Отчёт по лабораторной работе №4

Вариант 5

Бронникова де Менезеш Эвелина

Содержание

Цель работы

Построить фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора, используя программу OpenModelica.

Задание

Построить фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев: 1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 2{,}5x = 0$ 2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 10\dot{x} + 11x = 0$ 3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + \dot{x} + x = 3sin(t)$

На интервале $t \in [0; 65]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = -1, y_0 = 2$[1]

Теоретическое введение

Модель гармонических колебаний Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором. Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

где

x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.),

---

[1] Кулябов Д.С. Задания к лабораторной работе № 4 (по вариантам). - 23 с.

γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре)

ω_0 – собственная частота колебаний,

t – время.

(Обозначения

$$\ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$$

)

Уравнение (1) есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы.

При отсутствии потерь в системе (γ= 0) вместо уравнения (1.1) получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка (2) необходимо задать два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Уравнение второго порядка (2) можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

Начальные условия (3) для системы (4) примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью. Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом. [2]

---

[2] Кулябов Д.С. Лабораторная работа № 4. - 4 с.

Выполнение лабораторной работы

Построение фазового портрета гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора на интервале $t \in [0; 65]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = -1, y_0 = 2$ для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 2{,}5x = 0$

-
    1. Написание программы для решения уравнения гармонического осциллятора.

```
model l4
  parameter Real w = 2.5;
  parameter Real g = 0;
  parameter Real x0 =-1;
  parameter Real y0 =2;

  Real x(start = x0);
  Real y(start = y0);

equation
  der(x) = y;
  der(y)=-g*y-w*w*x;
end l4;
```

Рис.1.1 Уравнения гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

-
    2. Построение фазового портрета гармонического осциллятора, путем запуска симуляции с установленными условиями.

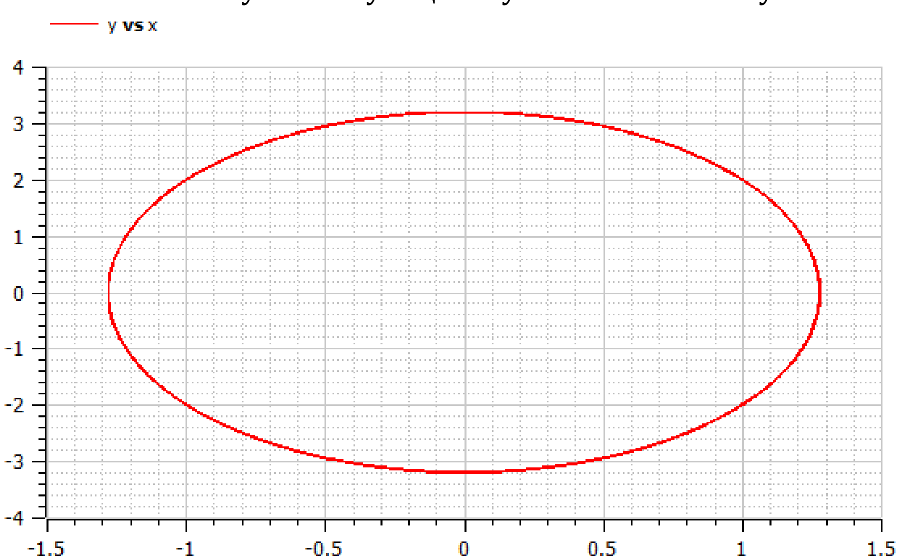

Рис. 1.2 Фазовый портрет гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

Так как значение затуханий и действий внешней силы равны 0, наблюдается, что отсутствует диссипация энергии и начало координат фазовой плоскости, x=y=0, соответствует точке равновесия движения. Таким образом, подтверждается, что энергия колебания осциллятора сохраняется во времени.[3]

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 10\dot{x} + 11x = 0$

- 1. Написание программы для решения уравнения гармонического осциллятора.

```
model l42
  parameter Real w = sqrt(11);
  parameter Real g = 10;
  parameter Real x0 =-1;
  parameter Real y0 =2;

  Real x(start = x0);
  Real y(start = y0);

equation
  der(x)  = y;
  der(y)=-g*y-w*w*x;
end l42;
```

Рис.2.1 Уравнения гармонического осциллятора с затуханий и без действий внешней силы

- 2. Построение фазового портрета гармонического осциллятора, путем запуска симуляции с установленными условиями.

Рис. 2.2 Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

[3] Ловецкий К.П., Севастьянов Л.А. Учебно-Методическое Пособие По Курсу «Математическое Моделирование» Часть 1 - Осциллятор. - Москва: РУДН, 2007. - 63 с.

В данном случае наблюдается, что с затуханием, но отсутствием внешней силы осциллятор постепенно теряет скорость ($\dot{x} = y$).

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + \dot{x} + x = 3sin(t)$

-

    1. Написание программы для решения уравнения гармонического осциллятора.

```
model 143
  parameter Real w = sqrt(1);
  parameter Real g = 1;
  parameter Real x0 =-1;
  parameter Real y0 =2;

  Real x(start = x0);
  Real y(start = y0);

equation
  der(x) = y;
  der(y)=-g*y-w*w*x-3*sin(time);
end 143;
```

Рис.3.1 Уравнения гармонического осциллятора с затуханий и под действием внешней силы

-

    2. Построение фазового портрета гармонического осциллятора, путем запуска симуляции с установленными условиями.

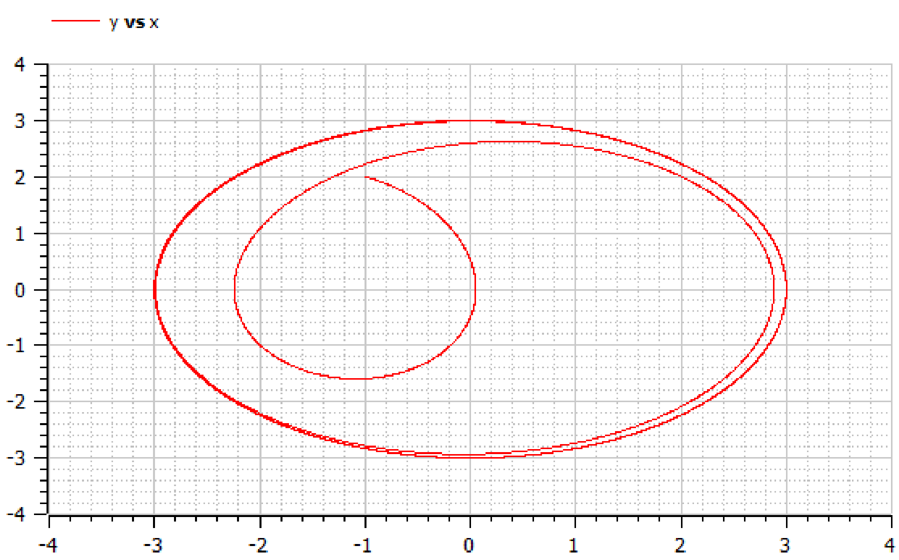

Рис. 3.2 Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханий и под действием внешней силы

Решение данного случая представляют собой спираль, которая постепенно принимает форму эллипса, поведение которого аналогичен изображённому в первом случае.

Выводы

Были построены фазовые портреты гармонического осциллятора для случаев: колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней, колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы, колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы, используя программу OpenModelica. А также решение соответствующих уравнений гармонического осциллятора. Кроме того, был проведен анализ результатов для каждого случая.

Библиография

1. Кулябов Д.С. Задания к лабораторной работе № 4 (по вариантам). - 23 с.
2. Кулябов Д.С. Лабораторная работа № 4. - 4 с.
3. Ловецкий К.П., Севастьянов Л.А. Учебно-Методическое Пособие По Курсу «Математическое Моделирование» Часть 1 - Осциллятор. - Москва: РУДН, 2007. - 63 с.