UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

Ecole Supérieure Polytechnique

Génie Informatique

Filière : DUT 1 DUT 2 LICENCE 1 LICENCE 2

Cours : Mathématiques discrètes

Année Universitaire : 2025-2026

Prof : Mme Aminata Diop Diene

TD Mathématiques discrètes (ensembles et applications)

Exercice 1

Expliciter les trois ensembles suivants :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}*} \left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[, \qquad \bigcap_{p=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{p},\frac{2p+1}{p}\right[, \qquad \text{et} \quad \bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\left[-k,-\frac{1}{k}\right[\cup\left]\frac{1}{k},k\right]\right).$$

On va démontrer, par double inclusion, que :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}*} \left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[= \{0\}, \qquad \bigcap_{p=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{p},\frac{2p+1}{p}\right[= [0,2], \qquad \text{et} \quad \bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\left[-k,-\frac{1}{k}\right[\cup\left]\frac{1}{k},k\right]\right) = \mathbb{R}*.$$

Exercice 2.

Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

2. $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $g(x) = e^{3+\ln(x)}$

3. $h : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}^*$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$

Exercice 3.

Pour chacun des applications suivantes, justifier si elles sont injectives, surjectives, bijectives. Si elles sont bijectives, déterminer la bijection réciproque.

1. $f : k \in \mathbb{N} \longmapsto 3k+1 \in \mathbb{N}*$.

2. $g : \mathbb{R} \setminus \{5\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par $g(x) = \dfrac{3+2x}{x-5}$.

3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}+$ définie par $h(y) = \sqrt{y^2+y+1}$.

4. $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $i(t) = \dfrac{e^t-1}{e^t+1}$.

5. $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $j(x,y) = (x+2y, 5y-3x)$.

Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \ln\left(x^2+1\right)$.

1. Déterminer l'image directe par f de $[-1,1]$.

2. Déterminer l'image réciproque par f de $\mathbb{R}^+$ et de $[1, \ln(10)]$.