北京大学 2018 年研究生算法课书面作业

发布时间：2018 年 12 月 24 日
截止时间：2019 年 1 月 11 日

注意事项：

- 作业应独立完成，严禁抄袭。作业必须使用统一规定的模板。
- 在截止日期那天，直接把纸质版的作业交给任课老师。

NP 与计算的难解性

1. **题目来源：**《算法设计》第八章第 7 题

   题目描述：

   因为**三维匹配**问题是 NP 完全的，自然地想到对应的**四维匹配**问题至少一样的难。定义**四维匹配**如下：给定大小为n的 4 个集合 W，X，Y 和 Z，以及形如(w_i, x_j, y_k, z_t)的有序 4 元组的集合 C，问 C 中存在n个 4 元组使得任意两个都没有共同的元素吗？

   证明**四维匹配**是 NP 完全的。

2. **题目来源：**《算法设计》第八章第 20 题

   题目描述：

   有多种不同的方法形式定义直观的**聚类**问题，问题的目标是把一组对象划分成彼此“相似”的类。

   首先，使用对象$p_1, p_2, \ldots, p_n$的集合以及定义在每一对对象上的距离$d(p_i, p_j)$ 自然地表示一个聚类问题。自然地有$d(p_i, p_i) = 0$; 对不同的p_i和p_j，$d(p_i, p_j) > 0$; 以及距离是对称的：即$d(p_i, p_j) = d(p_j, p_i)$ 。

   本书早些时候在 4.7 节，考虑了聚类问题的一个合理的形式：把所有对象划分成k个集合，使得不同集合中的任意两个对象之间的最小距离最大。应用**最小生成树**问题的解法可以解这个问题。

   一个不同但相似的形式定义如下：把所有对象划分成k个集合，使得同一个集合中的任意两个对象之间的**最大距离最小**。注意这里的变化，上一段的规定要求任意两个类都不“靠近”，这个新规定要求没有一个类太“宽”，即没有一个类包含两个距离很远的点。

   给出这种相似性后，下述事实大概是令人吃惊的，要最优地解决这个新规定的聚类问题是难解的。为了能用 NP 完全性来考虑这个问题，我们先把它写成一个 yes/no 的判定问题。给定n个对象$p_1, p_2, \ldots, p_n$及其上面的距离和界限 B, 定义**小直径聚类**问题如下：所有对象能够被划分成k个集合，使得同一个集合中任意两点之间的距离都不超过 B?

   证明小直径聚类问题是 NP 完全的。

3. **题目来源：**《算法设计》第八章第 21 题

题目描述：

在沉迷于流行的企业家自助书籍《Mine Your Own Business》多日之后，你又回到了现实世界，你需要升级你的办公计算系统。但是这次产生了几个棘手的问题。

在配置你的新系统时，有k个部分必须选择：操作系统、文本编辑软件、电子邮件程序等，每一个都是单独的部分。系统的第j个部分有一个选项集合A_j，系统的一个配置由每一个选项集合$A_1, A_2, \dots, A_k$中的一个元素构成。

现在麻烦出在某些不同集合中的两个选项可能是不相容的。如果一个系统不能同时包含选项$x_i \in A_i$和$x_j \in A_j$则称x_i和x_j是**一对不相容的选项**（例如，Linux(作为操作系统的选项）与 Microsoft Word(作为文本编辑软件的选项）是一对不相容的选项)。设系统的配置由元素$x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_k \in A_k$构成，如果没有一对$(x_i, x_j)$是不相容的，则称这个配置是完全相容的。

我们定义**完全相容的配置（FCC)** 问题如下： FCC 的实例由不相交的选项集合$A_1, A_2, \dots, A_k$和不相容的选项对(x, y)的集合 P 构成，其中x和y是不同的选项集合中的元素。问题是确定是否存在完全相容的配置：从每一个选项集合中选择一个元素使得任意一对选中的元素都不属于集合 P。

例 假设$k = 3$，A_1, A_2, A_3分别表示操作系统，文本编辑软件和电子邮件程序的选项集合。我们有

$$\mathrm{A_1} = \{\mathrm{Linux}, \mathrm{Windows\ NT}\},$$
$$\mathrm{A_2} = \{\mathrm{emacs}, \mathrm{Word}\},$$
$$\mathrm{A_3} = \{\mathrm{Outlook}，\mathrm{Eudora}，\mathrm{rmail}\},$$

而不相容的选项对集合为

$$\mathrm{P} = \{(\mathrm{Linux}, \mathrm{Word}), (\mathrm{Linux}, \mathrm{Outlook}), (\mathrm{Word}, \mathrm{rmail})\}$$

那么，关于这个 FCC 实例的判定问题的答案是 yes，例如，按照上述定义选择$\mathrm{linux} \in \mathrm{A_1}, \mathrm{emacs} \in \mathrm{A_2}, \mathrm{rmail} \in \mathrm{A_3}$是一个完全相容的配置。

证明**完全相容的配置**是 NP 完全的。

4. **题目来源：**《算法设计》第八章第 33 题

题目描述：

在某款游戏中，设有n个玩家$p_1, p_2, \dots, p_n$和m件游戏装备$a_1, a_2, \dots, a_m$。每个玩家p_i对游戏装备a_j都有一个心中的估价$v_i(a_j)$，估价值为正整数。现在m件游戏装备分别属于n个玩家。

本着利人利己的原则，玩家间可以交换游戏装备，当且仅当存在两个玩家p_i和p_j，存在两个物品子集A_i和A_j，A_i被p_i拥有，A_j被p_j拥有，满足

$$v_i(A_j) > v_i(A_i) \text{ 并且} v_j(A_i) > v_j(A_j)$$

此时，p_i可以拿A_i和p_j交换A_j（注意A_i和A_j不必是p_i和p_j所拥有的全部装备）。显然在交换后，两个玩家都觉得自己所拥有装备的总价值更大了。

现需判断：在当前游戏状态下，是否存在两个玩家，他们之间可以交换游戏装备？

证明该问题是 NP 完全的。

5. **题目来源：**《算法设计》第八章第 37 题

题目描述：

给定一个有向图 G=(V，E)和图中一个指定的起点s和一个终点t。对于图中的每条边e，定义两个权重函数$w_1(e)$和$w_2(e)$为这条边在两个标准下的权重，定义图中路径的长度为该路径上所有边的权重之和。注意：图中的每条路径在这两个标准下有两个长度值。

双重标准的最短路径问题如下：对于这两个权重函数分别给定一个路径长度的上限 L1 和 L2，问图 G 中是否可以找到一条从s通向t的路径使得其长度在这两个权重函数下不会超过各自的上限？

证明该问题是 NP 完全的。