现代数值计算方法

第四章 插值法与最小二乘拟合

第四章 插值法与最小二乘拟合

§4.4 最小二乘法

§4.4.3 正交最小二乘拟合

最常见的拟合函数类是多项式, 其基函数一般取幂函数

$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = x,\ \cdots,\varphi_m(x) = x^m.$$

由于

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{j+k}, \quad (f, \varphi_k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k y_i,$$

Back
Close

这样, 法方程组为

$$
\begin{pmatrix}
n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^m \\
\sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^m & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\sum_{i=1}^{n} y_i \\
\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
\vdots \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i
\end{pmatrix}. \qquad (4.39)
$$

但遗憾的是, 当 m 比较大时, 该方程组往往是病态的, 从而导致结果误差很大.

下面我们考虑所谓的正交最小二乘拟合. 首先给出正交多项式的概念.

定义 4.2 设节点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和多项式函数 $P(x)$ 和 $Q(x)$, 如

Back
Close

果

$$(P,Q)=\sum_{i=1}^{n}P(x_i)Q(x_i)=0,$$

则称 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 关于节点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 正交. 如果函数类 Φ 的基函数 $\psi_0,\psi_1,\cdots,\psi_m$ 两两正交, 则称为一组正交基.

设 $\psi_0,\psi_1,\cdots,\psi_m$ 为函数类 Φ 的一组正交基, 那么法方程组 (??) 就成为简单的对角方程组, 其解可以由下式直接给出：

$$a_k=\frac{(f,\psi_k)}{(\psi_k,\psi_k)},\quad k=0,1,\cdots,m, \tag{4.40}$$

从而避免了求解病态方程组.

正交基可以由任意基 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 通过 Schmit 正交化方法得到：

$$\psi_0(x) = \varphi_0(x),$$

$$\psi_1(x) = \varphi_1(x) - \frac{(\varphi_1, \psi_0)}{(\psi_0, \psi_0)}\psi_0(x),$$

$$\psi_2(x) = \varphi_2(x) - \frac{(\varphi_2, \psi_0)}{(\psi_0, \psi_0)}\psi_0(x) - \frac{(\varphi_2, \psi_1)}{(\psi_1, \psi_1)}\psi_1(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_m(x) = \varphi_m(x) - \frac{(\varphi_m, \psi_0)}{(\psi_0, \psi_0)}\psi_0(x) - \frac{(\varphi_m, \psi_1)}{(\psi_1, \psi_1)}\psi_1(x) - \cdots - \frac{(\varphi_m, \psi_{m-1})}{(\psi_{m-1}, \psi_{m-1})}\psi_{m-1}(x).$$

例 4.12 已知下列数据求拟合曲线 $\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	-1	0	1	1

解 取 $\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=x,\ \varphi_2(x)=x^2,\ \varphi_3(x)=x^3$, 先进行 Schmit 正交化：

$$\psi_0(x)=\varphi_0(x)=1,$$

$$\psi_1(x)=\varphi_1(x)-\frac{(\varphi_1,\psi_0)}{(\psi_0,\psi_0)}\psi_0(x)=x,$$

$$\psi_2(x)=\varphi_2(x)-\frac{(\varphi_2,\psi_0)}{(\psi_0,\psi_0)}\psi_0(x)-\frac{(\varphi_2,\psi_1)}{(\psi_1,\psi_1)}\psi_1(x)=x^2-2,$$

$$\begin{aligned}\psi_3(x)&=\varphi_3(x)-\frac{(\varphi_3,\psi_0)}{(\psi_0,\psi_0)}\psi_0(x)-\frac{(\varphi_3,\psi_1)}{(\psi_1,\psi_1)}\psi_1(x)-\frac{(\varphi_3,\psi_2)}{(\psi_2,\psi_2)}\psi_2(x)\\&=x^3-\frac{17}{5}x.\end{aligned}$$

则 $\psi_0,\psi_1,\psi_2,\psi_3$ 两两正交. 计算得

$$(\psi_0,\psi_0)=5,\quad(\psi_1,\psi_1)=10,\quad(\psi_2,\psi_2)=14,\quad(\psi_3,\psi_3)=14.4,$$

$$(f,\psi_0)=0,\quad(f,\psi_1)=6,\quad(f,\psi_2)=0,\quad(f,\psi_3)=-2.4.$$

从而, 由 (4.40) 得

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{-2.4}{14.4} = -\frac{1}{6}.$$

故

$$\varphi(x) = \frac{3}{5}\psi_1(x) - \frac{1}{6}\psi_3(x) = \frac{3}{5}x - \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{17}{5}x\right) = \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}x^3.$$

§4.4.4 多项式拟合的通用程序

下面给出多项式拟合的 MATLAB 通用程序:

- 多项式拟合 MATLAB 程序

```
%mafit.m
function p=mafit(x,y,m)
```

```
%用途：多项式拟合
%格式：p=mafit(x,y,m)  x,y为数据向量，m为拟合
%      多项式次数，p返回多项式系数降幂排列
format short;
A=zeros(m+1,m+1);
for i=0:m
    for j=0:m
        A(i+1,j+1)=sum(x.^(i+j));
    end
    b(i+1)=sum(x.^i.*y);
end
a=A\b';
p=fliplr(a');  %按降幂排列
```

例 4.13 用上述程序求解例 4.12.

解 在 MATLAB 命令窗口执行

```
>> x=-2:2; y=[-1 -1 0 1 1];
>> p=mafit(x,y,3)
```

得计算结果:

```
p =

   -0.1667         0    1.1667         0
```

从而所求的拟合曲线为

$$\varphi(x) = -0.1667x^3 + 1.1667x.$$

作业： P92: 4.25; 4.28.

Back
Close