

Отчёт по лабораторной работе №4

Модель гармонических колебаний

Логинов Е.И.

Содержание

1	Подготовил	5
2	Цель работы	6
3	Теоретическое введение	7
4	Задание	9
4.1	Формулировка задания	9
5	Выполнение лабораторной работы	10
6	Выводы	19
	Список используемой литературы	20

Список иллюстраций

5.1	Случай 1: Решение уравнения гармонического осциллятора . . .	11
5.2	Случай 1: Фазовый портрет первого уравнения	11
5.3	Случай 2: Решение уравнения гармонического осциллятора первого уравнения	12
5.4	Случай 2: Фазовый портрет первого уравнения	12
5.5	Случай 3: Решение уравнения гармонического осциллятора первого уравнения	13
5.6	Случай 3: Фазовый портрет первого уравнения	14
5.7	Случай 1: Графики Julia для первого уравнения	15
5.8	Случай 2: Графики Julia для второго уравнения	17
5.9	Случай 3: Графики Julia для третьего уравнения	18

Список таблиц

1 Подготовил

- Логинов Егор Игоревич
- Группа НФИбд-01-20
- Студ. билет 1032201661

2 Цель работы

Изучить уравнение гармонического осциллятора, построить фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора.

3 Теоретическое введение

Движение груза на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором. [1]

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

где x - переменная, описывающая состояние системы (смещение груза, заряд конденсатора и т.д.), γ - параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 - собственная частота колебаний. Это уравнение есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы.

При отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка необходимо задать два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

Начальные условия для системы примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью. Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом.

4 Задание

4.1 Формулировка задания

Вариант №2

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора [2] и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 3x = 0$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + \dot{x} + 4x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \sin 2t$

На интервале $t \in [0; 40]$, шаг 0.05, $x_0 = 1, y_0 = 1$

5 Выполнение лабораторной работы

1. Я начал выполнять данную работу с OpenModelica. [3] Для первого случая, а именно без затуханий и без действий внешней силы, я написал следующий код:

```
model lab4v1
parameter Real x0 = 1;
parameter Real y0 = 1;
parameter Real omega_sq = 3;
Real x(start=x0);
Real y(start=y0);
equation
der(x) = y;
der(y) = -omega_sq * x;
end lab4v1;
```

Я получил следующий график решения уравнения гармонического осциллятора (рис. 5.1), и следующий фазовый портрет (рис. 5.2).

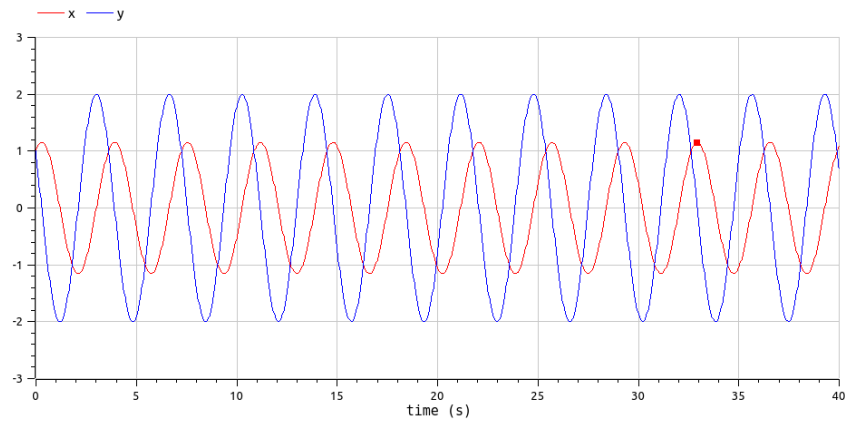


Рис. 5.1: Случай 1: Решение уравнения гармонического осциллятора

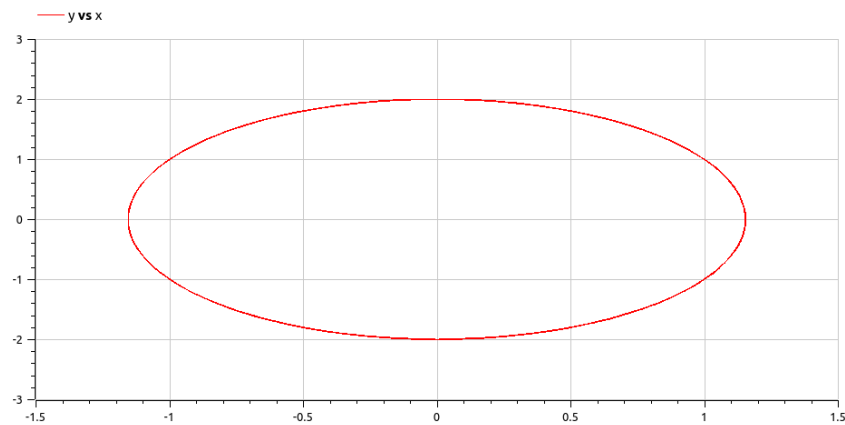


Рис. 5.2: Случай 1: Фазовый портрет первого уравнения

Для второго случая, а именно колебаний с затуханием и без воздействия внешней силы, я написал следующий код:

```
model lab4v2
parameter Real x0 = 1;
parameter Real y0 = 1;
parameter Real omega_sq = 4;
parameter Real thetta = 1;
Real x(start=x0);
Real y(start=y0);
```

```

equation
der(x) = y;
der(y) = -thetta*y - omega_sq * x;
end lab4v2;

```

В результате получил так же решение уравнения гармонического осциллятора (рис. 5.3), и фазовый портрет (рис. 5.4).

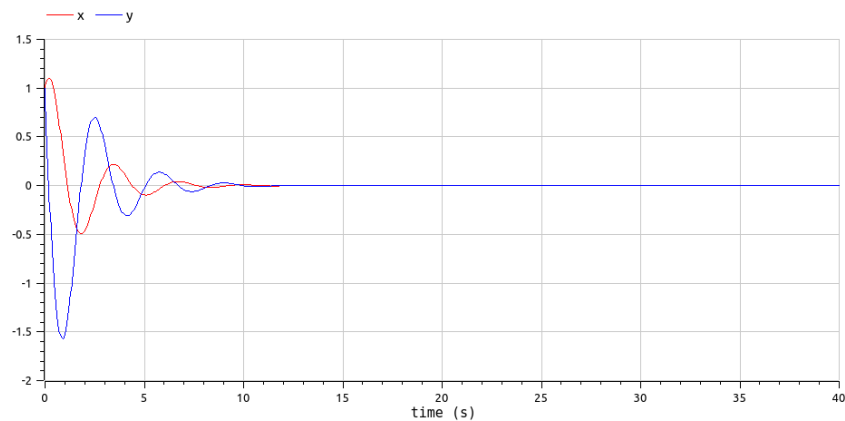


Рис. 5.3: Случай 2: Решение уравнения гармонического осциллятора первого уравнения

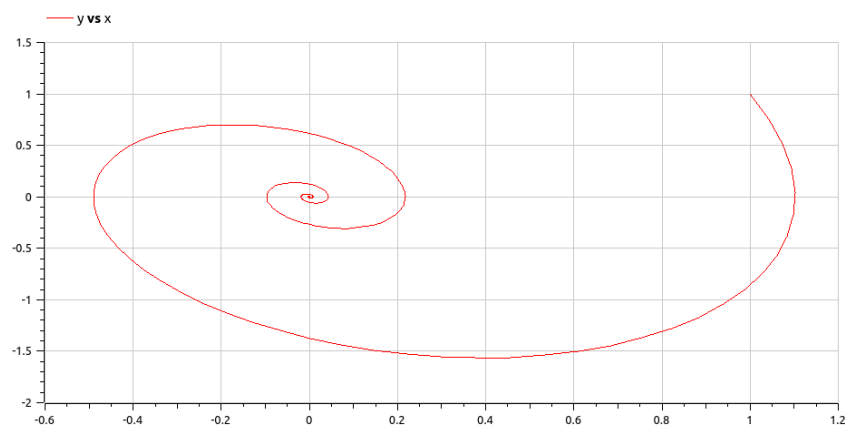


Рис. 5.4: Случай2: Фазовый портрет первого уравнения

Для третьего уравнения, а именно с затуханием и под действием внешней силы, я написал следующий код:

```

model lab4v3
parameter Real x0 = 1;
parameter Real y0 = 1;
parameter Real omega_sq = 1;
parameter Real theta = 2;
Real x(start=x0);
Real y(start=y0);
equation
der(x) = y;
der(y) = -theta*y - omega_sq * x + sin(2*time);
end lab4v3;

```

В результате получили сначала решение уравнения гармонического осциллятора (рис. 5.5), и так же фазовый портрет (рис. 5.6).

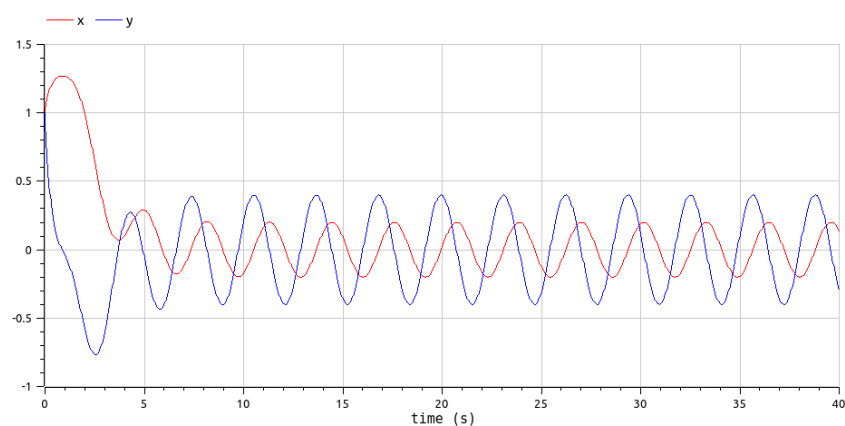


Рис. 5.5: Случай 3: Решение уравнения гармонического осциллятора первого уравнения

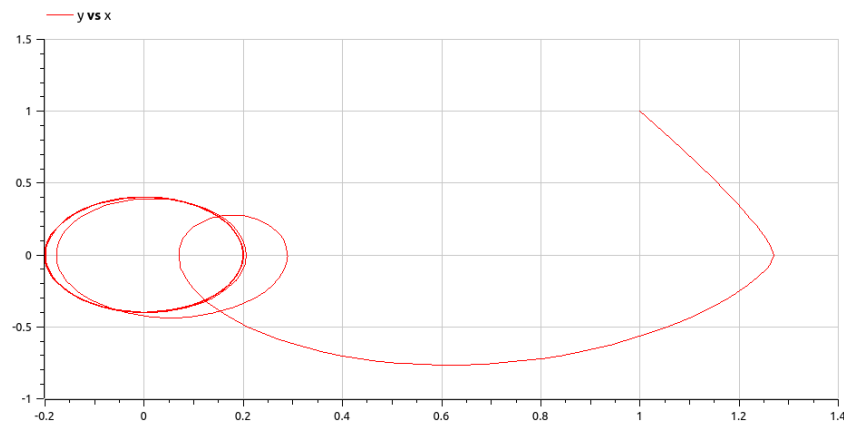


Рис. 5.6: Случай 3: Фазовый портрет первого уравнения

2. Далее я написал код на языке Julia [4]. Код программы для первого уравнения выглядит следующим образом:

```
# вариант 2
using Plots
using DifferentialEquations

T = (0.0, 40.0)
u0 = [1.0, 1.0]
omega_sq = 3

function F(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -omega_sq * u[1]
end

prob = ODEProblem(F, u0, T)
sol = solve(prob, saveat=0.05, abstol = 1e-8, reltol = 1e-8)

const X = []
```

```

const Y = []
Time = sol.t

for u in sol.u
    x, y = u
    push!(X, x)
    push!(Y, y)
end

plt = plot(dpi = 150, layout = (1,2), size=(1000, 500), plot_title = "Модель гармонических колебаний")
plot!(plt[1], Time, [X, Y], color = [:brown :green], xlabel = "time", label = ["x(t)", "y(t)"])
plot!(plt[2], X, Y, color = [:red], xlabel = "x(t)", ylabel="y(t)")

savefig(plt, "lab4_1_jl.png")

```

В результате работы программы создались следующие графики (рис. 5.7):

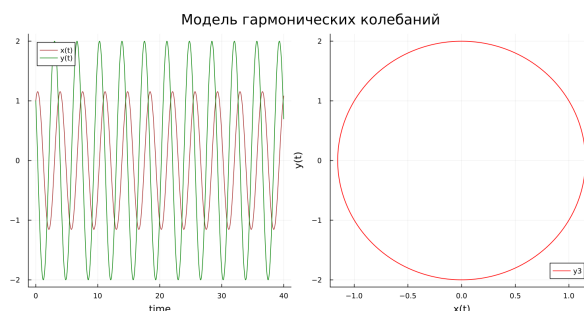


Рис. 5.7: Случай 1: Графики Julia для первого уравнения

Код программы для второго уравнения выглядит следующим образом:

```

# вариант 2
using Plots
using DifferentialEquations

```

```

T = (0.0, 40.0)
u0 = [1.0, 1.0]
thetta = 1
omega_sq = 4

function F(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -thetta*u[2] - omega_sq * u[1]
end

prob = ODEProblem(F, u0, T)
sol = solve(prob, saveat=0.05, abstol = 1e-8, reltol = 1e-8)

const X = []
const Y = []
Time = sol.t

for u in sol.u
    x, y = u
    push!(X, x)
    push!(Y, y)
end

plt = plot(dpi = 150, layout =(1,2), size=(1000, 500), plot_title = "Модель гармо
plot!(plt[1], Time, [X, Y], color = [:brown :green], xlabel = "time", label = ["x
plot!(plt[2], X, Y, color = [:red], xlabel = "x(t)", ylabel="y(t)")

savefig(plt, "lab4_2_jl.png")

```

В результате работы программы создались следующие графики (рис. 5.8):

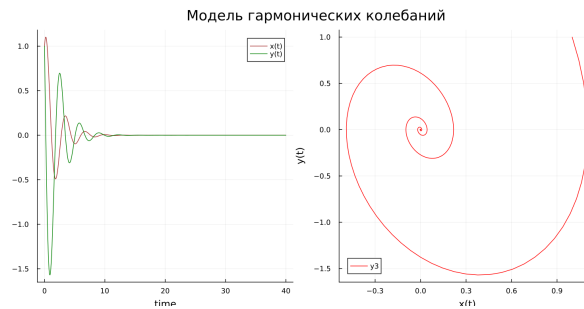


Рис. 5.8: Случай 2: Графики Julia для второго уравнения

Код программы для третьего уравнения выглядит следующим образом:

```
# вариант 2
using Plots
using DifferentialEquations

T = (0.0, 40.0)
u0 = [1.0, 1.0]
thetta = 2
omega_sq = 1
Q(t) = sin(2*t)

function F(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -thetta*u[2] - omega_sq * u[1] + Q(t)
end

prob = ODEProblem(F, u0, T)
sol = solve(prob, saveat=0.05, abstol = 1e-8, reltol = 1e-8)

const X = []
const Y = []
```

```
Time = sol.t
```

```
for u in sol.u
```

```
    x, y = u
```

```
    push!(X, x)
```

```
    push!(Y, y)
```

```
end
```

```
plt = plot(dpi = 150, layout = (1,2), size=(1000, 500), plot_title = "Модель гармонических колебаний")
```

```
plot!(plt[1], Time, [X, Y], color = [:brown :green], xlabel = "time", label = ["x(t)", "y(t)"])
```

```
plot!(plt[2], X, Y, color = [:red], xlabel = "x(t)", ylabel="y(t)")
```

```
savefig(plt, "lab4_3_jl.png")
```

В результате работы программы создались следующие графики (рис. 5.9):

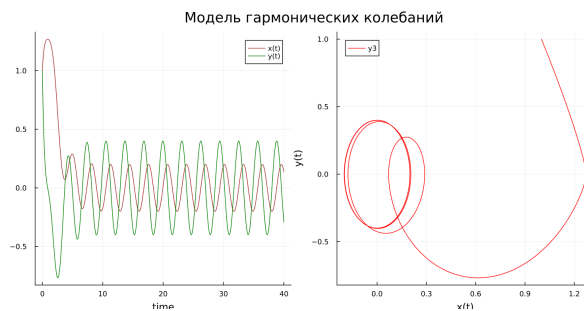


Рис. 5.9: Случай 3: Графики Julia для третьего уравнения

6 Выводы

Мы рассмотрели модель гармонических колебаний, провели анализ и вывод дифференциальных уравнений, а так же построили графики зависимости наших переменных от времени и фазовые графики зависимостей.

Список используемой литературы

1. Теоритический материал "Модель гармонических колебаний" [Электронный ресурс]. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971729/mod_resource/content/2/%D0%9B%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B0%20%E2%84%96%203.pdf.
2. Линейный гармонический оксциллятор [Электронный ресурс]. URL: <https://studfile.net/preview/16471372/page:3/>.
3. Решение ОДУ на OpenModelica [Электронный ресурс]. URL: <https://habr.com/ru/post/202596/>.
4. Решение ОДУ на Julia [Электронный ресурс]. URL: https://events.rudn.ru/event/107/papers/487/files/999-ittmm-template-ru_short_fin.pdf.