北京大学信息科学技术学院考试试卷

考试科目：算法分析和复杂性理论　　**考试时间：**2015 年 1 月 12 日

姓名：______________**学号：**________________

任课教师：肖臻

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	**总分**
分数											
阅卷人											

装订线内不要答题

北京大学考场纪律

1、考生进入考场后，按照监考老师安排隔位就座，将学生证放在桌面上。无学生证者不能参加考试；迟到超过 15 分钟不得入场。在考试开始 30 分钟后方可交卷出场。

2、除必要的文具和主考教师允许的工具书、参考书、计算器以外，其它所有物品（包括空白纸张、手机、或有存储、编程、查询功能的电子用品等）不得带入座位，已经带入考场的必须放在监考人员指定的位置。

3、考试使用的试题、答卷、草稿纸由监考人员统一发放，考试结束时收回，一律不准带出考场。若有试题印制问题请向监考教师提出，不得向其他考生询问。提前答完试卷，应举手示意请监考人员收卷后方可离开；交卷后不得在考场内逗留或在附近高声交谈。未交卷擅自离开考场，不得重新进入考场答卷。考试结束时间到，考生立即停止答卷，在座位上等待监考人员收卷清点后，方可离场。

4、考生要严格遵守考场规则，在规定时间内独立完成答卷。不准交头接耳，不准偷看、夹带、抄袭或者有意让他人抄袭答题内容，不准接传答案或者试卷等。凡有违纪作弊者，一经发现，当场取消其考试资格，并根据《北京大学本科考试工作与学术规范条例》及相关规定严肃处理。

5、考生须确认自己填写的个人信息真实、准确，并承担信息填写错误带来的一切责任与后果。

学校倡议所有考生以北京大学学生的荣誉与诚信答卷，共同维护北京大学的学术声誉。

得分

一、判断题（正确打✓，错误打✗。）（每小题 3 分，共 15 分）

1. 考虑一个**稳定匹配问题**的实例，其中包含 n 个男人和 n 个女人。假设存在某个男人m在某个女人w的优先表上排名第一，而这个女人w在这个男人m的优先表上也排名第一，那么对这个实例的每个稳定匹配S，该(m, w)对都属于S。 [ ]

2. 设G是任意一个有向无环图（即 DAG）。图 G 的拓扑排序是唯一的当且仅当该图是半连通的：任给 G 中的两个顶点 u 和 v，要么 u 可达 v，要么 v 可达 u。 [ ]

3. 设G是任意一个无向连通图，每条边e具有不同的费用c(e)。假设e^*是G中最便宜的边，即对每条边$e \neq e^*$，$c(e^*) < c(e)$。那么G中存在一棵包含边e^*的最小生成树T。 [ ]

4. 假设给出图G上的**最小生成树问题**的一个实例，边的费用都是正的且不相等。设T是关于这个实例的一棵最小生成树。现在我们把每条边的费用c_e用它的平方${c_e}^2$替换，因此产生这个问题的一个新的实例，它有同样的图但是具有不同的费用。T对于这个新的实例一定仍旧是一棵最小生成树。 [ ]

5. 令G是任意一个流网络，具有源点s，汇点t，以及每条边e上正整数的容量c_e。如果f是G中的一个最大$s-t$流，那么f在每条从s出发的边上都是饱和的（即对所有的从s出发的边e，我们有$f(e) = c_e$）。 [ ]

得分

二、单选题. （每小题 4 分，共 20 分）

1. 求解递归式 $T(n) = 5T(n/5) + n/\log n$ [ ]
   A) $T(n) = \theta(n)$
   B) $T(n) = \theta(n \log n)$
   C) $T(n) = \theta(n \log^2 n)$
   D) $T(n) = \theta(n \log\log n)$

2. 求解递归式 $T(n) = T(n/2) + T(n/4) + T(n/8) + n$ [ ]
   A) $T(n) = \theta(n)$
   B) $T(n) = \theta(n \log n)$
   C) $T(n) = \theta(n \log^2 n)$
   D) $T(n) = \theta(n \log\log n)$

3. 函数$n^{1/lgn}$在渐近意义下与下面哪个等价？ [ ]
   A）$\theta(1)$
   B）$\theta(n)$
   C）$\theta(\log(n))$
   D）以上答案案都不对

4. 函数$(\lg n)!$ 在渐近意义下与下面哪个等价？ [ ]
   A）在渐近意义下比任何多项式函数都要大
   B）$\theta(\log n)$
   C）$\theta(n^k)$，其中 k 为某个常数
   D）$\theta(n \log n)$

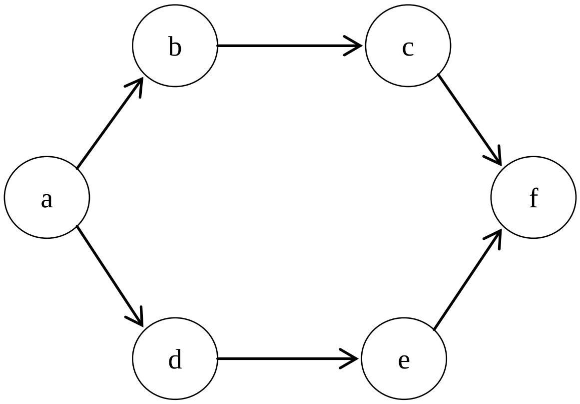
5. 使用好的优先队列对下列哪个算法能改善算法的运行时间？ [ ]
   A）最小生成树 Kruskal 算法
   B）单源最短路径 Dijkstra 算法
   C）单源最短路径 Bellman-Ford 算法
   D）矩阵乘法的 Strassen 算法

装订线内不要答题

得分

三、简答题（5 分）

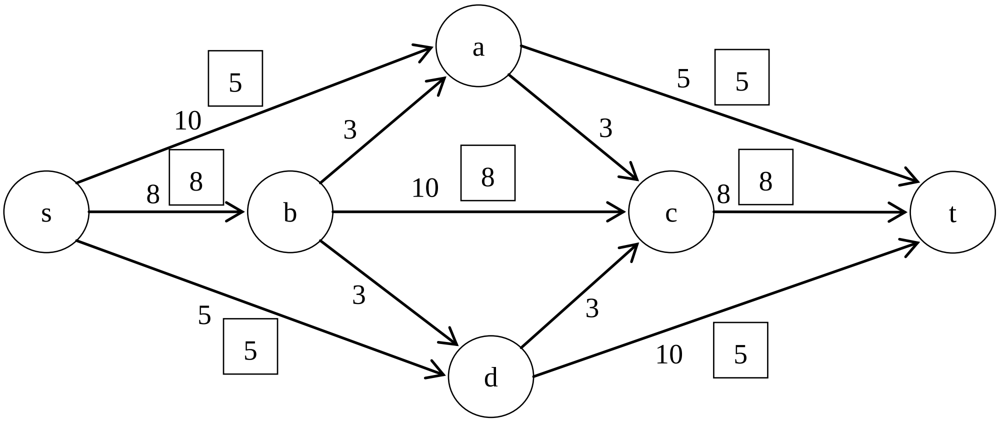
考虑下图中的有向无环图G，它有多少种拓扑排序？请列出全部的拓扑排序。



得分

四、简答题（10 分）

下图中显示了一个流网络，其中一个$s-t$流已经被计算了。每条边的容量标记在边的旁边，方格中的数给出了每条边上发送的流量（没有方格数的边表示该边上没有流量经过，比如容量是 3 的那四条边上就没有流量）。



(a) 这个流的值是什么？这是这个图中的最大$(s-t)$流吗？

(b) 在图中所描绘的流网络中找出一个最小的$s-t$割并且说出它的容量是什么。

得分

五、证明或举出反例（8 分）

令 G 是任意一个流网络，具有源点 s、汇点 t，以及每条边 e 上正整数的容量 c_e。令（A，B）是关于这些容量{ c_e：e∈E }的最小 s-t 割。现在假设我们把每条边的容量**减少** 1，那么（A，B）仍旧是一个关于这些新容量{ c_e-1：e∈E} 的最小 s-t 割吗？给出一个证明或者举出一个具体的反例。

得分

六、动态规划（12 分）

你有一个高性能计算系统，每天只能处理一定数量的数据。随着运行时间的增加，这个系统处理能力在逐渐下降，比如第一天处理能力是 s_1，第二天就是 s_2，第 n 天是 s_n，而且 $s_1 > s_2 > \ldots > s_n > 0$。为了使系统恢复性能，你可以重启机器，但在你重启的那一天，它将不能工作。

你每天都会得到一批需要处理的数据。在第 i 天，需要处理的数据量是 x_i TB。也就是说，不管你的系统在第 i 天运行有多快，你最多处理 x_i TB 的数据。没有处理的数据以后也不能再处理了。

问题：给定 n 天的有效数据量 x_1，x_2，…，x_n，并且给定 s_1，s_2，…，s_n，用动态规划设计一个高效的算法来决定应该在哪些天重启系统以使得处理的数据量达到最大。该算法必须同时满足以下三个条件：

（1） 时间复杂度为 $O(n^2)$

（2） 空间复杂度为 $O(n)$

（3） 既要给出能够处理的最大数据量，也要给出具体应该在哪些天重启系统。

你的解答需要写清楚以下内容：

（1） 算法设计思想（无需给出伪代码）

（2） 状态转移方程（即递推方程）和转移条件，写清楚每个变量的取值范围

（3） 初始化方案

（4） 最后如何返回上面所要求的答案

（5） 简要证明该算法的正确性、时间和空间复杂度

得分

七、求解瓶颈生成树（10 分）

无向图$G = (V, E)$的一棵瓶颈生成树（bottleneck spanning tree）T是这样的一棵生成树，它的最大的边的权值在G的所有生成树中是最小的。我们把瓶颈生成树的代价值就定义为T中权值最大的边的权值。假设 G 中的顶点数和边数分别为 n 和 m，请设计一种高效的算法来寻找一棵瓶颈生成树。写清楚算法设计思想（无需给出伪代码），时间和空间复杂度分析，并证明该算法的正确性。

得分

八、分治法求网格中的极小值（10 分）

考虑下面的题目：

定义 n*n 的网格图 G 为一个 n*n 的棋盘的邻接图，其中节点的集合是所有自然数的有序对（i，j）的集合，其中 1<=i<=n 且 1<=j<=n; 两个节点（i，j）与（k，l）之间有一条无向边相连当且仅当|i-k|+|j-l|=1。

每个节点 v 被一个实数 x_v 标记，所有这些标记的实数都不相同。设计一个高效的算法来找到网格图 G 中的一个局部极小点。

注意：以上只是对题目的背景描述，不用回答。只要解答下面提出的问题即可。

有人提出了下面的分治解法：

（1） 找到网格的中间一列并求出该列上 n 个元素中的最小点。如果 n 是偶数，处于中间位置的有两列，可以任选其中一列。

（2） 把这个最小点与它左右两侧相邻的点比较，如果比两侧都小的话，那么就把这个点做为一个局部极小点返回。

（3） 否则，假设有一侧与它相邻的点比它的值要小，那么就在那一侧（包含中间的这一列）进行递归查找。

（4） 如果递归时发现只剩下一列或者两列，那么用蛮力算法（即遍历这一两列中的所有点）找到最小点返回。

注意：这种解法每次都是把网格纵向切一刀，这样每次递归中得到的不再是方格，因为列数变得越来越少，而行数保持不变。比如 n=9，第一次找到网格第 5 列上的最小点，假设它左边相邻的点（第 4 列上的点）比它还小，那么下一步在第 1 列到第 5 列中递归查找。

请问这个算法是否一定能找到原来网格中的某个极小点？如果你认为该算法是正确的，那么给出一个证明和时间复杂度的分析。如果你认为该算法是错误的，那么给出一个具体的反例。

得分

九、NP 完全性的证明（10 分）

给定一个有向图 G=(V，E)和图中一个指定的起点 s 和一个终点 t。对于图中的每条边 e，定义两个权重函数 $w_1(e)$和 $w_2(e)$为这条边在两个标准下的权重，定义图中路径的长度为该路径上所有边的权重之和。注意：图中的每条路径在这两个标准下有两个长度值。

双重标准的最短路径问题如下：对于这两个权重函数分别给定一个路径长度的上限 L_1 和 L_2，问图 G 中是否可以找到一条从 s 通向 t 的路径使得其长度在这两个权重函数下不会超过各自的上限？证明该问题是 NP 完全的。