線型代数入門：解答集

編集者：

最終更新日：2019 年 12 月 11 日

目次

1　第 1 章：平面および空間のベクトル（解答）

1.1　p8

1.2 p10

1.3　p11〜12

1.4 p13

1.5 p18

1.6 p19

1.7 p22〜23

1.8　p29〜30（章末問題）

問 2

Proof. 実際に行列式を計算してみると，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 1 \cdot x_1 \cdot y_2 + 1 \cdot x_2 \cdot y + 1 \cdot x \cdot y_1 - 1 \cdot x_2 \cdot y_1 - 1 \cdot x \cdot y_2 - 1 \cdot x_1 \cdot y \tag{1}$$

$$= y(x_2 - x_1) + x(y_1 - y_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 \tag{2}$$

(2) について，$x_1 \neq x_2$ のとき，

$$y(x_2 - x_1) + x(y_1 - y_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \tag{4}$$

(4) に $x = x_1$ を代入すると，

$$y = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_1 + x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \tag{5}$$

$$= \frac{(x_2 - x_1) y_1}{x_2 - x_1} \tag{6}$$

$$= y_1 \tag{7}$$

(4) に $x = x_2$ を代入すると，同様に $y = y_2$ が得られる．ゆえに，たしかに直線を表す．
$x_1 = x_2$ のとき，(2) 式は，

$$x(y_1 - y_2) = -x_1 y_2 + x_2 y_1 \tag{8}$$

となり，P_1，P_2 が相異なることより $y_1 \neq y_2$ なので，x はつねに定数となり，直線となる．
以上により，問題の主張が正しいことが示された．□

2　第２章：行列（解答）

2.1　p34

問 1

Hint：単純な行列の和・積に関する命題は，両辺の (i, j) 成分を比較する方法が 1 つある。今回はそれを使う命題であるが，(i, j) 成分を計算する際，左辺は積の形になっているので，どうしても $\sum$ を使わざるを得ない。その時は公式に当てはめるなど頭を使わない方法ではなく，丁寧に成分ごとで 1 つ 1 つ計算していき，最後に $\sum$ でまとめて証明として書き出せばいい。

Proof.
後半二つの主張は明らか。また，二つ目の主張は一つ目の主張と同様にして示すことができるので，一つ目のみ示すことにする。
$A = (a_{pq})$ を $k \times l$ 行列，$B = (b_{qr})$，$C = (c_{qr})$ を $l \times m$ 行列とする。示したい式の両辺がともに定義され、ともに $k \times m$ 行列であることはよい。行列 $B + C$ の (q, r) 成分は $b_{qr} + c_{qr}$であるから、左辺の (p, r) 成分は、

$$\sum_{q=1}^{l} a_{pq} (b_{qr} + c_{qr}) = \sum_{q=1}^{l} a_{pq} b_{qr} + \sum_{q=1}^{l} a_{pq} c_{qr}$$

と書ける。この等号の右辺は AB の (p, r) 成分と AC の (p, r) 成分の和である。これより，主張が示された。　□

2.2 p41

2.3 p42

2.4 p48

2.5 p53

2.6　p62～63

2.7 p65

2.8　p70（章末問題）

問 6

Proof.
イ）$A_k = E$ なる k が存在したとする。$k=1$ ならば明らか。
$k>2$ ならば、$A^k = A\cdot\quad A^{k-1} = A^{k-1}\cdot\quad A = E$ となるので、A^{k-1}が A の逆行列となるので，A は正則。

ロ)A が正則であるとする。$A^2 = A$ の両辺に A^{-1}をかけると，$A=E$ となるが，これは仮定に反する。

ハ)$A^k = O$ となる k が存在したとして、A が正則であるとする。この等式の両辺に $(A^{-\ 1})^k$をかけると $E=O$ となるが，これは明らかに矛盾。

ニ)$E-A$ に関してのみ示す。他方も同様にして示せる。$A^k=O$ となる k が存在したとする。
すると

$$(E-A)(E+A+\cdots+A^{k\ -\ 1}) = (E+A+\cdots+A^{k\ -\ 1})(E-A) = E - A^k = E$$

となることから主張が従う。 □

2.9 p71

問 1：

解答

Proof. $w,\ x,\ y,\ z \in \mathbb{C}$ として，$X = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ とおく．このとき，

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$= \begin{pmatrix} w+2y & x+2z \\ 2w+4y & 2x+4z \end{pmatrix} \tag{2}$$

となり，

$$\begin{pmatrix} w+2y & x+2z \\ 2w+4y & 2x+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w+2y=1 \\ x+2z=0 \\ 2w+4y=0 \\ 2x+4z=1 \end{cases} \tag{4}$$

簡単な計算により，この連立方程式を満たす $w,\ x,\ y,\ z \in \mathbb{C}$ は存在しない．これで前半の主張が示された．

後半について，$h,\ i,\ j,\ k \in \mathbb{C}$ として，$Y = \begin{pmatrix} h & i \\ j & k \end{pmatrix}$ とすると，

$$YA = \begin{pmatrix} h & i \\ j & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$= \begin{pmatrix} h+2i & 2h+4i \\ j+2k & 2j+4k \end{pmatrix} \tag{6}$$

となる．

$$\begin{pmatrix} h+2i & 2h+4i \\ j+2k & 2j+4k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h+2i=1 \\ 2h+4i=0 \\ j+2k=0 \\ 2j+4k=1 \end{cases} \tag{8}$$

簡単な計算により，この連立方程式を満たす $h,\ i,\ j,\ k \in \mathbb{C}$ は存在しない．これで後半の主張も示された． □

問 7：

Proof. $X = (x_{ij})$，$Y = (y_{ij})$ とする．ここで，XY の $(i,\ i)$ 成分は $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ji}$ であるから，

$$\mathrm{Tr}(XY) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ji}\right) \tag{1}$$

となる．他方，YX については，同様の議論により，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(YX) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij}x_{ji}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ji}y_{ij}\right) \end{aligned}\tag{2}$$

(2) 式で i と j をおきかえれば，

$$\mathrm{Tr}(YX) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}y_{ji}\right) \tag{3}$$

(1) 式と (3) 式を比較して，

$$\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX) \tag{4}$$

を得て，(4) 式より $\mathrm{Tr}(XY - YX) = 0$ であるが，一方，$\mathrm{Tr}(E_n) = n \neq 0$ であるため，これは矛盾．
ゆえに，$XY - YX = E_n$ となる n 次行列 X，Y は存在しないことが示された． $\square$

問 11

Proof.
P を n 次正方行列で

$$
\begin{gathered}
{}^tPP = E \\
P + E \text{ は正則}
\end{gathered}
$$

を満たしているとする。
1.$(P - E)(P + E) = (P + E)(P - E)$ 右辺と左辺をそれぞれ計算する.

$$
\begin{gathered}
(\text{右辺}) = P^2 + P - P - E = P^2 - E \\
(\text{右辺}) = P^2 - P + P - E = P^2 - E
\end{gathered}
$$

2.$A := (P - E)(P + E)^{-1}$ とおくと, ${}^tA = -A$

$$
\begin{aligned}
{}^tA &= {}^t((P - E)(P + E)^{-1}) \\
&= {}^t((P + E)^{-1})\,{}^t(P - E) \\
&= ({}^t(P + E))^{-1}({}^tP - E) \\
&= ({}^tP + {}^tPP)^{-1}({}^tP - {}^tPP) \\
&= ({}^tP(E + P))^{-1}({}^tP(E - P)) \\
&= (E + P)^{-1}({}^tP)^{-1}({}^tP)(E - P) \\
&= (E + P)^{-1}(E - P) \\
&= -(P + E)^{-1}(P - E)
\end{aligned}
$$

仮定 $P + E$ の正則性より, (1) の両辺に $P + E$ の逆行列を左,右から掛ければ

$$
\begin{gathered}
(P + E)^{-1}(P - E)(P + E)(P + E)^{-1} = (P + E)^{-1}(P + E)(P - E)(P + E)^{-1} \\
(P + E)^{-1}(P - E) = (P - E)(P + E)^{-1}
\end{gathered}
$$

が成り立つことから,

$$
{}^tA = -(P + E)^{-1} = (P - E) = -(P - E)(P + E)^{-1} = -A
$$

となる。

3.$E - A$ は正則
$\dfrac{1}{2}(P + E)$ が逆行列であることを示す。

$$
\begin{aligned}
(E - A)(P + E) &= P + E - A(P + E) \\
&= P + E + (-(P - E)(P + E)^{-1})(P + E) \\
&= P + E - P + E \\
&= 2E
\end{aligned}
$$

より, 題意は示される。

4.$P=(E+A)(E-A)^{-1}$

$$\begin{aligned}
(E+A)(E-A)^{-1} &= (E-P+P+A)\frac{1}{2}(P+E)\\
&= \frac{1}{2}(E-P)(E+P)+\frac{1}{2}P(P+E)+\frac{1}{2}A(P+E)\\
&= \frac{1}{2}(E-P^2)+\frac{1}{2}(P^2+P)+\frac{1}{2}(P-E)(P+E)^{-1}(P+E)\\
&= \frac{1}{2}(E-P^2)+\frac{1}{2}(P^2+P)+\frac{1}{2}(P-E)\\
&= P
\end{aligned}$$

□

以上より題意は示された.

3　第３章：行列式（解答）

3.1　p83

3.2　p90（章末問題）

問 10

Proof. 必要性・十分性をそれぞれ証明する.

1.A が正則かつ A^{-1}が整数行列であると仮定し, $\det A = \pm 1$ であることを示す。
A は整数行列であり，その行列式は，各要素の和と積でかけているから $\det A \in \mathbb{Z}$ である。同様にして $\det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$ である。逆行列の行列式は，

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

が成り立つ.。つまり, $\det A$，$1/\det A \in \mathbb{Z}$ である。これを満たす整数は ± 1 だけである。

2.$\det A = \pm 1$ であることを仮定し，A が正則かつ A^{-1}が整数行列であることを示す。
$\det A \neq 0$ より A の正則性がわかる。また，A の余因子行列を$\tilde{A}$とすると，余因子は A の各要素の和と積によって表現される。つまり，余因子は整数であるから$\tilde{A}$は整数行列である.また

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$$

となる。$\det A = \pm 1$ であり，余因子は整数であるから，A^{-1}は整数行列である。 □

4　第 4 章：線型空間（解答）

4.1　p94

問.

$Hint$：集合 A の元 a,b,c に対して，同値関係であることは P93 の定義から反射律・対称律・推移律が成立することなので，これを示せばよい。商集合の元の個数は商集合の定義に振り返る。

まず，同値関係であることを示す。$A,B \in \boldsymbol{M_{m,n}}$，$P,Q,R,S$ を正則行列とする。
基本行列の積は正則行列で表されることを用いて
・$E_m A E_n = A$（反射律）
・$PAQ = B$ ならば，$A = P^{-1}BQ^{-1}$（対称律）
・$PAQ = B$，$RBS = C$ ならば，$PAQ = R^{-1}CS^{-1} \Longleftrightarrow (PR)A(QS) = C$　（推移律）
より同値関係である。
また，同値関係ごとに類別した類は正則行列を掛けることにより，ある標準形 $F_{m,n}(r)$ に直すことができる (m,n) 型行列全体である。これを $C(r)$ とおく。よって商集合はこの類全体の集合なので，$C(0)$，$C(1)$，$\cdots$，$C(\min(m,n))$ である。よって元の個数は $1+\min(m,n)$ 個である。

4.2　p106

問 1：

Hint：単なる計算問題なので手順通り求めればよいが，求めるときは p106 の (3) 式が有用である。

求める $E \to F$ の取り替え行列を $P = (p_{ij})$ とし，

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix}3\\-2\\6\end{pmatrix}$$

とする。 p106 の (3) 式から

$$\boldsymbol{f}_i = \sum_{j=1}^{3} p_{ji}\boldsymbol{e}_j = p_{1i}\boldsymbol{e}_1 + p_{2i}\boldsymbol{e}_2 + p_{3i}\boldsymbol{e}_3$$

それぞれ $i = 1, 2, 3$ について連立方程式を作ると

$$\begin{aligned} f_1 &= p_{11}\boldsymbol{e}_1 + p_{21}\boldsymbol{e}_2 + p_{31}\boldsymbol{e}_3 \\ f_2 &= p_{12}\boldsymbol{e}_1 + p_{22}\boldsymbol{e}_2 + p_{32}\boldsymbol{e}_3 \\ f_3 &= p_{13}\boldsymbol{e}_1 + p_{23}\boldsymbol{e}_2 + p_{33}\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

これを解くことにより $p_{11} = \dfrac{9}{2}, p_{21} = -\dfrac{1}{2}, p_{31} = -\dfrac{1}{2}, p_{12} = 5, p_{22} = -2, p_{32} = 3, p_{13} = \dfrac{13}{2}, p_{23} = -\dfrac{3}{2}, p_{33} = -\dfrac{1}{2}$ なので

$$P = \begin{pmatrix} 9/2 & 5 & 13/2 \\ -1/2 & -2 & -3/2 \\ -1/2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

である。また p106 の (3) 式を簡単な計算をすることにより

$$(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)P$$

であるから

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

から求めることもできる。

問 2 ：$\boldsymbol{K}^3$の元 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ で，$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ を充すものの全体は 2 次元の線型空間をつくる。

$$E = \langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \rangle, \quad F = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \rangle$$

はともにその基底である。基底の取り替え $E \to F$ の行列を求めよ。

Hint：問 1 と同様に計算すればよい。本解答では問 1 の最後で紹介した計算方法では計算できないことに注意したい。

p106 の (3) 式から

$$\boldsymbol{f}_i = \sum_{j=1}^{2} p_{ji}\boldsymbol{e}_j = p_{1i}\boldsymbol{e}_1 + p_{2i}\boldsymbol{e}_2$$

よって

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 &= p_{11}\boldsymbol{e}_1 + p_{21}\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{f}_2 &= p_{12}\boldsymbol{e}_1 + p_{22}\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = p_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_{21}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = p_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_{22}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

よって $p_{11} = -1, p_{21} = 1, p_{12} = -1, p_{22} = 2$ であるから基底の取り替え $E \to F$ の行列は

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。

4.3　p107-108

問 1 ：

Hint：部分空間の定義 P107 の (1) 式から部分空間の判定を行う。次元は単に基底の個数を数えればよい。部分空間でないときは単に反例を示せばいい。

……

イ）この $\boldsymbol{x}$ 全体は 部分空間をなす。実際，この条件を満たす空間を W とし，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ とする。

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \quad a\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$$

条件から $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots(x_n+y_n) = (x_1+x_2+\cdots+x_n)+(y_1+y_2+\cdots+y_n) = 0$

$ax_1+ax_2+\cdots+ax_n = a(x_1+x_2+\cdots x_n) = 0$ であるから，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W,\ a\boldsymbol{x} \in W$ である。よって，この空間は部分空間をなす。また次元は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ -(x_1+x_2+\cdots x_{n-1}) \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \cdots + x_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

により，明らかに $n-1$ である。

……

ロ）この $\boldsymbol{x}$ 全体は部分空間をなす。実際，この条件を満たす空間を W とし，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ とする。

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_p+y_p \\ x_{p+1}+y_{p+1} \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \quad a\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_p \\ ax_{p+1} \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$$

条件から $x_{p+1}+y_{p+1} = x_{p+2}+y_{p+2} = \cdots = x_n+y_n = 0$，$ax_{p+1} = ax_{p+2} = \cdots = ax_n = 0$ である。

よって $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W, a\boldsymbol{x} \in W$ であるから，この空間は部分空間をなす。また次元は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

により p である。

……

ハ）この $\boldsymbol{x}$ 全体 は部分空間をなさない。実際

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

条件に当てはめると $1^2+1^2=2\neq 1$ より，加法に関して（また示していないがスカラー倍に関しても）閉じていないので $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\notin W$ である。

……

ニ）この $\boldsymbol{x}$ 全体 は部分空間をなす。実際，この条件を満たす空間を W，$c\in\boldsymbol{K}$ とし，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in W$ とする。
内積の定義から

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{y})=0,\qquad(\boldsymbol{a},c\boldsymbol{x})=c(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})=0$$

よって $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W,c\boldsymbol{x}\in W$ から部分空間をなす。次元を求めるため，$\boldsymbol{a}=(a_i)$ とおく。

- $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$ のとき

  $$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$$

  より $a_n\neq 0$ のとき

  $$x_n=-\frac{a_1}{a_n}x_1-\frac{a_2}{a_n}x_2-\cdots-\frac{a_{n-1}}{a_n}x_{n-1}$$

  となり，このときの部分空間 W の次元は $n-1$ である。（明らかなので，詳細は略）
  また $a_n=0$ のとき

  $$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_{n-1}x_{n-1}=0$$

  と書き直せ，$a_{n-1}\neq 0$ のとき

  $$x_{n-1}=-\frac{a_1}{a_{n-1}}x_1-\frac{a_2}{a_{n-1}}x_2-\cdots-\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}x_{n-2}$$

  となる。このときの部分空間 W の次元は $n-1$ である。よって帰納的に $\boldsymbol{a}$ に 0 でない成分が存在するとき，次元は $n-1$ である。

- $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$ のとき，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ の成分に依らず 0 となる。よって次元は n である。

よって次元は

$$\dim W=\begin{cases}n-1 & (\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o})\\ n & (\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o})\end{cases}$$

となる。

……

問２：

Hint：直感で部分空間とならない集合が分からない場合は，具体例を何個か上げて反例が無いか調べる。大丈夫そうなら実際に証明してみる方向でいいだろう。

……

イ）これは部分空間をなさない。実際，非正則行列全体の集合を W とし，$A, B \in W$ を $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これは正則行列であるから，$A + B \notin W$ である。よって加法に関して閉じていないので部分空間をなさない。

……

ロ）これは部分空間をなす。実際，$AX = XB$ となる X 全体の集合を W とし，$X, Y \in W$ とすると

$$AX = XB$$
$$AY = YB$$

この２式の辺々を足したり，第１式の両辺を a 倍することで

$$A(X+Y) = (X+Y)B$$
$$A(aX) = (aX)B$$

$X + Y,\ aX$ を１つの行列として見れば $X + Y \in W,\ aX \in W$ である。よって部分空間をなす。

……

ハ）これは部分空間をなさない。実際，冪零行列全体の集合を W とし，$A, B \in W$ を $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

これは冪零行列ではないので，$A + B \notin W$ である。よって加法に関して閉じてないので部分空間をなさない。

……

ニ）これは部分空間をなさない。実際，整数を成分とする行列全体を W とし，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in W$ とする。

$$\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \notin W$$

よりスカラー倍に関して閉じていないので部分空間をなさない。

……

4.4　p121

問：

Hint：p127 にある定理をそのまま使って，どの 2 つのベクトルも直交するようなベクトルを作り，大きさを 1 にするように計算する。具体的に解き方は以下の解法を参照。

$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおいて，シュミットの直交化法によって作られる，どの 2 つのベクトルも直交するようなベクトルを $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$，正規直交基底を $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$ とする。

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b_2} = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{c}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{c}_2)\boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって正規直交基底は

$$\left\{ \boldsymbol{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

【参考】正規直交基底を求めるシュミットの直交化法は次のように書き直せる。

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$$

$$\boldsymbol{b_2} = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)} \boldsymbol{b_1}$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)} \boldsymbol{b_1}$$

この式からそれぞれ $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ を求めて，それぞれ大きさ 1 のベクトルにすれば正規直交基底が得られる。

4.5　p124

問：[6.5]

Hint：直交補空間の定義から明らか，としては勿論いけない。直交補空間の定義から，地道に論証していく必要がある。

……………………………………………………………………………………………………

1)$^{\forall}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W}$ に対し，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ となる $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$が存在する。よって $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0$ なので，$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$に対し，$\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{W}^{\perp})^{\perp}$である。

よって $\boldsymbol{x} \in W \Longrightarrow \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{W}^{\perp})^{\perp}$が言えたので，$\boldsymbol{W} \subseteq (\boldsymbol{W}^{\perp})^{\perp}$である。

また定理 [4.7] から

$$\dim \boldsymbol{W} + \dim \boldsymbol{W}^{\perp} = \dim(\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}^{\perp}) + \dim(\boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{W}^{\perp})$$
$$\dim \boldsymbol{W} + \dim \boldsymbol{W}^{\perp} = n$$

定理 6.4 から $\mathbb{R}^n$の計量空間 $\boldsymbol{V}$ は $\boldsymbol{W} \dot{+} \boldsymbol{W}^{\perp}$と表されること，[4.8] から，この直和の共通部分は $\{\boldsymbol{o}\}$ のみであることを用いた。

また，同様に

$$\dim \boldsymbol{W}^{\perp} + \dim(\boldsymbol{W}^{\perp})^{\perp} = n$$

でもあるので

$$\dim \boldsymbol{W} = \dim(\boldsymbol{W}^{\perp})^{\perp}$$

よって $\boldsymbol{W} \subseteq (\boldsymbol{W}^{\perp})^{\perp}$と上の等式から，$\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{W}^{\perp})^{\perp}$ である。

4.6　p127-130

問 1

Hint：最も基本的な問題の 1 つで，共通部分を求めるとき，この場合は $s, t, u, v \in \mathbb{R}$ として，$s\boldsymbol{a}_1 + t\boldsymbol{a}_2 = u\boldsymbol{a}_3 + v\boldsymbol{a}_4$ とおけば，この式を満たす s, t, u, v がどういうものなのかが必然と分かってくる。なお，問題にされていないが和空間の基底を求める場合は，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$から線型独立になるようなベクトルの組を求めればいい。

$s, t, u, v \in \mathbb{R}$ とすると

$$s\boldsymbol{a}_1 + t\boldsymbol{a}_2 = u\boldsymbol{a}_3 + v\boldsymbol{a}_4$$

とおけば，s, t, u, v の関係が導ける。この解空間は

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} = \boldsymbol{o}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} = \boldsymbol{o}$$
$$\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問 2

問３：

問４：

問５：

問６：

問 7 ：

問８：

問９：

問１０：

問１１：

問１２：

問１３：

5　第５章：固有値と固有ベクトル（解答）

6　第６章：単因子およびジョルダンの標準形（解答）

7　第７章：ベクトルおよび行列の解析的取扱い（解答）

8　附録 III 群および体の公理

8.1　p255

問 1：

Proof. H は空集合でないから，ある元 $a \in H$ がとれて，

$$aa^{-1} = e$$

となる．ただし，e は H の単位元とする．ここまでで単位元の存在が示された．

また，$a \in H$，$e \in H$ であれば，仮定より，

$$a^{-1} = ea^{-1} \in H$$

が成立するので，任意の $a \in H$ に対して，逆元 $a^{-1} \in H$ が存在し，$aa^{-1} = e$ が成り立つことが言えた．

このことより，任意の $b \in H$ に対して，$b^{-1} \in H$ であり，任意の a，$b \in H$ に対して，

$$ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$$

となり，H の演算が G と一致していることがわかるので，これで証明された．　□