

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

**DEPARTAMENTO DE
TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES**



**LABORATORIO 2:
REDES DE SENSORES**

**TÉCNICAS AVANZADAS EN
TRATAMIENTO DE SEÑAL Y COMUNICACIONES**

**MÁSTER UNIVERSITARIO EN
INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN**

CURSO 2015/2016

ALUMNOS: JAVIER CARNERERO CANO
100292885@alumnos.uc3m.es

VICENTE GALLARDO CABRERA
100079048@alumnos.uc3m.es

ÍNDICE

ÍNDICE	i
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 OBJETIVOS Y ESPECIFICACIONES	1
1.2 PROTOCOLO EXPERIMENTAL	2
2 SIMULACIÓN	3
2.1 GENERACIÓN DE LAS ECUACIONES DE ESTADO Y OBSERVACIÓN	3
2.2 DISEÑO DEL FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO	6
2.3 PREDICCIONES OBTENIDAS PARA DISTINTOS SENSORES	7
2.3.1 SOLO EL SENSOR S_1	7
2.3.2 SENSORES S_1 Y S_2	8
2.3.3 TODOS LOS SENSORES	9
2.3.4 CONCLUSIONES	11
3 CONCLUSIONES FINALES	12
REFERENCIAS	13

1 INTRODUCCIÓN

1.1 OBJETIVOS Y ESPECIFICACIONES

El objetivo del presente trabajo es estudiar la aplicación del filtro de Kalman extendido en redes de sensores, mediante su implementación en el problema de localización y el seguimiento de un objeto. Este objeto se mueve por un espacio en dos dimensiones, y su posición en el instante $t = 1, 2, 3, \dots$ viene dada por el vector aleatorio $\mathbf{x}_t = [x_{1,t}, x_{2,t}]^T$, que evoluciona con el tiempo de acuerdo a la ecuación lineal:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u} \quad (1.1)$$

Donde \mathbf{u} es un vector que expresa la distancia recorrida por el objeto en una unidad de tiempo discreta (proporcional a la velocidad). En el instante $t = 0$, la posición del objeto tiene una distribución a priori gaussiana, $p(\mathbf{x}_0) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\mu}_0, \sigma_0^2 \mathbf{I})$.

Para estimar la posición a lo largo del tiempo, disponemos de mediciones llevadas a cabo en **4 sensores**. La medición del sensor i -ésimo es de la forma:

$$y_{i,t} = \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{x}_t - \mathbf{s}_i\|^2\right) + g_{i,t}, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad (1.2)$$

donde $\mathbf{s}_i = [s_{1,i}, s_{2,i}]^T$ es un vector que representa la posición del sensor i en el plano y $g_{i,t}$ es el ruido, modelado como la realización de una v.a. gaussiana con f.d.p. $\mathcal{N}(g_{i,t}; 0, \sigma_g^2)$. Las variables de ruido son independientes entre los distintos sensores y entre distintos instantes de tiempo.

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) definen un sistema dinámico en formato de espacio de estados que es gaussiano, pero no lineal. Para poder aplicar el filtro de Kalman a este sistema linealizamos la ecuación (1.2). Sea $f_i(\mathbf{x}_t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{x}_t - \mathbf{s}_i\|^2\right)$. Definimos la matriz jacobiana (de derivadas parciales) $\mathbf{J}_t(\mathbf{x}_t)$ como:

$$\mathbf{J}_t(\mathbf{x}_t) = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_t} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{1,t}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{2,t}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{1,t}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{2,t}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_{1,t}} & \frac{\partial f_3}{\partial x_{2,t}} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_{1,t}} & \frac{\partial f_4}{\partial x_{2,t}} \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

Donde $\frac{\partial f_i}{\partial x_{j,t}} = (s_{j,i} - x_{j,t}) \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{x}_t - \mathbf{s}_i\|^2\right)$ (obsérvese que $\mathbf{J}_t(\mathbf{x}_t)$ es, en efecto, una función de \mathbf{x}_t). Finalmente, aproximamos la ecuación de observación como:

$$\mathbf{y}_t \approx \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) + \mathbf{J}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) + \mathbf{g}_t, \quad (1.4)$$

donde

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) = \begin{bmatrix} f_1(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) \\ f_2(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) \\ f_3(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) \\ f_4(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ y_{3,t} \\ y_{4,t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_t = \begin{bmatrix} g_{1,t} \\ g_{2,t} \\ g_{3,t} \\ g_{4,t} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

y $\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$ es la predicción del estado calculada por el filtro de Kalman.

Ahora ya es inmediato programar un filtro de Kalman (extendido) para el sistema formado por las ecuaciones (1.1) y (1.4).

1.2 PROTOCOLO EXPERIMENTAL

Para reproducir los experimentos aquí expuestos, basta con ejecutar el fichero *p2_TATSC.m* y observar las gráficas obtenidas. No obstante, debido a la aleatoriedad del AWGN (*Additive White Gaussian Noise*) que se añade a las observaciones, así como de la distribución a priori de la posición inicial, no siempre se obtendrá exactamente los mismos resultados, aunque guardarán mucha semejanza entre ellos.

2 SIMULACIÓN

2.1 GENERACIÓN DE LAS ECUACIONES DE ESTADO Y OBSERVACIÓN

En esta sección se va a programar en MATLAB® (MATrix LABoratory ®) las ecuaciones de estado y observación relativas al movimiento del objeto. La posición inicial del objeto será:

$$\mathbf{x}_0 = [0.5, 0]^T \quad (2.1)$$

y el vector desplazamiento:

$$\mathbf{u} = [0.02, 0.01]^T \quad (2.2)$$

Además, las posiciones de los 4 sensores son:

$$\mathbf{s}_1 = [0, 0]^T, \quad \mathbf{s}_2 = [0, 1]^T, \quad \mathbf{s}_3 = [1, 0]^T, \quad \mathbf{s}_4 = [1, 1]^T \quad (2.3)$$

Se simularán un total de **100 instantes** (100 posiciones medidas). Si representamos gráficamente las sucesivas posiciones del objeto a lo largo de dichos instantes (mediante las ecuaciones (1.1), (2.1) y (2.2)), así como la localización de los sensores, obtenemos la siguiente figura:

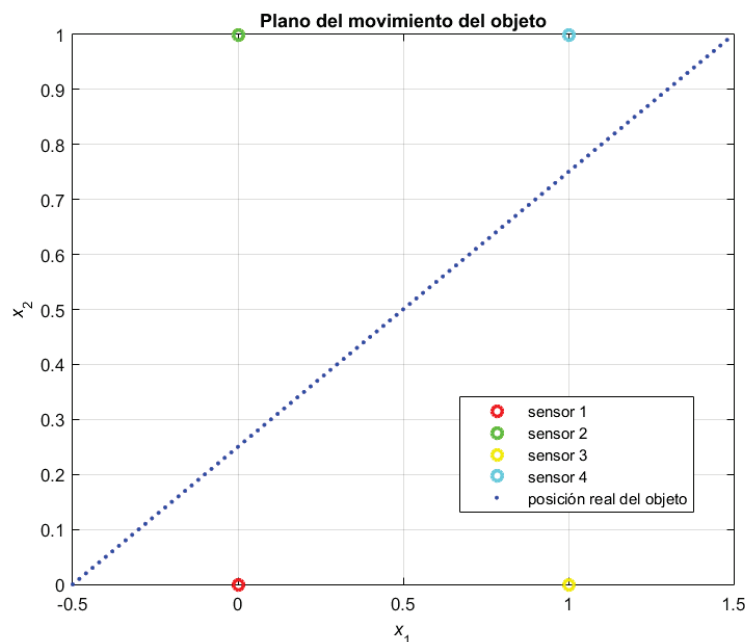


Figura 2.1: Representación del movimiento del objeto en el plano, así como de la posición de los sensores (para 100 instantes de muestreo).

Con respecto a las observaciones medidas en cada sensor, a partir de la ecuación (1.2) y teniendo en cuenta la adición del ruido gaussiano, se obtienen los siguientes valores, en función de la desviación típica, σ_g , del ruido:

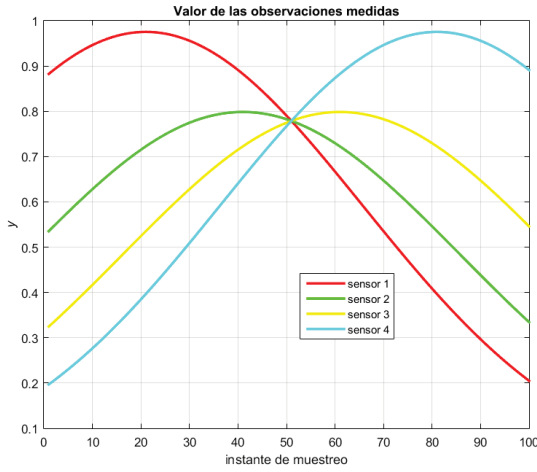


Figura 2.2: Valor de las observaciones medidas por cada sensor, para $\sigma_g = 0$.

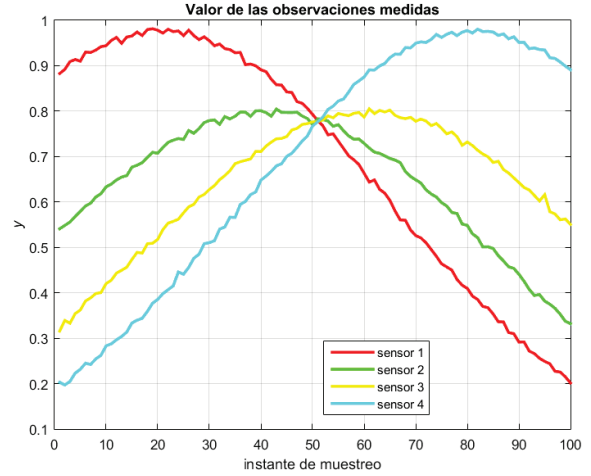


Figura 2.3: Valor de las observaciones medidas por cada sensor, para $\sigma_g = 0.005$.

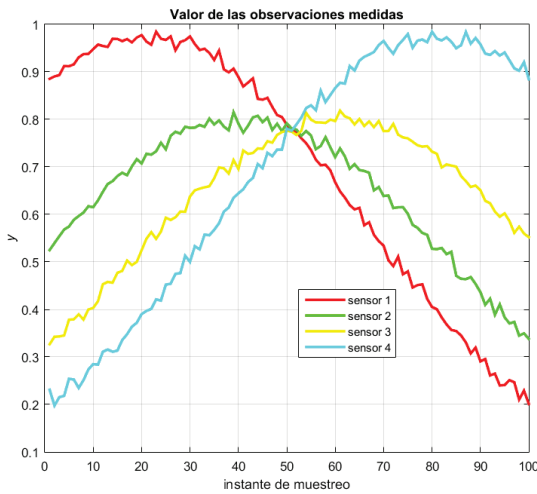


Figura 2.4: Valor de las observaciones medidas por cada sensor, para $\sigma_g = 0.01$.

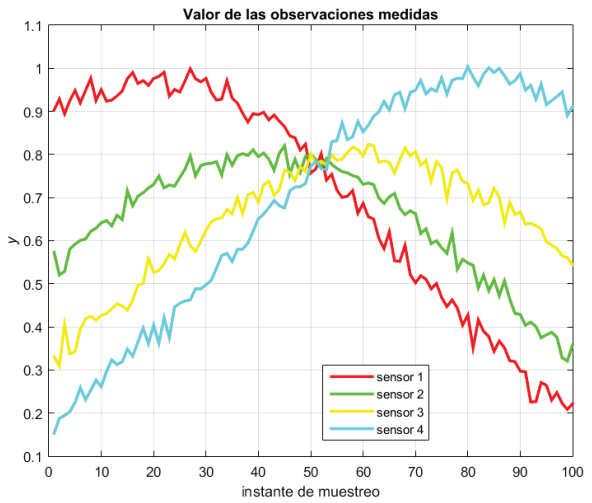


Figura 2.5: Valor de las observaciones medidas por cada sensor, para $\sigma_g = 0.02$.

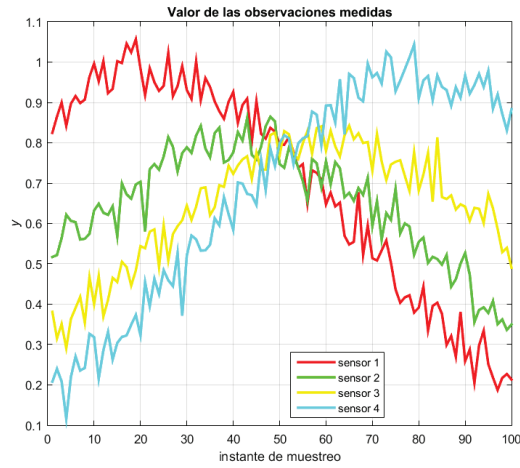


Figura 2.6: Valor de las observaciones medidas por cada sensor, para $\sigma_g = 0.04$.

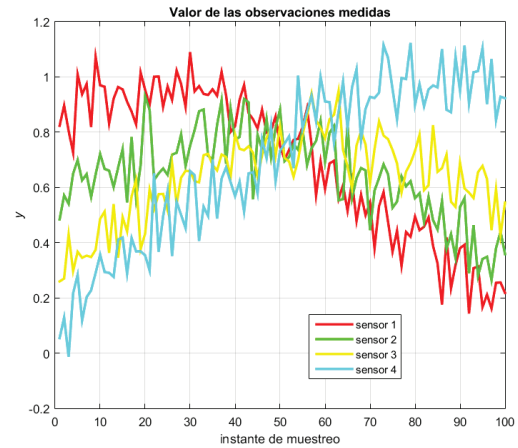


Figura 2.7: Valor de las observaciones medidas por cada sensor, para $\sigma_g = 0.08$.

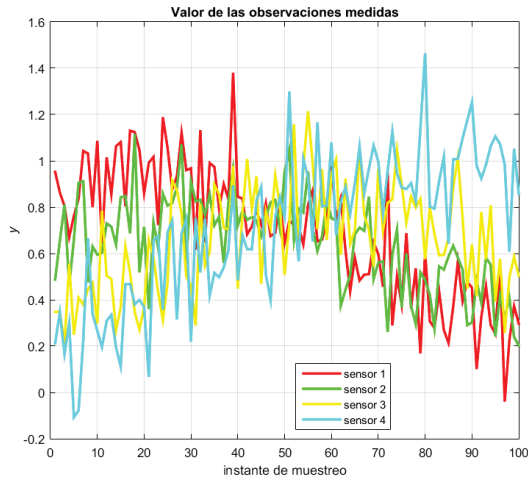


Figura 2.8: Valor de las observaciones medidas por cada sensor, para $\sigma_g = 0.16$.

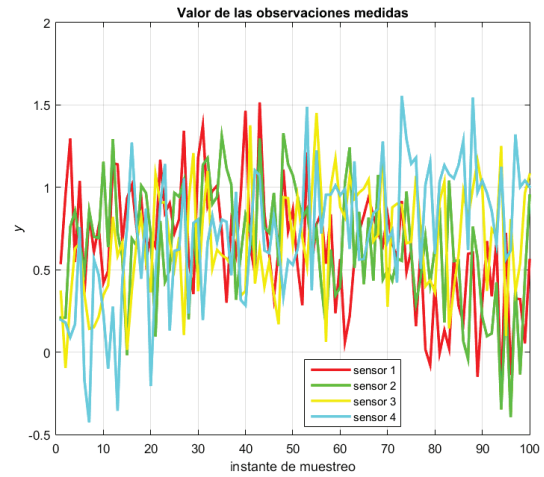


Figura 2.9: Valor de las observaciones medidas por cada sensor, para $\sigma_g = 0.32$.

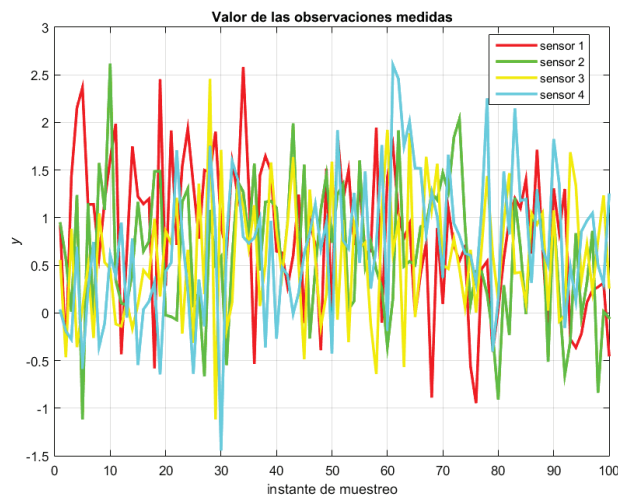


Figura 2.10: Valor de las observaciones medidas por cada sensor, para $\sigma_g = 0.64$.

Como se puede comprobar en las anteriores figuras, el ruido juega un papel importante a la hora de determinar con precisión la posición del objeto. En estas figuras se puede observar el nivel de potencia de las observaciones (con el ruido añadido) que se obtiene cuando el objeto, siguiendo su trayectoria, pasa alrededor de los sensores. Por lo tanto, según las ecuaciones descritas en la anterior sección, a mayor cercanía al sensor, mayor potencia obtiene el mismo (las observaciones sin ruido siguen una curva de perfil típico gaussiano, centrada en el instante en el cual la distancia entre la posición del objeto y el sensor es mínima).

Se puede apreciar de manera significativa en la Figura 2.2 que hay un punto en el cual todos los sensores perciben el mismo nivel misma potencia (donde se cruzan las cuatro gráficas), que es el punto (0.5, 0.5) (Figura 2.1), en el que el objeto equidista a todos los sensores por igual. En las sucesivas figuras se aprecia también que esto sigue siendo así, hasta que el ruido es lo suficientemente intenso como para hacer que este caso puntual no se pueda apreciar.

También se puede apreciar en la Figura 2.2 que, hasta alcanzar el punto (0.5, 0.5), el objeto pasa más cerca de los *Sensores 1 y 2*, ya que la potencia medida por dichos sensores es mayor. A partir de ese punto, se observa que reciben mayor potencia los *Sensores 3 y 4*, como es lógico debido a su menor distancia con el objeto.

Si realizamos un análisis global de la influencia del AWGN, se aprecia que hasta $\sigma_g = 0.16$ (no incluido) es posible distinguir de forma clara las observaciones recibidas por cada sensor. A partir de este valor de desviación típica ($\sigma_g = 0.16$), se puede observar que no hay una distinción rigurosa por parte de los sensores de lo cerca que se encuentra el objeto (ya que la potencia del ruido es alta), por lo que la estimación de la posición media del objeto resultaría menos precisa en esos casos.

2.2 DISEÑO DEL FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO

El siguiente paso será programar un filtro de Kalman extendido para la estimación de la secuencia de posiciones $\{\mathbf{x}_t\}_{t \geq 1}$ a partir de las observaciones \mathbf{y}_t . Para generar la posición inicial, $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$, se empleará la distribución a priori con:

$$\mu_0 = [-0.5, 0]^T, \quad \sigma_0^2 = 0.04 \quad (2.4)$$

Se emplearán las siguientes ecuaciones:

Para la etapa predictiva:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} + \mathbf{u} \quad (2.5)$$

Donde $\mathbf{A} = \mathbf{I}_{2 \times 2}$ (matriz unidad).

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{Q} + \mathbf{A} \mathbf{P}_{t-1|t-1} \mathbf{A}^T \quad (2.6)$$

Siendo $\mathbf{P}_{0|0} = \sigma_0^2 \mathbf{I}_{2 \times 2}$ la matriz de covarianzas de la distribución a priori del estado, y $\mathbf{Q} = \mathbf{0}_{2 \times 2}$ la matriz de covarianzas de \mathbf{u} (determinista).

Para la etapa de actualización o filtrado:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t|t-1} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_t} \right]_{\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}}^T \left(\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_t} \right]_{\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}} \mathbf{P}_{t|t-1} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_t} \right]_{\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}}^T + \mathbf{R} \right)^{-1} \quad (2.7)$$

Donde \mathbf{K}_t se define como la ganancia de Kalman, y $\mathbf{R} = \sigma_g^2 \mathbf{I}$ es la matriz de covarianzas del ruido \mathbf{g}_t , y cuyas dimensiones dependen del número de sensores de los que se obtienen las observaciones.

Finalmente, se obtiene la media y la matriz de covarianzas filtradas (de la distribución a posteriori) de la posición del objeto:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})) \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{P}_{t|t} = \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{K}_t \left(\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_t} \right]_{\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}} \mathbf{P}_{t|t-1} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_t} \right]_{\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}}^T \right) \mathbf{K}_t^T \quad (2.8b)$$

Estas ecuaciones se encuentran implementadas en el código de MATLAB® adjunto a esta memoria.

2.3 PREDICCIONES OBTENIDAS PARA DISTINTOS SENSORES

A partir de las ecuaciones descritas en la sección anterior, y del código desarrollado, se muestran distintas estimaciones de la media a posteriori de la posición del objeto. Probamos tres valores para σ_g : 0.005, 0.02 y 0.08; y generamos aleatoriamente la siguiente estimación de la posición media inicial (para comparar mejor los resultados partiendo del mismo punto):

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = [-0.4461, 0.0989]^T \quad (2.9)$$

Se realizarán experimentos empleando primero el *Sensor 1*, después los *Sensores 1 y 2*, y por último todos los sensores. En los dos primeros casos, es necesario alterar las dimensiones, y por tanto los elementos de la matriz jacobiana definida en (1.3), ya que estos dependen de los sensores que intervengan en la obtención de las observaciones.

2.3.1 SOLO EL SENSOR \mathbf{S}_1

En las siguientes imágenes se puede apreciar la estimación de la posición media del objeto en cada momento por parte del *Sensor 1*.

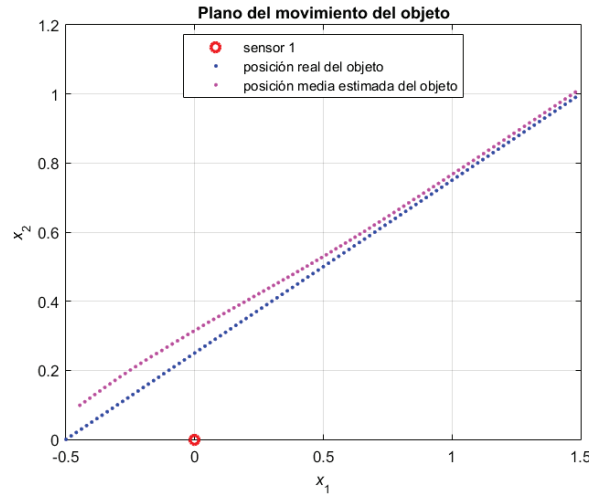


Figura 2.11: Posiciones reales del objeto y estimadas mediante el *Sensor 1*, para $\sigma_g = 0.005$.

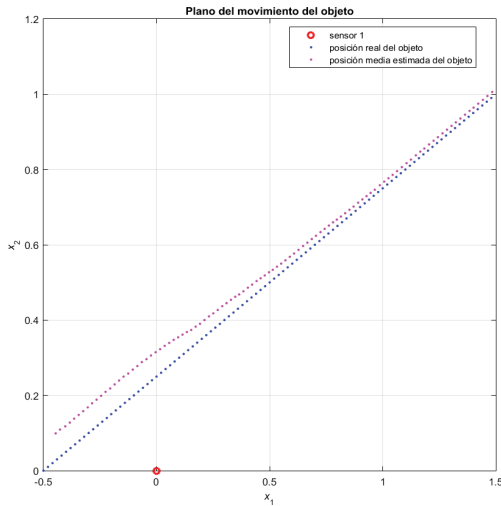


Figura 2.12: Posiciones reales del objeto y estimadas mediante el *Sensor 1*, para $\sigma_g = 0.02$.

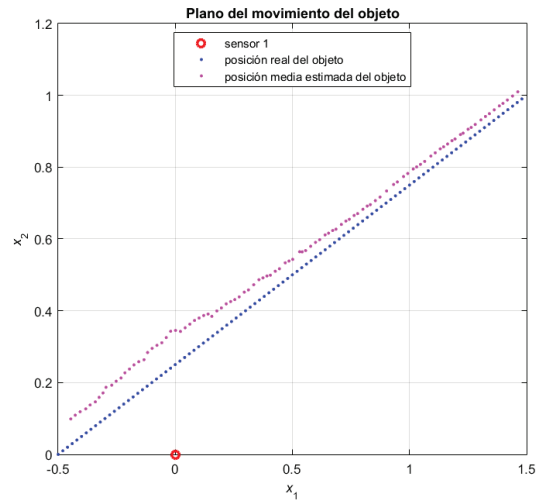


Figura 2.13: Posiciones reales del objeto y estimadas mediante el *Sensor 1*, para $\sigma_g = 0.08$.

Se observa una desviación apreciable de la estimación de las posiciones iniciales con respecto a las posiciones reales, como consecuencia de la posición del *Sensor 1* y de que la posición inicial estimada es aleatoria. Además, a medida que aumenta el valor de σ_g , las estimaciones son más oscilantes, como cabía esperar.

2.3.2 SENSORES S_1 Y S_2

En la siguiente imagen se puede apreciar la estimación por parte de los *Sensores 1* y *2*.

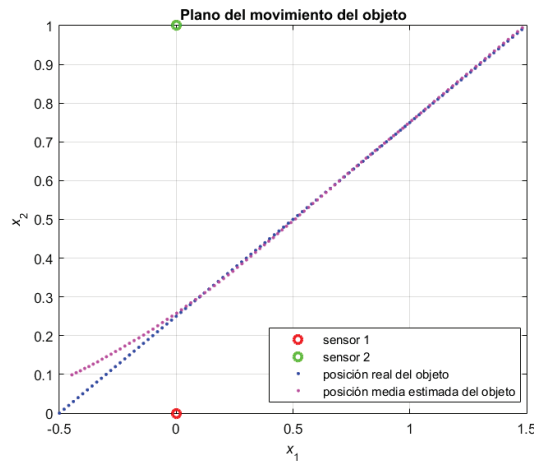


Figura 2.14: Posiciones reales del objeto y estimadas mediante los *Sensores 1 y 2*, para $\sigma_g = 0.005$.

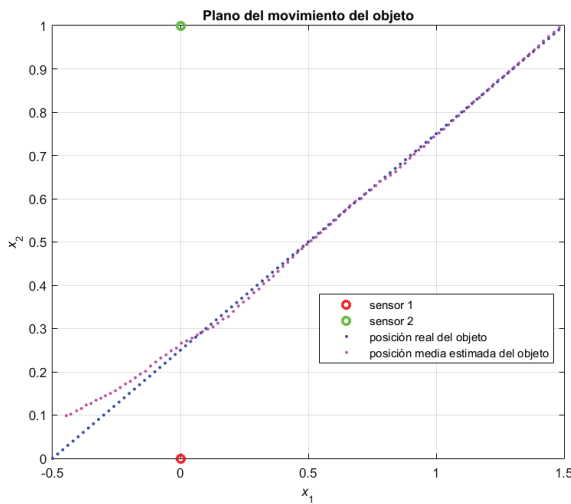


Figura 2.15: Posiciones reales del objeto y estimadas mediante los *Sensores 1 y 2*, para $\sigma_g = 0.02$.

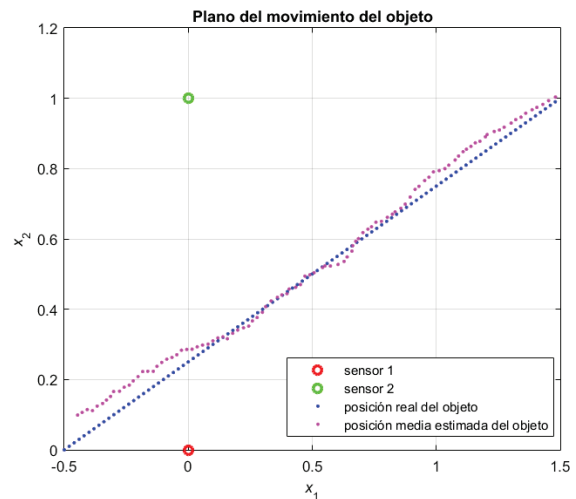


Figura 2.16: Posiciones reales del objeto y estimadas mediante los *Sensores 1 y 2*, para $\sigma_g = 0.08$.

Se observa en las figuras anteriores que la estimación de las posiciones iniciales por parte de los *Sensores 1 y 2* es más precisa que en la estimación con el *Sensor 1*. Esto es debido a que, al intervenir más sensores, y estar estos dispuestos en distintas posiciones pero lo suficientemente cercanas al objeto como para aportar mayor información, hay mayor precisión en la estimación. Aun así, al principio la posición media estimada del objeto dista más de la posición real del objeto que en otros instantes posteriores, ya que al ir corrigiendo las estimaciones se hace más precisa la localización estimada del objeto en cada instante de tiempo. La potencia del ruido influye en la precisión de la estimación.

2.3.3 TODOS LOS SENSORES

En las siguientes imágenes se puede apreciar la estimación de las sucesivas posiciones del objeto por parte de los *Sensores 1, 2, 3 y 4*.

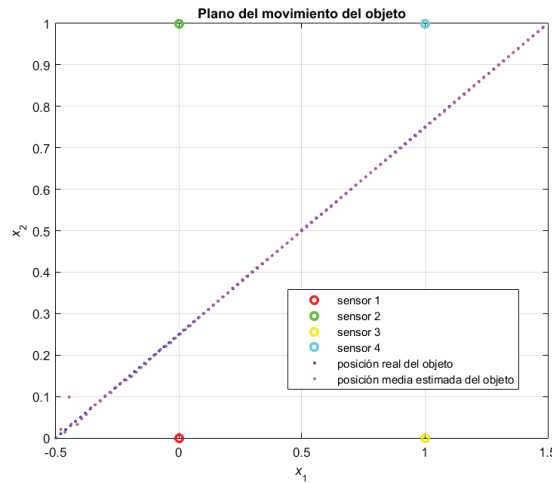


Figura 2.17: Posiciones reales del objeto y estimadas mediante todos los sensores, para $\sigma_g = 0.005$.

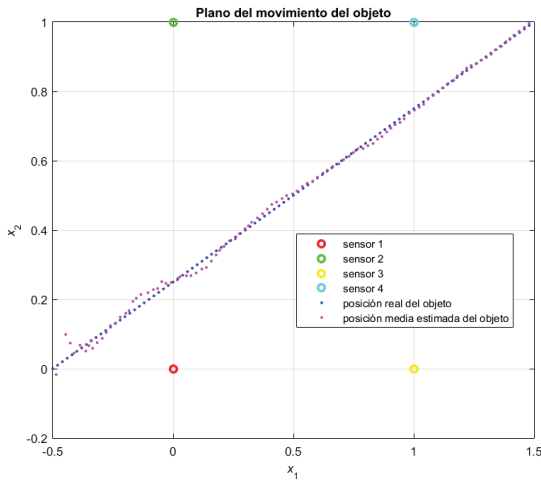


Figura 2.18: Posiciones reales del objeto y estimadas mediante todos los sensores, para $\sigma_g = 0.02$.

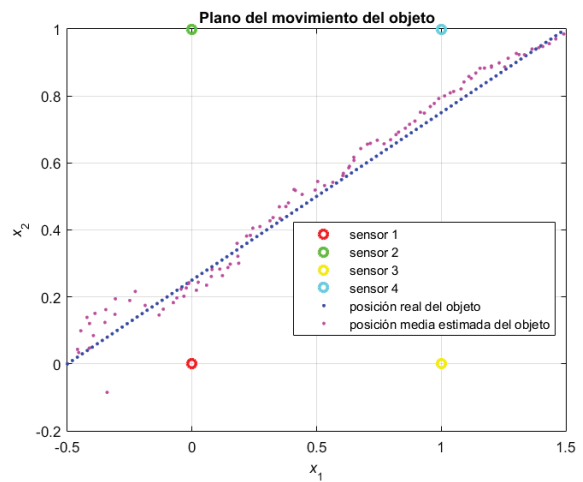


Figura 2.19: Posiciones reales del objeto y estimadas mediante todos los sensores, para $\sigma_g = 0.08$.

Se aprecia en las figuras que las estimaciones obtenidas empleando simultáneamente los *Sensores 1, 2, 3 y 4* son mucho más precisas que las obtenidas utilizando solo el *Sensor 1*, pero no mucho más que las estimaciones con los *Sensores 1 y 2* cuando la posición inicial ya ha sido corregida.

En el caso de la comparación con la estimación por el *Sensor 1*, el motivo es idéntico al expuesto en el anterior apartado: al tener más sensores, la precisión es mayor en este caso.

En el caso de la comparación con la estimación por los *Sensores 1 y 2*, se aprecia que los cuatro sensores tienen mayor precisión de estimación de la posición del objeto inicialmente y unas prestaciones similares cuando el objeto sigue su trayectoria hacia el final.

Por último, cabe señalar que la influencia del AWGN es bastante significativa en las estimaciones cuando el valor de σ_g alcanza 0.08.

2.3.4 CONCLUSIONES

Los comentarios anteriores se pueden sintetizar en la siguiente tabla:

Sensores	σ_g	Error cuadrático medio
1	0.0050	0.0053
	0.0200	0.0056
	0.0800	0.0058
1 y 2	0.0050	0.0020
	0.0200	0.0020
	0.0800	0.0024
1, 2, 3 y 4	0.0050	$1.3566 \cdot 10^{-4}$
	0.0200	$3.5079 \cdot 10^{-4}$
	0.0800	0.0024

Tabla 2.1: Errores cuadráticos medios obtenidos en función de los sensores empleados y el valor de σ_g .

De la anterior tabla se puede extraer que el error cuadrático medio cometido en la estimación de la posición del objeto es menor cuantos más sensores se empleen, al igual que cuanto menor sea la potencia del AWGN. No obstante, cabe señalar que, si se alcanza un determinado nivel de potencia de ruido, no existen grandes diferencias en emplear todos los sensores o solo los sensores 1 y 2.

3 CONCLUSIONES FINALES

Se ha presentado el diseño y simulación del filtro de Kalman extendido en redes de sensores, aplicado a un caso sencillo de estudio del movimiento de un objeto.

Se ha observado que el filtro de Kalman realiza una estimación más precisa de la posición del objeto cuantos más sensores haya y cuanto más próximos se hallen los sensores con respecto al objeto, también influyendo el nivel de potencia del ruido, siendo el error cuadrático medio cometido menor cuando menor es el valor de σ_g .

Hay que darse cuenta que los mejores resultados de estimación de la posición media del objeto los hemos obtenido en el caso en el que todos los sensores han participado en la estimación de la trayectoria del objeto. No obstante, dependiendo del nivel de la potencia del ruido, se podría incluso haber utilizado la estimación por parte de los *Sensores 1 y 2*, ya que las prestaciones son similares una vez corregida la posición inicial (para niveles altos de σ_g).

Como conclusión final podemos decir que el filtro de Kalman ofrece buenas prestaciones en la estimación de trayectorias, ya que corrige las sucesivas estimaciones con las estimaciones anteriores, lo cual le hace más robusto y con capacidad predictiva.

REFERENCIAS

- [1] J. G. Proakis. *Digital Communications (4th edition)*. McGraw-Hill, Singapore, 2000.
- [2] M. A. Vázquez-López, J. Míguez-Arenas, and J. M. Leiva-Murillo, PowerPoint presentations for Técnicas Avanzadas en Tratamiento de Señal y Comunicaciones subject, Carlos III University of Madrid, 2016.