现代数值计算方法

第二章 解线性方程组的迭代法

Back
Close

第二章 解线性方程组的迭代法

§2.3 高斯-赛德尔迭代法

§2.3.1 迭代公式及其通用程序

对 Jacobi 迭代方法作如下改变：迭代时首先用 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^T$ 代入 Jacobi 迭代的第一个方程求 $x_1^{(k+1)}$, 求得 $x_1^{(k+1)}$ 后, 用 $x_1^{(k+1)}$ 替换 $x_1^{(k)}$, 用 $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^T$ 代入 Jacobi 迭代的第二个方程求 $x_2^{(k+1)}$, 求得 $x_2^{(k+1)}$ 后, 即可替换 $x_2^{(k)}$, 用 $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^T$ 代入 Jacobi 迭代的第三个方程求 $x_3^{(k+1)}$, 如此逐个替换, 直到 $x^{(k)}$ 的所有分量替换完成, 即可得到 $x^{(k+1)}$. 这种改变既可以节省存储量, 编程又十分方便, 这就是高斯-赛德尔 (Gauss-Seidel) 迭代.

Back
Close

对于线性代数方程组 (2.1), Gauss-Seidel 迭代的计算格式为

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n. \quad (2.14)$$

为便于收敛性分析, 可将分量形式的迭代公式 (2.14) 改写成矩阵形式. 令

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

Back
Close

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

则 $A = D - L - U$. 迭代 (2.14) 可表示为

$$Dx^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b,$$

得 Gauss-Seidel 迭代的矩阵表示为

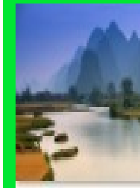
$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b, \tag{2.15}$$

简记为

$$x^{(k+1)} = B_S x^{(k)} + f_S, \tag{2.16}$$

其中 $B_S = (D - L)^{-1}U,\ f_S = (D - L)^{-1}b$.

下面给出 Gauss-Seidel 迭代法的具体算法步骤：



Back
Close

算法 2.2 (Gauss-Seidel 迭代法)

步 1　输入矩阵 A, 右端向量 b, 初始点 $x^{(0)}$, 精度要求 ε, 最大迭代次数 N, 置 $k := 0$;

步 2　计算

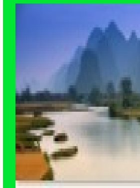
$$x_1 = \Big(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j^{(0)}\Big)\Big/ a_{11},$$

$$x_i = \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(0)}\Big)\Big/ a_{ii}, \quad i = 2, \cdots, n-1,$$

$$x_n = \Big(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j\Big)\Big/ a_{nn}$$

步 3　若 $\|x - x^{(0)}\|_\infty \le \varepsilon$, 则停算, 输出 x 作为方程组的近似解; 否则, 转步 4.

步 4　若 $k = N$, 则停算, 输出迭代失败信息; 否则置 $x^{(0)} :=$



Back
Close

x, $k := k+1$, 转步 2.

根据算法 2.2, 编制 MATLAB 程序如下：

- Gauss-Seidel迭代法 MATLAB 程序

```
%maseidel.m
function x=maseidel (A,b,x0,ep,N)
%用途: 用Gauss-Seidel迭代法解线性方程组Ax=b
%格式: x=maseidel (A,b,x0,ep,N)  A为系数矩阵,b为右端向
%       量,x0为初始向量(默认零向量), ep为精度(默认1e-6),
%       N为最大迭代次数(默认500次), x返回近似解向量
n=length(b);
if nargin<5,N=500;end
if nargin<4,ep=1e-6;end
```

```
if nargin<3,x0=zeros(n,1);end
x=zeros(n,1); k=0;
while k<N
 for i=1:n
  if i==1
    x(1)=(b(1)-A(1,2:n)*x0(2:n))/A(1,1);
   else if i==n
    x(n)=(b(n)-A(n,1:n-1)*x(1:n-1))/A(n,n);
   else
    x(i)=b(i)-A(i,1:i-1)*x(1:i-1)-A(i,i+1:n)*x0(i+1:n);
    x(i)=x(i)/A(i,i);
   end
  end
```

```
    end
    if norm(x-x0,inf)<ep, break; end
    x0=x;
    k=k+1;
  end
  if k==N,Warning('已达到迭代次数上限');end
  disp(['k=',num2str(k)])
```

例 2.3 用 Gauss-Seidel 迭代法通用程序 maseidel.m 解线性方程组：

$$\begin{pmatrix} 0.76 & -0.01 & -0.14 & -0.16 \\ -0.01 & 0.88 & -0.03 & 0.05 \\ -0.14 & -0.03 & 1.01 & -0.12 \\ -0.16 & 0.05 & -0.12 & 0.72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.68 \\ 1.18 \\ 0.12 \\ 0.74 \end{pmatrix}$$

取初始点 $x^{(0)} = (0,0,0,0)^T$, 精度要求 $\varepsilon = 10^{-6}$.

解 在 MATLAB 命令窗口执行程序 maseidel.m:

```
>>A=[0.76 -0.01 -0.14 -0.16; -0.01 0.88 -0.03 0.05;
     -0.14 -0.03 1.01 -0.12; -0.16 0.05 -0.12 0.72];
>> b=[0.68 1.18 0.12 0.74]';
>> x=maseidel(A,b)
```

得到计算结果:

```
k= 8
x =
   1.27616296389801
   1.29806390417707
   0.48904229112097
```

1.30273326937409

§2.3.2 收敛性分析

定理 2.8 若线性方程组 (2.1) 的系数矩阵 A 严格对角占优, 即

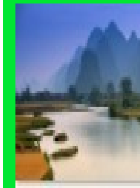
$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.17}$$

或

$$\sum_{i=1,i\neq j}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}|, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{2.18}$$

则 Gauss-Seidel 迭代收敛.

证 注意到 Gauss-Seidel 迭代矩阵 $B_S = (D-L)^{-1}U$ 的特征多项



式为

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det[\lambda I - (D-L)^{-1}U] \\
&= \det\{(D-L)^{-1}[\lambda(D-L)-U]\} \\
&= \det[(D-L)^{-1}] \cdot \det[\lambda(D-L)-U]
\end{aligned}
$$

首先, $\det[(D-L)^{-1}] \neq 0$. 以下用反证法. 若 Gauss-Seidel 迭代不收敛, 则至少存在一个特征值 λ, 且 $|\lambda| \geq 1$. 由于 A 对角占优, 即 (2.17) 或 (2.18) 成立, 故 $\lambda(D-L)-U$ 仍为对角占优, 而对角占优矩阵必非奇异, 故

$$\det[\lambda(D-L)-U] \neq 0,$$

这与 λ 是迭代矩阵 B_S 的特征值相矛盾, 即 $|\lambda|$ 不可大于或等于 1. 因此 $|\lambda| < 1$, 即 $\rho(B_S) = \rho((D-L)^{-1}U) < 1$, 从而 Gauss-Seidel 迭代收敛. $\square$

定理 2.9 若线性方程组 (2.1) 的系数矩阵 A 对称正定, 则 Gauss-Seidel 迭代收敛.

证 记 B_S 的特征值为 λ, 对应的特征向量为 z, 这时

$$(D-L)^{-1}Uz = \lambda z,$$

即

$$Uz = \lambda(D-L)z.$$

上式两边左乘 z 的共轭转置 z^H 得

$$z^H Uz = \lambda z^H (D-L)z,$$

即

$$\lambda = \frac{z^H Uz}{z^H Dz - z^H Lz} \tag{2.19}$$

Back
Close

记 $z^H Dz = d$, $z^H Lz = a + ib$, 因 A 对称, 故 $U = L^T$, $z^H Uz = a - ib$, 代入 (2.19) 得

$$\lambda = \frac{a - ib}{(d-a) - ib} \tag{2.20}$$

因 A 正定, $z^H Az = z^H(D - L - U)z = d - 2a > 0$. 由于

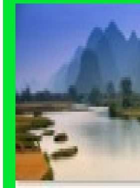
$$|\lambda|^2 = \frac{a^2 + b^2}{(d-a)^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2) + d(d - 2a)} < 1,$$

故迭代收敛. □

注 **2.2** 类似于定理 2.7, 定理 2.8 和定理 2.9 也只是 Gauss-Seidel 迭代收敛的充分条件而非必要条件. 请仔细领会下面的例题.

例 **2.4** 判断用 Gauss-Seidel 迭代法解下列方程组的收敛性：

$$(1)\quad \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2.8, \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 3.5, \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 6.2; \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$



Back
Close

解 (1) 由于该方程组的系数矩阵严格对角占优, 故由定理 2.8 知, Gauss-Seidel 迭代收敛.

(2) 由于该方程组的系数矩阵既不是严格对角占优矩阵, 也不是对称正定矩阵, 故无法由定理 2.8 或定理 2.9 判断其收敛性. 但其迭代矩阵为

$$B_S = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

计算可得

$$B_S = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & -5/8 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

从而

$$\|B_S\|_\infty = \max\left\{\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{7}{8} < 1,$$

故由定理 2.6 知, Gauss-Seidel 迭代收敛.

例 2.5 考虑方程组

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + ax_3 = 2, \\ ax_1 + x_2 + ax_3 = 3, \\ ax_1 + ax_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

(1) 当 a 取何值时, Jacobi 迭代法是收敛的?

(2) 当 a 取何值时, Gauss-Seidel 迭代法是收敛的?

解 (1) 容易发现, 只要 $-0.5 < a < 0.5$, 方程组的系数矩阵 A 是严格对角占优的, 故此时 Jacobi 迭代法收敛.

(2) 由 A 的各阶顺序主子式

$$D_1 = 1 > 0, \quad D_2 = 1 - a^2 > 0, \quad D_3 = 1 + 2a^3 - 3a^2 > 0,$$

解得 $-0.5 < a < 1$. 此时矩阵 A 是对称正定的, 故 Gauss-Seidel 迭代法收敛.

作业：P31: 2.4; P32: 2.7.