所以 Jacobi 迭代收敛. □

注 2.1 定理 2.7 只是雅可比迭代收敛的充分条件而非必要条件. 请仔细领会下面的例题.

Back
Close

例 **2.2** 证明用雅可比迭代法求解下列方程组是收敛的:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

证 显然方程组的系数矩阵不满足定理 2.7 的条件, 因此不能使用该定理来判断迭代法的收敛性.

注意到, 雅可比迭代矩阵为

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\lambda I - B_J) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2/3 \\ 0 & \lambda & 1/2 \\ -1 & 1/2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{2}{3}\lambda = 0,$$

其特征根为

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -\sqrt{\frac{11}{12}},\ \lambda_3 = \sqrt{\frac{11}{12}}.$$

由于谱半径

$$\rho(B_J) = \sqrt{\frac{11}{12}} < 1,$$

故雅可比迭代收敛. $\square$

作业： P31: 2.3; P33: 2.13.