

例题 1 (太原理工大学,2023) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$.

例题 2 (北京科技大学,2023) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right)$.

思考题 1 (西北大学,2023) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$.

思考题 2 (南京大学,2023) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{5n}}{n+1} + \frac{\frac{2}{5n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\frac{n}{5n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$.

例题 3 (华东师范大学,2023) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $(2 - a_n)a_{n+1} = 1$. 证明:

- (1) 存在正整数 k , 使得 $a_k \leq 1$;
- (2) 数列 $\{a_n\}$ 极限存在, 并求出该极限的值;
- (3) 若 $\{a_1 \neq 1\}$, 则 $a_n (n = 1, 2, \cdots)$ 两两不相等;
- (4) 满足题设条件并且 $a_1 \neq 1$ 数列 $\{a_n\}$ 存在.

思考题 3 (福州大学,2023) 设 $a_1 > 0$, 且 $a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n} (n = 1, 2, \cdots)$, 证数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求出极限.

思考题 4 (南京航空航天大学,2023) 设 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1} (n = 2, 3, \cdots)$, 记 $x_n = \frac{1}{a_n}$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的收敛性.

例题 4 (西安交通大学,2023) 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 0, x_{n+1} = \cos x_n (n = 1, 2, \cdots)$, 证明:

(1) $\{x_{2n}\}, \{x_{2n-1}\}$ 均单调;

(2) $\{x_n\}$ 收敛.

例题 5 (暨南大学,2023) 设 $f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x$, 证明: 对任意的正整数 $n, f_n(x) = 1$ 在 $[0, \frac{\pi}{3})$ 内有且仅有一个根 x_n , 进一步证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且为 $\frac{\pi}{3}$.

思考题 5 (中国科学院大学,2023) 证明: 数列 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ 收敛.

思考题 6 (北京邮电大学,2023) 已知 $f_n(x) = x^n + x (n = 1, 2, \cdots)$.

(1) 证明: 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上有且仅有一个解 x_n .

(2) 证明: $\{x_n\}$ 极限存在, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

例题 6 (西南交通大学,2023) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

例题 7 (长安大学,2023) 设 $a_n > 0, n \in \mathbb{N}_+$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = +\infty$.

思考题 7 (华南理工大学,2023) 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ (有限数), 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

思考题 8 (暨南大学,2023) 已知 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} = a$.

例题 8 (吉林大学,2023) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+\cos 1)^3 + (2+\cos 2)^3 + \cdots + (n+\cos n)^3}{n^4}$.

例题 9 (电子科技大学,2023) 设函数 $f \in C^2[0, 1]$, $f'(0) = 1$, $f''(0) \neq 0$ 且 $0 < f(x) < x$, $x \in (0, 1)$, 令

$$a_1 \in (0, 1), a_{n+1} = f(a_n) (n = 1, 2, \dots).$$

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;

(2) 试问数列 $\{na_n\}$ 是否一定收敛? 若不一定收敛, 请举出反例; 若收敛, 求其极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$.

思考题 9 (上海财经大学,2023) 已知 $x_0 > 1, x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$, 数列 $\{\frac{x_n}{\sqrt{n}}\}$ 是否收敛?

思考题 10 (厦门大学,2023, 南京师范大学,2023) 设 $0 < k < 1$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + ka_{n-1} + \cdots + k^{n-1}a_1 + k^n a_0) = \frac{a}{1-k}.$$

例题 10 (华南师范大学,2023) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x)^2 (1 - \cos x)^2}{x(\arcsin x)^3 [\ln(1+x)]^2}$.

例题 11 (新疆大学,2023) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{1+\ln x}}$.

例题 12 (吉林大学,2023) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^2 (\tan t)^3 dt}{\ln(1+x^2)(e^{2x^2}-1)}$.

例题 13 (太原理工大学,2023) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{\sqrt{1+x}-1}$.

思考题 11 (北京科技大学,2023) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

思考题 12 (中科学技术大学,2023) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$.

思考题 13 (华东师范大学,2023) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$.

思考题 14 (上海财经大学,2023) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x}) \cdots (1-\sqrt[n]{\cos x})}{(1-\cos x)^{n-1}}$.

例题 14 (陕西师范大学,2023; 新疆大学,2023) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)}$.

例题 15 (西北大学,2023) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\sin^2 x)^{1902} - (\cos x)^{2022}}{\tan^2 x}$.

例题 16 (华南师范大学,2023) 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(A_1 \sqrt{n+1} + A_2 \sqrt{n+2} + \cdots + A_k \sqrt{n+k} \right).$$

其中 $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = 0$.

思考题 15 (四川大学,2023) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln(n+1) - \ln n} - n \right)$.

思考题 16 (西南交通大学,2023) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$.

思考题 17 (华中师范大学,2023) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$.

例题 17 (吉林大学,2023) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 [\sin(\cos \frac{1}{n}) - \sin 1]$.

例题 18 (南开大学,2023) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - e^{\cos x} - 1}{\tan^2 x - \sin^2 x}$.

思考题 18 (长安大学,2023) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

思考题 19 (南京师范大学,2023) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \sin x)^{\frac{1}{x^2}}$.

思考题 20 (西南大学,2023) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) + \sin 2x}{\tan x - 3 \arctan 2x}$.

例题 19 (重庆大学,2023) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^3.$$

求 $f(0)$, $f'(0)$ 以及 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

例题 20 (上海财经大学,2023) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$.

思考题 21 (西安交通大学,2023) 设函数 $f(x)$ 在 a 的邻域内有定义, 在 a 处可导且 $f(a) > 0$, 计算

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)^{f(x)} - f(a)^{f(x)}}{x - a}.$$

思考题 22 (吉林大学,2023) 数列 $\{x_n\}$ 是方程 $x \cot x = \frac{\pi}{2} \cot x - 10$ 在 $(\frac{\pi}{2}, +\infty)$ 上的解序列, 试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[x_n - \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi \right] = 0.$$

例题 21 (安徽大学,2023) 设 f 为 $[a, b]$ 上的单调函数, 且 $f(x)$ 可取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值, 证明 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数.

例题 22 (电子科技大学,2023) 设函数 $g \in C[a, b]$, f 在 g 的值域上有定义. 证明: 若 $f \circ g \in C[a, b]$, 则 f 在 g 的值域上连续.

例题 23 (华南理工大学,2023) 设 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有定义且有界, a, b 是大于 1 的常数, 对 $0 \leq x \leq \frac{1}{a}$, 有 $F(ax) = bF(x)$. 证明: $F(x)$ 在 $x = 0$ 处右连续.

思考题 23 (北京师范大学,2023) 已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明: $M(x) = \max_{a \leq t \leq x} f(t)$ 在 $[a, b]$ 上也连续.

思考题 24 (北京师范大学,2023) 已知 $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, L \in (0, 1)$. 证明: 存在唯一的 x , 使得 $f(x) = x$.

思考题 25 (中国科学院大学,2023) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且对任意的 $x \in [a, b]$, 存在 $y \in [a, b]$, 使得 $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$, 证明: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = 0$.

例题 24 (华中师范大学,2023) 设函数 f 在有界区间 (a, b) 上一致连续.

(1) 证明: 函数 f 在 (a, b) 上有界;

(2) 试问上述结论对无界区间是否成立? 并说明理由.

例题 25 (陕西师范大学,2023) 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 都存在, 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

思考题 26 (南开大学,2023) 设 α 为实数, 记

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x}, & x > 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

已知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 求 α 的取值范围.

思考题 27 (中国矿业大学 (徐州),2023) 设单调有界函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

例题 26 (北京工业大学,2023; 广西大学,2023) 证明: 实直线 \mathbb{R} 上的两个一致连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的和函数 $f(x) + g(x)$ 一致连续; 它们的乘积函数 $f(x)g(x)$ 是否仍一致连续? 若是, 请写出证明过程; 若不是, 请举出反例.

例题 27 (哈尔滨工业大学,2023) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续且有界, 证明: $f(g(x))$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续. 若去掉 “ $g(x)$ 有界”, 则 $f(g(x))$ 是否一致连续? 正确请给出证明, 错误请给出反例.

思考题 28 (重庆大学,2023) 证明: 函数 $f(x)$ 在有界区间 I 上一致连续的充分必要条件是当 $\{a_n\}$ 是 I 上的任意柯西函数, $\{f(a_n)\}$ 也是柯西数列.

例题 28 (华南理工大学,2023; 西南大学,2023; 北京邮电大学,2023) 已知 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上可导, 且极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}f'(x)$ 存在. 证明: $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上一致连续.

例题 29 (大连理工大学,2023) 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续可微, $|f'(x)| \leq 1 (x \geq 1)$, 求证: $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续.

思考题 29 (太原理工大学,2023) 设 $f(x)$ 在有限开区间 (a, b) 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$ 存在. 证明:

(1) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在;

(2) $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续且有界.

思考题 30 (吉林大学,2023) 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有定义, 且存在正的常数 l, L , 对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 都有

$$l|x_2 - x_1| \leq |f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|.$$

证明: 存在 $X \in [1, +\infty)$, 使得 $\frac{x + e^{-x}}{f(x)}$ 在 $[X, +\infty)$ 上一致连续.

例题 30 (中国科学技术大学,2023)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(\sin \frac{1}{x}\right)^2, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

计算 f 的导数 f' , 并讨论 f' 的连续性.

例题 31 (北京科技大学,2023) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 求 $g'(x)$, 并讨论 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处是否连续.

思考题 31 (华东师范大学,2023) $y = y(x)$ 由参数方程
$$\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^2}; \\ y = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$$
 确定, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

思考题 32 (重庆大学,2023) 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有定义, 且对任何 $x, y \in (0, +\infty)$, 都有 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 若 $f'(1)$ 存在, 求 $f'(x)$.