均匀B样条曲线的几何定义*

施 法 中
（北京航空学院）

THE GEOMETRIC DEFINITION OF UNIFORM B-SPLINE CURVES

Shi Fa-zhong
(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics).

Abstract

J. H. Clark defined uniform B-spline curves and the standard uniform B-spline. But He has not got the general forms. Based on clark's work, we establish the general geometric definition of uniform B-spline curves, derive the general formulas of uniform B-spline basic functions, and obtain a series of properties and formulas calculating the uniform B-spline basic function and uniform B-spline curves.

一、几 何 定 义

B 样条首先由 I. J. Shoenberg 提出，而后 C. de-Boor 及 M. G. Cox 各自独立地得出了递推公式，W. J. Gorden、R. F. Riesenfild 和 A. R. Forrest 等人又推广了 Bézier 方法，将 B 样条应用于 CAGD 领域. B 样条有差商等多种定义. 能否仿照 Bézier 曲线 [2，3]那样，依据对曲线的基本几何要求导出 B 样条基函数，这样来建立均匀 B 样条曲线的几何定义呢？Clark 在[1]中正是这样做的. m 次均匀 B 样条曲线可以表示为

$$P_s(t)=\sum_{j=0}^{m} f_{m,j}(t)\cdot V_{s+j},\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ s=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

它在保留 Bézier 曲线的 Bernstein 表示式外壳的同时，变成分段的样条曲线. 顺序连接顶点 $\{V_i\}_1^{n+m}$，得到的折线即 B 特征多边形. $f_{m,j}(t)$ 即 m 次均匀 B 样条基函数.

这样按 (1) 式表示的样条曲线具有两个性质:

I. 局部逼近性质. 第 s 样条段至多只与 $m+1$ 个顶点 $\{V_i\}_s^{s+m}$ 有关，而与其它顶点无关.

* 1982 年 9 月 15 日收到.

II. 各样条段都采用统一的不依赖于顶点的基函数 $\{f_{m,j}(t)\}$. 基函数为参数 t 的不超过 m 次的多项式

$$f_{m,j}(t)=\sum_{i=0}^{m} a_{i,j}t^i,\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ j=0,1,\cdots,m \tag{2}$$

或写成矩阵形式

$$[f_{m,0}(t)f_{m,1}(t)\cdots f_{m,m}(t)]=[1\ \ t\ \cdots t^m]\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1}\cdots a_{0,m}\\ a_{1,0} & a_{1,1}\cdots a_{1,m}\\ \vdots & \vdots \quad\ \ \vdots\\ a_{m,0} & a_{m,1}\cdots a_{m,m}\end{bmatrix}.$$

共含有 $(m+1)^2$ 个待定系数,即矩阵元素 $a_{i,j}$, i, $j=0,1,\cdots,m$.

为了唯一确定全部未知系数，必须对样条曲线提供必要的约束条件. 这就是定义 m 次均匀B样条曲线下述的两条最基本的几何性质 III 与 IV.

III. 如果决定第 s 样条段 $\boldsymbol{P}_s(t)$ 的 $m+1$ 个顶点相重 $\boldsymbol{V}_s=\boldsymbol{V}_{s+1}=\cdots=\boldsymbol{V}_{s+m}=\boldsymbol{V}$, 则该样条段退化为一个点.

IV. 分段连接达到 c^{m-1} 连续,即 $\boldsymbol{P}_s^{(i)}(1)=\boldsymbol{P}_{s+1}^{(i)}(0)$, $i=0,1,\cdots,m-1$.

由性质 III 得 $\boldsymbol{P}_s(t)=\sum_{j=0}^{m} f_{m,j}(t)\cdot\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}$. 导致对基函数的规范化约束

$$\sum_{j=0}^{m} f_{m,j}(t)=1. \tag{3}$$

由性质 IV 得 $\sum_{j=0}^{m} f_{m,j}^{(i)}(1)\cdot\boldsymbol{V}_{s+j}=\sum_{j=0}^{m} f_{m,j}^{(i)}(0)\cdot\boldsymbol{V}_{s+j+1}$, $i=0,1,\cdots,m-1$. 根据性质 IV，等式两端下标相同的矢量系数应相等,从而得到如下的连续条件:

$$\begin{cases} 0=f_{m,m}^{(i)}(0), & (4)\\ f_{m,j+1}^{(i)}(1)=f_{m,j}^{(i)}(0),\ i,j=0,1,\cdots,m-1. & (5)\\ f_{m,0}^{(i)}(1)=0, & (6)\end{cases}$$

条件(3)—(6)共包含 $(m+1)^2$ 个方程,恰好决定 $(m+1)^2$ 个未知系数.

Clark 在[1]中依据条件(3)—(6)导出了一次、二次均匀B样条基函数,但未给出 m 次均匀B样条基函数的一般表达式. 我们仍从这组条件出发,给出推导.

二、基函数的导出

条件(4)、(6)分别表明 $f_{m,m}(t)$ 恰好有 $t=0$ 的 m 重零点, $f_{m,0}(t)$ 恰好有 $t=1$ 的 m 重零点. 因此,分别有

$$f_{m,m}(t)=a_{m,m}t^m,\ a_{m,m}\ \text{待定},$$

所以

$$a_{i,m}=\begin{cases}0, & i=0,1,\cdots,m-1,\\ a_{m,m}, & i=m\end{cases} \tag{7}$$

与 $f_{m,0}(t)=a_{m,0}(t-1)^m=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}a_{m,0}c_m^i t^i$，$a_{m,0}$ 待定，所以

$$a_{i,0}=(-1)^{m-i}a_{m,0}c_m^i. \tag{8}$$

将(2)式对 t 求导

$$f_{m,j}^{(i)}(t)=\sum_{p=i}^{m}a_{p,j}\frac{p!}{(p-i)!}t^{p-i}. \tag{9}$$

用 $t=0$ 代入得

$$f_{m,j}^{(i)}(0)=i!a_{i,j}, \tag{10}$$

又用 $t=1$ 代入(9)，且将 j 换成 $j+1$，得

$$f_{m,j+1}^{(i)}(1)=\sum_{p=i}^{m}a_{p,j+1}\frac{p!}{(p-i)!}. \tag{11}$$

根据(5)式，上两式相等，得

$$a_{i,j}=\sum_{p=i}^{m}a_{p,j+1}c_p^i,\quad i,j=0,1,\cdots,m-1. \tag{12}$$

用 $j=m-1$ 代入上式，则

$$a_{i,m-1}=c_m^i a_{m,m};\quad i=0,1,\cdots,m-1.$$

再用 $j=m-2$ 代入(12)，并利用上式，则

$$\begin{aligned}a_{i,m-2}&=\sum_{p=i}^{m}c_p^i a_{p,m-1}=\sum_{p=i}^{m-1}c_p^i c_m^p a_{m,m}+c_m^i a_{m,m-1}\\&=c_m^i\left[\left(\sum_{p=i}^{m-1}c_{m-i}^{p-i}\right)a_{m,m}+a_{m,m-1}\right]\\&=c_m^i[(2^{m-i}-1^{m-i})a_{m,m}+(1^{m-i}-0^{m-i})a_{m,m-1}]\\&=c_m^i\sum_{k=0}^{1}[(2-k)^{m-i}-(1-k)^{m-i}]a_{m,m-k}\\&\qquad i=0,1,\cdots,m-1.\end{aligned}$$

利用归纳法，假设

$$a_{i,j+1}=c_m^i\sum_{k=0}^{m-j-2}[(m-j-1-k)^{m-i}-(m-j-2-k)^{m-i}]a_{m,m-k},\quad i=0,1,\cdots,m-1,\ j=0,1,\cdots,m-2. \tag{13}$$

现证

$$a_{i,j}=c_m^i\sum_{k=0}^{m-j-1}[(m-j-k)^{m-i}-(m-j-1-k)^{m-i}]a_{m,m-k},\quad i,j=0,1,\cdots,m-1, \tag{14}$$

将假设(13)式中的 i 换成 p，然后代入(12)式，则

$$\begin{aligned}a_{i,j}&=\sum_{p=i}^{m-1}c_p^i c_m^p\sum_{k=0}^{m-j-2}[(m-j-1-k)^{m-p}-(m-j-2-k)^{m-p}]a_{m,m-k}+c_m^i a_{m,j+1}\\&=c_m^i\sum_{k=0}^{m-j-2}a_{m,m-k}\left[\sum_{p=i}^{m-1}c_{m-i}^{p-i}(m-j-1-k)^{m-p}\right.\end{aligned}$$

$$-\sum_{p=i}^{m-1} c_{m-i}^{p-i}(m-j-2-k)^{m-p}\Big] + c_m^i a_{m,j+1}$$

$$= c_m^i \sum_{k=0}^{m-j-2} a_{m,m-k}\{[(m-j-1-k+1)^{m-i}-1]-[(m-j-2-k$$

$$+1)^{m-i}-1]\} + c_m^i a_{m,j+1}$$

$$= c_m^i \sum_{k=0}^{m-j-2} a_{m,m-k}[(m-j-k)^{m-i}-(m-j-1-k)^{m-i}] + c_m^i a_{m,j+1}$$

$$= c_m^i \sum_{k=0}^{m-j-1} [(m-j-k)^{m-i}-(m-j-1-k)^{m-i}] a_{m,m-k},$$

$$i, j = 0, 1, \cdots, m-1.$$

证毕．所以

$$\sum_{j=0}^{m} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{m-1} c_m^i \sum_{k=0}^{m-j-1} [(m-j-k)^{m-i}-(m-j-1-k)^{m-i}] a_{m,m-k} + a_{i,m}$$

$$= c_m^i \sum_{k=0}^{m-1} a_{m,m-k} \sum_{j=0}^{m-k-1} [(m-j-k)^{m-i}-(m-j-1-k)^{m-i}] + a_{i,m}$$

$$= c_m^i \sum_{k=0}^{m-1} (m-k)^{m-i} a_{m,m-k} + a_{i,m}$$

$$= c_m^i \sum_{j=1}^{m} j^{m-i} a_{m,j}, \quad i = 0, 1, \cdots, m-1. \tag{15}$$

将(3)式对 t 求导得

$$\sum_{j=0}^{m} f_{m,j}^{(i)}(t) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i = 1, 2, \cdots, m. \end{cases}$$

用 $t=0$ 代入上式，并利用(10)式，得

$$\sum_{j=0}^{m} a_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i = 1, 2, \cdots, m. \end{cases} \tag{16}$$

利用(15)式，则由上式可得

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{m} a_{m,j} = 0, \\ \sum_{j=1}^{m} j^{m-i} a_{m,j} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m-1, \\ \sum_{j=1}^{m} j^{m} a_{m,j} = 1, \end{cases} \tag{17}$$

其中第一个方程系由(16)式中直接取 $i=m$ 得．(17)式即线性方程组：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\cdots 1\cdots 1 \\ 0 & 1 & 2\cdots j\cdots m \\ 0 & 1 & 2^2\cdots j^2\cdots m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2^m\cdots j^m\cdots m^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{m,0} \\ a_{m,1} \\ a_{m,2} \\ \vdots \\ a_{m,j} \\ \vdots \\ a_{m,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

依 Cramer 法则，其解为

$$a_{m,j} = \frac{D_j}{D}.$$

因为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\cdots 1\cdots 1 \\ 0 & 1 & 2\cdots j\cdots m \\ 0 & 1 & 2^2\cdots j^2\cdots m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 & 1 & 2^m\cdots j^m\cdots m^m \end{vmatrix} = m!\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{m-1} & \cdots & j^{m-1} & \cdots & m^{m-1} \end{vmatrix}$$

$$= m!(m-1)!\cdots 2!1!,$$

$$D_j = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\cdots 1 & 0 & 1\cdots 1 \\ 0 & 1 & 2\cdots j-1 & \vdots & j+1\cdots m \\ 0 & 1 & 2^2\cdots (j-1)^2 & \vdots & (j+1)^2\cdots m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & 0 & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 1 & 2^m\cdots (j-1)^m & 1 & (j+1)^m\cdots m^m \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{m-j}\frac{m!}{j}\begin{vmatrix} 1 & 1\cdots & 1 & 1\cdots 1 \\ 1 & 2\cdots & j-1 & j+1\cdots m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 1 & 2^{m-2}\cdots & (j-1)^{m-2} & (j+1)^{m-2}\cdots m^{m-2} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{m-j}\frac{m!}{j}\cdot\frac{(m-1)!(m-2)!\cdots 2!1!}{(j-1)!(m-j)!},$$

关于行列式的计算详见[3]，所以

$$a_{m,j} = (-1)^{m-j}\frac{1}{j!(m-j)!} = (-1)^{m-j}\frac{c_m^j}{m!},\ j=0,1,\cdots,m. \tag{19}$$

将(19)式代入(14)式，即得基函数系数或矩阵元素一般表达式

$$a_{i,j} = c_m^i\sum_{k=0}^{m-j-1}[(m-j-k)^{m-i}-(m-j-1-k)^{m-i}](-1)^k\frac{c_m^{m-k}}{m!}$$

$$= \frac{c_m^i}{m!}\sum_{k=0}^{m-j-1}(-1)^k c_{m+1}^k(m-j-k)^{m-i},$$

$$= \frac{c_m^i}{m!}\sum_{k=0}^{m-j}(-1)^k c_{m+1}^k(m-j-k)^{m-i},\ i,j=0,1,\cdots,m-1,$$

$$i,j=0,1,\cdots,m. \tag{20}$$

再将(20)式代入(2)式，即得基函数一般表达式

$$f_{m,j}(t)=\frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}c_m^i t^i\sum_{k=0}^{m-j}(-1)^k c_{m+1}^k(m-j-k)^{m-i}$$
$$=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m-j}(-1)^k c_{m+1}^k(m-j-k)^m\sum_{i=0}^{m}c_m^i\left(\frac{t}{m-j-k}\right)^i$$
$$=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m-j}(-1)^k c_{m+1}^k(m-j-k+t)^m,$$
$$0\leqslant t\leqslant 1,\ j=0,1,\cdots,m. \tag{21}$$

在(19)式中取 $j=m$，代入(7)式，再联立(7)、(12)、(19)三式，则得到一组基函数系数或矩阵元素的递推公式

$$\begin{cases} a_{i,m}=\begin{cases}0, & i=0,1,\cdots,m-1,\\ \dfrac{1}{m!}, & i=m,\end{cases}\\ a_{i,j}=\displaystyle\sum_{p=i}^{m}c_p^i a_{p,j+1},\ i,j=0,1,\cdots,m-1,\\ a_{m,j}=(-1)^{m-j}\dfrac{c_m^j}{m!},\ j=0,1,\cdots,m.\end{cases} \tag{22}$$

根据同样一组条件(3)—(6)式，还可导出另一套公式

$$a_{i,j}=(-1)^i\frac{c_m^i}{m!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k c_{m+1}^k(j-k+1)^{m-i},\ i,j=0,1,\cdots,m, \tag{23}$$

$$f_{m,j}(t)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k c_{m+1}^k(j-k+1-t)^m,\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ j=0,1,\cdots,m, \tag{24}$$

$$\begin{cases} a_{i,0}=(-1)^i\dfrac{c_m^i}{m!},\\ a_{i,j}=(-1)^{i-j}\dfrac{c_m^i c_m^j}{m!}+\displaystyle\sum_{k=i}^{m-1}(-1)^{i+k}c_k^i a_{k,j-1},\\ \qquad i=0,1,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,m.\end{cases} \tag{25}$$

这与前面(20)—(22)那套公式在实质上是一致的，反映了基函数的对称性．事实上，若将(21)式或(24)式中任一式右端的 j 换成 $m-j$，t 换成 $1-t$，便得到另一式的右端．

将(21)式或(24)式按(4)—(6)式所示顺序连接，就得到分段定义在[0,1]上的 m 次规范均匀B样条，如图1所示．若 m 为奇数，对称轴线位于中间两个区间的邻接点处，若 m

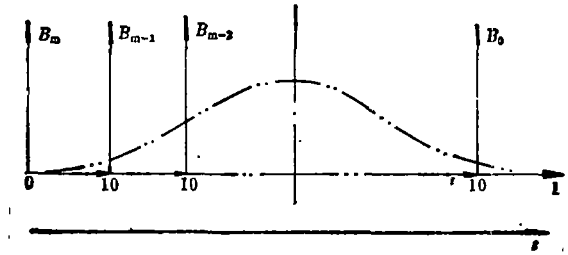

图 1

为偶数，则位于中间区间的 1/2 处.

三、性质与计算公式

根据基函数一般表达式(21)或(24)式，容易得出如下性质与计算公式：

1. 基函数递推公式

$$
\begin{cases}
f_{m,j}(t)=\dfrac{j+1-t}{m}f_{m-1,j}(t)+\dfrac{m-j+t}{m}f_{m-1,j-1}(t),\ m\geqslant 1,\ j=1,2,\cdots,m,\\
f_{0,0}(t)=1,\\
\text{规定：若 } j<0 \text{ 或 } j>m,\ \text{则 } f_{m,j}(t)=0.
\end{cases}
\tag{26}
$$

2. 基函数导数递推公式

$$
\begin{cases}
f^{(i)}_{m,j}(t)=f^{(i-1)}_{m-1,j-1}(t)-f^{(i-1)}_{m-1,j}(t),\ i=1,2,\cdots,m,\ j=0,1,\cdots,m,\\
\text{规定：若 } j<0 \text{ 或 } j>m,\ \text{则 } f^{(i)}_{m,j}(t)=0,\ i=0,1,\cdots,m.
\end{cases}
\tag{27}
$$

3. 对称性公式

$$
\begin{cases}
f^{(i)}_{m,j}(t)=(-1)^i f^{(i)}_{m,m-j}(1-t),\ i=0,1,\cdots,m,\\
a_{i,j}=(-1)^i a_{i,m-j-1},\ i,j=0,1,\cdots,m-1.
\end{cases}
\tag{28}
$$

4. 均匀 B 样条曲线位置矢量递推公式

$$
\begin{cases}
P_s(t)=\sum\limits_{j=0}^{m-p} f_{m-p,j}(t)\cdot V^{[p]}_{s+j}(t),\ p=0,1,\cdots,m,\\
V^{[p]}_{s+j}(t)=\dfrac{j+1-t}{m-\ +1}V^{[p-1]}_{s+j}(t)+\dfrac{m-j-p+t}{m-p+1}V^{[p-1]}_{s+j+1}(t)\\
\qquad p=1,2,\cdots,m,\ j=0,1,\cdots m-p,\\
V^{[0]}_{s+j}(t)=V_{s+j},\ j=0,1,\cdots,m,
\end{cases}
\tag{29}
$$

其中第二式如图 2 所示.

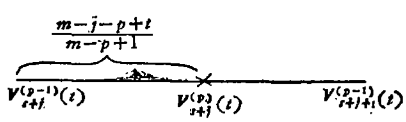

图 2

根据 (29) 式，我们可用几何作图法求得样条曲线 (1) 上参数为 t 的那一点 $P_s(t)$，显然

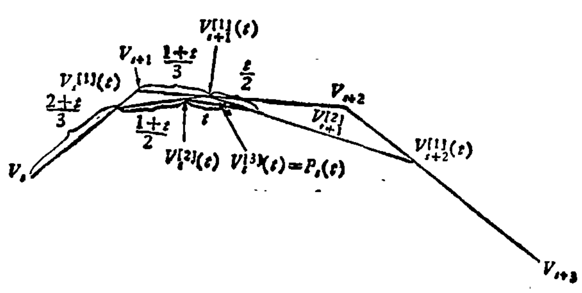

图 3

$\boldsymbol{P}_s(t)=\boldsymbol{V}_{s+j}^{[m]}(t)$.

例. 若给定如下B特征多边形顶点 $\{\boldsymbol{V}_i\}_s^{s+m}$, $m=3$, 则定义一段三次均匀B样条曲线 $\boldsymbol{P}_s(t)$. 若需求该段曲线上参数为 t 那点,可由如下作图得到. 如图3(图中取 $t=1/2$).

5. 均匀B样条曲线导矢递推公式之一——速端曲线

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_s^{(p)}(t)=\sum\limits_{j=0}^{m-p} f_{m-p}(t)\cdot \boldsymbol{V}_{s+j}^{(p)},\ p=0,1,\cdots,m,\\ \boldsymbol{V}_{s+j}^{(p)}=\boldsymbol{V}_{s+j+1}^{(p-1)}-\boldsymbol{V}_{s+j}^{(p-1)},\ p=1,2,\cdots,m,\ j=0,1,\cdots,m-p,\\ \boldsymbol{V}_{s+j}^{(0)}=\boldsymbol{V}_{s+j},\ j=0,1,\cdots,m\end{cases} \tag{30}$$

与(29)式不同的是, $\boldsymbol{V}_{s+j}^{(p)}$ 与参数 t 无关, 它等于前 $p-1$ 次递推所得多边形的边矢量 $\boldsymbol{V}_{s+j}^{(p-1)}\boldsymbol{V}_{s+j+1}^{(p-1)}$. 利用(30), 可计算曲线(1)上参数为 t 那点的 $p(=1,2,\cdots,m)$ 阶导矢 $\boldsymbol{P}_s^{(p)}(t)$. 显然, m 阶导矢 $\boldsymbol{P}_s^{(m)}(t)=\boldsymbol{V}_{s+j}^{(m)}$ 为常矢.

6. 均匀B样条曲线导矢递推公式之二

为避免混淆,(1)式左端改用记号为

$$\boldsymbol{P}_{m,s}(t)=\sum_{j=0}^{m} f_{m,j}(t)\cdot \boldsymbol{V}_{s+j},\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ s=1,2,\cdots,n,$$

表示一条由顶点 $\{\boldsymbol{V}_i\}_1^{n+m}$ 决定的 m 次均匀B样条曲线,包含有 n 段. 同样顶点决定的一条 $m-p$ 次均匀B样条曲线为

$$\boldsymbol{P}_{m-p,s}(t)=\sum_{j=0}^{m-p} f_{m-p,j}(t)\cdot \boldsymbol{V}_{s+j},\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ s=1,2,\cdots,n+p,$$

包含有 $n+p$ 段. 如下递推关系成立:

$$\boldsymbol{P}_{m,s}^{(p)}(t)=\boldsymbol{P}_{m-1,s+1}^{(p-1)}(t)-\boldsymbol{P}_{m-1,s}^{(p-1)}(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$
$$p=1,2,\cdots,m,\ s=1,2,\cdots,n. \tag{31}$$

它表示了同一B特征多边形所决定的各次均匀B样条曲线之间的关系.

应该指出,公式(26)、(29)、(30)是与 deBoor-Cox 递推公式相对应的. 其它熟知的性质与计算公式,不复列举.

本文是在吴骏恒老师指导下完成的. 在撰写此文的过程中得到科学院数学研究所徐叔贤,邝志泉两位同志的热诚帮助,特此致谢.

参 考 文 献

[1] J. H. Clark, Some properties of B-spline, 2nd USA-JAPAN Computer Conference proc (1975) pp. 542—545.

[2] P. E. Bézier, Numerical Control-Mathematics and Application, John, wiley and Sone London, 1972.

[3] 施法中,韩道康, Bézier 基函数的导出,航空学报, 1: 1(1980).