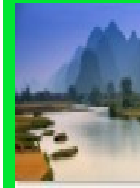
现代数值计算方法

第六章 常微分方程的数值解法

第六章 常微分方程的数值解法

§6.3 收敛性与稳定性

现在我们来讨论前述差分格式的收敛性和绝对稳定性问题. 对于差分格式的误差问题需要从两个方面加以考虑. 首先是截断误差问题. 定义 6.1 已经对差分格式的局部截断误差给出了定性描述. 而本节将要对整体截断误差做出定性描述, 即讨论差分格式的收敛性问题. 其次是舍入误差问题, 本节将要对“试验方程”讨论数据偏差是否会被差分格式放大, 即讨论差分格式的绝对稳定性问题.



§6.3.1 收敛性分析

我们首先给出差分格式收敛的定义.

定义 6.2 如果对于任意固定的 $x_N = x_0 + Nh$, 当 $N \to \infty$ (同时 $h \to 0$) 时, 数值解 $y_N \to y(x_N)$, 称求解常微分方程初值问题 (??) 的差分格式是收敛的.

根据上述定义, 我们看一个例题.

例 6.6 证明欧拉格式对于求解下列方程收敛:

$$\begin{cases} y' = -y, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{6.18}$$

证 取 $h = \bar{x}/N$, $x_n = nh\,(n = 0, 1, \cdots, N)$, 则有 $\bar{x} = x_N$. 由欧拉格式得

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = (1-h)y_n = (1-h)^{n+1}y_0 = (1-h)^{n+1}.$$

于是

$$y_N(h) = y_N = (1-h)^N = \left[\left(1-\frac{\bar{x}}{N}\right)^{-\frac{N}{\bar{x}}}\right]^{-\bar{x}} \to \mathrm{e}^{-\bar{x}}\ (N\to\infty).$$

又容易发现 $y(x)=\mathrm{e}^{-x}$ 是 (6.18) 的解析解, 故得 $y_N(h)\to y(\bar{x})\,(N\to\infty)$. $\square$

更一般地, 我们有下面的收敛性定理:

定理 6.1 设差分格式

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h) \tag{6.19}$$

为解初值问题 (6.1) 的 p 阶格式, 即局部截断误差为 $O(h^{p+1})$. 若增量函数 $\varphi(x,y,h)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件, 即存在 $L>0$, 使 $\forall\, x,y,\bar{y},h$ 成立

$$|\varphi(x,y,h)-\varphi(x,\bar{y},h)| \le L|y-\bar{y}|, \tag{6.20}$$

Back
Close

则数值解的整体截断误差为 $e_n = y(x_n) - y_n = O(h^p)$.

证 记

$$\bar{y}_{n+1} = y(x_n) + h\varphi(x_n, y(x_n), h),$$

其中, $\bar{y}_{n+1}$ 表示当 y_n 准确时由差分格式 (6.19) 求得的结果. 则由 (6.19) 是 p 阶格式知, 存在常数 $c > 0$, 使

$$|y(x_{n+1}) - \bar{y}_{n+1}| \le ch^{p+1}.$$

从而

$$\begin{aligned}
&|y(x_{n+1}) - y_{n+1}| \le |y(x_{n+1}) - \bar{y}_{n+1}| + |\bar{y}_{n+1} - y_{n+1}| \\
&\le ch^{p+1} + \big|[y(x_n) + h\varphi(x_n, y(x_n), h)] - [y_n + h\varphi(x_n, y_n, h)]\big| \\
&\le ch^{p+1} + |y(x_n) - y_n| + hL|y(x_n) - y_n| \\
&\le ch^{p+1} + (1 + hL)|y(x_n) - y_n|,
\end{aligned}$$

Back
Close

由 e_n 的定义, 上式即

$$|e_{n+1}| \leq ch^{p+1} + (1+hL)|e_n|. \tag{6.21}$$

注意到若递推式 $u_{n+1} \leq a + bu_n$ 成立, 则

$$\begin{aligned} u_n &\leq a + bu_{n-1} \leq a + b(a + bu_{n-2}) \leq \cdots \\ &\leq a(1 + b + b^2 + \cdots + b^{n-1}) + b^n u_0 \\ &= a\frac{1-b^n}{1-b} + b^n u_0. \end{aligned}$$

那么由 (6.21) 可推得

$$|e_n| \leq ch^{p+1}\frac{1-(1+hL)^n}{1-(1+hL)} + (1+hL)^n|e_0| = \frac{ch^p}{L}\big[(1+hL)^n - 1\big].$$

再利用不等式 $(1+x)^n \leq \mathrm{e}^{nx}$ 可得

$$|e_n| \leq \frac{ch^p}{L}(\mathrm{e}^{nhL} - 1) = \frac{ch^p}{L}\big[\mathrm{e}^{(x_n - x_0)L} - 1\big].$$

上式表明 $e_n = O(h^p)$. □

例 6.7 若方程 (6.1) 中的函数 $f(x,y)$ 满足 Lipschitz 条件, 即存在 $L>0$ 使得 $\forall x,y,\bar{y}$, 成立

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\leq L|y-\bar{y}|.$$

讨论欧拉格式和改进欧拉格式的收敛性问题.

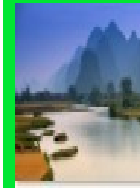
解 对于欧拉格式 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$, 对应的增量函数 $\varphi(x,y,h)=f(x,y)$, 故当 $f(x,y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件时, 由定理 6.1 知 $y(x_n)-y_n=O(h)$, 从而格式收敛.

而对于改进欧拉格式

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\big[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))\big],$$

增量函数为

$$\varphi(x,y,h)=\frac{1}{2}\big[f(x,y)+f(x+h,y+hf(x,y))\big],$$



则有

$$|\varphi(x,y,h)-\varphi(x,\bar{y},h)| \le \frac{1}{2}\big|f(x,y)-f(x,\bar{y})\big|$$
$$+\frac{1}{2}\big|f(x+h,y+hf(x,y))-f(x+h,\bar{y}+hf(x,\bar{y}))\big|$$
$$\le \frac{L}{2}|y-\bar{y}|+\frac{L}{2}\big|[y+hf(x,y)]-[\bar{y}+hf(x,\bar{y})]\big|$$
$$\le \frac{L}{2}|y-\bar{y}|+\frac{L}{2}|y-\bar{y}|+\frac{hL}{2}\big|f(x,y)-f(x,\bar{y})\big|$$
$$\le \left(\frac{L}{2}+\frac{L}{2}+\frac{hL^2}{2}\right)|y-\bar{y}| = \frac{L}{2}(2+hL)|y-\bar{y}|.$$

只要取 $h<1$, 即有

$$|\varphi(x,y,h)-\varphi(x,\bar{y},h)| \le \frac{L}{2}(2+L)|y-\bar{y}| = \bar{L}|y-\bar{y}|,$$

即 $\varphi(x,y,h)$ 满足 (6.20), 故由定理 6.1 知 $y(x_n)-y_n=O(h^2)$, 从而改进欧拉格式是收敛的. □

§6.3.2 绝对稳定性

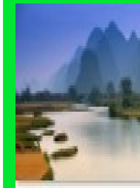
差分格式的数值稳定性问题很难作一般性的讨论. 通常人们仅用试验方程

$$y' = \lambda y, \quad \lambda < 0 \tag{6.22}$$

作讨论. 这是由于当 $\lambda > 0$ 时, 方程 (6.22) 的解不是渐近稳定的, 即任意初始偏差都可能造成解的巨大差异, 是病态问题. 这里, λ 代表了 $f(x, y)$ 对于 y 偏导数的大致取值.

定义 6.3 设由某差分格式求试验方程 (6.22) 的数值解, 若当 y_n 有扰动(数据误差或舍入误差) ε 时, y_{n+1} 因此产生的偏差不超过 $|\varepsilon|$, 则称该差分格式是绝对稳定的.

例 6.8 对于试验方程 $y' = \lambda y \, (\lambda < 0)$, 分别讨论当步长 h 在什么范围取值时, 欧拉格式 (6.2) 和隐式欧拉格式 (6.3) 是绝对稳定的.



解 对于欧拉格式, 由试验方程得

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = (1 + h\lambda)y_n.$$

若 y_n 有扰动 ε_n, y_{n+1} 因此产生偏差 ε_{n+1}, 则有

$$y_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = (1 + h\lambda)(y_n + \varepsilon_n) \ \Rightarrow \ \varepsilon_{n+1} = (1 + h\lambda)\varepsilon_n.$$

从而, 欧拉格式稳定当且仅当

$$|\varepsilon_{n+1}| = |1 + h\lambda| \cdot |\varepsilon_n| \le |\varepsilon_n| \ \Leftrightarrow \ |1 + h\lambda| \le 1.$$

由

$$|1 + h\lambda| \le 1 \ \Rightarrow \ 1 + h\lambda \ge -1 \ \Rightarrow \ h\lambda \ge -2 \ \Rightarrow \ h \le -\frac{2}{\lambda}.$$

可知, 欧拉格式是“条件稳定”的, 且 $|\lambda|$ 越大, 稳定区域越小.

又对于隐式欧拉格式, 由试验方程得

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h\lambda y_{n+1} \ \Rightarrow \ y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - h\lambda}.$$

Back
Close

若 y_n 有扰动 ε_n, y_{n+1} 因此产生偏差 ε_{n+1}, 则有

$$y_{n+1}+\varepsilon_{n+1}=\frac{y_n+\varepsilon_n}{1-h\lambda} \;\Rightarrow\; \varepsilon_{n+1}=\frac{\varepsilon_n}{1-h\lambda} \;\Rightarrow\; |\varepsilon_{n+1}|=\frac{|\varepsilon_n|}{1-h\lambda}\leq|\varepsilon_n|.$$

由此可见, 隐式欧拉格式是“无条件”绝对稳定的.

用类似的方法可以证明, 改进欧拉格式具有与欧拉格式相仿的稳定性, 而梯形格式是绝对稳定的. 一般地, 隐格式比显格式具有更好的稳定性.

作业: P144: 6.8; P145: 6.13.

Back
Close