# 现代数值计算方法

## 第二章 解线性方程组的迭代法



Back
Close

# 第二章 解线性方程组的迭代法

## §2.4 逐次超松弛迭代法

### §2.4.1 迭代公式及其通用程序

逐次超松弛迭代法可以看作 Gauss-Seidel 迭代法的加速. Gauss-Seidel 迭代格式为

$$x^{(k+1)} = D^{-1}Lx^{(k+1)} + D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b,$$

现令

$$\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} = D^{-1}Lx^{(k+1)} + D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b - x^{(k)},$$

这时

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)},$$

则 $x^{(k+1)}$ 可以看作由 $x^{(k)}$ 作 $\Delta x^{(k)}$ 修正而得到. 若在修正项中引入一个因子 $\omega$, 即

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega \Delta x^{(k)}, \tag{2.21}$$

即可得到逐次超松弛迭代格式 (SOR). 由 (2.21),

$$x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega(D^{-1}Lx^{(k+1)} + D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b), \tag{2.22}$$

即

$$(I - \omega D^{-1}L)x^{(k+1)} = [(1-\omega)I + \omega D^{-1}U]x^{(k)} + \omega D^{-1}b.$$

故 SOR 迭代的计算格式为

$$x^{(k+1)} = (I-\omega D^{-1}L)^{-1}[(1-\omega)I+\omega D^{-1}U]x^{(k)}+\omega(I-\omega D^{-1}L)^{-1}D^{-1}b. \tag{2.23}$$



Back
Close

SOR 迭代的迭代矩阵为

$$B_\omega = (I - \omega D^{-1} L)^{-1}[(1-\omega)I + \omega D^{-1}U] = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U].$$

用分量形式表示 (2.22), 即

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\Big)\Big/a_{ii} \\ &= x_i^{(k)} + \omega\Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\Big)\Big/a_{ii} \qquad (2.24) \\ & \quad (i = 1, 2, \cdots, n; \quad k = 0, 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

其中, $\omega$ 叫松弛因子, 当 $\omega > 1$ 时叫超松弛, $0 < \omega < 1$ 时叫低松弛, $\omega = 1$ 时就是 Gauss-Seidel 迭代法. 下面给出 SOR 迭代的具体算法步骤:

**算法 2.3** (SOR 迭代法)

步 1　输入矩阵 $A$, 右端向量 $b$, 初始点 $x^{(0)}$, 精度要求 $\varepsilon$, 最大迭代次数 $N$, 置 $k := 0$;

步 2　计算

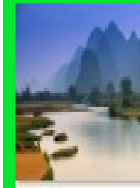
$$x_1 = (1-\omega)x_1^{(0)} + \omega\Big(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(0)}\Big)\Big/a_{11},$$

$$x_i = (1-\omega)x_i^{(0)} + \omega\Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(0)}\Big)\Big/a_{ii},$$

$$(i = 2, \cdots, n-1)$$

$$x_n = (1-\omega)x_n^{(0)} + \omega\Big(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j\Big)\Big/a_{nn}$$

步 3　若 $\|x - x^{(0)}\|_\infty \le \varepsilon$, 则停算, 输出 $x$ 作为方程组的近似解; 否则, 转步 4.





Back
Close

步 4　若 $k = N$, 则停算, 输出迭代失败信息; 否则置 $x^{(0)} := x$, $k := k+1$, 转步 2.

根据算法 2.3, 编制 MATLAB 程序如下:

- SOR 迭代法 MATLAB 程序

```
%masor.m
function x=masor(A,b,omega,x0,ep,N)
%用途: 用SOR迭代法解线性方程组Ax=b
%格式: x=masor(A,b,omega,x0,ep,N)  A为系数矩阵,b为右端
%      向量,omega为松弛因子(默认1.5),x0为初始向量(默认
%      零向量),ep为精度(默认1e-6),N为最大迭代次数(默认
%      500次), x返回近似解向量.
n=length(b);
```



Back
Close

```
if nargin<6,N=500;end
if nargin<5,ep=1e-6;end
if nargin<4,x0=zeros(n,1);end
if nargin<3,omega=1.5;end
x=zeros(n,1); k=0;
while k<N
 for i=1:n
  if i==1
   x1(1)=(b(1)-A(1,2:n)*x0(2:n))/A(1,1);
   else if i==n
    x1(n)=(b(n)-A(n,1:n-1)*x(1:n-1))/A(n,n);
    else
     x1(i)=b(i)-A(i,1:i-1)*x(1:i-1)-A(i,i+1:n)*x0(i+1:n);
```

```
        x1(i)=x(i)/A(i,i);
       end
     end
     x(i)=(1-omega)*x0(i)+omega*x1(i);
   end
   if norm(x0-x,inf)<ep, break; end
   k=k+1;
   x0=x;
 end
 if k==N,
   Warning('已达到迭代次数上限');
 end
 disp(['k=',num2str(k)])
```

**例 2.6** 用 SOR 迭代法程序 masor.m 解线性方程组:

$$\begin{pmatrix} 0.76 & -0.01 & -0.14 & -0.16 \\ -0.01 & 0.88 & -0.03 & 0.05 \\ -0.14 & -0.03 & 1.01 & -0.12 \\ -0.16 & 0.05 & -0.12 & 0.72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.68 \\ 1.18 \\ 0.12 \\ 0.74 \end{pmatrix}$$

取初始点 $x^{(0)} = (0,0,0,0)^T$, 松弛因子 $\omega = 1.05$, 精度要求 $\varepsilon = 10^{-6}$.

**解** 在 MATLAB 命令窗口执行程序 masor.m:

```
>>A=[0.76 -0.01 -0.14 -0.16; -0.01 0.88 -0.03 0.05;
     -0.14 -0.03 1.01 -0.12; -0.16 0.05 -0.12 0.72];
>> b=[0.68 1.18 0.12 0.74]';
>> x=masor(A,b,1.05)
```

得计算结果如下:

```
k= 6

x =

   1.27616302863910

   1.29806392444062

   0.48904230122688

   1.30273328637534
```

## §2.4.2 收敛性分析

下面给出 SOR 迭代法的收敛性结果.

**定理 2.10** SOR 迭代 (2.23) 收敛的必要条件是 $0<\omega<2$.

**证** SOR 迭代矩阵为 $B_\omega$, 若 SOR 迭代收敛, 则 $\rho(B_\omega)<1$. 从而

$$|\det(B_\omega)| = |\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n| < 1,$$

这里, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $B_\omega$ 的特征值. 又

$$|\det(B_\omega)| = |\det(I - \omega D^{-1}L)^{-1}| \cdot |\det[(1-\omega)I + \omega D^{-1}U]| < 1,$$

这里, $I - \omega D^{-1}L$ 是单位下三角矩阵, 而 $(1-\omega)I + \omega D^{-1}U$ 是上三角矩阵, 其对角元均为 $1-\omega$, 故

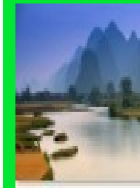
$$|\det(B_\omega)| = |(1-\omega)^n|,$$

得

$$|1-\omega| < 1,$$

即 $0 < \omega < 2$. $\square$

**定理 2.11** 若线性方程组 (2.1) 的系数矩阵 $A$ 对称正定, 则当 $0 < \omega < 2$ 时, SOR 迭代 (2.23) 收敛.



证 记 $B_\omega$ 的特征值为 $\lambda$, 对应的特征向量为 $z$, 这时

$$(I-\omega D^{-1}L)^{-1}[(1-\omega)I+\omega D^{-1}U]z=\lambda z,$$

即

$$[(1-\omega)I+\omega D^{-1}U]z=\lambda(I-\omega D^{-1}L)z.$$

上式两边左乘 $z$ 的共轭转置 $z^H$ 得

$$(1-\omega)z^H Dz+\omega z^H Uz=\lambda(z^H Dz-\omega z^H Lz),$$

即

$$\lambda=\frac{(1-\omega)z^H Dz+\omega z^H Uz}{z^H Dz-\omega z^H Lz}. \tag{2.25}$$

记 $z^H Dz=d$, $z^H Lz=a+ib$, 因 $A$ 对称, 故 $U=L^T$, $z^H Uz=a-ib$, 代入 (2.25) 得

$$\lambda=\frac{(1-\omega)d+\omega(a-ib)}{d-\omega(a+ib)}=\frac{[(1-\omega)d+\omega a]-i\omega b}{(d-\omega a)-i\omega b}. \tag{2.26}$$

因 $A$ 正定, 故 $z^H Az = z^H(D-L-U)z = d-2a > 0$. 注意到 $\lambda$ 的分子、分母虚部相等, 而当 $0<\omega<2$ 时, 有

$$(d-\omega a)^2 - [(1-\omega)d+\omega a]^2 = (2-\omega)\omega d(d-2a) > 0.$$

由此可得 $|\lambda|<1$, 故迭代收敛. $\square$

**推论 2.1** $A$ 对称正定时, Jacobi 迭代收敛的充要条件是 $2D-A$ 也对称正定.

证明略.

**例 2.7** 已知矩阵 $A$ 如下, 判断求解 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 及 SOR 迭代法是否收敛:

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad (2)\quad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解 (1) 显然 $A$ 是对称的, 顺序主子式

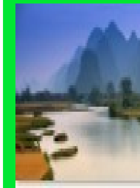
$$D_1 = 1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2 > 0,$$

故 $A$ 对称正定. 从而由定理 2.11, 当 $0 < \omega < 2$ 时, SOR 迭代法是收敛的. 由于 Gauss-Seidel 迭代是 SOR 迭代 $\omega = 1$ 时的特例, 故 Gauss-Seidel 迭代也是收敛的. 又

$$2D - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

也显然是对称的, 且其顺序主子式的值与 $A$ 的相同, 故 $2D - A$ 也是对称正定的, 从而由推论 2.1 知, Jacobi 迭代也是收敛的.

(2) 容易验证 $A$ 是对称正定的, 故 Gauss-Seidel 迭代和 SOR 迭代



当 $0<\omega<2$ 时都是收敛的. 当 $\det(2D-A)=0$, 故 $2D-A$ 不正定, 故由推论 2.1 知, Jacobi 迭代是发散的.

作业：P32: 2.5; P32: 2.8.