导航大作业

May 7, 2020

1 模型建立

1.1 坐标系定义

地理坐标系：本次大作业用北天东作为地理坐标系的轴向。x 轴沿当地子午线指北，与当地水平面平行；y 轴垂直水平面指向天；z 轴指向东，与 x、y 轴构成右手正交坐标系。

导航坐标系：导航坐标系是惯导系统求解导航参数时所采用的坐标系。下面采用的导航坐标系和地理坐标系相同，即北天东地理坐标系作为导航坐标系。

弹体坐标系：坐标系原点位于导弹质心上，x_b 轴沿弹体纵轴指向头部，y_b 轴垂直弹体纵轴向上，并在纵向对称平面内，z_b 轴垂直于 x_b、y_b 轴构成右手正交坐标系。定义 x_b、y_b 、z_b 为导弹本体的滚转、偏航和俯仰轴。导弹的姿态角 γ、ψ、ϑ , 即倾斜角、偏航角、俯仰角是弹体坐标系相对于导航坐标系的方位。当弹体坐标系与导航坐标系（或地理坐标系）重合时，导弹的姿态定义为零。

1.2 坐标系的旋转变化关系

1.2.1 地球坐标系到导航坐标系（地理坐标系）的变换矩阵

以经度 λ、纬度 L 表示导弹瞬时的地理位置实际上就是导航坐标系（n 系）相对于（e 系）的方位。地球坐标系先绕 Z_e 轴转动 $(180+\lambda)$ 角，得到 $x^{'}y^{'}z^{'}$, 再绕 $y^{'}$ 轴转动 (-90-L) 角，得到 $x^{''}y^{''}z^{''}$，再绕 $x^{''}$ 轴转动 90°，即得到地理坐标系。用 C_e^n 表示从地球坐标系到导航坐标系的转换矩阵，则有：

$$C_e^n = \begin{pmatrix} -sinLcos\lambda & -sinLsin\lambda & cosL \\ cosLcos\lambda & cosLsin\lambda & sin\lambda \\ -sin\lambda & cos\lambda & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1.2.2 导航坐标系（地理坐标系）到弹体坐标系的变换矩阵

导弹的姿态是弹体坐标系相对于导航坐标系（地理坐标系）的方位。根据欧拉定理，导航坐标系到弹体坐标系的转换矩阵是三次欧拉转动坐标转换矩阵的乘积。显然，转换矩阵和三次转动的顺序有关，这里的转动顺序为 $yzx(2-3-1)$，各次转角为 ψ、ϑ、γ, 分别对应导弹的偏航角、俯仰角和滚转角。如图所示，导航坐标系绕 y_n 轴转 ψ 角，得到过渡坐标系 $x^{'}y_nz^{'}$；再绕 $z^{'}$

轴转 ϑ 角，得到 $x^{''}y^{'}z^{'}$；最后绕 $x_{''}$ 轴转 γ 角，得到坐标系 $x_by_bz_b$。用 C_n^b 表示导航坐标系到弹体坐标系的转换矩阵，则有：

$$C_n^b = \begin{pmatrix} cos\psi cos\vartheta & sin\vartheta & -sin\psi cos\theta \\ sin\gamma sin\psi - cos\gamma sin\vartheta cos\psi & cos\gamma cos\vartheta & cos\gamma sin\psi cos\vartheta + sin\gamma cos\psi \\ sin\gamma cos\psi sin\vartheta + cos\gamma sin\psi & -sin\gamma cos\vartheta & cos\gamma cos\psi - sin\gamma sin\psi sin\vartheta \end{pmatrix} \tag{2}$$

其中，用 C_b^n 从弹体坐标系到导航坐标系的转换矩阵，则有：

$$C_b^n = {C_n^b}^T$$

2 导航计算中用到的数学公式

2.1 加速度的坐标变换

加速度计通常提供相对于本体坐标系比力的测量 f^b, 选取导航系作为参考坐标系，加速度经 C_b^n 阵可转换为 f^n, 其转换关系为:

$$f^n = C_b^n * fb$$

2.2 速度计算

由比力方程可得在地理坐标系（北天东导航坐标系）中的速度微分方程为：

$$\dot{v}_e^n = f^n - [2w_{ie}^n + w_{en}^n] \times v_e^n + g^n$$

写成矩阵形式，得：

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x^n \\ \dot{v}_y^n \\ \dot{v}_z^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2w_{iez}^n + w_{enz}^n & -(2w_{iey}^n + w_{eny}^n) \\ -(2w_{iez}^n + w_{enz}^n) & 0 & 2w_{iex}^n + w_{enx}^n \\ 2w_{iey}^n + w_{eny}^n & -(2w_{iex}^n + w_{enx}^n) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x^n \\ v_y^n \\ v_z^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

2.3 经纬高的计算

经度、纬度和高度的变化率为：

$$\dot{\lambda} = \frac{v_x}{(R_N + h)cosL} \tag{4}$$

$$\dot{L} = \frac{v_x}{R_M + h} \tag{5}$$

对上式进行积分运算得到

$$\lambda = \int_0^t \frac{v_x}{(R_N + h)cosL} + \lambda_0 \tag{6}$$

$$L = \int_0^t \frac{v_x}{R_M + h} + L_0 \tag{7}$$

2.4 位置角速度的计算

地理坐标系在惯性空间既跟踪地球的自转，也跟踪载体运动所形成的绕地心的转动，即相对于惯性空间转动的角速度为：

$$w_{in}^n = w_{ie}^n + w_{en}^n$$

其中 w_{en}^n 和地速的关系为:

$$w_{en}^n = \begin{bmatrix} \frac{v_z^n}{R_N+h} \\ \frac{v_z^n}{R_N+h} tgL \\ -\frac{v_x^n}{R_M+h} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$w_{ie}^n = \begin{bmatrix} w_{ie} cosL \\ w_{ie} sinL \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

式中

$$R_M = R_e(1 - 2f = 3fsin^2L)$$

$$R_N = R_e(1 + fsin^2L)$$

$$w_{ie} = 0.7292115 \times 10^{-4} rad/s$$

R_M 为参考椭球（地球）子午圈上各点的曲率半径，R_N 为的曲率半径。在 $WGS-84$ 坐标系中：$R_e = 6378137m$, 扁率 $\frac{1}{f} = 298.257223536$。

2.5 姿态角速度 w_{nb}^b 的计算

陀螺仪测得的是相对于惯性空间的沿弹体坐标系各轴向的角速度 w_{ib}^b, 按导航计算求出 w_{in}^n 后，即可求得 w_{nb}^b。由角速度合成定理有 $w_{ib}^b = w_{in}^b + w_{nb}^b$, 于是：

$$w_{nb}^b = w_{ib}^b - C_n^b w_{in}^n = w_{ib}^b - C_n^b(w_{ie}^n + w_{en}^n)$$

2.6 四元数姿态解算

2.6.1 四元数初值

$$q_0 = cos(\frac{\psi}{2})cos(\frac{\vartheta}{2})cos(\frac{\gamma}{2}) - sin(\frac{\psi}{2})sin(\frac{\vartheta}{2})sin(\frac{\gamma}{2})$$

$$q_1 = -sin(\frac{\psi}{2})sin(\frac{\vartheta}{2})cos(\frac{\gamma}{2}) - cos(\frac{\psi}{2})cos(\frac{\vartheta}{2})sin(\frac{\gamma}{2})$$

$$q_2 = -sin(\frac{\psi}{2})cos(\frac{\vartheta}{2})cos(\frac{\gamma}{2}) - cos(\frac{\psi}{2})sin(\frac{\vartheta}{2})sin(\frac{\gamma}{2})$$

$$q_3 = -cos(\frac{\psi}{2})sin(\frac{\vartheta}{2})cos(\frac{\gamma}{2}) + sin(\frac{\psi}{2})cos(\frac{\vartheta}{2})sin(\frac{\gamma}{2})$$

2.6.2 四元数表示的姿态矩阵

$$C_b^n = \begin{pmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^3 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^3 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

对比前面方向余弦矩阵可得到欧拉角的计算公式如下：

$$tan\psi = \frac{-2(q_1q_3-q_0q_2)}{1-2(q_2^2+q_3^2)}$$

$$sin\vartheta = 2(q_1q_2+q_0q_3)$$

$$tan\gamma = \frac{-2(q_2q_3-q_0q_1)}{1-2(q_1^2+q_3^2)}$$

2.6.3 四元数表示的运动学方程

四元数形式的姿态运动学微分方程为：

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{2}f[w_b(t)q(t)]$$

把上式用矩阵形式表示，有：

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -w_{nbx}^b & -w_{nby}^b & -w_{nbz}^b \\ w_{nbx}^b & 0 & w_{nbz}^b & -w_{nby}^b \\ w_{nby}^b & -w_{nbz}^b & 0 & w_{nbx}^b \\ w_{nbz}^b & w_{nby}^b & -w_{nbx}^b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

式中 w_{nbx}^b、w_{nby}^b、w_{nbz}^b 分别为弹体坐标系相对于导航坐标系的角速度沿弹体坐标系三个轴的分量。可见，只要给出四元数的初值，则可以独立递推出 $\dot{q}$, 积分后得到 q，再由此计算出欧拉角。由于计算机数值计算误差的存在，会导致四元数逐渐发散，不能满足归一化的要求，因此需要对运动学方程进行修正为：

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -w_{nbx}^b & -w_{nby}^b & -w_{nbz}^b \\ w_{nbx}^b & 0 & w_{nbz}^b & -w_{nby}^b \\ w_{nby}^b & -w_{nbz}^b & 0 & w_{nbx}^b \\ w_{nbz}^b & w_{nby}^b & -w_{nbx}^b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + k\lambda\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

其中：

$$\lambda = 1-(q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2)$$

参数 k 应根据仿真步长选择，一般应使得：$k\Delta t \leq 1$，Δt 为积分步长。