现代数值计算方法

第五章 数值积分和数值微分

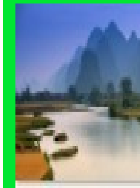
Back
Close

第五章 数值积分和数值微分

§5.3 复化求积公式

从求积系数公式 (5.5) 可以看到, 随着求积节点的增多 (n 的增大), 有可能导致求积系数出现负数 (当 $n \geq 8$ 时, 牛顿-柯特斯求积系数会出现负数). 另一方面, 从求积公式的余项公式也可以看到, 被积函数所用的插值多项式次数越高, 对函数的光滑性要求也越高.

在实际应用往往不采用高阶的牛顿-柯特斯求积公式, 而是将积分区间划分成若干个相等的小区间, 在各小区间上采用低阶的求积公式 (梯形公式或辛普森公式), 然后利用积分的区间可加性, 把各区间上的积分值加起来, 便得到新的求积公式, 这就是复化求积公式的基



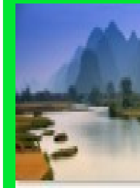
本思想.

§5.3.1 复化梯形公式及通用程序

1. 复化梯形公式及其误差

将积分区间 $[a,b]$ 剖分为 n 等分, 分点为 $x_k = a + kh\,(k = 0,1,\cdots,n)$, 其中 $h = (b-a)/n$. 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上用梯形公式, 则有

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]+R_k[f]\right\} \\
&= \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]+\sum_{k=0}^{n-1}R_k[f].
\end{aligned}
$$



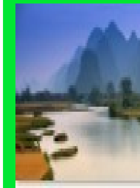
记

$$T_n = \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right] = \frac{h}{2}\Big[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\Big]. \quad (5.15)$$

公式 (5.15) 称为复化梯形公式, 下标 n 表示积分区间 $[a,b]$ 的等分数.

注 5.1 复化梯形公式具有递推性质. 事实上, 若将区间 $2n$ 等分, 这时节点数为 $2n+1$, 设增加的 n 个分点为 $x_{k+\frac{1}{2}}\,(k=0,1,\cdots,n-1)$, 在每个小区间上再用梯形公式, 有

$$\begin{aligned} T_{2n} \;&= \sum_{k=0}^{n-1}\Big\{\frac{x_{k+\frac{1}{2}}-x_k}{2}\left[f(x_k)+f(x_{k+\frac{1}{2}})\right] \\ &\qquad +\frac{x_{k+1}-x_{k+\frac{1}{2}}}{2}\left[f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})\right]\Big\} \end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
&= \frac{h}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k)+2f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})\right] \\
&= \frac{h}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}}).
\end{aligned}
$$

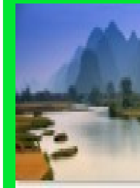
从而有

$$
T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}}). \tag{5.16}
$$

公式 (5.16) 表明, 区间对分后, 只需计算出新分点的函数值, 而原复化梯形公式的值作为一个整体保留, 不需要重复计算原节点的函数值, 便可得出对分后的积分值, 从而减少了计算量.

下面我们来讨论复化梯形公式的误差. 记

$$
R[T_n]=\sum_{k=0}^{n-1}R_k[f]
$$



Back
Close

为复化梯形公式的余项, 则

$$R[T_n] = \sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{12}f''(\eta_k)\right] = -\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1}f''(\eta_k).$$

假设 $f(x)$ 二次连续可微, 则 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上必存在最大值 M 和最小值 m, 即

$$m \le f''(\eta_k) \le M \Rightarrow nm \le \sum_{k=0}^{n-1}f''(\eta_k) \le nM$$

由此得

$$m \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f''(\eta_k) \le M.$$

于是由连续函数的介值定理, 必存在一点 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$f''(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f''(\eta_k).$$

Back
Close

从而, 有

$$R[T_n] = -\frac{h^3}{12} n f''(\xi) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi). \tag{5.17}$$

由复化梯形公式的余项公式 (5.17) 可知, 在给定的精度要求下, 可以决定积分区间的等分数 n.

例 5.5 利用复化梯形公式计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x,$$

使其误差界为 10^{-4}, 应将积分区间 $[0,1]$ 多少等分?

解 设

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos(tx) \mathrm{d}t.$$

则

$$f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[\cos(tx)]\mathrm{d}t = \int_0^1 t^k \cos\left(tx + \frac{k\pi}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

Back
Close

从而

$$|f^{(k)}(x)| \le \int_0^1 \left|t^k \cos\left(tx + \frac{k\pi}{2}\right)\right| \mathrm{d}t \le \int_0^1 t^k \mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}.$$

故由

$$|R[T_n]| = \left| -\frac{1-0}{12} h^2 f''(\xi) \right| \le \frac{h^2}{12} \times \frac{1}{2+1} = \frac{h^2}{36} \le 10^{-4},$$

得 $h \le 6 \times 10^{-2}$, 即

$$n = \frac{1}{h} \ge \frac{1}{6} \times 10^2 \approx 16.67,$$

所以区间 $[0, 1]$ 应该 17 等分才能满足精度要求.

2. 复化梯形公式的通用程序

下面给出复化梯形公式的 MATLAB 通用程序:

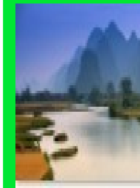
- 复化梯形公式 MATLAB 程序

8/16

Back

Close

```
%matrap.m
function s=matrap(fun,a,b,n)
%用途：用复化梯形公式求积分.
%格式：s=matrap(fun,a,b,n)  fun为被积函数，a,b为积分区
%      间的左右端点，n为区间的等分数，s返回数值积分值
h=(b-a)/n;
s=0;
for k=1:n-1
   x=a+h*k;
   s=s+feval(fun,x);
end
s=h/2*(feval(fun,a)+feval(fun,b)+2*s);
```



例 5.6 取 $n = 10$, 利用复化梯形公式计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} \mathrm{d}x.$$

解 在 MATLAB 命令窗口执行

```
>> format long
>> fun=inline('4./(1+x.^2)');
>> matrap(fun,0,1,10)
```

计算结果为

```
ans =

     3.13992598890716
```

§5.3.2 复化辛普森公式及通用程序

1. 复化辛普森公式及其误差

Back
Close

将积分区间 $[a,b]$ 分成 n 等分, 分点为 $x_k = a+kh\,(k=0,1,\cdots,n)$, 其中 $h=(b-a)/n$. 记区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 的中点为 $x_{k+\frac{1}{2}}$, 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上用辛普森公式, 则得到所谓的复化辛普森公式:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{k+1}-x_k}{6}\left[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})\right],$$

即

$$S_n = \frac{h}{6}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})\right]. \tag{5.18}$$

类似于复化梯形公式, 复化辛普森公式的余项为

$$R[S_n] = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi\in[a,b]. \tag{5.19}$$

事实上

$$
\begin{aligned}
R[S_n] &= \sum_{k=0}^{n-1} R_k[f] = \sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{1}{90}\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)^5 f^{(4)}(\eta_k)\right] \\
&= -\frac{1}{90}\left(\frac{h}{2}\right)^5 \sum_{k=0}^{n-1} f^{(4)}(\eta_k) = -\frac{1}{90}\left(\frac{h}{2}\right)^5 n f^{(4)}(\xi) \\
&= -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi).
\end{aligned}
$$

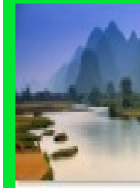
例 5.7 利用复化辛普森公式计算积分

$$
I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,
$$

使其误差界为 10^{-4}, 应将积分区间 $[0,1]$ 多少等分?

解 利用例 5.5 的结果知

$$
|f^{(k)}| \le \frac{1}{k+1}.
$$



Back
Close

故由

$$|R[S_n]| \le \left| -\frac{1-0}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi) \right| \le \frac{h^4}{2880} \times \frac{1}{4+1} = \frac{h^4}{14400} \le 10^{-4},$$

得

$$h \le \frac{1}{5}\sqrt{30},$$

于是

$$n = \frac{1}{h} \ge \frac{5}{\sqrt{30}} \approx 0.9129.$$

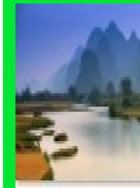
故取 $n = 1$ 即可, 这意味着直接对区间 $[0, 1]$ 使用辛普森公式即可达到所要求的精度.

2. 复化辛普森公式的通用程序

下面给出复化辛普森公式的 MATLAB 通用程序:

- 复化辛普森公式 MATLAB 程序

```
%masimp.m
function s=masimp(fun,a,b,n)
%用途：用复化辛普森公式求积分.
%格式：s=masimp(fun,a,b,n)    fun为被积函数,a,b为积分
%       区间的左右端点,n为区间的等分数,s返回数值积分值
h=(b-a)/n;
s1=0; s2=0;
for k=1:(n-1)
   x=a+h*k;
   s1=s1+feval(fun,x);
end
for k=0:(n-1)
   x=a+h*(k+1/2);
```



```
    s2=s2+feval(fun,x);
end
s=h/6*(feval(fun,a)+feval(fun,b)+2*s1+4*s2);
```

例 5.8 取 $n=10$, 利用复化辛普森公式计算积分

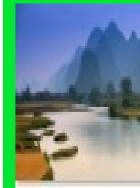
$$I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

的近似值.

解 在 MATLAB 命令窗口执行

```
>>fun=inline('4./(1+x.^2)');
>>s=masimp(fun,0,1,10)
```

计算结果为:



```
s=
   3.14159265296979
```

作业： P117: 5.5; 5.10.