现代数值计算方法

第五章 数值积分和数值微分

Back
Close

第五章 数值积分和数值微分

§5.6 数值微分法

§5.6.1 差商法

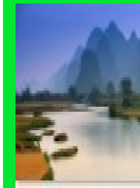
由导数定义可以得到一些简单的数值微分公式.

已知 $f(x)$ 在 $x = a$ 处的导数为

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

在上式中分别取 $\Delta x = h$ 及 $\Delta x = -h$ 得

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \tag{6.31}$$



$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}. \tag{6.32}$$

公式 (6.31) 和 (6.32) 分别称为向前差商公式和向后差商公式. 将 (6.31) 和 (6.32)平均得

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}. \tag{6.33}$$

公式 (6.33) 称为中心差商公式. 这三个公式的几何意义都表示用割线的斜率近似代替切线的斜率.

§5.6.2 插值型求导公式

设 $L_n(x)$ 为 $f(x)$ 关于节点 $x_i\,(i=0,1,\cdots,n)$ 的 n 阶拉格朗日插值多项式, 则 $f(x) \approx L_n(x)$. 考虑由

$$f'(x) \approx L_n'(x) \tag{6.34}$$

得到相应的数值微分公式. 分析 (6.34) 的余项

$$
\begin{aligned}
R(x) &= f'(x) - L_n'(x) = [f(x) - L_n(x)]' = \Big[\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)\Big]' \\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega'(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Big]\omega(x),
\end{aligned}
$$

其中 $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. 我们发现上述余项中的第二项

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Big]\omega(x)
$$

一般无法控制 (注意 ξ 与 x 有关). 但是当 x 为某节点时 $\omega(x) = 0$, 这时 (6.34) 的余项

$$
R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega'(x) \tag{6.35}
$$

可控制. 因此, 可由 (6.34) 导出节点 x_i 处的数值微分公式:

$$
f'(x_i) \approx L_n'(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n.
$$

例 6.14 利用线性插值分别导出向前差商公式 (6.31) 和向后差商公式 (6.32).

解 取 $x_0=a, x_1=a+h$, 得

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1) \\ &= \frac{x-a-h}{-h}f(a)+\frac{x-a}{h}f(a+h) \end{aligned}$$

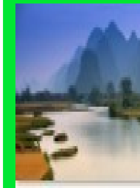
从而有

$$f'(a)\approx L_1'(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

上式恰为向前差商公式 (6.31).

下面来讨论向前差商公式 (6.31) 的余项. 由于

$$\omega(x)=(x-a)(x-a-h)=(x-a)^2-h(x-a),$$



Back
Close

故

$$\omega'(x) = 2(x-a) - h,$$

因此, (6.31) 的余项为

$$f'(a) - L_1'(a) = \frac{f''(\xi)}{2}\omega'(a) = -\frac{h}{2}f''(\xi).$$

同样, 取 $x_0 = a - h$, $x_1 = a$, 由线性插值可导出向后差商公式 (6.32) 及其余项.

例 6.15 利用抛物插值导出中心差商公式 (6.33) 和 2 阶导数公式.

解　取 $x_0 = a - h,\ x_1 = a,\ x_2 = a + h$, 得

$$
\begin{aligned}
L_2(x) \; &= \; \frac{(x-a)[x-(a+h)]}{[(a-h)-a][(a-h)-(a+h)]} f(a-h) \\
&\quad + \frac{[(x-(a-h)][(x-(a+h)]}{[a-(a-h)][a-(a+h)]} f(a) \\
&\quad + \frac{[(x-(a-h)](x-a)}{[(a+h)-(a-h)][(a+h)-a]} f(a+h) \\
&= \frac{(x-a)^2 - h(x-a)}{2h^2} f(a-h) + \frac{(x-a)^2 - h^2}{-h^2} f(a) \\
&\quad + \frac{(x-a)^2 + h(x-a)}{2h^2} f(a+h).
\end{aligned}
$$

故

$$
L_2'(x) = \frac{2(x-a)-h}{2h^2} f(a-h) + \frac{2(x-a)}{-h^2} f(a) + \frac{2(x-a)+h}{2h^2} f(a+h).
$$

Back
Close

从而有

$$f'(a) \approx L_2'(a) = \frac{-h}{2h^2} f(a-h) + \frac{h}{2h^2} f(a+h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

下面来讨论中心差商公式 (6.33) 的余项. 由于

$$\omega(x) = (x-a+h)(x-a)(x-a-h) = (x-a)^3 - h^2(x-a),$$

故

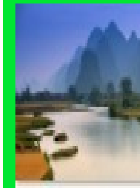
$$\omega'(x) = 3(x-a)^2 - h^2.$$

于是中心差商公式 (6.33) 的余项为

$$f'(a) - L_2'(a) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6} \omega'(a) = -\frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi).$$

进一步, 再对 $L_2'(x)$ 求导数得

$$L_2''(x) = \frac{2}{2h^2} f(a-h) + \frac{2}{-h^2} f(a) + \frac{2}{2h^2} f(a+h),$$



Back
Close

从而

$$f''(a) \approx L_2''(a) = \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}. \tag{6.36}$$

例 6.16 已知函数 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 的数据表:

x	2.6	2.7	2.8
$f(x)$	13.4637	14.8797	16.4446

用二点、三点微分公式计算 $f(x)$ 在 $x = 2.7$ 处的一阶、二阶导数的近似值.

解 (1) 由向前差商公式 (6.31) 得

$$f'(2.7) \approx \frac{f(2.8) - f(2.7)}{2.8 - 2.7} = \frac{16.4446 - 14.8797}{0.1} = 15.649.$$

(2) 由向后差商公式 (6.32) 得

$$f'(2.7) \approx \frac{f(2.7) - f(2.6)}{2.7 - 2.6} = \frac{14.8797 - 13.4637}{0.1} = 14.16.$$

(3) 由中心差商公式 (6.33) 得

$$f'(2.7) \approx \frac{f(2.8) - f(2.6)}{2.8 - 2.6} = \frac{16.4446 - 13.4637}{0.2} = 14.9045.$$

(4) 由公式 (6.36) 得

$$\begin{aligned} f''(2.7) &\approx \frac{f(2.8) - 2f(2.7) + f(2.6)}{0.1^2} \\ &= \frac{16.4446 - 2 \times 14.8797 + 13.4637}{0.01} \\ &= 14.89. \end{aligned}$$

而其准确值

$$f'(2.7) = f''(2.7) = \mathrm{e}^{2.7} = 14.8707,$$

由此可见, 三点公式较两点公式精确.

作业: P118: 5.15; 5.17.