例题 1 (太原理工大学,2023) 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

例题 2 (北京科技大学,2023) 计算极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$.

思考题 1 (西北大学,2023) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$.

思考题 2 (南京大学,2023) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{5^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{5^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

例题 3 (华东师范大学,2023) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $(2-a_n)a_{n+1}=1$. 证明:

(1) 存在正整数 k, 使得 $a_k \leq 1$;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 极限存在, 并求出该极限的值;

(3) 若 $\{a_1 \neq 1\}$, 则 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 两两不相等;

(4) 满足题设条件并且 $a_1 \neq 1$ 数列 $\{a_n\}$ 存在.

思考题 3 (福州大学,2023) 设 $a_1 > 0$, 且 $a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}(n = 1, 2, \cdots)$, 证数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求出极限.

思考题 4 (南京航空航天大学,2023) 设 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}(n = 2, 3, \cdots)$, 记 $x_n = \frac{1}{a_n}$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的收敛性.

例题 4 (西安交通大学,2023) 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=0, x_{n+1}=\cos x_n (n=1,2,\cdots)$, 证明:

(1) $\{x_{2n}\}, \{x_{2n-1}\}$ 均单调;

(2) $\{x_n\}$ 收敛.

例题 5 (暨南大学,2023) 设 $f_n(x)=\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x$, 证明: 对任意的正整数 $n, f_n(x)=1$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ 内有且仅有一个根 x_n, 进一步证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 且为 $\frac{\pi}{3}$.

思考题 5 (中国科学院大学,2023) 证明: 数列 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ 收敛.

思考题 6 (北京邮电大学,2023) 已知 $f_n(x) = x^n + x(n = 1, 2, \cdots)$.

(1) 证明: 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上有且仅有一个解 x_n.

(2) 证明:$\{x_n\}$ 极限存在, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

例题 6 (西南交通大学,2023) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 证明:$\lim \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$.

例题 7 (长安大学,2023) 设 $a_n > 0, n \in \mathbb{N}_+$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = +\infty$.

思考题 7 (华南理工大学,2023) 已知 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$(有限数), 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$.

思考题 8 (暨南大学,2023) 已知 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=a$.

例题 8 (吉林大学,2023) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\cos 1)^3+(2+\cos 2)^3+\cdots+(n+\cos n)^3}{n^4}$.

例题 9 (电子科技大学,2023) 设函数 $f\in C^2[0,1]$, $f'(0)=1, f''(0)\neq 0$ 且 $0<f(x)<x, x\in(0,1)$, 令

$$a_1\in(0,1), a_{n+1}=f(a_n)(n=1,2,\ldots).$$

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$;

(2) 试问数列 $\{na_n\}$ 是否一定收敛? 若不一定收敛, 请举出反例; 若收敛, 求其极限 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$.

思考题 9 (上海财经大学,2023) 已知 $x_0 > 1, x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$, 数列 $\{\frac{x_n}{\sqrt{n}}\}$ 是否收敛?

思考题 10 (厦门大学,2023, 南京师范大学,2023) 设 $0 < k < 1$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n + ka_{n-1} + \cdots + k^{n-1}a_1 + k^n a_0\right) = \frac{a}{1-k}.$$

例题 10 (华南师范大学,2023) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\tan x)^2(1-\cos x)^2}{x(\arcsin x)^3[\ln(1+x)]^2}$.

例题 11 (新疆大学,2023) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{1+\ln x}}$.

例题 12 (吉林大学,2023) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{x^2}^{x}(\tan t)^3\,\mathrm{d}t}{\ln\left(1+x^2\right)\left(e^{2x^2}-1\right)}$.

例题 13 (太原理工大学,2023) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{\sqrt{1+x}-1}$.

思考题 11 (北京科技大学,2023) 求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

思考题 12 (中科学技术大学,2023) 求极限 $\lim_{x\to1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$.

思考题 13 (华东师范大学,2023) 求极限 $\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$.

思考题 14 (上海财经大学,2023) 求极限 $\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\sqrt{\cos x}\right)\left(1-\sqrt[3]{\cos x}\right)\cdots\left(1-\sqrt[n]{\cos x}\right)}{(1-\cos x)^{n-1}}$.

例题 14 (陕西师范大学,2023; 新疆大学,2023) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln\left(1+x^2\right)}$.

例题 15 (西北大学,2023) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\sin^2 x)^{1902}-(\cos x)^{2022}}{\tan^2 x}$.

例题 16 (华南师范大学,2023) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(A_1\sqrt{n+1}+A_2\sqrt{n+2}+\cdots+A_k\sqrt{n+k}\right).$$

其中 $A_1+A_2+\cdots+A_k=0$.

思考题 15 (四川大学,2023) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(n+1)-\ln n}-n\right)$.

思考题 16 (西南交通大学,2023) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

思考题 17 (华中师范大学,2023) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

例题 17 (吉林大学,2023) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[\sin\left(\cos\frac{1}{n}\right)-\sin 1\right]$.

例题 18 (南开大学,2023) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-e^{\cos x-1}}{\tan^2 x-\sin^2 x}$.

思考题 18 (长安大学,2023) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

思考题 19 (南京师范大学,2023) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$.

思考题 20 (西南大学,2023) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)+\sin 2x}{\tan x-3\arctan 2x}$.

例题 19 (重庆大学,2023) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导, 且

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3.$$

求 $f(0), f'(0)$ 以及 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

例题 20 (上海财经大学,2023) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!)$.

思考题 21 (西安交通大学,2023) 设函数 $f(x)$ 在 a 的邻域内有定义, 在 a 处可导且 $f(a)>0$, 计算

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)^{f(x)}-f(a)^{f(x)}}{x-a}.$$

思考题 22 (吉林大学,2023) 数列 $\{x_n\}$ 是方程 $x\cot x=\frac{\pi}{2}\cot x-10$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上的解序列, 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\left[x_n-\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right]=0.$$

例题 21 (安徽大学,2023) 设 f 为 $[a,b]$ 上的单调函数, 且 $f(x)$ 可取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值, 证明 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数.

例题 22 (电子科技大学,2023) 设函数 $g \in C[a,b], f$ 在 g 的值域上有定义. 证明: 若 $f \circ g \in C[a,b]$, 则 f 在 g 的值域上连续.

例题 23 (华南理工大学,2023) 设 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义且有界,a, b 是大于 1 的常数, 对 $0 \leq x \leq \frac{1}{a}$, 有 $F(ax) = bF(x)$. 证明:$F(x)$ 在 $x=0$ 处右连续.

思考题 23 (北京师范大学,2023) 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明:$M(x)=\max\limits_{a\leq t\leq x} f(t)$ 在 $[a,b]$ 上也连续.

思考题 24 (北京师范大学,2023) 已知 $|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|, L\in(0,1)$. 证明: 存在唯一的 x, 使得 $f(x)=x$.

思考题 25 (中国科学院大学,2023) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对任意的 $x\in[a,b]$, 存在 $y\in[a,b]$, 使得 $|f(y)|\leq\dfrac{1}{2}|f(x)|$, 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=0$.

例题 24 (华中师范大学,2023) 设函数 f 在有界区间 (a,b) 上一致连续.

(1) 证明: 函数 f 在 (a,b) 上有界;

(2) 试问上述结论对无界区间是否成立? 并说明理由.

例题 25 (陕西师范大学,2023) 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 都存在, 证明:$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

思考题 26 (南开大学,2023) 设 α 为实数, 记

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 求 α 的取值范围.

思考题 27 (中国矿业大学 (徐州),2023) 设单调有界函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

例题 26 (北京工业大学,2023; 广西大学,2023) 证明: 实直线 $\mathbb{R}$ 上的两个一致连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的和函数 $f(x)+g(x)$ 一致连续; 它们的乘积函数 $f(x)g(x)$ 是否仍一致连续? 若是, 请写出证明过程; 若不是, 请举出反例.

例题 27 (哈尔滨工业大学,2023) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续且有界, 证明:$f(g(x))$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 在一致连续. 若去掉“$g(x)$ 有界”, 则 $f(g(x))$ 是否一致连续? 正确请给出证明, 错误请给出反例.

思考题 28 (重庆大学,2023) 证明: 函数 $f(x)$ 在有界区间 I 上一致连续的充分必要条件是当 $\{a_n\}$ 是 I 上的任意柯西函数,$\{f(a_n)\}$ 也是柯西数列.

例题 28 (华南理工大学,2023; 西南大学,2023; 北京邮电大学,2023) 已知 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上可导, 且极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}f'(x)$ 存在. 证明:$f(x)$ 在 $(0,1]$ 上一致连续.

例题 29 (大连理工大学,2023) 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续可微,$|f'(x)|\le 1(x\ge 1)$, 求证:$\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

思考题 29 (太原理工大学,2023) 设 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ 和 $\lim \lim\limits_{x\to b^-} f'(x)$ 存在. 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在;

(2) $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续且有界.

思考题 30 (吉林大学,2023) 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有定义, 且存在正的常数 l,L, 对任意的 $x_1,x_2\in[1,+\infty)]$, 都有

$$l|x_2-x_1|\le|f(x_2)-f(x_1)|\le L|x_2-x_1|.$$

证明: 存在 $X\in[1,+\infty)$, 使得 $\dfrac{x+e^{-x}}{f(x)}$ 在 $[X,+\infty)$ 上一致连续.

例题 30 (中国科学技术大学,2023)

$$f(x)=\begin{cases} x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

计算 f 的导数 f', 并讨论 f' 的连续性.

例题 31 (北京科技大学,2023) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1, g(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$, 求 $g'(x)$, 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续.

思考题 31 (华东师范大学,2023) $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t^2}; \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$ 确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

思考题 32 (重庆大学,2023) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义, 且对任何 $x,y\in(0,+\infty)$, 都有 $f(xy)=f(x)+f(y)$, 若 $f'(1)$ 存在, 求 $f'(x)$.

例题 32 1