现代数值计算方法

第六章 常微分方程的数值解法

1/14

Back

Close

第六章 常微分方程的数值解法

§6.2 龙格-库塔格式

§6.2.1 龙格-库塔法的基本思想

考虑方程 (6.1). 由拉格朗日中值定理, 存在 $0 < \theta < 1$, 使得

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} = y'(x_n + \theta h).$$

于是, 由 $y' = f(x, y)$ 得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n + \theta h, y(x_n + \theta h)). \tag{6.9}$$

记 $K^* = f(x_n + \theta h, y(x_n + \theta h))$, 则称 K^* 为区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上的平均

斜率. 下面介绍一种由 (6.9) 导出的平均斜率算法, 即所谓的龙格-库塔法.

在欧拉公式中, 简单地取点 x_n 的斜率 $K_1 = f(x_n, y_n)$ 作为平均斜率 K^*, 精度自然很低. 而改进欧拉公式可以写成下列平均化的形式:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(K_1 + K_2)/2, \\ K_1 = f(x_n, y_n), \\ K_2 = f(x_{n+1}, y_{n+1}). \end{cases} \tag{6.10}$$

上述公式可以理解为: 用 x_n 和 x_{n+1} 两个点的斜率值 K_1 与 K_2 的算术平均值作为平均斜率值 K^*, 而 x_{n+1} 处的斜率值则通过已知信息 y_n 来预测.

如果能够在区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上多预报几个点的斜率值 $K_1, K_2, \cdots,$

K_r, 然后取它们的加权平均值

$$\sum_{i=1}^{r} a_i K_i, \quad (\, a_1 + \cdots + a_r = 1 \,)$$

作为 K^* 的近似值. 设计区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上 r 个点的预报斜率值 K_1, $K_2, \cdots, K_r$ 及权系数 $a_1, a_2, \cdots, a_r$, 使得差分格式

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{r} a_i K_i \tag{6.11}$$

达到 r 阶精度, 则称公式 (6.11) 为 r 阶龙格-库塔格式.

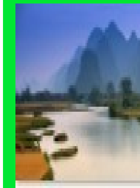
§6.2.2 龙格-库塔格式

考虑差分格式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2), \\ K_1 = f(x_n, y_n), \\ K_2 = f(x_n + ph, y_n + phK_1), \quad 0 < p \le 1, \end{cases} \tag{6.12}$$

K_1 视为 $y(x)$ 在点 x_n 处的斜率, K_2 视为 $y(x)$ 在点 $x_{n+p} = x_n + ph$ 处的预报斜率, 若参数 λ_1, λ_2 及 p 的取值使得 (6.12) 具有 2 阶精度, 则称之为二阶龙格-库塔格式.

下面我们来导出二阶龙格-库塔格式 (6.12) 中的参数 λ_1, λ_2 及 p 应满足的条件. 设 $y_n = y(x_n)$ 准确, 得 $K_1 = y'(x_n)$, 由二元函数的泰



勒展开得

$$
\begin{aligned}
K_2 &= f(x_n, y_n) + phf_x(x_n, y_n) + phK_1 f_y(x_n, y_n) + O(h^2) \\
&= f(x_n, y(x_n)) + ph[f_x(x_n, y(x_n)) + y'(x_n) f_y(x_n, y(x_n))] + O(h^2) \\
&= y'(x_n) + phy''(x_n) + O(h^2).
\end{aligned}
$$

于是有

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h[\lambda_1 y'(x_n) + \lambda_2 (y'(x_n) + phy''(x_n)) + O(h^2)] \\
&= y_n + (\lambda_1 + \lambda_2) hy'(x_n) + \lambda_2 ph^2 y''(x_n) + O(h^3).
\end{aligned}
$$

从而由 $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$, 比较 (6.5) 得

$$
\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_2 p = \frac{1}{2}. \tag{6.13}
$$

从 (6.13) 可看出, 三个参数只有两个约束条件, 有一个自由度, 因

Back
Close

此二阶龙格-库塔格式是一个系列差分格式. 如取

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad p = 1,$$

则得到改进欧拉公式 (6.10). 又如取

$$\lambda_{=}0, \ \ \lambda_2 = 1, \ \ p = \frac{1}{2},$$

则得

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_2, \\ K_1 = f(x_n, y_n), \\ K_2 = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + hK_1/2), \end{cases} \tag{6.14}$$

其中

$$x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{1}{2}h.$$

公式 (6.14) 称为中点格式.

在二阶龙格-库塔格式的基础上可以进一步构造更高阶的龙格-库塔格式. 如对差分格式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3), \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ K_1 = f(x_n, y_n), \\ K_2 = f(x_{n+p}, y_n + phK_1), \quad 0 < p \leq 1, \\ K_3 = f(x_{n+q}, y_n + qh[(1-\alpha)K_1 + \alpha K_2]), \quad p \leq q \leq 1, \end{cases} \tag{6.15}$$

其中 K_1 视为 $y(x)$ 在点 x_n 处的斜率, K_2, K_3 分别视为 $y(x)$ 在点 $x_{n+ph} = x_n + ph$ 和在点 $x_{n+qh} = x_n + qh$ 处的预报斜率, 若参数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, p, q$ 及 α 的取值使得 (6.15) 具有 3 阶精度, 则称之为三阶龙格-库塔格式.

三阶龙格-库塔格式也不止一个, 最常用的是下面的三阶库塔格

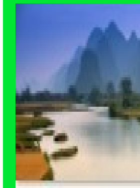
Back
Close

式：

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}\big(K_1 + 4K_2 + K_3\big), \\
K_1 = f(x_n, y_n), \\
K_2 = f\big(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1\big), \\
K_3 = f\big(x_{n+1}, y_n + h(-K_1 + 2K_2)\big).
\end{cases}
\tag{6.16}
$$

同样, 最常用的四阶龙格-库塔格式是下面的四阶经典龙格-库塔格式：

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}\big(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\big), \\
K_1 = f(x_n, y_n), \\
K_2 = f\big(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1\big), \\
K_3 = f\big(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \dfrac{h}{2}K_2\big), \\
K_4 = f\big(x_{n+1}, y_n + hK_3\big).
\end{cases}
\tag{6.17}
$$



例 6.4 取步长 $h = 0.2$, 用四阶龙格-库塔法计算下面的初值问题

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y}, \quad 0 \le x \le 1, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

并与精确解比较, 其中精确结为 $y = \sqrt{1+2x}$.

解 由 (6.17) 得

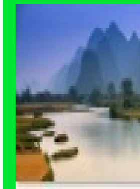
$$y_{n+1} = y_n + \frac{0.2}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

其中

$$K_1 = y_n - \frac{2x_n}{y_n}, \qquad K_2 = y_n + 0.1K_1 - 2\frac{x_n + 0.1}{y_n + 0.1K_1},$$

$$K_3 = y_n + 0.1K_2 - 2\frac{x_n + 0.1}{y_n + 0.1K_2}, \quad K_4 = y_n + 0.2K_3 - 2\frac{x_n + 0.2}{y_n + 0.2K_3}.$$

计算结果如下表所示:



x_n	y_n	$y(x_n)$
0.0	1.000000	1.000000
0.2	1.183229	1.183216
0.4	1.341667	1.341641
0.6	1.483281	1.483240
0.8	1.612514	1.612452
1.0	1.732142	1.732051

§6.2.3 龙格-库塔法的通用程序

我们给出四阶经典龙格-库塔格式 (6.17) 的 MATLAB 通用程序如下.

- 四阶经典龙格-库塔格式 MATLAB 程序

Back
Close

```
%marunge4.m
function [x, y]=marunge4(dyfun,xspan,y0,h)
%用途: 4阶龙格库塔格式解微分方程y'=f(x,y),y(x0)=y0
%格式: [x,y]=marunge4(dyfun,xspan,y0,h)   dyfun为函
%      数f(x,y),xspan为求解区间[x0,xn],y0为初值,h为
%      步长,x返回节点,y返回数值解
x=xspan(1):h:xspan(2);
y(1)=y0;
for n=1:(length(x)-1)
    k1=feval(dyfun, x(n), y(n));
    k2=feval(dyfun, x(n)+h/2, y(n)+h/2*k1);
    k3=feval(dyfun, x(n)+h/2, y(n)+h/2*k2);
    k4=feval(dyfun, x(n+1), y(n)+h*k3);
```

```
    y(n+1)=y(n)+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
x=x'; y=y';
```

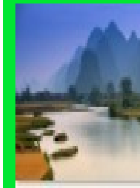
例 6.5 用四阶经典龙格-库塔格式的通用程序 marunge4.m 求解下列初值问题：

$$\begin{cases} y' = x + y, \quad 0 \le 0 \le x \le 0.5, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

并与精确解 $y(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 1$ 进行比较，取 $h = 0.1$.

解 在 MATLAB 命令窗口执行：

```
>>clear; dyfun=inline('x+y');
>>[x,y]=marunge4(dyfun,[0,0.5],1,0.1);  [x';y']
ans=
```



```
        0 0.1000 0.2000 0.3000 0.4000 0.5000
    1.0000 1.1103 1.2428 1.3997 1.5836 1.7974
>>y1=2.*exp(x)-x-1;  y1'   %精确解
ans=
    1.0000 1.1103 1.2428 1.3997 1.5836 1.7974
>>(y1-y)'   %误差
ans=
    1.0e-005*
            0 0.0169 0.0375 0.0621 0.0915 0.1264
```

作业：P144: 6.6.

Back
Close