现代数值计算方法

第七章 非线性方程迭代解法

第七章 非线性方程迭代解法

§7.2 简单迭代法及其加速技巧

§7.2.1 迭代法的基本思想

能够得到递推形式的算法称为迭代法. 迭代法是数值方法中最常用的一种方法, 它是一种逐次逼近的方法. 其基本思想是：先给出方程的根的一个近似值 (初始值), 反复使用某递推公式, 校正根的近似值, 使之逐渐精确化, 最后得到满足精度要求的方程的近似解.

基于上述思想, 将方程 $f(x)=0$ 改写成其等价形式

$$x=\varphi(x). \tag{7.4}$$

取方程根的某一近似值 x_0 作为迭代的初始点, 由函数 $\varphi(x)$ 可计算出

2/19
Back
Close

x_1, 即 $x_1 = \varphi(x_0)$, 如此下去, $\cdots\cdots$, 设当前点为 x_k, 由 $\varphi(x)$ 计算出 x_{k+1}, 即

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad k = 0, 1, \cdots \tag{7.5}$$

这里, 称 $\varphi(x)$ 为迭代函数, 而称式 (7.5) 为迭代公式.

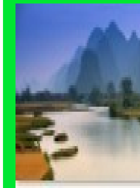
若序列 $\{x_k\}$ 存在极限 x^*, 即

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*,$$

则称迭代过程 (或迭代公式) 是收敛的. 如果函数 $\varphi(x)$ 连续, 在式 (7.5) 两端取极限得到

$$x^* = \varphi(x^*),$$

则 x^* 是方程 (7.4) 的根. 我们也称 x^* 是函数 $\varphi(x)$ 的一个不动点, 因此也称迭代公式 (7.5) 为不动点迭代. 在迭代公式 (7.5) 中, 由于 x_{k+1} 仅由 x_k 决定, 因此这是一个单步迭代公式.



由上述讨论, 可得到如下算法.

算法 7.3 (简单迭代法)

步 1　取初始点 x_0, 最大迭代次数 N 和精度要求 ε, 置 $k := 0$;

步 2　计算 x_{k+1};

步 3　若 $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, 则停算;

步 4　若 $k = N$, 则停算; 否则, 置 $k := k + 1$, 转步 2.

由以上算法过程可以看出, 一旦确定了迭代函数, 算法 7.3 的程序实现非常简单.

根据算法 7.3 编制 MATLAB 通用程序如下:

- 简单迭代法 MATLAB 程序

```
%maiter.m
function x=maiter(phi,x0,ep,N)
```

```
%用途: 用简单迭代法求方程f(x)=0有根区间[a,b]中的一个根
%格式: x= maiter(phi,x0,ep,N)  fun为phi(x)的函数句柄,
%        x0为初值,ep为精度(默认1e-4),N为最大迭代次数(默
%        认500), x返回近似根
if nargin<4 N=500;end
if nargin<3 ep=1e-4;end
k=0;
while k<N
   x=feval(phi,x0);
   if abs(x-x0)<ep break; end
   x0=x;k=k+1;
end
if k==N, warning('已达迭代次数上限'); end
```

```
disp(['k=',num2str(k)])
```

例 7.4 用简单迭代法通用程序 maiter.m 求方程 $f(x)=x\mathrm{e}^x-1=0$ 在 $[0,1]$ 内的一个实根. 取定精度 $\varepsilon=10^{-5}$, 初始点为 $x_0=0.5$.

解 迭代法成功的关键在如何适当选取迭代函数. 本问题可将原方程等价变形为至少下列三种形式

$$x=\mathrm{e}^{-x},\quad x=-\ln x,\quad x=x+x\mathrm{e}^x-1.$$

经过粗略的观察, 可发现后两种等价变形是不可取的 (稍后还有详细论述). 故取迭代函数为 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}$, 迭代公式为

$$x_{k+1}=\mathrm{e}^{-x_k},$$

在 MATLAB 命令窗口执行:

```
>> x=maiter(inline('exp(-x)'),0.5,1e-5)
k=17
x =
   0.56714076326981
```

§7.2.2 收敛性和误差分析

用简单迭代法求解非线性方程的关键在于适当地构造迭代公式，不同的迭代公式收敛的速度不同，甚至不收敛。例如，用迭代法求解方程 $x^3-x-1=0$，可以将方程等价变形为至少下面四种形式：

$$x=\sqrt[3]{x+1},\quad x=x^3-1,\quad x=\sqrt{1+\frac{1}{x}},\quad x=\frac{x^3+x-1}{2},\cdots$$

由此, 可以得到不同的迭代公式

$$\text{(I)}\quad x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+1},\quad \text{(II)}\quad x_{k+1}=x_k^3-1,$$

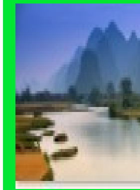
$$\text{(III)}\quad x_{k+1}=\sqrt{1+\frac{1}{x_k}},\quad \text{(IV)}\quad x_{k+1}=\frac{x_k^3+x_k-1}{2}$$

利用前面的 MATLAB 进行计算, 取初始值 $x_0=1.5$, 发现格式 (II) 和 (IV) 是不收敛的, 而格式 (I) 迭代 6 次, 格式 (III) 迭代 8 次即可达到满意的精度 $(<10^{-5})$.

那么, 现在的问题是, 当迭代公式 (或迭代函数) 满足什么样的条件时, 才能保证所产生的迭代序列收敛 (到方程的解) 呢? 我们有下面的收敛性定理:

定理 7.1 设函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的一阶导数, 并满足:

(1) $a\le\varphi(x)\le b,\quad\forall x\in[a,b]$; (2) $|\varphi'(x)|\le L<1,\quad\forall x\in[a,b]$.



则 (1) 函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在唯一的不动点 x^*, 即 $x^* = \varphi(x^*)$; (2) 对任何 $x_0 \in [a,b]$, 由迭代公式 (7.5) 得到的迭代序列 $\{x_k\}$ 均收敛到方程的解 x^*.

证 (1) 先证明存在性. 作函数 $g(x) = x - \varphi(x)$, 则由题设 $g(a) = a - \varphi(a) \leq 0$, $g(b) = b - \varphi(b) \geq 0$, 由根的存在定理, 至少存在一个 x^*, 使得 $g(x^*) = 0$, 即 $x = \varphi(x^*)$.

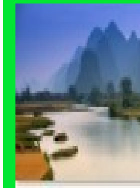
再证唯一性. 假设存在两个解 x^* 和 $\bar{x}$, 即

$$x^* = \varphi(x^*), \quad \bar{x} = \varphi(\bar{x}), \quad x^*,\ \bar{x} \in [a,b].$$

那么, 由拉格朗日中值定理可得

$$|x^* - \bar{x}| = |\varphi(x^*) - \varphi(\bar{x})| \leq |\varphi'(\xi)| \cdot |x^* - \bar{x}| \leq L|x^* - \bar{x}|, \tag{7.6}$$

因为 $L < 1$, 式 (7.6) 成立必然有 $x^* = \bar{x}$.



Back
Close

(2) 由拉格朗日中值定理及条件 (2), 可得

$$\begin{aligned}|x_k - x^*| &= |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(\xi_{k-1}) \cdot (x_{k-1} - x^*)| \\ &\leq L|x_{k-1} - x^*| \leq L^2|x_{k-2} - x^*| \leq \cdots \leq L^k|x_0 - x^*|.\end{aligned}$$

由于 $L < 1$, 故当 $k \to \infty$ 时, $L^k \to 0$, 从而 $x_k \to x^*(k \to \infty)$. □

注 7.1 由定理 7.1 的证明过程可以看出, 条件 (2) 可以用 Lipschitz 条件来替代, 即: 存在常数 L 且 $0 < L < 1$, 使得

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b], \tag{7.7}$$

定理的结论依然成立.

定理 7.1 只是定性地指出了在满足一定的条件下, 迭代序列收敛到方程的解, 并没有定量地给出近似解与真解的误差, 这样, 在构造算法时, 无法确定终止条件. 下面的定理给出了算法 ?? 的误差估计.

Back
Close

定理 7.2 设定理 7.1 的条件成立, 则

$$|x_k - x^*| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|, \tag{7.8}$$

$$|x_k - x^*| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k|. \tag{7.9}$$

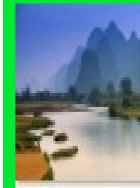
证 由定理 7.1 的证明过程可知,

$$|x_{k+1} - x_k| \le L|x_k - x_{k-1}| \le \cdots \le L^k|x_1 - x_0|. \tag{7.10}$$

反复利用 (7.10) 得到

$$\begin{aligned} |x_{k+p} - x_k| &\le |x_{k+p} - x_{k+p-1}| + |x_{k+p-1} - x_{k+p-2}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k| \\ &\le (L^{k+p-1} + L^{k+p-2} + \cdots + L^k)|x_1 - x_0| \\ &\le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|, \end{aligned}$$

在上式中, 令 $p \to \infty$, 即得 (7.8).



用同样的方法, 可以得到

$$
\begin{aligned}
|x_{k+p}-x_k| &\le |x_{k+p}-x_{k+p-1}|+|x_{k+p-1}-x_{k+p-2}|+\cdots+|x_{k+1}-x_k| \\
&\le (L^{p-1}+L^{p-2}+\cdots+L+1)|x_{k+1}-x_k| \\
&\le \frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|,
\end{aligned}
$$

在上式中, 令 $p\to\infty$, 即得 (7.9). □

上述定理所讨论的收敛性是在整个求解区间 $[a,b]$ 上论述的, 这种收敛性称为全局收敛性. 在实际使用迭代法时, 有时候不方便验证整个区间上的收敛条件, 而实际上只考察不动点 x^* 附近的收敛性, 因此称为局部收敛性.

定义 7.1 设 x^* 是迭代函数 $\varphi(x)$ 的不动点, 如果存在 x^* 的某个邻域 $N(x^*,\delta)=(x^*-\delta,x+\delta)$, 使得对任意的 $x_0\in N(x^*,\delta)$, 由迭代公式 (7.5) 产生的序列 $\{x_k\}\subset N(x^*,\delta)$, 且收敛到 x^*, 则称迭代公

式 (7.5) 局部收敛.

定理 7.3 设 x^* 是方程 $x=\varphi(x)$ 的根, $\varphi'(x)$ 在 x^* 的某个邻域内连续且有 $|\varphi'(x^*)|<1$, 则迭代公式 (7.5) 局部收敛.

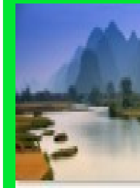
证 由定理的条件, 存在 $\delta>0$, 使得 $\forall x\in N(x^*,\delta)$ 时, 有 $|\varphi'(x)|\leq L<1$. 因此, 我们有

$$|x_{k+1}-x^*|=|\varphi(x_k)-\varphi(x^*)|=|\varphi'(\xi_k)\cdot(x_k-x^*)|\leq L|x_k-x^*|<|x_k-x^*|,$$

所以当 $x_k\in N(x^*,\delta)$ 时, 有 $x_{k+1}\in N(x^*,\delta)$. 由定理 7.1 知, 迭代公式 (7.5) 局部收敛. $\square$

例 7.5 利用适当的迭代格式证明

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$



Back
Close

证 记

$$x_k = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}},$$

则有递推式

$$x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k}, \quad k = 0, 1, \cdots .$$

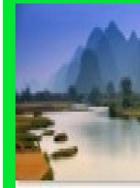
令 $\varphi(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$, 则 $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. 设 $\varphi(x)$ 有不动点 x^*, 即 $x^* = 1 + \dfrac{1}{x^*}$, 解之得

$$x^* = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

另一方面, 因

$$|\varphi'(x^*)| = \frac{1}{\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2} < 1,$$

故由定理 7.3 知, $\{x_k\}$ 局部收敛于 x^*. $\square$



Back
Close

为了刻画迭代序列 $\{x_k\}$ 的收敛速度, 我们引进收敛阶的概念, 它是衡量一个迭代算法优劣的重要指标之一.

定义 7.2 设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$, 令 $e_k = x_k - x^*$, 如果存在某个实数 $p \geq 1$ 及常数 $c > 0$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c, \tag{7.11}$$

则称序列 $\{x_k\}$ 是 p 阶收敛的. 特别地, (1) 当 $p = 1$, $0 < c < 1$ 时, 称为线性收敛; (2) 当 $p = 1$, $c = 0$ 时, 称为超线性收敛; (3) 当 $p = 2$ 时, 称为平方收敛.

根据计算实践, 一般认为, 一个算法如果只有线性收敛速度, 那是认为不理想的, 有必要改进算法, 或采用加速技巧. 而一个算法如果具有超线性收敛速度, 那就认为是一个很不错的算法了. 至于构造具有平方敛速以上的算法, 则是数值分析人员梦寐以求的事情.

那么, 简单迭代法的收敛速度怎么样呢? 我们有下面的定理:

定理 7.4 设迭代函数 $\varphi(x)$ 满足:

(1) $x^* = \varphi(x^*)$, 且在 x^* 附近有 p 阶导数;

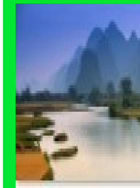
(2) $\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$;

(3) $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$;

那么, 迭代公式 (7.5) 是 p 阶收敛的.

证 由泰勒公式, 有

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \varphi(x_k) = \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x_k - x^*) + \cdots \\ &\quad + \frac{\varphi^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}(x_k - x^*)^{p-1} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k - x^*)^p \\ &= x^* + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k - x^*)^p, \end{aligned}$$



其中 ξ_k 介于 x_k 与 x^* 之间, 所以

$$\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^p}=\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}. \tag{7.12}$$

上式两边取极限, 并注意到当 $k\to\infty$ 时, $\xi_k\to x^*$, 即得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^p}=\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!},$$

即迭代公式 (7.5) 是 p 阶收敛的. □

例 **7.6** 用简单迭代法求方程 $x^3-x^2-x-1=0$ 在区间 $[1,2]$ 上的一个根. 试用不同的方法构造迭代格式, 并指出每一格式是否收敛, 如果收敛指出收敛阶.

解 *方法 1* 将原方程变为 $x=x^3-x^2-1$, 迭代公式为 $x_{k+1}=x_k^3-x_k^2-1$. 这里迭代函数 $\varphi(x)=x^3-x^2-1$, 有 $\varphi'(x)=3x^2-2x>$

Back
Close

$1,\ \forall x \in (1,2]$. 若令 $x_0 = 2$, 有 $x_1 = 3$, $x_2 = 17, \cdots$, 迭代显然是不收敛的.

方法 2 将原方程变为 $x = \sqrt[3]{x^2+x+1}$, 迭代公式为 $x_{k+1} = \sqrt[3]{x_k^2+x_k+1}$. 这里迭代函数 $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1}$, 可以验证 $\varphi(x) \in [1,2]$, $\forall x \in [1,2]$, 且

$$\varphi'(x) = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}} < 1,\ \forall x \in [1,2].$$

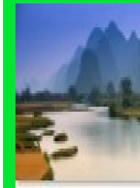
故由定理 7.1 知这一迭代格式是收敛的. 由于 $\varphi'(x^*) \neq 0$, 故其收敛阶是 1 阶的.

方法 3 取迭代函数为

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2},$$

可以验证 $\varphi(x) \in [1.7,2]$, $\forall x \in [1.7,2]$, 且

$$\varphi'(x) = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right).$$



Back

Close

故 $|\varphi'(x)| < 1,\ \forall x \in [1.7, 2]$. 由定理 7.1 知这一迭代格式也是收敛的. 显然 $\varphi'(x^*) \neq 0$, 故其收敛阶也是 1 阶的.

作业： P167: 7.2; P168: 7.9.

Back
Close