

# **Лабораторная работа №5**

**Модель хищник-жертва**

Логинов Е.И.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Задачи</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Среда</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Теоретическое введение</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Выполнение лабораторной работы</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Анализ результатов</b>	<b>15</b>
<b>7</b>	<b>Выводы</b>	<b>16</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>17</b>

## Список иллюстраций

5.1	Julia. Графики модели “Хищник-жертва” при $x_0 = 7, y_0 = 12$ . .	11
5.2	Julia. Графики модели “Хищник-жертва” (стационарное состояние)	11
5.3	Modelica. Графики функций изменения численности хищников и изменения численности жертв при $x_0 = 7, y_0 = 12$ . . . . .	12
5.4	Modelica. График зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв при $x_0 = 7, y_0 = 12$ . . . . .	13
5.5	Modelica. Графики функций изменения численности хищников и изменения численности жертв (стационарное состояние) . . . . .	14
5.6	Modelica. График зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв (стационарное состояние) . . .	14

# 1 Цель работы

Рассмотреть модель хищник-жертва. Построить вышеуказанную модель средствами OpenModelica и Julia.

## 2 Задачи

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.13x(t) + 0.042x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.33y(t) - 0.03x(t)y(t) \end{cases}$$

1. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях:  $x_0 = 7, y_0 = 12$ .
2. Найти стационарное состояние системы.

## 3 Среда

- Julia — высокоуровневый высокопроизводительный свободный язык программирования с динамической типизацией, созданный для математических вычислений. [1]
- OpenModelica — свободное открытое программное обеспечение для моделирования, симуляции, оптимизации и анализа сложных динамических систем. [2]

## 4 Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двухвидовая модель основывается на следующих предположениях [3]:

1. Численность популяции жертв  $x$  и хищников  $y$  зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории);
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает;
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными;
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается;
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников;

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

В этой модели  $x$  – число жертв,  $y$  - число хищников. Коэффициент  $a$  описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников ( $xy$ ). Каждый акт взаимодействия уменьшает

популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены  $-bxy$  и  $dxu$  в правой части уравнения).

Стационарное состояние данной системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке:

$$x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$$

Если начальные значения задать в стационарном состоянии

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0$$

то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей  $x(0)$ ,  $y(0)$ . Колебания совершаются в противофазе.



## 5 Выполнение лабораторной работы

1. Напишем программу на Julia. Подключим пакеты “Plots” и “DifferentialEquations”, объявим начальные данные. Далее объявим начальное условие для системы дифференциальных уравнений и промежуток времени, на котором будет проходить моделирование. После этого объявим функцию, представляющую систему. Построим график зависимости  $x$  от  $y$  и графики функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ . При помощи ‘DifferentialEquations’ зададим и решим систему ДУ, после чего построим графики функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ . Так же создадим два списка, в которых будут храниться точки уравнений. Воспользуемся данным списком, чтобы построить график зависимости  $x$  от  $y$ .

```
using Plots
```

```
using DifferentialEquations
```

```
a = 0.13
```

```
b = 0.042
```

```
c = 0.33
```

```
d = 0.03
```

```
u0 = [7, 12]
```

```
T = (0, 50)
```

```
function F!(du, u, p, t)
```

```
    du[1] = -a*u[1] + b*u[1]*u[2]
```

```

        du[2] = c*u[2] - d*u[1]*u[2]
end

prob = ODEProblem(F!, u0, T)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)

X = []
Y = []
Time = sol.t

for u in sol.u
    x, y = u
    push!(X, x)
    push!(Y, y)
end

plt = plot(layout=(1,2), dpi = 200, size(800,400))
plot!(plt[1], Time, [X, Y], color=:red :blue, xlabel = "time", label = ["x(t)" "y(t)"])
plot!(plt[2], X, Y, color=:red, xlabel="x", ylabel="y")

savefig(plt, "lab5v1jl.png")

```

2. В качестве результата получили график колебания изменения численности хищников и жертв, график зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв. (рис. 5.1)

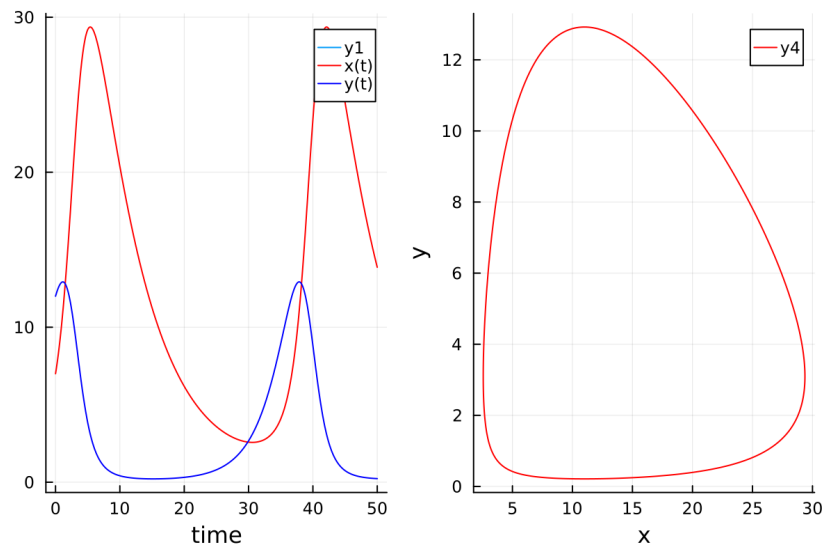


Рис. 5.1: Julia. Графики модели “Хищник-жертва” при  $x_0 = 7, y_0 = 12$

3. Изменим начальные значения, при которых будет достигаться положение равновесия (не зависящее от времени решение). В качестве результата получим новые графики. (рис. 5.2)

$$u_0 = [c/d, a/b]$$

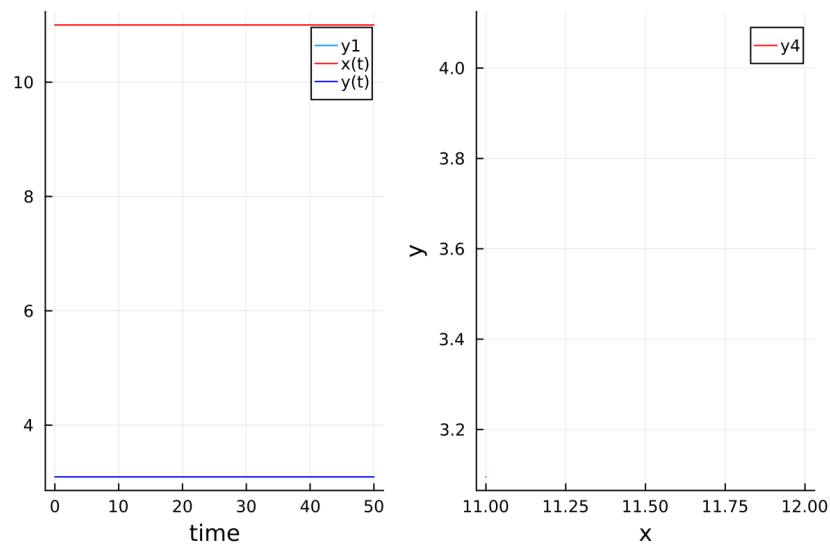


Рис. 5.2: Julia. Графики модели “Хищник-жертва” (стационарное состояние)

6. Построим график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при начальных условиях  $x_0 = 7, y_0 = 12$  на Modelica. (рис. 5.3, 5.4)

```
model lab5v1
parameter Real a = 0.13;
parameter Real b = 0.042;
parameter Real c = 0.33;
parameter Real d = 0.03;
Real x(start=7);
Real y(start=12);
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
end lab5v1;
```

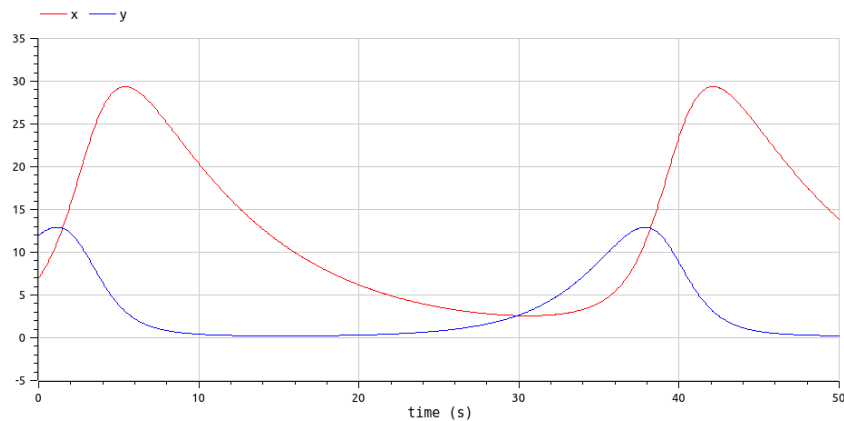


Рис. 5.3: Modelica. Графики функций изменения численности хищников и изменения численности жертв при  $x_0 = 7, y_0 = 12$

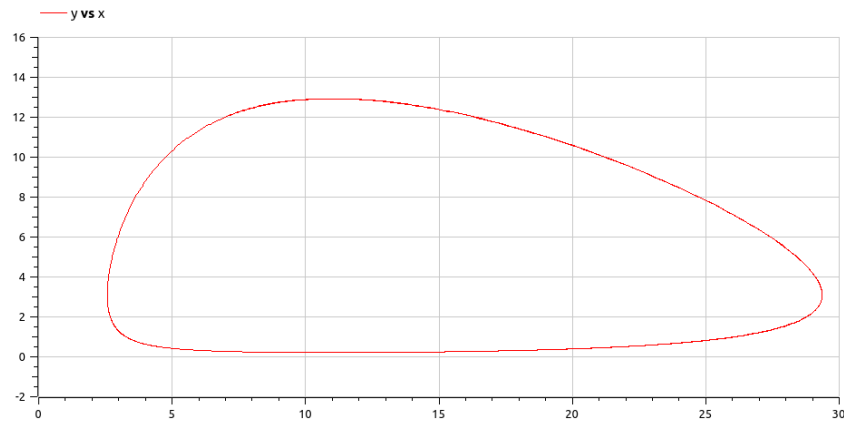


Рис. 5.4: Modelica. График зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв при  $x_0 = 7, y_0 = 12$

7. Построим график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв в стационарном состоянии на Modelica. (рис. 5.5, 5.6)

```
model lab5v1
parameter Real a = 0.13;
parameter Real b = 0.042;
parameter Real c = 0.33;
parameter Real d = 0.03;
Real x(start=c/d);
Real y(start=a/b);
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
end lab5v1;
```

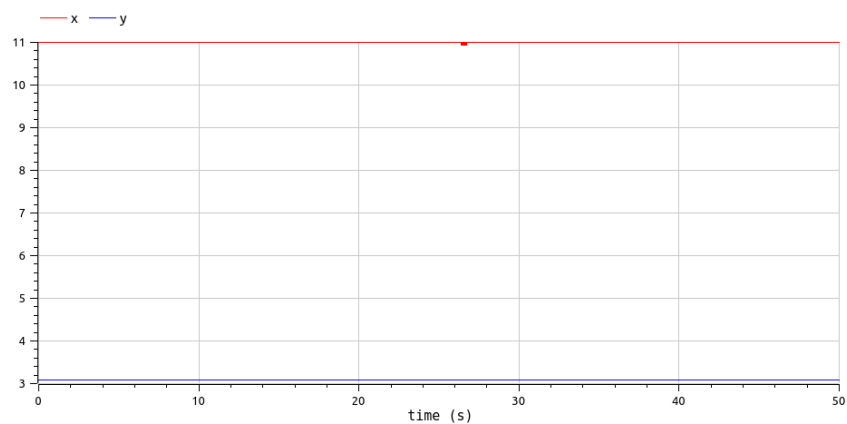


Рис. 5.5: Modelica. Графики функций изменения численности хищников и изменения численности жертв (стационарное состояние)

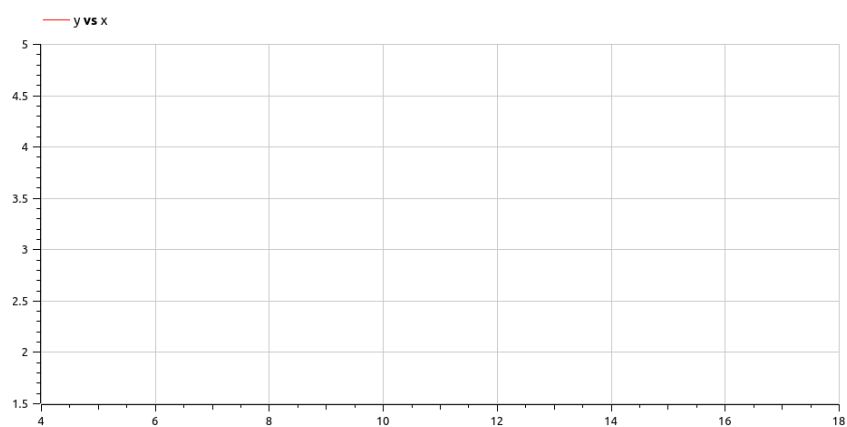


Рис. 5.6: Modelica. График зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв (стационарное состояние)

## 6 Анализ результатов

Моделирование на OMEdit оказалось в разы проще и быстрее, чем при использовании средств Julia. Скрипт на Modelica вышел более понятным и коротким. Более того OpenModelica быстрее обрабатывала скрипт и симмулировала модель. Стоит отметить, что OpenModelica имеет множество различных полезных инструментов для настройки с симмуляцией и работой с ней. К плюсам Julia можно отнести, что она является языком программирования, который хорошо подходит для математических и технических задач.

## 7 Выводы

Мы улучшили практические навыки в области дифференциальных уравнений, улучшили навыки моделирования на Julia, также навыки моделирования на OpenModelica. Изучили модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», а именно модель Лотки-Вольтерры.



## Список литературы

1. Julia (язык программирования) [Электронный ресурс]. URL: <https://www.wiki6Ri4.com/>.
2. OpenModelica [Электронный ресурс]. URL: <https://openmodelica.org/>.
3. Модель хищник-жертва [Электронный ресурс]. URL: <https://esystem.rudn.ru/mod/resource/view.php?id=967245>.