

Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée

Projet de fin d'études

Apprentissage statistique dédié à la prévision des taux de rendement

Préparé par :
Yassir EL ORFI

Sous la direction de:
M.Yassine EL QALLI

*Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du
Diplôme d'Ingénieur d'Etat .Option : Actuariat-Finance*



Résumé

Dans cette étude, nous analysons la structure de la courbe des taux et nous prédisons les structures futures de cette courbe en utilisant le modèle Nelson-Siegel, une régression par vecteur de support (SVR), et une mémoire à court-long terme (LSTM).

En outre, nous évaluons l'évolution de la performance de prévision des modèles par le biais d'un test de sous-performance. D'après les résultats empiriques, nous confirmons que le modèle Nelson-Siegel peut être utilisé pour prévoir la structure des taux de rendement des obligations de trésor.

En premier lieu, une introduction du milieu de travail ainsi que les différentes composantes de la compagnie, après suivra des définitions et des théorèmes basiques concernant la courbe des taux, les obligations, les obligations Zéro-Coupon, et les méthodes et les conditions de calculs des prix de ces obligations.

En second lieu, et le plus important, vienne la partie consacrée à la modélisation de la courbe des taux, des modèles de taux seront présentés, ainsi que leurs défauts, et s'en suivent les méthodes d'apprentissage statistique. Le but de cette étude est de réussir à prévoir les taux de rendement par les différents modèles à fin de prédire sa position sur le marché et avoir des informations de plus sur les produits dérivés de taux.

Abstract

In this study, we analyze the term structure of the yield curve and predict the future structures of the yield curve using the Nelson-Siegel model, a support vector regression (SVR), and a long short term memory (LSTM).

In addition, we evaluate the evolution of the models' forecasting performance through an underperformance test. Based on the empirical results, we confirm that the Nelson-Siegel model can be used to forecast the structure of treasury bond yields.

First, an introduction of the working environment as well as the different components of the company will have place, afterwards will follow definitions and basic theorems concerning the yield curve, bonds, Zero-Coupon Bonds, methods and conditions of calculating the prices of these bonds.

Secondly, and most importantly, comes the part devoted to the modeling of the yield curve, rate models will be presented, as well as their shortcomings, and statistical learning methods will follow. The aim of this study is to succeed in predicting the rates of the yield curve by the different models in order to predict our position on the market and to have more information on the rate derivative products.

Dédicace

Je dédie ce travail à ma famille et à mes amis. Un sentiment de gratitude à mes aimants parents ,leurs mots d'encouragement et de ténacité résonnent dans mes oreilles et me donne la force de continuer à travailler encore plus. Mes frères et soeurs qui n'ont jamais quitté mes côtés et m'en courage quelque soit ma situation.

Je dédie également ce travail à mes nombreux amis qui m'ont soutenu tout au long du processus. J'apprécierai toujours tout ce qu'ils ont fait, et je leurs souhaite la réussite de leurs travaux aussi.

Cher ami lisant mon travail, je te remercie de m'avoir supporté et sache que je n'oublierai jamais notre temps ensemble.

A ma mère et mon père.

A ma grande famille.

A mes amis.

A moi.

Remerciment

Je tiens à remercier les membres de mon comité qui ont été plus que généreux avec leurs expertises et leurs précieux temps . Je remercie tout particulièrement M. EL QALLI Yassine, mon encadrant pour ses innombrables heures de réflexion, de lecture, d'encouragement, et surtout sa patience tout au long du processus. Merci à Mme. BENCHARKI Mariam, M.MORINE Idriss, et M. SADIK Marouane pour m'avoir accepté de m'intégrer à leur équipe et m'encadrer tout au long.

Enfin, j'aimerais remercier mes enseignants, mes mentors et les administrateurs de notre prestigieuse INSEA , qui m'ont aidée durant ces trois dernières ans. Votre dévouement et votre volonté à nous éduquer, ont permis une grande majorité de poursuivre et réussir divers tâches pénibles.

Nous y sommes vraiment reconnaissant.

List of abbreviations

AR	: Autoregressive
ARIMA	: Autoregressive integrated moving average
BAM	: Bank Al Maghrib
BCP	: Banque centrale populaire
BDT	: Bonds de trésor
CP	: Coupon couru
DL	: Deep learning
DM	: Date de maturité
DNS	: Dynamic nelson siegel
DP	: Deep learning
DV	: Date de validation
IC	: Intérêt couru
LSTM	: Long Short Term Memory
ML	: Machine learning
MR	: Maturité résiduelle
MT	: Maturité totale
NS	: Nielson siegel
NSS	: Nielson Siegel Svensson
OTC	: Over the counter
PCC	: Prix coupon couru
PPC	: Prix pieds coupon
RNN	: Recurrent neural network
SUB1	: Sousbase de donnée 1
SUB2	: Sousbase de donnée 2
SVR	: Support Vector Regression
TMP	: Taux moyen pondéré
ZC	: Zero Coupn

Mots-clé, Keywords

Treasury Bonds, Yield Curve, Nielson Siegel, LSTM, SVR.

Bonds de trésor, Courbe de taux, Nielson Siegel, LSTM, SVR.

Contents

Résumé	2
Abstract	2
Dédicace	3
Remerciment	4
List of abbreviation	5
1 Introduction générale:	10
1.1 Le Groupe Banque Centrale Populaire	13
1.1.1 La Banque Centrale Populaire	13
1.1.2 Salle des marchés	13
2 Taux d'intérêt	15
2.1 Conventions de décomptes de jours	15
2.2 Les différents types de taux d'intérêt	15
2.2.1 Taux simple et taux composé	15
2.2.2 Taux nominal/taux réel	15
2.2.3 Taux court et taux long	16
2.2.4 Les taux sans risque ou d'État	16
2.2.5 Taux de rendement actuariel	16
2.2.6 Le taux monétaire et taux actuariel	16
2.2.7 Taux zéro-coupon	17
2.2.8 Taux forward	17
2.3 Les produits de taux	17
2.4 Le marché des taux	17
2.4.1 Le marché primaire	18
2.4.2 Le marché secondaire	18
2.4.3 Le marché monétaire	18
2.4.4 Le marché interbancaire	18
2.5 La notion du zéro-coupon	19
2.5.1 Obligation zéro-coupon	19
2.5.2 Les taux zéro-coupon	20

3 Un bon de trésor et ses caractéristique:	23
3.1 Obligation à taux fixe:	23
3.2 Obligation à taux variable :	24
4 Émettre un bon de trésor:	24
5 Valorisation des bons du Trésor:	26
5.1 Valorisation normale publiques à taux fixe:	29
5.1.1 Maturité initiale \leq 1 an:	29
5.1.2 Maturité initiale \geq 1 an et Maturité résiduelle \leq 1 an:	30
5.1.3 Maturité initiale \geq 1 an et Maturité résiduelle \geq 1 an:	30
5.2 Valorisation atypique publiques à taux fixe:	31
5.2.1 Maturité résiduelle \leq 1 an:	31
5.2.2 Maturité résiduelle \geq 1 an:	31
5.3 Autres valorisations:	32
5.3.1 Valorisation à taux fixe remboursables in fine émis par des émetteurs privés:	32
5.3.2 Valorisation à coupons annuels et à taux révisable remboursables in fine:	32
5.3.3 Valorisation à coupons annuels et à taux fixe remboursables par amortissement linéaire constant:	34
6 Étalement actuarial:	34
7 Modèles de taux:	40
Modèles affines:	40
7.1 Vasicek:	40
7.2 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross	42
7.3 Hull White:	42
7.4 Nelson, Siegle & Svensson:	43
7.5 Estimation des paramètres:	44
Filtre de Kalman:	45
8 Apprentissage statistique dédiée aux Taux	51
8.1 Introduction:	51
8.2 Long Short-Term Memory (LSTM) :	52
8.3 LTSM conventionnel:	54
8.4 Grid LSTM:	55
Différents types de LSTM est leurs avantages	56

8.5	SVR: Support Vector regression	57
9	Résultats empiriques:	59
9.1	Base de données:	59
9.2	Subdata 1:	61
9.2.1	LSTM:	62
9.2.2	SVR:	63
9.2.3	Dynamic nelson siegel:	64
9.3	Subdata 2:	65
9.3.1	LSTM:	66
9.3.2	SVR:	67
9.3.3	Dynamic nelson siegel:	68
9.4	Erreurs de prévisions:	69
9.4.1	LSTM :	69
9.4.2	SVR:	69
9.4.3	DNS:	70
9.5	Interprétations et commentaires:	70

List of Figures

1	Extrait d'un communiqué de BAM suite à une séance d'adjudication	25
2	Construction d'une courbe Vasicek pour $\theta = 0$, a varie à gauche, σ varie à droite	41
3	Modèle de Svenson: Fluctuation du terme τ_1 dans le 1er terme vs dans le 2ème terme	43
4	Courbe de Taux pour les taux ZC des BDT 1A, 5A, 15A et 30A Pre-KALMAN	47
5	Courbe de Taux pour les taux ZC des BDT 1A, 5A, 15A et 30A Post-KALMAN	48
6	:11/25/1985 - 4/8/2022 Courbe de Taux pour les taux ZC des BDT 1A, 5A, 15A et 30A	48
7	Prédiction du prix du stock GOOG avec l'apprentissage statistique-exemple	52
8	Structure de la cellule LSTM	53
9	Model du LSTM conventionnel	55
10	à droite GRID LSTM, et à gauche Stacked LSTM.	56
11	Apprentissage et test du sub1 à une année	60
12	Apprentissage et test du sub2 à une année	60
13	Apprentissage et test des différentes maturités du sub1	61
14	Sorties du modèle LSTM pour différentes maturités du sub1	62

15	Sorties du modèle SVR pour différentes maturités du sub2	63
16	Sorties du modèle SVR pour différentes maturités du sub1	64
17	Apprentissage et test des différentes maturités du sub2	65
18	Sorties du modèle LSTM pour différentes maturités du sub2	66
19	Sorties du modèle SVR pour différentes maturités du sub2	67
20	Sorties du modèle SVR pour différentes maturités du sub2	68

List of Tables

1	Taux BAM des BDT au 15/03/2022 - extrait	26
2	Taux interpolés résultants	27
3	Table des taux ZC des cinq premiers jours durant Janvier 2022	28
4	BDT 26 semaines	29
5	BDT 10A , $M_r < 1$	30
6	BDT 15A , $M_r > 1$	30
7	BDT 52 semaines atypique	31
8	BDT 5A atypoque, $M_r > 1$	31
9	obligation fictive BCP 10A	33
10	BDT 15A	36
11	Head an tail of Accrued intrest of a treasury bond	37
12	Statistiques descriptives des sous base de données extraites.	59
13	Différents erreurs du modèle LSTM pour les deux tranches	69
14	Différents erreurs du modèle SVR pour les deux tranches	69
15	Différents erreurs du modèle DNS pour les deux tranches	70

List of Algorithms

1	Algorithme de calcul des taux de référence des BDT	27
2	Algorithme d'étalement d'une obligation	36

1 Introduction générale:

Dans le monde financier, le taux d'intérêt est ses dérivées constituent une partie indispensable, on cite les swaps, les obligations de zéro coupon, les bonds de trésor...

Ce marché l'emporte en volume sur le marché des actions, vu son importance à financer l'état et les entreprises privées à travers la dette publique et privée. Et afin de remédier au déclin du financement extérieurs, on se focalise sur le marché des taux d'intérêts pour mobiliser l'épargne intérieure. Ainsi se présente l'importance d'étudier les taux d'intérêts et les allocations des crédits afin d'améliorer le système financier.

De plus, aujourd'hui, les actifs financiers sont de plus en plus rencontrés au sein des portefeuilles d'investissement et de placement et sont abondamment utilisés afin de satisfaire une clientèle variée d'investisseurs aux objectifs parfois forts différents. A ce titre, de nombreux modèles de structure par terme des taux d'intérêt ont été développés durant le siècle passé pour mieux cerner ce risque et par la suite mieux gérer les portefeuilles.

Ces modèles tentent d'obtenir une meilleure compréhension de la dynamique du taux d'intérêt et de prévoir son comportement, à but de se couvrir contre le risque du défaut. L'une des motivations donc à modéliser la courbe des taux d'intérêt est la prévision de sa structure par terme. A cet effet, il s'avère nécessaire de faire une comparaison entre les modèles permettant de décrire les liens caractérisant les taux d'intérêt. Et par la suite les confronter à la réalité et mesurer leurs performances. Ceci va nous permettre de se servir de tels modèles pour évaluer des actifs et élaborer des stratégies de gestion de portefeuille plus efficaces et plus optimales.

Alors l'objet de cette étude est la modélisation de la courbe de taux par différent modèles et analyses les différentes atouts.

Au travers de ce rapport, nous commencerons dans un premier temps par mettre en exergue les diverses notions nécessaires à la compréhension du sujet et constituant le jargon de celui-ci, en allant du taux d'intérêt, au zéro-coupon, passant par les marchés de taux. Nous nous attarderons ensuite dans le premier chapitre, sur les méthodes de construction de la courbe vue qu'elle n'est pas continue en pratique, même si la plupart des modèles le supposent. Nous serons donc amenés à la reconstruire. Puisqu'il sera donc nécessaire de parvenir à fournir une forme continue à cette courbe des taux lorsque l'on voudra donner un prix à n'importe quel actif. Nous finirons ce chapitre par une comparaison entre les différentes approches adoptées.

Le deuxième chapitre quant à lui, sera consacré à la modélisation stochastique de la dynamique des taux d'intérêt en temps continu, les résultats de la modélisation seront ainsi exploités pour prévoir l'évolution de la courbe.

Dans le dernier chapitre, nous introduirons les notions de la gestion obligataire, nous valoriserons les bons de Trésor et nous mettrons en place une stratégie efficace visant à maximiser le rendement du portefeuille composé des lignes en question. Ceci bien évidemment, en s'appuyant sur les résultats qui découlent de la première partie. Enfin, nous mesurerons la performance de telles stratégies en simulant différents scénarios.

Chapitre 1

Présentation et notions basiques:

1.1	Le Groupe Banque Centrale Populaire	13
2	Taux d'intérêt	15
2.1	Conventions de décomptes de jours	15
2.2	Les différents types de taux d'intérêt	15
2.3	Les produits de taux	17
2.4	Le marché des taux	17
2.5	La notion du zéro-coupon	19

En vue de l'obtention de mon diplôme et à l'issue de ma formation à l'INSEA, j'ai effectué mon stage au sein de la Banque Centrale Populaire.

Alors une petite présentation aura lieu, notamment la salle des marchés où j'ai passé mon stage.

1.1 Le Groupe Banque Centrale Populaire

Le Groupe Banque Centrale Populaire est un groupe bancaire marocain créé en 1965. Le groupe comprend un réseau de 10 Banques Régionales (BPR) et une panoplie des filiales spécialisées, toutes dirigées par une Banque Centrale, appelée Banque Centrale Populaire. Les Banques Régionales sont des banques coopératives, dont le capital est détenu par des associés particuliers. Leurs réseaux couvrent la totalité du territoire Marocain. Les filiales du groupe sont des filiales spécialisées dans différents domaines : crédits à la consommation, micro-finances, banque-assurance, offshoring, banques d'affaires, sociétés de financements et même des filiales bancaires réparties sur les trois continents (Afrique, Europe et Amérique).

1.1.1 La Banque Centrale Populaire

La Banque Centrale Populaire est initialement un institut de crédit, sous forme de société anonyme à Conseil d'Administration. Elle a été cotée en bourse le 8 juillet 2004. La BCP assure un rôle central au sein du groupe des Banques Populaires. Elle amène deux objectifs principaux: Institut de crédit et habilité à réaliser toutes les opérations bancaires, sans toutefois disposer d'un réseau propre. Organisme central bancaire des Banques Populaires Régionales. La BCP coordonne la politique financière du Groupe, permet de financer les BPR et de gérer leurs excédents de trésorerie ainsi que les services d'intérêt commun pour le compte de ses organismes.

1.1.2 Salle des marchés

La salle de marché est la salle occupé par la gestion du marché des capitaux:

Qu'est-ce qu'un marché de capitaux ? Un marché de capitaux est le lieu de rencontre entre agents économiques disposant d'un excédent de capitaux et d'autres témoignant d'un besoin de financement.

On distingue entre marché financier et marché monétaire :

- Le marché financier est un marché des capitaux à long terme où s'échangent des valeurs mobilières, telles des actions ou des obligations. Elles sont en premier lieu émises sur un marché dit primaire ensuite revendues sur le marché secondaire.
- Le marché monétaire quant à lui est un marché des capitaux à court et moyen terme où s'échangent des titres monétaires (billets de trésorerie, bons du Trésor (qui peuvent être de longues maturités)) Celui-ci est également divisé en deux marchés : le "marché interbancaire" sur lequel les banques échangent des liquidités et la Banque Centrale exerce sa fonction de régulation monétaire, puis le marché incluant des transactions sur les TCN (Titres de Créances Négociables) avec les agents non financiers.

Revenons désormais à la notion de Salle des marchés . Une salle des marchés est en fait un lieu où se regroupent les opérateurs chargés de prendre des positions (vente et achat) sur les marchés financiers, monétaires et des devises, nationaux et internationaux, pour le compte de l'établissement ou de la clientèle tout en assurant des seuils de rentabilité et de couverture de risque (pricing hedging)

Une salle des marchés comprend trois composantes :

- Le Front Office: Le Front Office qui regroupe les acteurs (traders et commerciaux) qui interviennent et négocient sur les marchés que ce soit pour le compte de la clientèle ou de la banque elle-même, il constitue l'interface de la banque avec le marché. Il centralise et traite tous les besoins de la salle des marchés et de ses clients en termes de couverture, de financement, d'investissement, de gestion de position, de trading et d'arbitrage. Le front office de la Banque Centrale Populaire est composé de quatre desks : le desk de l'activité commerciale (sales), le desk monétaire, le desk change (forex) et matières premières, et le desk taux et dérivés de taux. Chacun est constitué d'opérateurs de marché (ou traders), qui prennent des positions et gèrent les risques, et de commerciaux (sales) qui sont en relation directe avec les clients.
- Le Middle Office: ce service est chargé de suivre et de contrôler les opérations initiées par les traders de la salle des marchés, plus exactement du Front Office, après avoir vérifié leur conformité à la réglementation. Il est chargé de faire la jonction entre le Front et le Back office. Il saisit sur une base de données toutes les transactions effectuées par le front office et les sales. Enfin, il met en place avec le Front et le Back office des méthodes d'analyse des risques et définit les procédures homogènes par lignes de produits.
- Le Back Office: se charge de l'aspect comptable et assure le traitement administratif des opérations, il assure le suivi administratif et comptable des opérations conclues des Traders. Il enregistre les transactions, informe les clients (entreprises ou institutions), effectue le règlement et la livraison des titres et les reçus des opérations, gère le versement des dividendes des actions et des intérêts des obligations. Il participe également à la mise en place et à l'évolution des procédures et des systèmes informatiques.

2 Taux d'intérêt

Le taux d'intérêt sont les frais qui paye l'emprunteur au prêteur en faveur de lui avoir prêté de l'argent. Toutefois, il existe plusieurs types de taux d'intérêt d'où la difficulté de donner une définition exacte du concept. Présentons les différents types de taux existant sur les marchés financiers. Ces taux peuvent être classé selon la durée de l'emprunt, leurs modes de calcul, et leurs dépendances à l'inflation.

2.1 Conventions de décomptes de jours

La manière de décompter les jours influence les flux. En effet, lorsqu'il s'agit de calculs de flux, la durée de placement intervient toujours. Il est indispensable de préciser les bases de calcul. Les bases de calculs sont des conventions de base qui précisent la méthode de calcul de la fraction d'année f , par exemple pour le calcul du nombre de jours entre deux dates. Si l'on note par $f = \frac{n}{B}$ la fraction d'année écoulée Avec : n est égal au nombre de jours écoulés. B : le nombre de jours d'une année.

Les bases de calcul sont comme suivant:

Exact/Exact Elle sert essentiellement au calcul des intérêts courus sur les marchés des capitaux. B vaut 365 ou 366 lors des années bissextiles.

La base Exact/360 Cette base est essentiellement utilisée pour les taux proportionnels sur les instruments monétaires, c'est-à-dire pour les durées inférieures à 1 an. B vaut 360.

La base 30/360 Pour cette base l'année divisée en 12 mois de 30 jours. On compte le nombre de mois calendaries pleins + les fractions de mois, elle est utilisée sur le marché des swaps.

2.2 Les différents types de taux d'intérêt

2.2.1 Taux simple et taux composé

L'idée est que les intérêts perçus chaque année ne donnent pas lieu à la perception d'intérêts sur les intérêts. Ceci expliquant la dénomination d'intérêts simples : on se contente de calculer les intérêts chaque année comme si il s'agissait d'un nouveau projet d'investissement d'un horizon d'un an (absence de la notion de réinvestissement).

Par opposition aux intérêts simples, les intérêts composés permettent de percevoir à la fois les intérêts et les intérêts des intérêts. Plus précisément, les taux d'intérêt sont dits composés lorsque, à la fin de chaque période de calcul, les intérêts sont ajoutés au capital pour produire de nouveaux intérêts. Les intérêts sont alors dits capitalisés .

Entre intérêts simples et intérêts composés, ce n'est pas le taux nominal qui change, c'est le capital de placement qui varie durant sa période.

2.2.2 Taux nominal/taux réel

Le taux d'intérêt nominal est le taux d'intérêt inscrit sur un contrat de prêt. Il représente ce que l'emprunteur paye au prêteur. En revanche, il est nécessaire de tenir compte de l'inflation et donc de raisonner en terme réel plutôt qu'en terme nominal. Si l'on considère R le taux d'intérêt nominal et π le taux d'inflation, le taux d'intérêt réel s'obtient par : $r = \frac{1+R}{1+\pi} - 1$

Comme les taux ne sont pas très élevés, l'approximation du taux d'intérêt réel est comme suivant : $r = \pi - R$. Il en découle que la richesse de l'emprunteur est d'autant plus grande que l'inflation augmente, et réciproquement pour celle du prêteur.

2.2.3 Taux court et taux long

Le taux d'intérêt varie en fonction du délai de remboursement consenti à l'emprunteur. En effet, il est d'autant plus élevé que la durée du prêt s'allonge. Il doit donc être plus coûteux d'emprunter à vingt ans qu'à un mois, car le risque pris par le créancier est plus important. Ainsi, il importe de distinguer entre taux d'intérêt à long terme et taux d'intérêt à court terme. Il est à signaler que les deux taux d'intérêt expriment l'offre et la demande de capitaux en tenant compte des perspectives d'inflation.

2.2.4 Les taux sans risque ou d'État

Ce sont les taux applicables aux emprunts que font les banques centrales dans leur propre devise. On suppose généralement que ces taux ne présentent pas de risque de défaut (Risk free), en faisant l'hypothèse qu'un État peut toujours rembourser un emprunt dans sa propre devise, ils sont donc souvent appelés taux sans risque. Ce sont ces taux-là qui feront l'objet de cette étude.

2.2.5 Taux de rendement actuel

Le taux de rendement actuel (Yield to Maturity) d'une obligation est le rendement anticipé de cette obligation si elle est détenue jusqu'à maturité. C'est le taux avec lequel on actualise les flux de l'obligation pour déterminer son prix d'émission, ainsi que son prix tout au long de sa durée de vie. Ce taux est à ne pas confondre avec le taux d'intérêt nominal ou facial de l'obligation, ce dernier étant fixe, déterminé à l'émission de l'obligation et servant au calcul des coupons alors que l'autre varie tout au long de la vie de l'obligation et sert à actualiser les coupons et le nominal pour déterminer le prix de l'obligation.

2.2.6 Le taux monétaire et taux actuel

La différence entre le taux monétaire et le taux de rendement actuel se traduit en termes de durée. En effet, le taux monétaire étant le taux d'intérêt du marché monétaire où s'échangent des produits financiers d'une durée de vie inférieure à 1 an, celui-ci correspond à une durée qui ne dépasse pas l'année. Ce type de taux est calculé sur une base de 360 jours dite année commerciale. Par opposition donc aux taux monétaires, les taux actuariels, eux, correspondent à une durée supérieure à 1 an. Les taux de rendement actuariels sont calculés en base nombre de jours exacts. Ainsi, afin de comparer entre taux de court terme et taux de long terme, il faut transformer le taux en base actuarielle afin de tenir compte des intérêts qui ne seront pas versés en fin de période annuelle mais à l'échéance de l'opération. Le passage du taux monétaire au taux actuariel se fait suivant la relation suivante, étant la durée en jours :

$$(1 + T_a)^{\frac{j}{Exact}} = 1 + T_m * \frac{j}{360}$$

Avec j : le nombre de jours (maturité correspondant au taux que l'on veut convertir) T_m : le taux monétaire. T_a : le taux actuariel.

2.2.7 Taux zéro-coupon

Le taux zéro coupon est le taux de rendement actuariel d'un instrument financier ne comportant aucun détachement de coupon jusqu'à la maturité. Il ne donne lieu qu'à deux flux : un flux initial (son prix d'achat) et un flux final de remboursement du nominal plus les intérêts.

2.2.8 Taux forward

Les taux forward sont les taux d'emprunt ou de placement, pour des périodes futures, implicites dans les taux zéro-coupon aujourd'hui. En d'autres termes, le taux forward pour la n-ième année, vu de la date 0, est le taux à 1 an qui devrait être observé au début de la n-ième année pour qu'un placement à n années soit équivalent à la succession de deux placements, le premier sur n - 1 années et le second sur un an.

2.3 Les produits de taux

Un produit de taux est un instrument financier dont le revenu et la valorisation dépendent d'un taux d'intérêt et qui fluctuent ainsi en fonction de la courbe des taux de marché. Cette catégorie englobe toute sorte de titres représentatifs d'une créance :

- Les obligations.
- Les titres de créances négociables communément dits TCN (émis pour couvrir un besoin de financement. On parle de bons du trésor si l'émetteur est l'État, d'un certificat de dépôt si l'émetteur est un établissement de crédit ou une caisse d'épargne, et enfin d'un billet de trésorerie si l'émetteur est une entreprise).
- Les prêts et emprunts de cash.
- Les pensions livrées.
- Les produits dérivés dont le sous-jacent est un taux (Swaps de taux, FRA, futures de taux, options de taux : caps et floors,...) Les instruments qui feront l'objet de cette étude sont les TCN émis par l'État ou encore les obligations d'État à taux fixe, qui sont des titres à revenus fixes et ne portent pas de risque de défaut vu que le paiement est garanti par l'État. Notons que la seule obligation sans risque de réinvestissement est une obligation d'État zéro-coupon, d'où l'intérêt de les étudier. Dans la suite nous appellerons taux d'intérêt spot le rendement des obligations zéro-coupon.

2.4 Le marché des taux

Le marché de taux, comme son nom l'indique, est le marché sur lequel se négocient les produits de taux d'intérêts. On peut distinguer entre les marchés suivants :

2.4.1 Le marché primaire

C'est le marché financier sur lequel les émissions des titres, souverains ou privés, sont proposées par l'État ou des sociétés émettrices à des acheteurs appelés souscripteurs. Ce marché n'est pas localisé parce que la vente initiale de titres aux souscripteurs n'a pas lieu en public. La vente est organisée pour le compte de : L'État (Trésor) par la banque centrale à travers des séances d'adjudications publiques.

L'emprunteur-émetteur par une banque d'affaires qui gère l'émission et garantit le placement de ces titres à un certain prix et les vend au public soit de gré a gré (OTC) soit par le biais d'une offre publique.

2.4.2 Le marché secondaire

C'est le marché sur lequel s'échange les titres précédemment émis sur le marché primaire à des prix qui peuvent s'écartez de la valeur d'émission fixée par l'émetteur. Au fait, le marché secondaire a deux fonctions importantes: En premier lieu, l'existence du marché secondaire rend la revente plus facile et plus rapide par leurs détenteurs: elle les rend plus liquides. Cette liquidité accrue rend les titres plus attractifs aux yeux des souscripteurs et rend donc plus facile l'émission de nouveaux titres par l'entreprise et par la suit plus rentable;

En second lieu, le marché secondaire détermine un prix pour chaque titre, qui fournit à l'investisseur une évaluation de son actif et indique à l'entreprise à quel prix il peut émettre de nouveaux titres sur le marché primaire.

2.4.3 Le marché monétaire

Le marché monétaire est le marché sur lequel se négocie la monnaie, c'est-à-dire que c'est vers ce marché que se dirigent les acteurs du marché monétaire pour négocier leurs besoins en monnaie. On va donc y retrouver Bank Al Maghrib (BAM), les banques, les entreprises, les sociétés de financement. Le marché monétaire est composé du marché interbancaire, du marché des adjudications des Bons du Trésor et du marché des titres négociables

2.4.4 Le marché interbancaire

Le marché interbancaire permet aux banques d'échanger leurs excédents et leurs déficits dans la monnaie nationale. Les acteurs du marché interbancaire sont d'une part, la Banque Centrale du pays (Bank Al Maghrib dans notre cas), chargée de gérer la masse d'argent en circulation, afin que celle-ci corresponde aux besoins réels de l'économie; d'autre part, les banques viennent y chercher l'argent nécessaire à leurs opérations de crédit. Les opérations de prêts et emprunt d'après la banque centrale sont publiées sur leurs sites. En clair, sur le marché interbancaire vont se rencontrer les banques avides de liquides pour leurs crédits et la banque centrale chargée de stabiliser la masse monétaire nationale. Ainsi, le marché interbancaire est réservé aux établissements de crédits sollicitant des prises de pension et répondant aux appels d'offre de Bank Al Maghrib. Un appel d'offre fonctionne comme suit : Bank Al Maghrib met de la monnaie nationale en circulation à un taux d'intérêt qu'elle a fixé, après que les banques aient proposé un taux d'intérêt et la quantité de monnaie qu'elles emprunteraient sous un tel taux. A la fin, seules les banques ayant proposé un taux d'intérêt plus bas que l'appel d'offre ne sont pas servies en monnaie, les autres reçoivent la quantité qu'elles voulaient. Une prise de

pension désigne quant à elle l'initiative d'une banque d'emprunter à très court terme à un taux supérieur à l'appel d'offre. Les interventions de Bank Al Maghrib (prises de pensions et appel d'offre) se font toujours en échange de bons de Trésor, garantissant le remboursement des prêts à échéance.

2.5 La notion du zéro-coupon

Comme spécifié préalablement, le présent rapport porte sur la modélisation de la courbe des taux. Lors de l'établissement de ce travail, parmi les notions qui n'ont cessées de s'affirmer : le taux zéro-coupon ou plus généralement la notion du zéro-coupon . Ainsi, et avant de nous intéresser à traiter le sujet en question, nous avons décidé dans un premier temps de consacrer cette section à ce concept, en allant de sa définition, passant par le lien entre une obligation à coupons avec une obligation zéro-coupon jusqu'au calcul du taux zéro-coupon et son utilité dans le tracé de la structure par terme des taux d'intérêt.

2.5.1 Obligation zéro-coupon

Les obligations sont des titres de créance détenus par un ou plusieurs porteurs à l'encontre d'un emprunteur. Le détenteur d'obligations est un créancier ou obligataire qui perçoit des intérêts tout au long de la durée de vie de l'obligation qu'il détient. A cet effet, chaque titre de créance porte des intérêts appelés coupon. Ces coupons correspondent, dans le cas d'une obligation, au versement des intérêts à intervalles fixes. Les coupons correspondent donc aux tombées d'intérêts réguliers (qui sont en général annuels). Le taux de coupon, i.e. le taux d'intérêt de référence pour calculer le coupon, est négocié à l'émission de l'obligation. Les obligations peuvent revêtir plusieurs formes définies par l'émetteur en fonction de ses objectifs de financement et de la cible visée (taux fixe, taux variable, obligations convertibles etc.).

exemple de propriétés d'une obligation:

	Valeurs
ISIN	MA0002013540
Taux facial	2,90%
Date d'émission	17/11/2014
Date de jouissance	18/01/2015
Date d'échéance	18/01/2016
Taux de valorisation de la courbe	2,57%

Typologie Il existe de multiples catégories d'obligations segmentées selon différents critères :

- Les obligations à taux fixe / les obligations à taux variable selon la nature fixe ou variable du taux de coupon.
- Les obligations d'Etat / les obligations corporate selon la nature publique ou privée de l'émetteur.
- Les obligations à coupon / les obligations zéro-coupon selon l'existence ou non de coupons intermédiaires dans l'échéancier de remboursement.

Une obligation à taux variable est un titre de dette dont les flux ne sont pas parfaitement connus à l'émission. Le coupon d'une obligation à taux variable n'est pas fixe, mais indexé

sur un taux observable (généralement le taux des BDT 52 semaines). A chaque échéance du coupon, la valeur de celui-ci sera calculée en fonction de ce taux de marché. Ceci permet d'annuler le risque de taux car l'émetteur de ce titre est sur qu'a tout instant, il est endetté au taux du marché, ni plus, ni moins.

L'obligation à taux fixe quant à elle, est un titre de dette dont l'échéancier de flux est parfaitement connu à l'émission car le taux du coupon a été fixé à ce moment-la et ne changera pas au cours du temps. C'est un actif financier à travers lequel l'émetteur du titre (emprunteur) accepte de payer au détenteur (créancier), à des dates futures spécifées à l'émission, un ensemble de cashflows (intérêt et principal) dont le montant restera fixe tout au long de la durée de vie de l'obligation. Ces montants sont fixes également à l'émission. Par contre une obligation zéro-coupon est une obligation qui ne verse pas de flux intermédiaires et ne donne ainsi lieu qu'à un seul flux à l'échéance, à l'opposition des obligations qui paient périodiquement des coupons. Il faut insister sur le fait qu'une obligation ZC ne verse que le nominal en fin de vie (à maturité), et non le nominal et un coupon, comme il en serait le cas pour une obligation à coupon d'une maturité d'un an et versant ses coupons sur une base annuelle.

2.5.2 Les taux zéro-coupon

Le taux zéro-coupon (ou taux ZC ou encore taux spot) à n années est le taux d'intérêt obtenu sur un investissement engendrant un seul flux au terme des n années, sans flux intermédiaires. Il constitue le rendement à l'échéance d'une obligation zéro-coupon. le prix d'une obligation zéro coupon est comme suivant:

$$P(0, t) = \frac{1}{1 + R(0, t)}$$

$P(0, t)$ est le prix de marché à la date 0 d'une obligation zéro-coupon délivrant une unité monétaire à la date t et $R(0, t)$ est le taux de rendement en 0 de l'obligation zéro coupon.

Ainsi, le prix des obligations zéro-coupon est obtenu donc par l'actualisation du seul flux futur versé. De façon plus formelle, un zéro-coupon d'échéance t (ou obligation zéro-coupon) est un contrat qui garantit à son détenteur le paiement d'une seule unité monétaire à la date t , sans coupons intermédiaires. En réalité, la plupart des taux observables sur le marché ne sont pas des taux zéro-coupon. Par exemple, le prix d'une obligation à 5 ans qui paye un taux de coupon de 6 % ne définit pas le taux ZC à 5 ans parce qu'une partie de la rentabilité de cette obligation vient des coupons payés chaque année. Un peu plus loin dans ce travail, nous verrons comment déterminer les taux ZC à partir des prix d'obligations à coupon.

Chapitre 2

Gestion obligataire:

3 Un bon de trésor et ses caractéristique:	23
3.1 Obligation à taux fixe:	23
3.2 Obligation à taux variable :	24
4 Émettre un bon de trésor:	24
5 Valorisation des bons du Trésor:	26
5.1 Valorisation normale publiques à taux fixe:	29
5.2 Valorisation atypique publiques à taux fixe:	31
5.3 Autres valorisations:	32
6 Étalement actuel:	34

L'importance donnée aux obligations dans le monde financier , rend leur rôle important et leurs traitements délicat. Plusieurs compagnies d'assurance et de gestion de crédit allouent un grand pourcentage dans leurs portefeuilles aux obligations, d'où la nécessité de gérer les portefeuilles obligataires. Dans ce qui suit, nous verrons comment valoriser les différents types d'obligation, comment suivre l'obligation jusqu'à son achat ou son vente, comment définir sa sur-cote, et vérifié s"elle est bien définie en calculant sont Prix au pieds de coupons avec un "étalement actuariel"

3 Un bon de trésor et ses caractéristique:

l'État met sur le trésor public des titres obligataires , d'où vienne leur nom: bons du trésor, par le biais des opérations d'emprunt et d'achat. Ces bons ont pour intérêt de couvrir le besoin de financement de l'état et rembourser sa dette publique. Vis-à-vis du détenteur d'une obligation, l'émetteur s'oblige à lui rembourser le prêt à son échéance et à lui payer un intérêt sur la somme qu'il avait empruntée, cet intérêt est aussi appelé **coupon**. Nous nous intéressons dans ce qui suit à définir les types de bons du Trésor ainsi que leurs caractéristiques. A noter l'appellation **ligne**: un ensemble de titres ayant les mêmes caractéristiques

3.1 Obligation à taux fixe:

Lorsque le flux de l'échéancier est déterminé au préalable , nous parlerons d'un emprunt obligataire à taux fixe ,le taux d'intérêt est fixé à ce moment-là et ne changera pas au cours du temps. Citons ses caractéristiques:

- **Date d'émission** : Date effective de la souscription et de la libération du bon. C'est aussi la date à partir de laquelle les intérêts commencent à courir.
- **Date de jouissance** : Le jour de versement des intérêts et/ou du principal sur les bons du Trésor.
- **Date d'échéance** : Le jour où doit être éteinte une dette par le paiement du principal et des intérêts.
- **Taux nominal** : Parfois, taux facial; est le taux d'intérêt qui sera appliqué au nominal pour calculer les intérêts.
- **Maturité** : C'est la durée séparant la date d'émission et la date d'échéance.
- **Nominal** : le montant unitaire de chaque titre composant un emprunt. La valeur nominale d'un titre est aussi sa valeur de remboursement à l'échéance.
- **Péridicité de paiement des coupons** : Peut être semestrielle, bisannuelle, ou annuelle.
- **Les emprunts atypiques ou futurs** : Généralement toutes les périodes sur lesquelles courent les coupons sont d'égale durée, le plus souvent l'année. Toutefois, certains emprunts peuvent comporter une ou deux périodes dont la durée n'est pas égale à celle des périodes courantes(atypiques).

3.2 Obligation à taux variable :

Il est à préciser qu'un emprunt obligataire à taux variable est un ensemble de titres de dette dont l'échéancier de flux n'est pas fixe, mais indexé sur un taux observable (généralement un taux à court terme ou un taux obligataire). A chaque échéance du coupon, la valeur de celui-ci sera calculée en fonction de ce taux de marché. Citons ces caractéristiques :

- **L'indice de référence** : il sert à calculer le taux du coupon servi à une échéance déterminée selon les règles précisées dans le contrat d'émission. On utilise généralement les taux représentatifs de l'état des marchés financiers: Taux des emprunts obligataires à court terme, déterminés par exemple par observation des taux moyens pondérés (TMP) des bons du Trésor à 52 semaines. Taux des emprunts obligataires à long terme relevés soit sur le marché primaire ou sur le marché secondaire. Ainsi que les références monétaires.
- **La période de référence** : C'est la durée au cours duquelle est calculé le taux de référence.
- **La marge faciale** : Consiste à ajouter ou à retrancher une marge au taux de référence pour déterminer le taux du coupon.
- **Le taux de substitution** : c'est le taux qui remplacerait une valeur manquante de l'indice de référence lors de la période de référence. Pour calculer le coupon, on ne prend en considération que les indices effectivement établis du début à la fin de chaque période de référence. Dans le cas où aucune valeur de l'indice n'a été effectivement constatée lors de la période de référence, on retiendra comme taux de référence le dernier taux de référence calculé.

4 Émettre un bon de trésor:

Pour émettre un bon de trésor, il faut passer par l'un des modes suivants: par voie d'adjudication, ou par guichet ouvert, bons du Trésor réservés aux banques et émis dans le cadre de la réglementation. Émission des bons du Trésor à 5 ans concernant les comptes convertibles à terme.

Emission par voie d'adjudication: L'émission par voie d'adjudication signifie l'émission par voie d'appel d'offre selon la technique dite à la hollandaise ou à prix demandé. Les soumissionnaires, personnes physiques ou morales résidentes ou non résidentes, présentent plusieurs offres à des prix différents pour un ou plusieurs types de maturités concernés par l'adjudication.

Sur la base du montant global de l'émission, chaque soumissionnaire est servi au prix qu'il a offert, dès lors que celui-ci est supérieur ou égal au prix limite retenu par le Trésor. Les bons du Trésor sont inscrits en compte courant de titres auprès du Dépositaire Central (**Maroclear**) au nom des établissements dont les offres ont été retenues.

Ces bons ont une valeur nominale unitaire de 100.000 dirhams et sont émis pour des échéances longs termes (13, 26 et 52 semaines, 2 ans, 5 ans, 10 ans, 15 ans, 20 ans et 30 ans), et courts termes (entre 7 jours et 45 jours).

D'autre part, ces bons peuvent être émis par assimilation sur des émissions antérieures. Il est possible d'assimiler à un emprunt, des émissions ultérieures présentant les mêmes caractéristiques.

Les émissions consécutives ont donc la même échéance et portent intérêt au même taux que la tranche d'emprunts à laquelle elles sont rattachées. ce mode présente deux avantages : la réduction les frais de gestion et l'augmentation la liquidité .

Séance d'adjudication: Une séance d'adjudication est organisée en trois phases.

Phase d'avant adjudication : Durant cette phase, le Trésor annonce deux types de communications à l'attention de tous les investisseurs sur le marché des adjudications des bons du Trésor. En premier, elle annonce mensuellement le montant du besoin de financement du Trésor à mobiliser. Ensuite, chaque vendredi, elle annonce les caractéristiques des emprunts que le Trésor va émettre lors de la séance d'adjudication .

Phase de l'adjudication : Durant cette phase, les établissements habilités à présenter des soumissions transmettent leurs offres à travers le système télé-adjudication à Bank AL-Maghrib (BAM) au plus tard le mardi à 10h30. BAM communique alors à la Direction du Trésor et des Finances Extérieures (DTFE) les soumissions sous forme ordonnée et anonyme (sur site). La DTFE décide des montants à émettre par maturité. Sur la base du montant global de cette émission, chaque soumissionnaire est servi au prix qu'il a offert, dès lors que celui-ci est supérieur ou égal au prix limite retenu par le Trésor.

Phase d'après adjudication : Au cours de cette phase, les principaux résultats de l'adjudication (montant retenu et prix moyen pondéré) sont portés à la connaissance des établissements soumissionnaires par l'intermédiaire de BAM. Les soumissions retenues donnent lieu à règlement des montants équivalents le lundi suivant la séance de l'adjudication.

Communiqué : Emission de valeurs du Trésor

La Direction du Trésor et des Finances Extérieures annonce aux investisseurs qu'il sera procédé à l'émission par appel d'offres, de bons dans les conditions indiquées ci-après :

Date de séance	:	15 mars 2022
Heure d'ouverture	:	08:30
Heure de clôture	:	11:00
Date de règlement	:	21 mars 2022

Les émissions de bons seront rattachées aux lignes ayant les caractéristiques suivantes :

Code Isin	Maturité	Emission	Echéance	Taux nominal	Coupon couru
-	13 semaines	21/03/2022	20/06/2022	-	0.00
-	52 semaines	21/03/2022	22/05/2023	1.60	0.00
MA0002016766	2 ans	31/01/2022	15/07/2024	1.80	241.64

Figure 1: Extrait d'un communiqué de BAM suite à une séance d'adjudication

Calendrier des émissions : A l'exception des bons à très court terme (maturité ≤ 45 jours) qui sont émis hors calendrier. Les émissions des bons du Trésor s'effectuent :

- Chaque mardi pour les bons du Trésor à 13, 26 et 52 semaines ;
- Le deuxième et le dernier mardi de chaque mois pour les bons à 2, 5, 10 et 15 ans ;
- Le dernier mardi de chaque mois pour les émissions des bons du Trésor à 20 ans et à 30 ans.

5 Valorisation des bons du Trésor:

A Savoir Tous bons du Trésor traité dans ce mémoire est à taux fixe émis par voie d'adjudication chaque mardi, négociables de gré à gré sur le marché monétaire et évalués sur la base de la courbe des taux de référence du Bank Al-Maghrib.

Chaque ligne possède un identifiant appelé "*ISIN*". Cette section a pour but de décrire les différents processus de valorisation des obligations d'Etat à taux fixe (BDT) .

En général, les titres de créances à coupons annuels et à taux fixe remboursables in fine sont évalués en actualisant l'ensemble des montants restant à percevoir sur la durée de vie restante à courir jusqu'à l'échéance de ces titres.

Pré-requis:

Taux de valorisation: Le taux de valorisation est utilisé pour l'évaluation des titres émis par l'État est le taux fourni par la courbe des taux de référence publiée par BAM.

L'estimation de chaque taux de référence équivalent à une maturité est effectuée par une méthode d'interpolation linéaire entre les deux maturités les plus proches. L'adoption d'une telle méthode signifie que l'on suppose que la courbe des taux est linéaire et que le marché est suffisamment liquide pour prendre en considération les transactions y intervenant. Alors qu'en réalité, la courbe des taux n'est pas linéaire et le marché est peu liquide, alors les taux estimés sont biaisés.

Il est à préciser que dans l'intervalle [8 – 13 semaines], l'observation provenant de la courbe des taux publiée par BAM et correspondant à la maturité résiduelle¹ la plus courte sert de référence à toutes les maturités inférieures. Cela revient à considérer que la courbe des taux d'actualisation est plate entre la maturité 0 et le premier point observé dans l'intervalle [8 – 13 semaines].

Ci-suivant l'algorithme permettant de donner la deuxième courbe de BAM correspondante aux taux interpolés:

Commençons par un exemple des taux de la courbe primaire de BAM:

Exemple:²

index	DM	Transaction	TMP	DV	N _i
0	18/4/2022	181.31	0.0153	9/3/2022	40
1	16/5/2022	29.23	0.0154	9/3/2022	68
2	20/6/2022	203.01	0.0155	14/3/2022	98
3	15/8/2022	101.12	0.0156	14/3/2022	154
4	14/11/2022	80.61	0.0159	14/3/2022	245

Table 1: Taux BAM des BDT au 15/03/2022 - extrait

¹Durée entre la date d'échéance et la date actuelle

²(pour 52S 1, r = 1.647%)

Algorithm 1 Algorithme de calcul des taux de référence des BDT

Require: T from table2 ▷ Residual maturity from resulting table
Require: D^v, D^m, Tmp from table1 ▷ Value date, Maturity date, and average rate
 $N_i \leftarrow D_i^m - D_i^v$ ▷ Residual maturity in days for each line
 $i \leftarrow 0, n \leftarrow table1.length, R \leftarrow 0, r \leftarrow 0$ ▷ increment, lenght, Rate, and switch variable

for T in table2 **do**

- while** $i \leq n$ **do**

 - if** $T \leq N_i$ **then**

 - if** $T = 365$ **then**

 - $r \leftarrow ((1 + Tmp_i)^{\frac{N_i}{T}} - 1) * \frac{360}{N_i}$
 - $R \leftarrow (1 + r * \frac{364}{360})^{\frac{T}{364}} - 1$
 - Break while**

 - end if**
 - $R \leftarrow \frac{Tmp_i - Tmp_{i-1}}{N_i - N_{i-1}} * (T - N_{i-1}) + Tmp_{i-1}$
 - Break while**

 - end if**
 - $i \leftarrow i + 1$

end while

end for

Et après avoir appliqué l'algorithme 1 à la table en dessus, les taux résultants sont:

index	Maturité	En jours(T)	Taux (R)
0	13S	91	0.01547
1	26S	182	0.01569
2	52S	364	0.01659
3	52S Act	365	0.01670
4	2A	731	0.01798
5	5A	1826	0.02090
6	10A	3653	0.02496
7	15A	5479	0.02679
8	20A	7305	0.02881
9	30A	10507	0.03164

Table 2: Taux interpolés résultats

Et ajoutant des simples lignes d'extraction d'après le site du **BAM** au code , la construction de la courbe pleine, secondaire, et la transformation par des zéros coupons est désormais possible, veuillez consulter le script python  sous le nom de AUTOZC.ipynb

index	Maturité	En jours	Taux1	Taux2	Taux3	Taux4	Taux5
0	13 Semaines	91	1.4578305084745764	1.45	1.457719298245614	1.45945454545456	
1	26 semaines	182	1.4515555555555555	1.4519206349206348	1.4725274725274724	1.4707666666666668	1.4686190476190477
2	52 Semaines	364	1.606153846153846	1.586843537414966	1.583787610619469	1.5872532467532467	1.5837363636363637
3	52 S Actuariel	365	1.6541077595821356	1.7091895589565778	1.7091895589565778	1.7269287410542122	1.6862955563506956
4	2A	731	1.8391020408163266	1.8335966386554623	1.8201078167115905	1.8001666666666667	
5	5A	1826	2.0413974540311175	2.095794117647059	2.0838047619047617	2.046745891276865	2.0571057692307693
6	10A	3653	2.3795897435897437	2.3795897435897437	2.3795223880597014	2.379419718309859	
7	15A	5479	2.7344128571428574	2.7344128571428574	2.7344128571428574	2.7321804511278196	
8	20A	7305	2.979079000504796	2.979079000504796	2.979079000504796	2.979079000504796	2.966503606557377
9	30A	10507	3.3209381625441696	3.3209381625441696	3.3209381625441696	3.3209381625441696	3.319248524590164

Table 3: Table des taux ZC des cinq premiers jours durant Janvier 2022

Clean price, Dirty price: La distinction entre ces deux prix revient au fait que les négociations se font à base du *Dirty price* :

Prix pied de coupon PPC, clean price: Le cours du titre est mentionné sans tenir compte des intérêts courus non échus. Il permet de comparer des obligations dont le détachement de coupon se fait à des dates différentes.

Le coupon couru correspond à un pourcentage de la valeur totale de l'intérêt qui doit être payé par l'émetteur d'un titre de créance négociable. Le délai écoulé depuis la date du dernier détachement de coupon, dans l'attente de la prochaine date de paiement de l'intérêt, ouvre donc un droit prorata temporis, appelé coupon couru. A ce titre, l'émetteur du titre va percevoir les intérêts courus entre le dernier coupon et le jour de valorisation.

Prix coupon couru PCC, dirty price: L'acquisition d'un titre de créance négociable sur le marché secondaire implique donc le décaissement d'un montant (appelé prix coupon couru PCC) qui est égal au prix coté PPC, plus le coupon couru c'est-à-dire l'intérêt accumulé depuis le dernier détachement de coupon.

5.1 Valorisation normale publiques à taux fixe:

5.1.1 Maturité initiale ≤ 1 an:

Soit : N le nominal, T_f le taux facial, M_i la maturité initiale, M_r la maturité résiduelle, T_r le taux de rendement, IC intérêts courus.

$$PCC = N * \frac{1+T_f * \frac{M_i}{360}}{1+T_r * \frac{M_r}{360}}$$

$$IC = N * T_f * \frac{\Delta t}{360}$$

$$PPC = PCC - IC$$

^aDifférence de date entre Date de valorisation et et date du dernier coupon

	Valeurs
Nominal :	100 000 MAD
Taux facial	3.67%
Taux de rendement	3.65%
Date de jouissance	09/02/2009
Date d'échéance	10/08/2009
Date de valorisation	12/02/2009
Maturité résiduelle	179 jours
Prix	100 039 .81 MAD

Table 4: BDT 26 semaines

Sous excel:

Cette formule permet de calculer l'intérêt couru non échu d'un titre dont l'intérêt est perçu à l'échéance.

INTERET.ACC.MAT() / ACCRINTM()

Cette formule permet de calculer le prix pied de coupon

PRIX.TITRE.ECHEANCE() / PRICEMAT()

5.1.2 Maturité initiale ≥ 1 an et Maturité résiduelle ≤ 1 an:

$$PCC = N * \frac{1+T_f}{1+T_r * \frac{M_r}{360}}$$

$$IC = N * T_f * \frac{\Delta_t}{360}$$

	Valeurs
Nominal :	250 000 MAD
Taux facial	6.99%
Taux de rendement	3.60%
Date de jouissance	28/06/1999
Date d'échéance	28/06/2009
Date de valorisation	12/02/2009
Maturité résiduelle	136 jours
Prix	263 886 .15 MAD

Table 5: BDT 10A , $M_r < 1$

Sous excel:à base Exact/360 (2)

Cette formule permet de calculer dans ce cas l'intérêt couru non échu d'un titre dont l'intérêt est perçu à l'échéance.

INTERET.ACC() / ACCRINT()

Cette formule permet de calculer le prix pied de coupon

PRIX.TITRE() / PRICE()

5.1.3 Maturité initiale ≥ 1 an et Maturité résiduelle ≥ 1 an:

$$PCC = N * \frac{1}{\frac{M_r}{(1+T_r)^A}} * \sum_{i=1}^n \frac{F_i^b}{(1+T_r)^{i-1}}$$

$$IC = N * T_f * \frac{\Delta_t}{A}$$

^a366 ou 365

^bCashflow: Coupon et / ou nominal

	Valeurs
Nominal :	100 000 MAD
Taux facial	3.65%
Taux de rendement	4.60%
Date de jouissance	05/02/2007
Date d'échéance	05/02/2022
Date de valorisation	12/02/2009
Maturité résiduelle	4741 jours
Prix	90 935.66 MAD

Table 6: BDT 15A , $M_r > 1$

Sous excel: à base Exact/Exact (1)

Cette formule permet de calculer dans ce cas l'intérêt couru non échu d'un titre dont l'intérêt est perçu à l'échéance.

INTERET.ACC() / ACCRINT()

Cette formule permet de calculer le prix pied de coupon

PRIX.TITRE() / PRICE()

5.2 Valorisation atypique publiques à taux fixe:

Rappel Une ligne atypique est une ligne dont le premier ou dernier coupon est irrégulier, si c'est le premier , la ligne est appelée postérieure.

5.2.1 Maturité résiduelle ≤ 1 an:

$$PCC = N * \frac{1+T_f * \frac{M_i}{A}}{1+T_r * \frac{M_r}{360}}$$

$$IC = N * T_f * \frac{\Delta_t^2 \textcolor{teal}{a}}{A}$$

^aDifférence de date entre Date de règlement et et date d'émission du coupon

	Valeurs
Nominal :	100 000 MAD
Taux facial	2.90%
Taux de rendement	2.57%
Date de jouissance	18/01/2015
Date d'échéance	18/01/2016
Date d'émission	17/11/2014
Dirty Price	101 628,87 MAD

Table 7: BDT 52 semaines atypique

5.2.2 Maturité résiduelle ≥ 1 an:

$$PCC = \frac{N}{(1+T_r)^{\frac{M_r}{A}}} *$$

$$\left[\frac{T_f * \Delta_t^3 \textcolor{teal}{a}}{A} + \sum_{i=1}^n \frac{T_f}{(1+T_r)^{i-1}} + \frac{1}{(1+T_r)^{n-1}} \right]$$

$$IC = N * T_f * \frac{\Delta_t^2}{A}$$

^aDiff date entre date du premier coupon et la date d'émission

	Valeurs
Nominal :	100 000 MAD
Taux facial	3.90%
Taux de rendement	3.89%
Date d'émission	19/01/2009
Date de jouissance	14/02/2009
Date d'échéance	14/02/2011
Date de valorisation	12/02/2009
Date du 1er coupon	14/02/2010
Maturité résiduelle	756 jours
Maturité résiduelle	732 jours
Dirty Price	100 265.33 MAD

Table 8: BDT 5A atypoque, $M_r > 1$

Sous excel:

Cette formule permet de calculer le prix d'un d'un titre dont le premier coupon est irrégulier.

PRIX.PCOUPON.IRREG() / ODDFPRICE()

Cette formule permet de calculer le prix d'un d'un titre dont le dernier coupon est irrégulier.

PRIX.DCOUPON.IRREG() / ODDLPRICE()

5.3 Autres valorisations:

5.3.1 Valorisation à taux fixe remboursables in fine émis par des émetteurs privés:

L'évaluation des titres de créances à taux fixe émis par des émetteurs privés s'effectue de la même manière que celle des titres émis par des émetteurs publics, à la seule différence de l'ajout d'une prime de risque aux taux des Bons du Trésor utilisés pour l'évaluation.

Ainsi les mêmes formules restent valable si :
 T_r est remplacé par $T_a + P$
où : T_a : le taux d'actualisation au moment de l'évaluation, utilisé pour la valorisation des titres émis ou garantis par l'état P : la prime de risque à l'émission

	Valeurs
Nominal	100 000 MAD
Taux facial	5.49%
Taux de rendement	4.31%
Date de jouissance	12/12/2008
Date d'échéance	12/12/2015
Date de valorisation	12/02/2009
Maturité résiduelle	2494 jours
Prime de risque	1.10 %
Dirty Price	101 352.3 MAD
l'obligation HOLCIM 7ans	

5.3.2 Valorisation à coupons annuels et à taux révisable remboursables in fine:

Ces titres sont caractérisés par une révision périodique du taux d'intérêt en partant d'un taux de référence, conformément aux dispositions stipulées dans la note d'information adressée par l'émetteur, majoré d'une prime de risque dans le cas d'une émission de dette privée.

Ainsi, le taux d'actualisation sera déterminé sur la base de la fréquence d'indexation (si la fréquence est annuelle, le tire va être assimilé à du 52s et sera valorisé par le truchement de la courbe BAM majoré le cas échéant d'une prime de risque pour les titres privés) et le taux facial sera égal au taux révisé.

	Valeurs
Date de jouissance	2/02/2019
Date d'échéance	12/02/2029
Taux facial	4.55%
Prime de risque	0.70%
Périodicité de révision	Annuelle
Taux de rendement	3.75%
Taux de valorisation	3.75%+0.70%= 4.45%
Nominal	100 000 MAD
Date de valorisation	09/03/2022
Maturité résiduelle	365 jours

Table 9: obligation fictive BCP 10A

1ère année:

$$Prix = 100000 * \frac{1 + 4.55\%}{1 + 4.45\% * 365/360}$$

2ème année:

Révision du taux au 9/3/2022: Taux du 52s (courbe BAM au 9/3/2022)+prime de risque à l'émission).

- Taux du 52s au 9/3/2022 : 3.65%
- Taux révisé = 3.65%+0.70%=4.35%

Nouvelles caractéristiques:

	Valeurs
Date de jouissance	12/02/2019
Date d'échéance	12/02/2029
Taux facial	4.35%
Prime de risque	0.7%
Périodicité de révision	Annuelle
Taux de rendement	3.60%
Taux de valorisation	3.60%+0.70%= 4.30%
Nominal	100 000 MAD
Date de valorisation	12/03/2022
Maturité résiduelle	362 jours

$$Prix = 100000 * \frac{1 + 4.35\%}{1 + 4.30\% * 362/360}$$

5.3.3 Valorisation à coupons annuels et à taux fixe remboursables par amortissement linéaire constant:

Détermination du taux d'intérêt: Le taux de rendement des titres de créances à coupons annuels et à taux fixe remboursables par amortissement linéaire constant est obtenu en ajoutant au taux souverain une prime de risque dans le cas d'une émission privée. Le taux souverain étant celui des Bons du Trésor de même nature (amortissable sur n années).

La méthodologie est la suivante :

- Reconstitution de la courbe zéro coupon à partir de la courbe in fine.
- Calcul du taux actuel amortissable correspondant à un prix de 100% à partir de la courbe zéro coupon.(Nous le verrons après).
- Calcul du prix des titres :

Le prix du titre est calculé en construisant un tableau d'amortissement de l'emprunt comprenant tous les flux (amortissement + coupon) par date puis en actualisant les flux avec la courbe zéro-coupon. A chaque flux correspond un taux d'actualisation zéro-coupon Z_i trouvé par interpolation entre les différentes maturités pleines zéro-coupon :

$$P = \frac{1}{A(1 + Z_i)^{n_j}} * \frac{\sum F_i}{(1 + Z_i)^{i-1}}$$

avec n le nombre de coupons, et n_j : jours restants jusqu'à prochain coupon.

6 Étalement actuel:

Une fois l'obligation ou le bon de trésor est valorisé et coté sur le marché, l'obligation est l'objet l'une des deux positions, position longue (*buy bond*), ou bien une position courte (*Sell bond*).

Mais avant de procéder à la clôture de la position, un calcul est primordial afin de vérifier la sûreté du prix calculé et de ne pas tomber dans la ruine, ce calcul est nommée : **Étalement actuel** des intérêts (Accrued interests)

Pour un type d'obligation tel que les bons de trésor, les intérêts sont calculés et payés par intervalles fixes (par exemple, annuellement ou semestriellement). La propriété des obligations peut être transférée entre différents investisseurs non seulement au moment du paiement des coupons, mais aussi à tout moment entre les coupons.

Les intérêts courus permettent de résoudre le problème de la propriété du prochain coupon si l'obligation est vendue entre deux coupons : Seul le propriétaire actuel peut recevoir le paiement du coupon, mais l'investisseur qui a vendu l'obligation doit être indemnisé pour la période pendant laquelle il a possédé l'obligation. En d'autres termes, l'ancien propriétaire doit recevoir les intérêts qui ont couru avant la vente.

Dans la plupart des cas, l'obligation n'est pas vendu au par³, donc les intérêts courus doivent couvrir la sur-cote⁴ afin que le prix de l'obligation revient à 100% du nominal pour le nouveau client.

³Prix du vente est différent à 100% (prix du nominal)

⁴différence entre les deux prix

Le calcul se fait comment suivant:

Pour chaque mois:

Pour la première année:

- Calcul des jours séparant la date de vente et les mois qui arrivent.
- Calcul du AER: Accrued at effective rate, les intérêts au taux effectif.
- Calcul du AEL: Accrued at linear rate, les intérêts au taux du faciale.
- Calcul de la différence des intérêts Δ_a
- Calcul des positions mensuelles (également)⁵, par la soustraction de la différence du mois actuel , la différence du mois passé.

Pour les années qui suivent: les seules différences sont:

- La différence est entre chaque fin de mois et la date du versement du coupon.
- la formule du AER, au lieu de capitaliser seulement le montant brut, on y ajoutent les différences calculées des année qui précédent par mois.

Les étapes et formules nécessaire pour étaler une position sur une obligation sont données pat l'algorithme suivant:

⁵pour le premier mois et le mois suivant la date du coupon, la position est égale à la différence

Algorithm 2 Algorithme d'étalement d'une obligation

Require: $N \geq 0, Q_t \geq 0, Price \geq 0$ ▷ Face Value, Quantity, Price
Require: $R, Yld \geq 0$ ▷ Rate & Yield
Ensure: $D_t \geq D_i, \leq D_m$ ▷ Trade, issue & maturity
 $X \leftarrow Price$ ▷ in %
 $n \leftarrow Qt$ ▷ Quantity
 $Surge \leftarrow (X - 100\%) * n * N$
 $GA \leftarrow F * n * N$ ▷ Gross amount
 $n_j \leftarrow 0, AER \leftarrow 0, ALR \leftarrow 0, \Delta^a \leftarrow 0, A \leftarrow GA, CAP \leftarrow 0, \alpha_0 \leftarrow 0$
 $Date \leftarrow D_t$
while $Date < D_m$ **do** ▷ While bond available
 for $i \leftarrow Date.month$ to $D_m.month$ **do** ▷ Increments in months !
 $n_i = D_m.month - Date.month$ ▷ Difference between months in days
 if $Date = ENDofCoupon'sDate'smonth$ **then**
 $A_i \leftarrow A_{i-2}$ ▷ Sum on same month for past years
 $\alpha_i = \Delta^a$
 else if $Date = Coupon'sDate$ **then**
 $\alpha_i \leftarrow NULL$ ▷ no position on coupon dates'
 $A_i \leftarrow A_{i-12}$
 end if
 $AER_i = A_i * [(1 + Yld) ** (n_i / 366) - 1]$
 $ALR_i = R * N * Q_t * n_i * 366$
 $\Delta_i^a = AER - ALR$
 $\alpha_i = \Delta_i^a - \Delta_{i-1}^a$
 end for
 $Date \leftarrow Date + 1$ ▷ Increments in years !
end while

Exemple: Etant donné ces caractéristiques:

Données	
Face Value	100 000 MAD
Taux facial	4.00%
Taux de rendement	2.60%
Issue Date	5/18/2015
Maturity Date	8/5/2030
Trade Date	6/29/2017
First coupon	8/5/2016
Second coupon	78/5/2017

Données	
Deal	Sell
Quantity	25000
Price	115.37%
Base	366 jours
Surge	38,432,825.00
Gross Amount	288,432,825.00

Table 10: BDT 15A

Résultats:

Tout calcul fait, nous aboutissons aux résultats suivants:

Date	n_i	AER	AEL	Δ_i^a	α_i
6/30/2017	2	40,568.90	54,794.52	-14,225.62	-14,225.62
7/31/2017	33	670,117.01	904,109.59	-233,992.58	-219,766.96
8/5/2017	37	751,449.04	1,013,698.63	-262,249.59	
8/31/2017	27	547,717.16	739,726.03	-192,008.87	-192,008.87
6/30/2030	330	6,097,760.59	9,041,095.89	-2,943,335.30	-332,058.98
7/31/2030	361	6,592,663.56	9,890,410.96	-3,297,747.40	-354,412.11
8/5/2030	365	6,964,936.20	10,000,000.00	-3,035,063.80	

Table 11: Head an tail of Accrued intrest of a treasury bond

Afin de vérifier si notre position de vente au coût (sell Price) est bonne, et que notre calcul est correcte, la sur-cote doit être égale à la somme des positions de chaque mois : $Surge = \sum_i \alpha_i$

Une erreur de différence signifiera que: soit on s'est trompé du calcul de prix de l'obligation ce qui enduira une perte ou un gain dans le résultat final, soit que les arrondis systématiques ou une erreur paramétrage est survenue. De toute façon ,on s'attend à une différence minime n'impactant pas le résultat final.

Chapitre 3

Titre à venir:

7 Modèles de taux:	40
Modèles affines:	40
7.1 Vasicek:	40
7.2 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross	42
7.3 Hull White:	42
7.4 Nelson, Siegle & Svensson:	43
7.5 Estimation des paramètres:	44
Filtre de Kalman:	45

7 Modèles de taux:

La réalisation pratique des modèles entamés dans cet étude est disponible sur le lien 

Modèles affines:

Soit une obligation $P(t, T)$, avec $0 \leq t \leq T$. Soit A , et B deux fonctions déterministes:

Si $\mathcal{P}(t, T) = \exp(\mathcal{A}(t, T) - \mathcal{B}(t, T) * r_t)$, on dit que le modèle de taux est à structure affine.

Pour un modèle de dynamique:

$$dr_t = \mathbf{f}(t, r_t)dt + \mathbf{g}(t, r_t)dW_t$$

avec W_t un processus de Wiener

Et pour une obligation Zero-coupon suivant EDP suivante:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} + (\mathbf{f} - \mathbf{g} * \mathbf{q}) \frac{d\mathcal{P}}{dr} + \frac{\mathbf{g}^2}{2} \frac{d\mathcal{P}^2}{dr^2} - r\mathcal{P} = 0$$

avec \mathbf{q} la prime de risque, indépendante de t sous AOA.

si on pose

- $\mathbf{f}(t, r_t) = \alpha(t) * r_t + \beta(t)$
- $\mathbf{g}(t, r_t) = \sqrt{\gamma(t) * r_t + \delta(t)}$

et avec les conditions terminales: $\mathcal{A}(T, T) = \mathcal{B}(T, T) = 0$

Les fonctions déterministes suivront les EDP suivantes:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{B}}{dt} + \alpha(t)\mathcal{B}(t, T) - \frac{1}{2}\gamma(t)\mathcal{B}(t, T)^2 &= -1 \\ \frac{d\mathcal{A}}{dt} &= \beta(t)\mathcal{B}(t, T) - \frac{1}{2}\delta(t)\mathcal{B}(t, T)^2\end{aligned}$$

7.1 Vasicek:

Le modèle de Vasicek (1977) est l'un des premiers modèles stochastiques de la structure à terme des taux d'intérêt. Ce modèle, bien qu'il ait ses défauts, présente de nombreux avantages, tels que sa tractabilité analytique et ses caractéristiques de réversion moyenne. Il peut être considéré comme un modèle type de taux court.

Plusieurs modèles de taux courts ont leurs fondements sur le modèle de Vasicek, citons le modèle classique Hull-White (1990) qui est une extension du modèle de Vasicek avec des paramètres dépendant du temps.

Dynamique de taux: le modèle de Vasicek suit la dynamique suivante:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dB_t$$

avec:

- a : la vitesse de retour à la moyenne
- b : la moyenne au retour
- σ volatilité à court terme
- B_t : Processus à mouvement brownien à t

Etant donné un espace probabilisé muni d'une filtration \mathcal{F} , la résolution de la dynamique par EDP donne:

$$r_t = \exp(-a(t-s))r_s + b(1 - \exp(-a(t-s))) + \sigma \int_s^t \exp(-a(t-u)) dB_u$$

on définit l'espérance et la variance relatives au modèles par:

$$E(r_t/\mathcal{F}_f) = \exp(-a(t-s))r_s + b(1 - \exp(-a(t-s)))$$

$$V(r_t/\mathcal{F}_f) = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp(-2a(t-s)))$$

quand t tend vers l'infini:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} E(r_t/\mathcal{F}_f) = b \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} V(r_t/\mathcal{F}_f) = \frac{\sigma^2}{2a}, \text{ et donc } r_t \sim \mathcal{N}(b, \frac{\sigma^2}{2a})$$

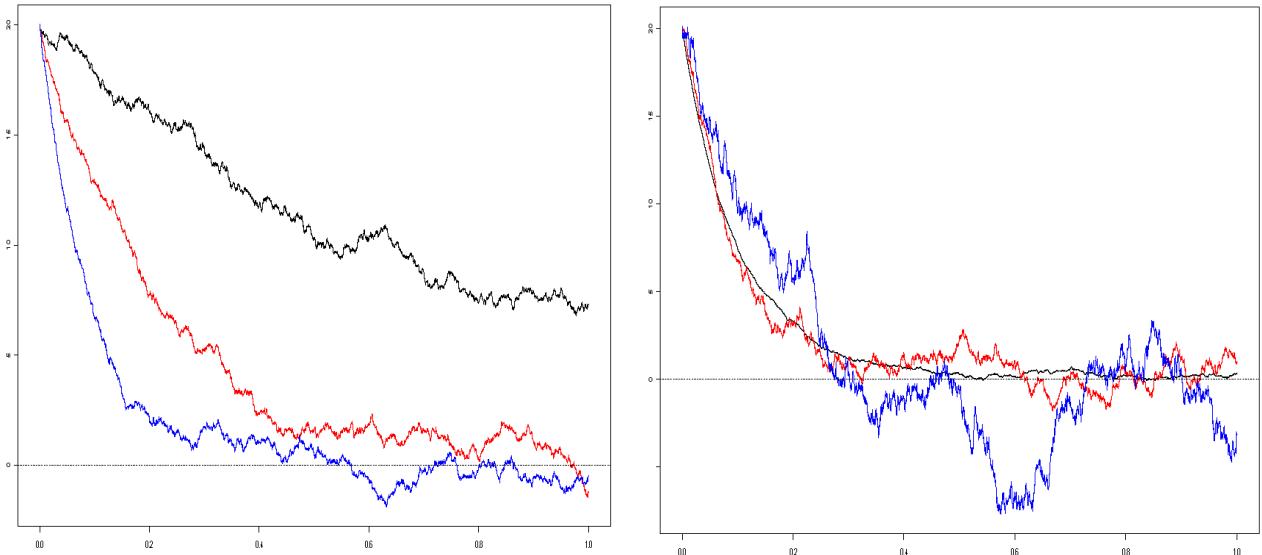


Figure 2: Construction d'une courbe Vasicek pour $\theta = 0$, a varie à gauche, σ varie à droite

La structure affine du modèle de Vasicek:

$$\mathcal{B}(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

$$\mathcal{A}(t, T) = \exp \left[\frac{(\mathcal{B}(t, T) - T + t)(a^2 b - \sigma^2/2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 \mathcal{B}(t, T)^2}{4a} \right]$$

7.2 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Comme vu dans les processus qui précédent, les taux peuvent passer au dessous du zéro, chose qui reste défavorable lors de la modélisation d'une courbe, ici vient le modèle Cox-Ingersoll-Ross corriger ce défaut:

Dynamique de taux:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

avec W_t un processus de Wiener, et les paramètres du modèles du Vasicek coïncident avec celui de CIR

La structure affine du modèle de CIR:

$$A(t, T) = \left(\frac{2h \exp((a+h)(T-t)/2)}{2h + (a+h)(\exp((T-t)h) - 1)} \right)^{2ab/\sigma^2}$$

$$B(t, T) = \frac{2(\exp((T-t)h) - 1)}{2h + (a+h)(\exp((T-t)h) - 1)}$$

avec $h = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$

7.3 Hull White:

Le modèle de Hull White diffère du modèle de Vasicek en étant à moyenne et à vitesse de retour variable, il pourrait être utilisé afin d'introduire le modèle de Hoo-Lee, black et Krasinski.

Dynamique de taux pour une facteur: le modèle de Hoo-lee suit la dynamique suivante:

$$dr_t = a(t) * (b(t) - r_t)dt + \sigma dB_t$$

Dynamique de taux pour deux facteurs: Afin de rendre le modèle stochastique, une composante u_t est ajoutée à la dynamique pour modélisée l'effet aléatoire:

$$dr_t = (\theta(t) + u(t) - a(t) * r_t)dt + \sigma_1 dB_t^1$$

$$du_t = -b(t) * u(t)dt + \sigma_2 dB_t^2$$

avec, $\theta = b/a$, et $dB_t^1 dB_t^2 = \rho dt$

La structure affine du modèle de CIR:

Pour $P(S, T) = A(S, T) \exp(-B(S, T)r(S))$

$$\mathcal{B}(S, T) = \frac{1 - \exp(-\alpha(T-S))}{\alpha}$$

$$\mathcal{A}(S, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, S)} \exp \left(-B(S, T) \frac{\partial \log(P(0, S))}{\partial S} - \frac{\sigma^2(\exp(-\alpha T) - \exp(-\alpha S))^2(\exp(2\alpha S) - 1)}{4\alpha^3} \right)$$

7.4 Nelson, Siegle & Svensson:

Bien que divers modèles se présentent afin de modéliser la courbe des taux, or que chacun à ses défaut et ses avantages, le modèle de [Nelson and Siegel \(1987\)](#) apporte une nouvelle approche: l'approche par paramétrisation;

$$f(t, t + m) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)$$

Les paramètres β_0 et τ_1 sont supposés positifs, β_1 est négatif pour une courbe décroissante, et positif pour une courbe positif, puis β_2 .

- Le premier facteur a une forme relativement plate, il donne le niveau moyen de la courbe.
- Le second donne les inversions de la courbe autour d'un point, il s'agit d'un facteur de pente.
- Le troisième facteur est un facteur de courbure [Svensson \(1994\)](#), propose de rajouter un 4ème terme pour laisser plus de flexibilité lors de la calibration

$$f(t, T) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{T}{\tau_1}\right) + \beta_2 \frac{T}{\tau_1} \exp\left(-\frac{T}{\tau_1}\right) + \beta_3 \frac{T}{\tau_2} \exp\left(-\frac{T}{\tau_2}\right)$$

La courbe de taux résultante est:

$$R(t, T) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau_1}}}{\frac{T}{\tau_1}} + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau_1}}}{\frac{T}{\tau_1}} - e^{\frac{-T}{\tau_1}} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{\frac{-T}{\tau_2}}}{\frac{-T}{\tau_2}} - e^{\frac{T}{\tau_2}} \right)$$

La différence entre les deux modèles est la forme de la courbe, celui de Nelson-Siegel a 'une courbure' (one-hump) alors que celui de Svensson a 'deux courbures' (two-hump).

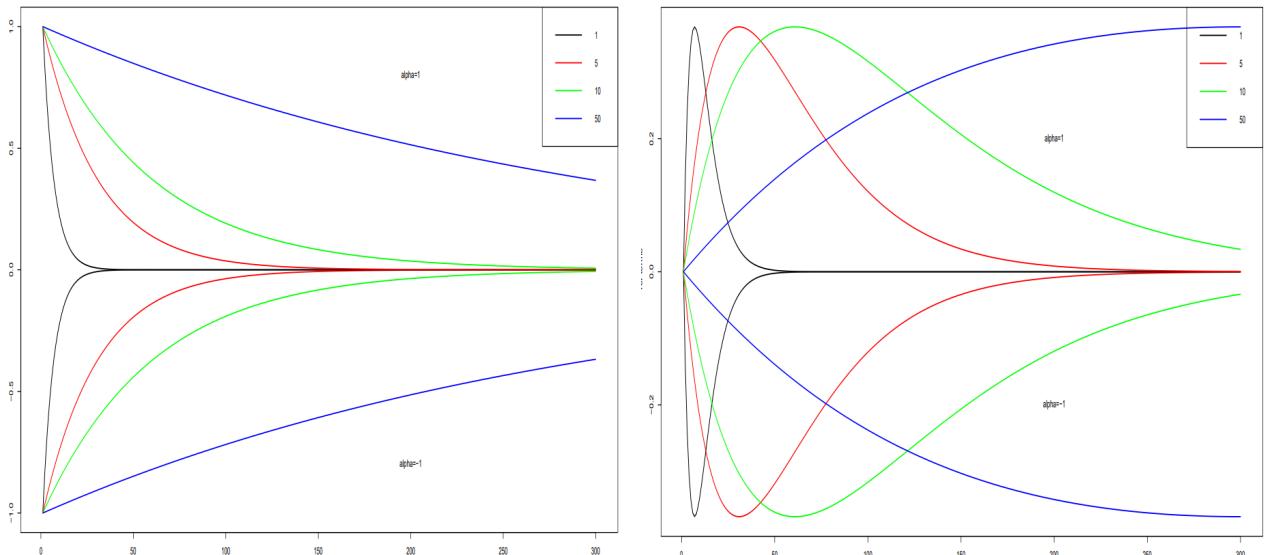


Figure 3: Modèle de Svensson: Fluctuation du terme τ_1 dans le 1er terme vs dans le 2ème terme

7.5 Estimation des paramètres:

Pour mon étude, j'utiliserai le modèle DNS: Dynamique nelson siegel, qui prend en compte la variabilité des paramètres dans le temps tout en étant indépendants, ceci fut proposé par Diebold and Li (2006), le modèle devient:

$$R(t, T) = L_t + S_t \frac{1 - \exp(-T/\tau)}{T/\tau} + C_t \left(\frac{1 - \exp(-T/\tau)}{T/\tau} - \exp(-T/\tau) \right)$$

où L_t , S_t , et Ct sont des paramètres latents variant dans le temps qui ont la même interprétation que $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ dans le modèle original de Nelson-Siegel. L_t , S_t , et Ct représentent le niveau, la pente et la courbure de la courbe des taux.

Les paramètres suivent des processus **AR(1)**, à hypothèse qu'il sont indépendants, alors j'ai intérêt à résoudre:

$$\begin{pmatrix} L_t - \mu_L \\ S_t - \mu_S \\ C_t - \mu_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{t-1} - \mu_L \\ S_{t-1} - \mu_S \\ C_{t-1} - \mu_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_t(L) \\ \eta_t(S) \\ \eta_t(C) \end{pmatrix}, \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} q_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33}^2 \end{pmatrix}$$

le système devient:

$$\begin{aligned} X_t &= (I - A)\mu + AX_{t-1} + \eta_t \\ Y_t &= BX_t + \epsilon_t \end{aligned}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathcal{Q} & 0 \\ 0 & \mathcal{H} \end{pmatrix}$$

$\eta_t \sim \mathcal{N}(0, \mathcal{Q})$ matrice Var_Cov des résidus du système
 $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \mathcal{H})$ et B la matrice des termes du modèles

La résolution nécessite des valeurs initiales dont Diebold and Li (2006) a proposé, $X_0 = \mu$ et $\Sigma_0 = V$, où subis l'équation $V = AVA' + Q$, la prédiction dévient:

$$X_{t|t-1} = (I - A)\mu + AX_{t-1} + \eta_t$$

$$\Sigma_{t|t-1} = A\Sigma_{t-1}A' + Q$$

Filtre de Kalman:

Le filtre de Kalman est un filtre à réponse impulsionale infinie⁶ qui estime les états d'un système dynamique à partir d'une série de mesures incomplètes . Le nom vient du mathématicien et informaticien américain **Rudolf Kalman**.

Le filtre de Kalman est utilisé dans tous les domaines où l'information est incertaine .Le filtre de Kalman fera souvent un très bon travail pour déterminer ce qui s'est réellement passé. Et il peut tirer parti de corrélations entre des phénomènes loufoques qu'on peut pas pensé à exploiter !

Les filtres de Kalman sont idéaux pour les systèmes qui évoluent en permanence. Ils ont l'avantage d'être peu gourmands en mémoire (ils n'ont pas besoin de conserver d'historique autre que l'état précédent), et ils sont très rapides, ce qui les rend bien adaptés aux problèmes en temps réel et aux systèmes embarqués. Il repose sur deux équations majeures

On se basera sur l'article publié par [Wells \(1996\)](#) afin d'expliquer le raisonnement mathématique:

L'équation du système est la suivante:

$$x_t = \phi x_{t-1} + v_t$$

Cet équation est connue comme l'équation de transition ; le vecteur x_t est le vecteur d'état du système ; sa dimension est k*1. Ce vecteur contient des informations sur le système à l'instant t.

ϕ est une matrice k*k connue par la matrice de transition. v_t est la perturbation aléatoire du système ,supposé être normalement distribuée avec une moyenne de zéro et une matrice de covariance de Σ . On suppose en outre qu'elle n'est pas corrélée dans le temps.

Comme l'équation est une équation aux différences stochastique du premier ordre, elle nécessite des valeurs initiales. Ainsi, l'état initial, x_0 , ainsi que sa matrice de covariance, P_0 , sont supposés être connue. Nous notons que l'équation précédente n'est pas la forme la plus générale de l'équation de transition. (chaque problème nécessite une équation de transition unique à lui même)

L'équation de transition est la première partie du modèle ; la seconde est l'équation d'observation qui relie l'état à la sortie ou à l'observation du système :

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}_t \mathbf{x}_t + \epsilon_t$$

y_t est la sortie au temps t. C_t est de dimension 1*k et ϵ_t est une perturbation normalement distribuée avec une moyenne nulle et une covariance de σ^2 . Même ce terme d'erreur est supposé être non corrélé en série.

De plus, On suppose l'indépendance de v_t et de ϵ_t .

Comme le suggère Kalman, le terme $C_t x_t$ peut être considéré de manière heuristique comme le "message" du système et y_t comme le "signal" : le signal est donc constitué du message plus le bruit.

⁶Un filtre à réponse impulsionale infinie ou filtre RII (en anglais infinite impulse response filter ou IIR filter) est un type de filtre électronique caractérisé par une réponse basée sur les valeurs du signal d'entrée et ses valeurs antérieures.

Pour une modélisation linéaire, on prévoit:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t(\mathbf{y}_t - \mathbf{C}_t\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})$$

La matrice K_t est la fameuse gain de Kalman. À partir des valeurs initiales de l'état, x_0 , et de sa matrice de covariance, P_0 , les récursions forment d'abord l'estimation de l'état et de sa covariance pour la première période. A l'itération suivante, on utilise le résultat de la première période comme point de départ. Par conséquent, en traitant la période t - 1 comme la période initiale , l'estimation de l'état et de sa covariance à l'instant t, conditionnellement aux l'information disponible en t - 1 est :

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} = \phi\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \phi\mathbf{P}_{t-1|t-1}\phi' + \Sigma$$

Lorsqu'on a une nouvelle observation de la sortie - et dans le cas de paramètres variant dans le temps - et de l'élément correspondant de C_t devient disponible, nous pouvons obtenir l'erreur de prédiction à un pas en avant, v_t , et sa variance, f_t , qui est un scalaire puisqu'il n'y a qu'une seule sortie du système :

$$v_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{C}_t\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$$

$$f_t = \mathbf{C}_t\mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{C}'_t + \sigma^2$$

Compte tenu des nouvelles informations, l'état et sa covariance peuvent maintenant être mis à jour. Ils sont maintenant conditionnés par l'information disponible en t.

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t v_t$$

$$\mathbf{P}_{t|t} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{C}_t)\mathbf{P}_{t|t-1}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{C}'_t(\mathbf{C}_t\mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{C}'_t + \Sigma)^{-1}$$

La dernière équation représente la matrice de gain de Kalman.

Quelques points concernant ces équations

Le premier point concerne l'hypothèse selon laquelle les termes d'erreur suivent une distribution gaussienne. Le filtre de Kalman donne une solution optimale au problème de l'estimation et de la mise à jour de la variable d'état du système. Si les termes d'erreur sont gaussiens, alors le filtre fournit une estimation de l'état qui est la meilleure disponible. Le terme "meilleure" doit être interprété comme le minimum de l'estimateur carré moyen (MMSE). Cette estimation est la moyenne conditionnelle telle qu'elle est exprimée dans la première équation. Cependant, si la distribution des erreurs n'est pas gaussienne, le filtre produit toujours une estimation optimale si nous limitons notre attention à la classe des estimateurs linéaires. Dans ce cas, nous parlons d'un estimateur linéaire à moyenne quadratique minimale (MMSLE). Un deuxième point à noter est que le MMSE et le MMSLE⁷ sont tous deux sans biais. En d'autres termes, la valeur attendue de l'estimation correspond à l'état réel.

⁷minimum mean square estimator and minimum mean square linear estimator

le package sur python Dynamic Nelson Siegel Svensson Kalman Filter permet de réaliser numériquement la solution des équations ci dessus.

La réalisation de cet étude nécessite une extraction massive de données liée aux taux zéro coupon.

En premier temps, construire la courbe pleine d'après la courbe BAM publiée chaque jour sur le site, puis transformer les taux en Zéro-coupon (Cf chapitre introductif).

Ceci doit être réalisé en maturité et en jour, ce qui rend la tâche quasi-impossible. D'où la nécessite d'un outil d'extrapolation et de traitement des séries temporelles.

Cet outil est disponible sur le site  sous le nom de AUTOZC.ipynb

La base de données résultante est une série temporelle des taux de rendements des obligations zéro-coupon de maturité variante d'une année jusqu'à 30 ans, et datant du 11/25/1985 (jours ouvrables seulement)

Ensuite nous exploitons l'avantage du filtre de *Kalman* afin de "lisser" la courbe. Nous pourrons voir comment l'incertitude se manifeste sur les graphes:

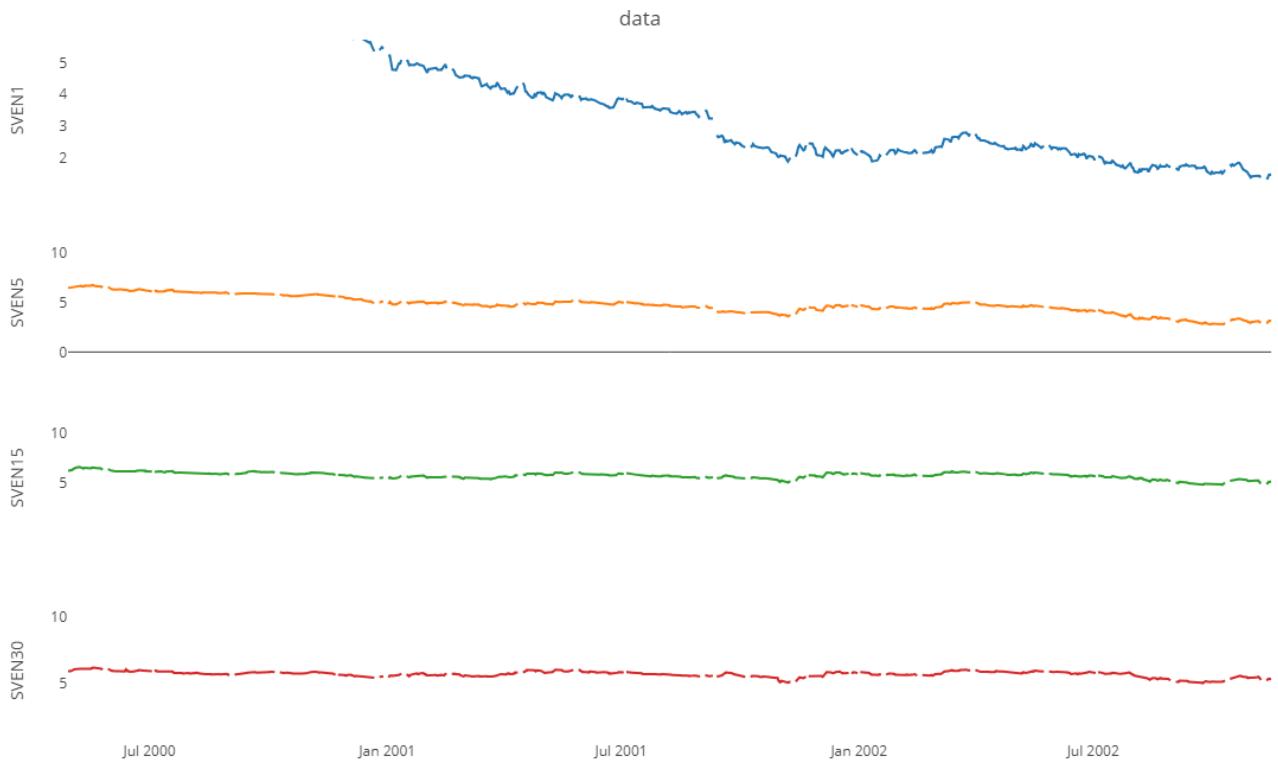


Figure 4: Courbe de Taux pour les taux ZC des BDT 1A, 5A, 15A et 30A **Pre-KALMAN**

La figure suivante présente l'évolution des taux BDTs 1an, 5ans, 15 ans et 30ans après Kalman

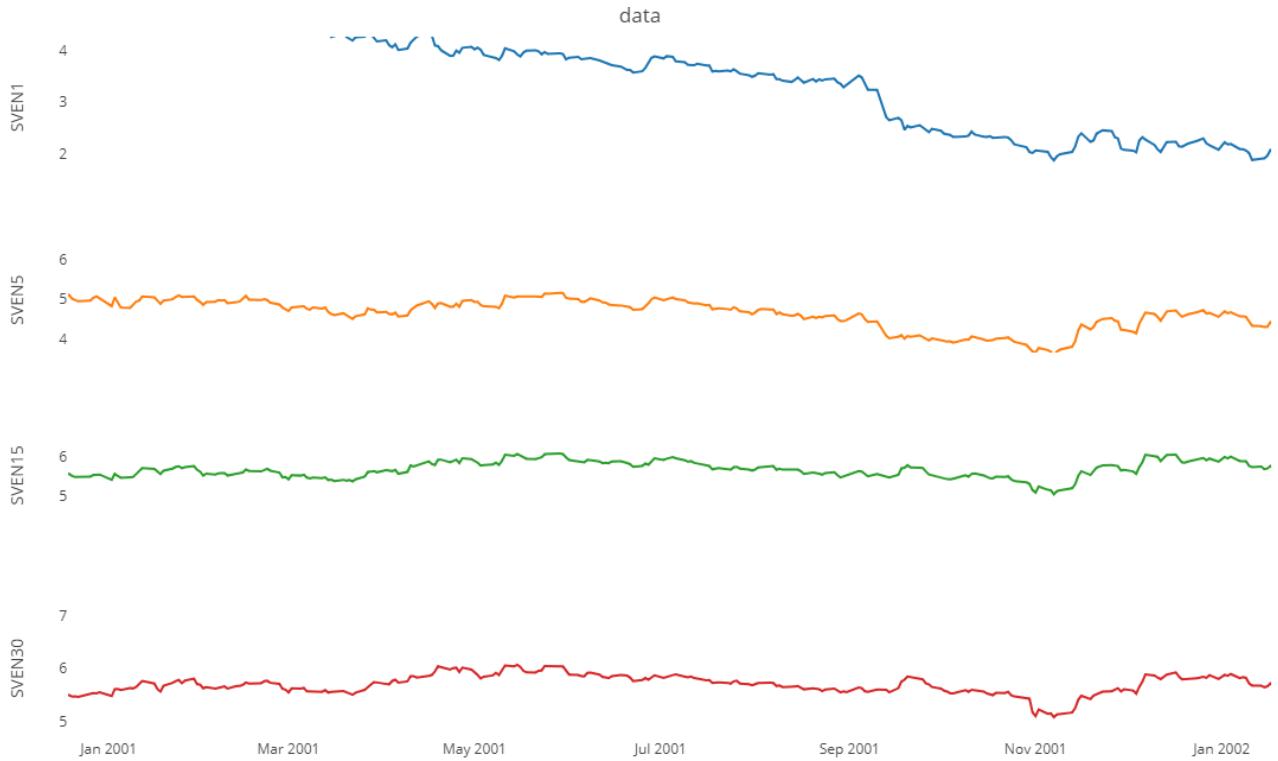


Figure 5: Courbe de Taux pour les taux ZC des BDT 1A, 5A, 15A et 30A **Post-KALMAN**

Et alors la courbe de taux résultante est la suivante:

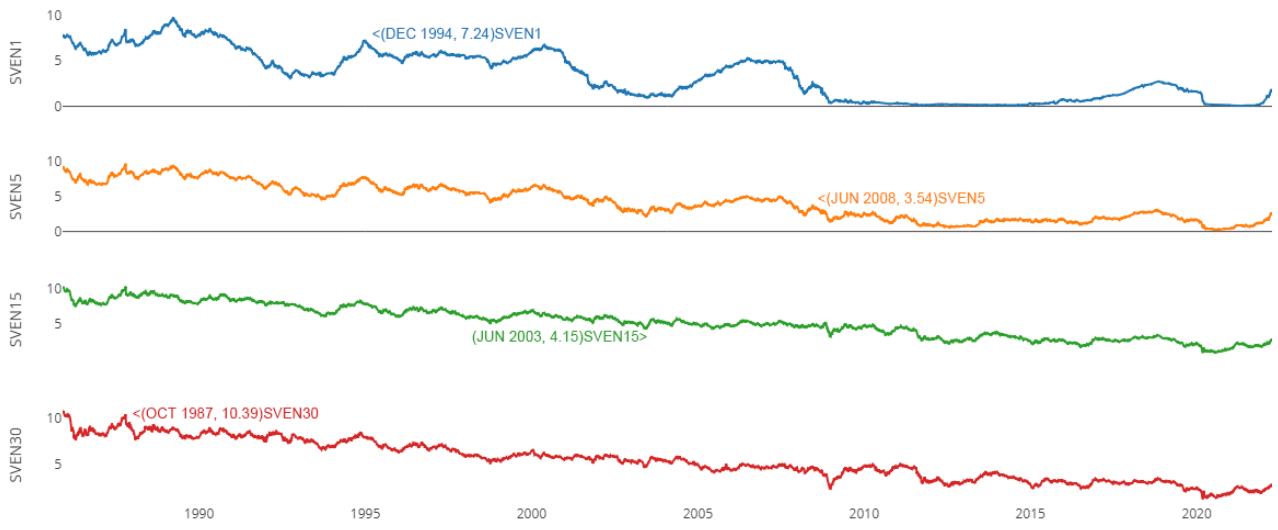


Figure 6: :11/25/1985 - 4/8/2022 Courbe de Taux pour les taux ZC des BDT 1A, 5A, 15A et 30A

Chapitre 4

Ouverture à l'apprentissage statistique

8 Apprentissage statistique dédiée aux Taux	51
8.1 Introduction:	51
8.2 Long Short-Term Memory (LSTM) :	52
8.3 LTSM conventionnel:	54
8.4 Grid LSTM:	55
Différents types de LSTM est leurs avantages	56
8.5 SVR: Support Vector regression	57
9 Résultats empiriques:	59
9.1 Base de données:	59
9.2 Subdata 1:	61
9.3 Subdata 2:	65
9.4 Erreurs de prévisions:	69
9.5 Interprétations et commentaires:	70

8 Apprentissage statistique dédiée aux Taux

8.1 Introduction:

Plusieurs études ont fait l'objet de l'utilisation de l'apprentissage automatique dans le domaine de la finance quantitative, citons la prévision des prix de la gestion et la restriction d'un portefeuille entier d'actifs, ainsi que, le processus d'investissement, et de nombreuses autres opérations peuvent être couvertes par des algorithmes d'apprentissage automatique. En général, l'apprentissage automatique est un terme utilisé pour toutes les méthodes d'algorithmes utilisant des ordinateurs pour révéler des modèles basés uniquement sur des données et n'utilisant pas d'instructions de programmation.

Pour la finance quantitative , plusieurs modèles fournissent un grand nombre de méthodes qui peuvent être utilisées avec l'apprentissage automatique pour prévoir la valeur future des actifs. Ce type de modèles offre un mécanisme qui combine des sources faibles de données et d'informations et en font un outil étrange qui peut être utilisé efficacement. Récemment, la combinaison des statistiques et des modèles d'apprentissage a permis de polir plusieurs algorithmes d'apprentissage automatique, tels que les réseaux neuronaux acritiques (**RNN**), les arbres de régression boostés (**KGBoost**), les machines à vecteurs de support et les prévisions aléatoires (**SVM**). Ces algorithmes peuvent révéler des modèles complexes caractérisés par la non-linéarité ainsi que certaines relations qui sont difficiles à détecter avec des algorithmes linéaires. Ces algorithmes s'avèrent également plus efficaces et multi-colinéaires que les régressions linéaires.

Un grand nombre d'études sont actuellement actives sur le sujet des méthodes d'apprentissage automatique utilisées en finance. Certains auteurs ont également étudié la prévision des rendements à l'aide de l'algorithme ADaBoost [Wang and Luo \(2012\)](#).

D'autres ont procédé à la prévision des rendements boursiers en utilisant un modèle unique de prise de décision pour les investissements de day trading sur le marché boursier. Le modèle développé par les auteurs utilise la méthode SVM (support vector machine) et la méthode MV (meanvariance) pour la sélection du portefeuille [Paiva and Cardoso \(2018\)](#). Une étude a également couvert un grand nombre de tendances et d'applications de l'apprentissage automatique en finance quantitative [Emerson and O'Brien \(2019\)](#). La revue de la littérature couverte par ce document consiste en la prévision du rendement, la construction de portefeuille , la détection de fraude, prise de décision, traitement du langage et analyse des sentiments.

Ces modèles ne dépendent pas d'une mémoire à long terme (séquences de données passées), à cet égard, une classe d'algorithmes d'apprentissage automatique basée sur un réseau neuronal récurrent s'avère très utile. Ces modèles ne dépendent pas d'une mémoire à long terme (séquences de données transmises). Un article a comparé la précision de la moyenne mobile intégrée autorégressive **ARIMA** et du **LSTM**, en tant que techniques illustratives lors de la prévision de données de séries temporelles.

Ces techniques ont été exécutées sur un ensemble de données financières et les résultats ont montré que LSTM était de loin supérieur à ARIMA [8]. Notre article a pour but d'utiliser un algorithme ML basé sur LSTM RNN pour prévoir les taux de changements zérocoupon à différentes maturités.

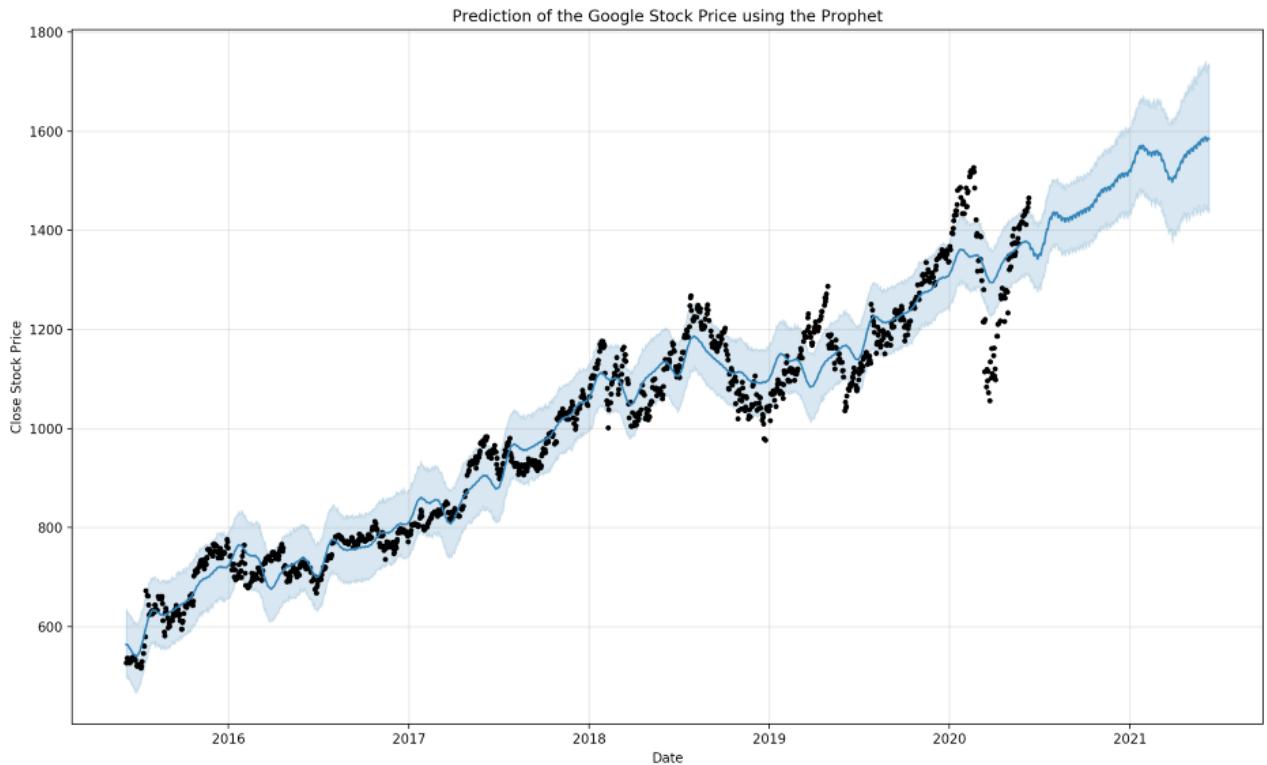


Figure 7: Prédiction du prix du stock GOOG avec l'apprentissage statistique-exemple

Durant la pandémie, un état d'aléatoire et d'inconnu se propageait dans le monde financier, d'où vient le rôle des algorithmes d'apprentissage, prévoir le prix des actifs financiers d'une primordial afin d'avoir une idée sur la santé de la société en question. Il semble que le cours de l'action Google sera d'environ 1600 en juin 2021, selon les prévisions du modèle.

8.2 Long Short-Term Memory (LSTM) :

LSTM est l'un des nombreux types de réseaux neuronaux récurrents RNN, il est capable de capturer les données des étapes passées et de les utiliser pour des prédictions futures, confirmer Patterson (2017).

En générale, un réseau neuronal artificiel (ANN) se compose de trois couches :

- La couche d'entrée,
- Les couches cachées,
- La couche de sortie

Dans un réseau neuronal qui ne contient qu'une seule couche cachée, le nombre de noeuds de la couche d'entrée dépend toujours de la dimension des données.

Les noeuds de la couche d'entrée sont reliés à la couche cachée par des liens appelés "synapses". La relation entre chaque deux noeuds de la couche d'entrée à la couche cachée a un coefficient appelé poids, qui est le décideur des signaux. Le processus d'apprentissage

est naturellement un ajustement continu des poids. le processus d'apprentissage, le NN artificiel aura des poids optimaux pour chaque synapse.

Les noeuds de la couche cachée appliquent une fonction sigmoïde ou tangente hyperbolique (\tanh) à la somme des poids provenant de la couche d'entrée.

la couche d'entrée, appelée fonction d'activation, cette transformation génère des valeurs, avec un taux d'erreur d'erreur minimisé entre les données de formation et de test en utilisant la fonction SoftMax.

Les valeurs obtenues après cette transformation constituent la couche de sortie de notre NN, ces valeurs peuvent ne pas être la meilleure sortie, dans ce cas, un processus de rétro-propagation sera appliqué pour cibler la valeur optimale de l'erreur. La rétro-propagation reliera la couche de sortie à la couche cachée, en envoyant un signal conforme au meilleur poids avec l'erreur optimale pour le nombre d'époques décidé. Ce processus sera répété en essayant d'améliorer nos prédictions et de minimiser l'erreur de prédiction.

Après avoir terminé ce processus, le modèle sera entraîné. Les classes de NN qui prédisent une valeur future basée sur une séquence d'observations passées sont appelées réseaux neuronaux récurrents (RNN). Ce type de RNN utilise des étapes antérieures pour apprendre des données et prévoir l'avenir.

Les étapes précédentes des données doivent être mémorisées pour prédire et deviner les valeurs futures, dans ce cas la couche cachée agit comme un stock d'informations passées provenant des données séquentielles. Le terme récurrent est utilisé pour décrire le processus qui consiste à utiliser des éléments de séquences antérieures pour prévoir les tendances futures. Les RNN ne peuvent pas stocker de mémoire à long terme, c'est pourquoi l'utilisation de la mémoire à long-court terme (LSTM).

Dans un LSTM la mémorisation des étapes précédentes peut être effectuée par des portes avec une ligne de mémoire incorporée. Le diagramme suivant décrit la composition des noeuds LSTM:

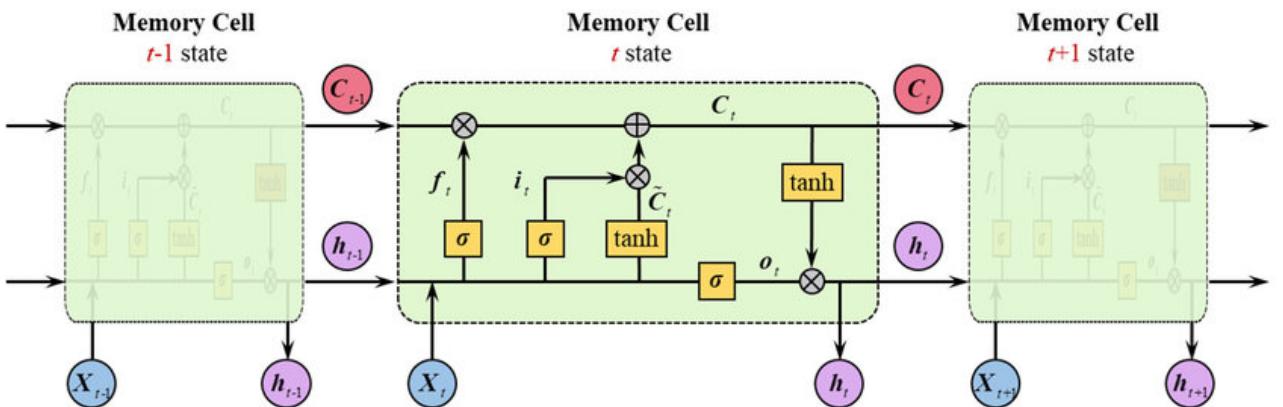


Figure 8: Structure de la cellule LSTM

La capacité de mémoriser une séquence de données fait du LSTM un type particulier de RNN. Chaque noeud LSTM peut être constitué d'un ensemble de cellules responsables du stockage des flux de données passés, la ligne supérieure de chaque cellule relie les modèles comme une ligne de transport qui transmet les données du passé au présent.

La ligne supérieure de chaque cellule relie les modèles comme une ligne de transport qui transfère les données du passé vers le présent. L'indépendance des cellules aide le modèle à disposer d'un filtre pour ajouter les valeurs d'une cellule à une autre. Enfin, la couche de réseau neuronal sigmoïdal composant les portes conduit la cellule à une valeur optimale en éliminant ou en laissant passer les données. Chaque couche sigmoïde a une valeur binaire (0 ou 1) avec 0 "ne laisser rien passer" ; et 1 "laisser tout passer". Le but ici est de contrôler l'état de chaque cellule, les portes sont contrôlées comme suit :

- **Forget Gate** : sort un nombre entre 0 et 1, où 1 illustre "*garder complètement ceci*" ; tandis que, 0 indique "*ignorer complètement ceci*".
- **Memory Gate**: choisit les nouvelles données qui seront stockées dans la cellule. D'abord, une couche sigmoïde "couche de porte d'entrée" choisit les valeurs qui seront modifiées. Ensuite, une couche *tanh* fabrique un vecteur de nouvelles valeurs candidates qui pourraient être ajoutées à l'état.
- **Output Gate** : décide de ce que sera la sortie de chaque cellule. La valeur de sortie sera basée sur l'état de la cellule ainsi que sur les valeurs filtrées et ajoutées les plus récentes.

Il existe plusieurs types de LSTM, et chacun traite les bases de données d'une manière différente;

8.3 LSTM conventionnel:

Ce LSTM contient des unités spéciales appelées blocs de mémoire dans la couche cachée récurrente. Les blocs de mémoire contiennent des cellules de mémoire avec des auto-connexions stockant l'état temporel du réseau, ainsi que des unités multiplicatives spéciales appelées portes pour contrôler le flux d'informations. Dans l'architecture originale, chaque bloc de mémoire contenait une porte d'entrée et une porte de sortie. La porte d'entrée contrôle le flux des activations d'entrée dans la cellule de mémoire. La porte de sortie contrôle le flux de sortie des activations de la cellule dans le reste du réseau. Plus tard, la porte d'oubli a été ajoutée au bloc mémoire . Cela a permis de remédier à une faiblesse des modèles LSTM qui les empêchent de traiter des flux d'entrée continus qui ne sont pas segmentés en sous-séquences.

La porte d'oubli met à l'échelle l'état interne de la cellule avant de l'ajouter à l'entrée de la cellule par le biais de la porte d'oubli. avant de l'ajouter en entrée à la cellule par le biais de la connexion auto-récurrente de la cellule. la cellule, oubliant ou réinitialisant ainsi de manière adaptative la mémoire de la cellule. En outre, l'architecture LSTM moderne contient des connexions *peephole* entre ses cellules internes et les portes dans la même cellule pour apprendre le timing précis des sorties .

Un réseau LSTM calcule une correspondance entre une séquence d'entrée $x = (x_1, \dots, x_T)$ et une séquence de sortie $y = (y_1, \dots, y_T)$ en calculant les activations des unités du réseau en utilisant les équations suivantes de manière itérative de $t = 1$ à $t = T$

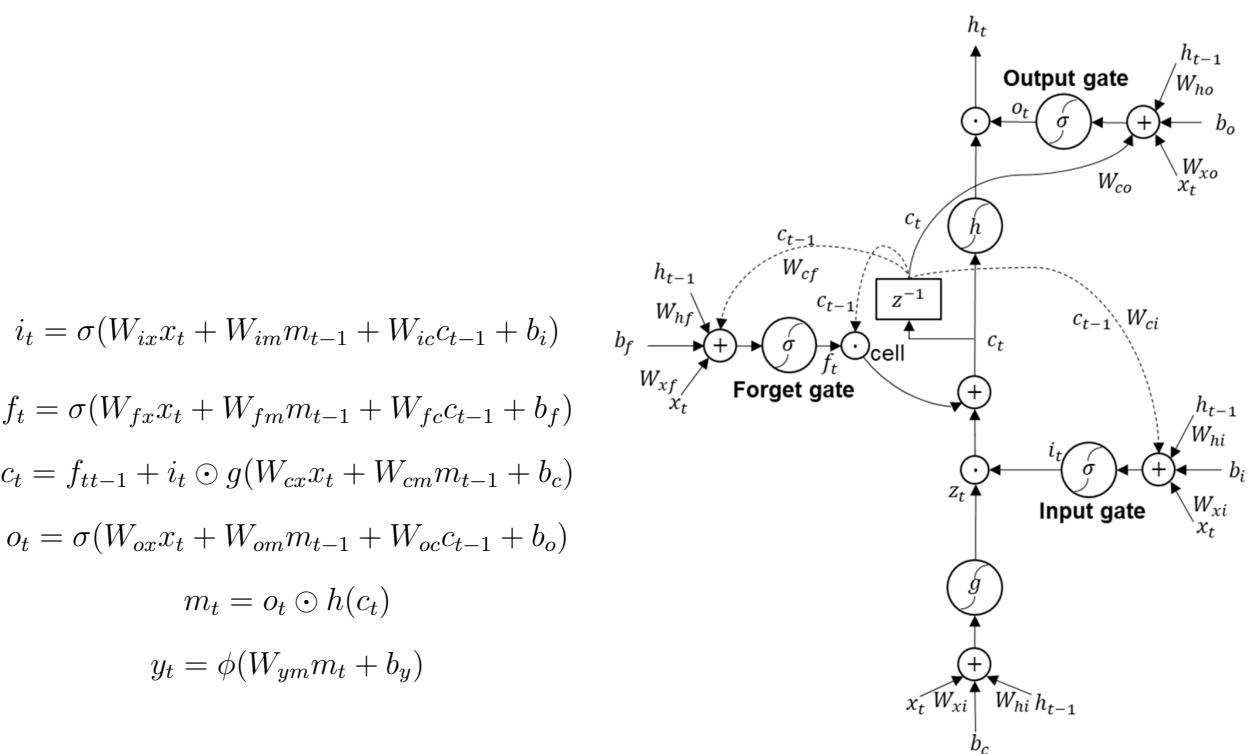


Figure 9: Model du LSTM conventionnel

avec: W désignent les matrices des poids, $W_i x$ est la matrice des poids de la porte d'entrée à l'entrée), W_{ic}, W_{fc}, W_{oc} sont des matrices de poids diagonales pour les connexions *peephole*.

-Les termes b désignent les vecteurs de biais (b_i est le vecteur de biais de la porte d'entrée), σ est la fonction sigmoïde logistique et i, f, o et c sont respectivement la porte d'entrée, la porte d'oubli, la porte de sortie et les vecteurs d'activation de la cellule, qui ont tous la même taille que le vecteur m d'activation de la sortie de la cellule.

- \odot est le produit élément-par-élément des vecteurs, $geth$ sont les fonctions d'activation de l'entrée et de la sortie de la cellule, généralement et dans cet article *tanh*, et ϕ est la fonction d'activation de la sortie du réseau, softmax dans notre étude.

8.4 Grid LSTM:

De nombreuses architectures du réseau LSTM ont été développées ces dernières années. L'article par [Lindemann \(2021\)](#) cite quelques un et propose les avantages de chacun dans le tableau ci dessous.

A mentionner le GRID LSTM, une cellule LSTM basée sur une structure matricielle. En plus des connexions régulières entre les couches, le LSTM Grid possède des connexions concernant, par exemple, les dimensions spatiales ou temporelles des séquences d'entrée. Ainsi, les connexions dans plusieurs dimensions dans les cellules étendent le flux d'informations régulier.

Le Grid LSTM est donc adapté à la prédiction parallèle de plusieurs quantités de sortie qui peuvent être indépendantes ou dépendantes de façon linéaire ou non linéaire. Contrairement à l'approche susmentionnée, une prédiction directe des quantités considérées sans une projection sur des caractéristiques abstraites est possible. Chaque quantité est modélisée dans une dimension

distincte, tandis que les dépendances entre les quantités sont modélisées par les connexions nouvellement créées. La conception du réseau et des dimensions dépend de la structure des données d'entrée et de l'objectif de prédiction. La figure suivante illustre un réseau LSTM à grille à deux dimensions en comparaison avec un simple réseau LSTM.

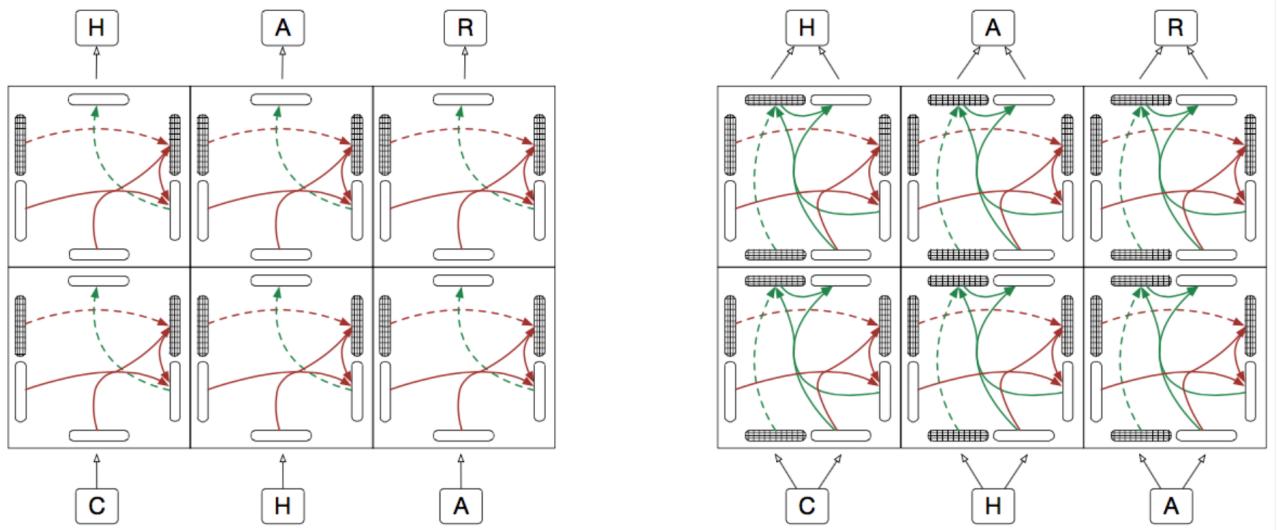


Figure 10: à droite GRID LSTM, et à gauche Stacked LSTM.

Le flux d'information vert dans les cellules montre que la grille utilise les sorties LSTM d'une dimension comme entrées supplémentaires à d'autres dimensions. En reliant les dimensions, la précision de la prédiction des problèmes multidimensionnels peut être améliorée contrairement aux architectures empilées unidimensionnelles, dans le monde financier ça revient aux événements perturbateurs ou anormaux. Ces dernières sont caractérisées par un empilement de plusieurs couches de réseaux fonctionnels.

Différents types de LSTM et leurs avantages

Prediction properties	Bidir LSTM	Hier atte. LSTM	Convolut. LSTM	LSTM Autoencoder	Grid LSTM	Cro. asso. LSTM	Reg. mult. Seq2Seq	Part. cond. Seq2Seq
Short-term and long-term memory behavior	0	+	0	+	+	++	+	++
Multidimensional data processing	-	0	+	+	++	++	+	+
Multimodal prediction ability	+	+	+	+	++	++	++	++
Multi-step ahead prediction and error propagation	-	-	-	-	0	-	++	++
Nonlinear and time-variant prediction ability	+	+	+	+	++	++	++	++

8.5 SVR: Support Vector regression

Le SVR est un domaine de modèles d'apprentissage automatique dérivés du SVM. Le SVM est un algorithme qui renvoie un hyperplane qui sépare les échantillons d'apprentissage en deux étiquettes, positive et négative. Nous faisons référence à la distance entre le point le plus proche et l'hyperplan est appelée "marge", le but du SVM est d'identifier l'hyperplan qui maximise la marge.

Il existe deux types de marge. Le premier type est une marge "dure", qui est destinée aux ensembles de données linéairement séparables, ce qui signifie que chaque point ne viole pas son étiquette. Autrement dit, tous les points peuvent être classés dans leurs étiquettes avec un hyperplan. Le deuxième est une marge "douce", qui est destinée aux cas non séparables. Dans ce cas, certains points dans le jeu de données, appelés "aberrants", sont incorrectement classés. Il existe deux façons de sélectionner un hyperplan de marge douce.

D'une part, on peut rendre la marge plus grande et prendre plus d'erreurs (points aberrants). Cette méthode est généralement utilisée pour les ensembles de données qui ne présentent qu'un petit nombre de valeurs aberrantes. D'autre part, nous pouvons choisir un hyperplan qui a une petite marge et minimise les erreurs empiriques. Ceci est utile pour les ensembles de données avec des distributions de points denses de manière explicite.

En outre, l'astuce du kernel(noyau) peut être utilisée pour les ensembles de données linéairement non séparables. Le kernel représente une fonction qui fait correspondre les points de données d'origine à un ensemble de données de dimension supérieure qui est séparable. La raison pour laquelle on l'appelle "kernel trick" est que, bien que la dimension de l'ensemble de données soit augmentée, le coût de l'algorithme n'augmente pas beaucoup.

Le SVM est issu de la théorie de l'apprentissage statistique introduite par *Vapnik* et *Chervonenkis*. L'idée caractéristique L'idée caractéristique des SVM est de minimiser le risque structurel, alors que les réseaux neuronaux artificiels (ANN) minimisent le risque empirique.

Le SVR est dérivé du SVM. Il s'agit d'une approche non linéaire basée sur le noyau, l'idée principale est d'identifier une fonction dont l'écart par rapport aux données réelles est situé dans une échelle prédéterminée. Le SVR est appliqué à un ensemble de données $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ où x_i est le vecteur d'entrée, y_i est la sortie, et n est le nombre total des observations.

La formulation suivante a été introduite par *Perez-cruz et al. (2003)*. la fonction $f(x)$ est une fonction non linéaire de la forme $f(x) = (w'\phi(x) + b)$ où w et b sont respectivement le poids et une constante, $\phi(x)$ représente une fonction de mappage dans l'espace des caractéristiques.

Le vecteur de poids w et la constante b sont estimés en minimisant la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \max_{w,b,\xi_i,\xi_i^*} & \left\{ \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n (\xi_i + \xi_i^*) \right\}^a \\ \text{sc } & y_i - (w'\phi(x) + b) \leq \epsilon + \xi_i \\ & - y_i + (w'\phi(x) + b) \leq \epsilon + \xi_i^* \\ & \xi_i, \xi_i^* \geq 0 \end{aligned}$$

^afrom *Scikitlearn (2022)*

où $C > 0$ est une valeur prédéterminée et ξ_i, ξ_i^* sont des variables d'écart ^a indiquant respectivement les contraintes supérieures et inférieures.

"Dans un problème d'optimisation, une variable d'écart est une variable qui est ajoutée à une contrainte d'inégalité pour la transformer en une égalité. L'introduction d'une variable d'écart remplace une contrainte d'inégalité par une contrainte d'égalité.

part about kernel and solution to the opti

La sélection du kernel a un impact significatif sur ses performances de prévision. Il est courant d'estimer une gamme de paramètres potentiels et d'utiliser la validation croisée sur le l'ensemble d'apprentissage pour déterminer la meilleure fonction. Voici les fonctions kernle les plus utilisées:

Types of kernel	Kernel $K(u, v)$
Polynomial kernel	$(u.v)^d$
Gaussian kernel	$\exp\left(\frac{\ uv\ ^2}{2\sigma^2}\right)$
Sigmoid kernel	$\tanh(\eta u.v + v)$

Le lien suivant développe plus sur les types des kernels et leurs formulations mathématiques
[Scikitlearn \(2022\)](#)

9 Résultats empiriques:

9.1 Base de données:

La base de données sur laquelle je vais travailler consiste des taux de rendement de maturité allant d'une année jusqu'à 30 ans, et étalant depuis avril 2010 jusqu'à mars 2022.

Néanmoins, ce rang a subis divers anomalies qui ont touché le marché financier, et par conséquent fluctuent de plus ou de moins la courbe de taux, citons par exemple la pandémie à cause du COVID19, les fermetures et ouvertures des bordures... Alors, je divisera ma base de données en deux sous-bases de données, une à faible volatilité , et l'autre à haute volatilité; la première base de données s'étale d' avril 2010 jusqu'à la fin de l'année 2018, et la deuxième le complémentaire de la première par rapport à la base de données entière.

Je me focaliserai sur les maturités , une année, deux années, cinq années, dix années, vingt années, et 30 années.

Une statistique descriptive des deux base est présentée dans la table suivante:

sub1	1 year	2 years	5 years	10 years	20 years	30 years
MIN	8.28 e-02	1.583 e-01	5.886 e-01	1.4007 e+00	1.8503 e+00	2.3518 e+00
MAX	2.758 e+00	2.9606 e+00	3.0913 e+00	4.2816 e+00	5.0145 e+00	5.0355 e+00
MEAN	6.325 e-01	8.533 e-01	1.6439 e+00	4.2816 e+00	3.2269 e+00	3.45 e+00
VAR	4.89 e-01	4.8105 e-01	3.555 e-01	3.768 e-01	4.847 e-01	4.009157 e-01
SD.DEV	1.105 e+00	6.9356 e-01	5.9631 e-01	6.138 e-01	6.962710 e-01	6.331791 e-01
sub2	1 year	2 years	5 years	10 years	20 years	30 years
MIN	0.0554	0.1020	0.2218	5.202 e-01	9.581 e-01	1.2503 e+00
MAX	2.5955	2.5914	2.7915	2.7805 e+00	3.05 e+00	3.2531 e+00
MEAN	0.8851	0.94164	1.2015	1.576 e+00	1.9964 e+00	2.2452 e+00
VAR	0.80937	0.72631	0.50515	3.6066 e-01	2.6719 e-01	2.2785 e-01
SD.DEV	0.8995	0.8522	0.71074	6.0055 e-01	5.1691 e-01	4.773 e-01

Table 12: Statistiques descriptives des sous base de données extraites.

et la figure suivante représente la dichotomie du rôle de chaque période, les dates en bleu seront utilisées à fin d'apprentissage des modèles, et en orange à fin de test de l'échantillon:

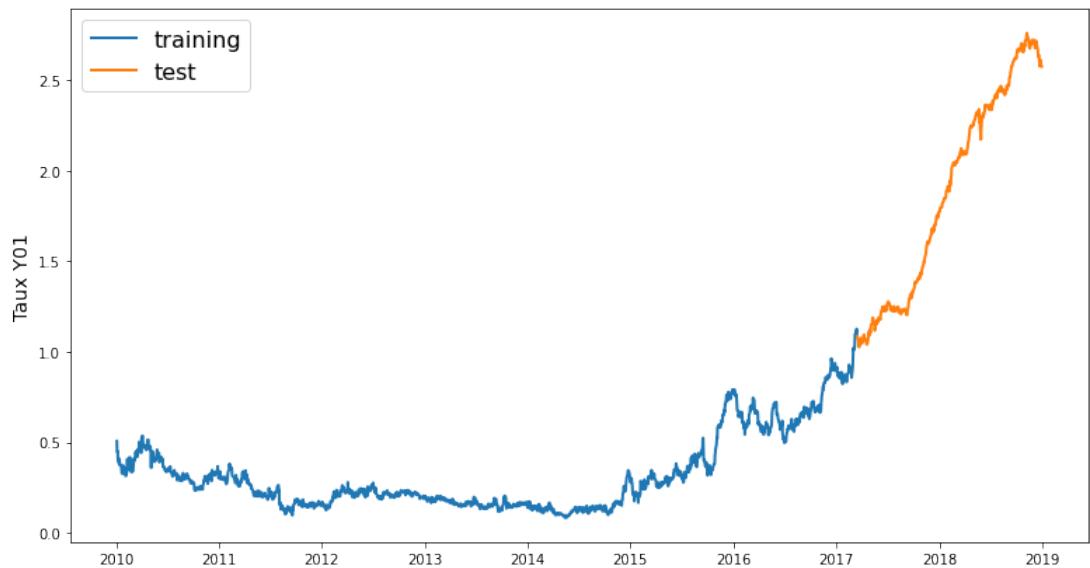


Figure 11: Apprentissage et test du sub1 à une année

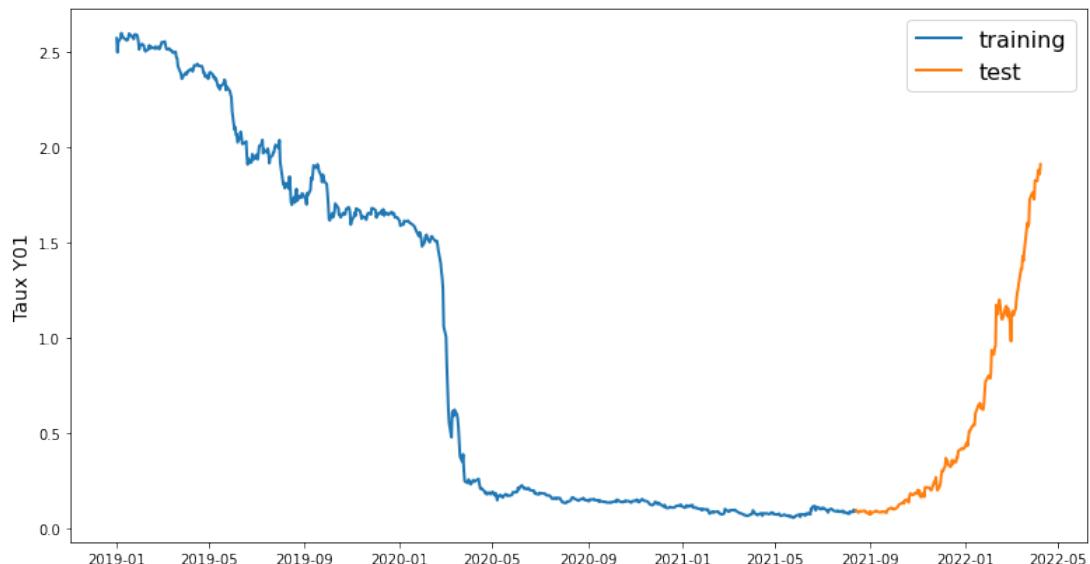


Figure 12: Apprentissage et test du sub2 à une année

9.2 Subdata 1:

Avant d'entamer les résultats des prédictions, voyons comment se présente la base de données pour le reste des maturités:

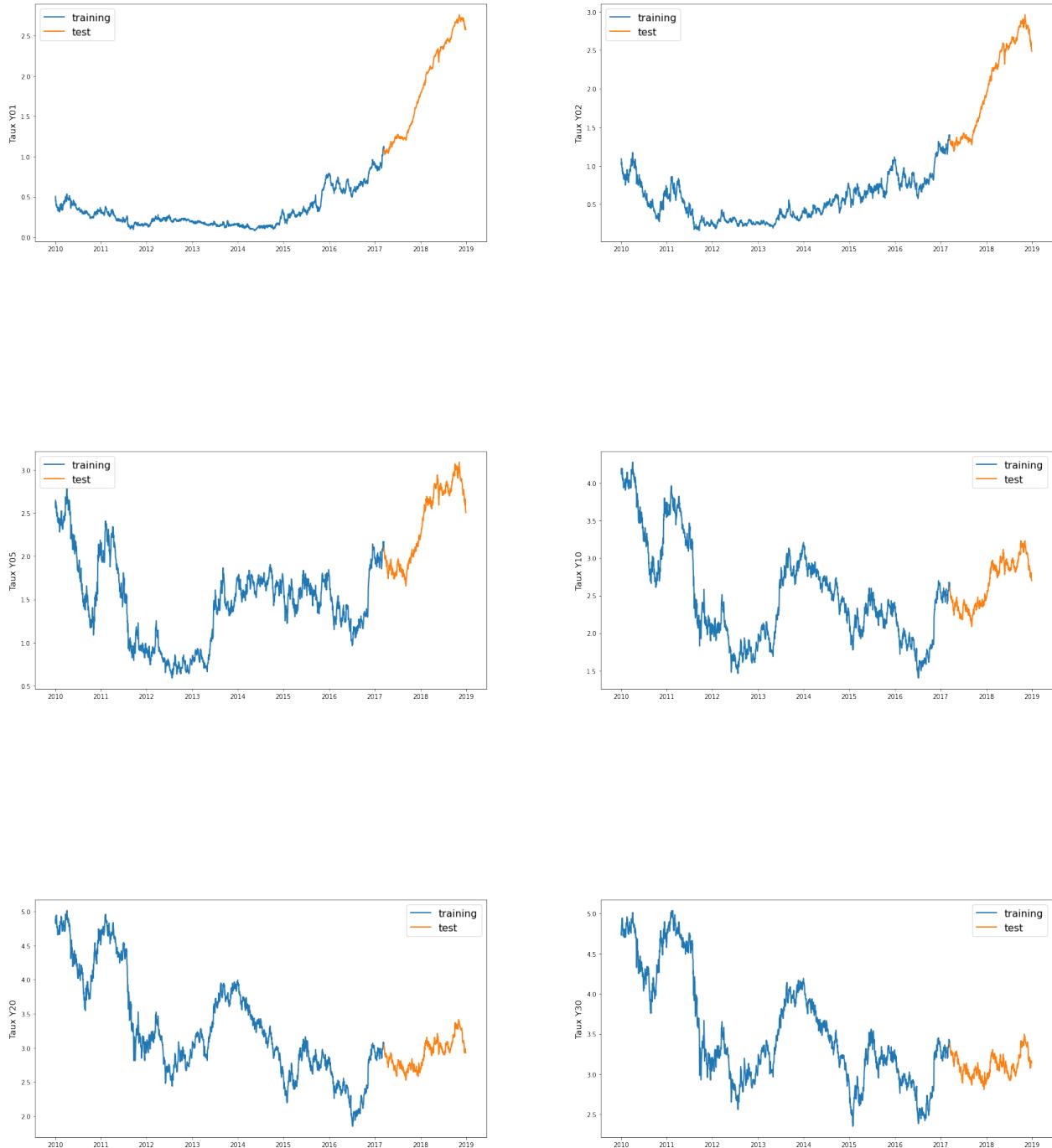


Figure 13: Apprentissage et test des différentes maturités du sub1

9.2.1 LSTM:

Les prédictions données par le modèle LSTM pour la première tranche de la base de données sont commen suivant:

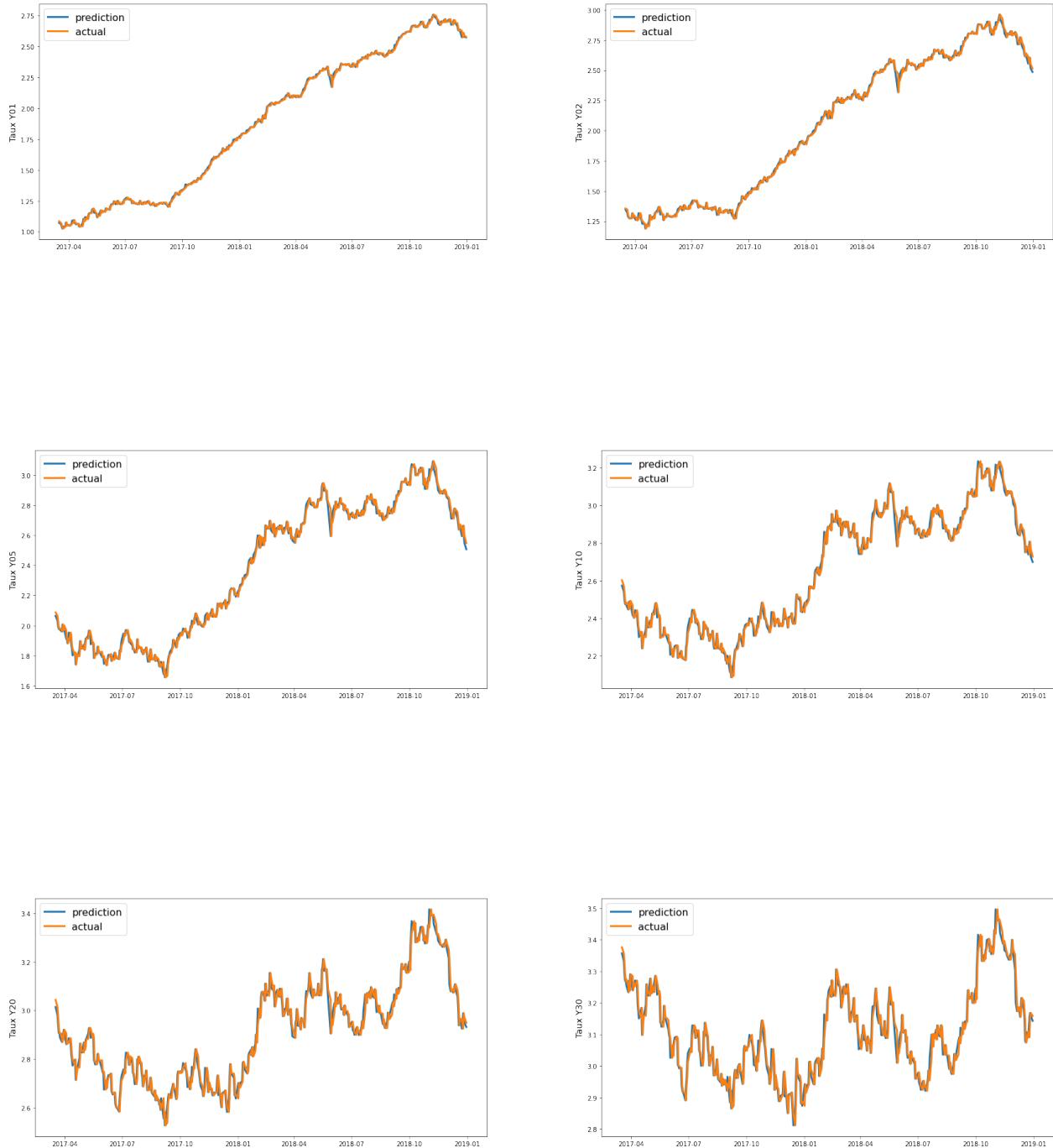
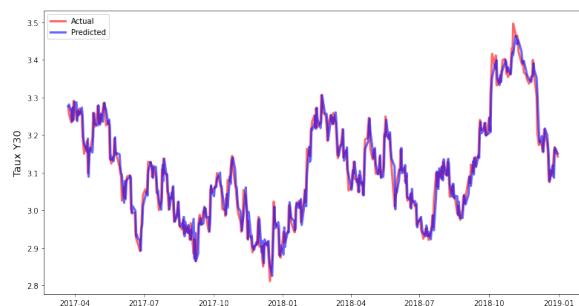
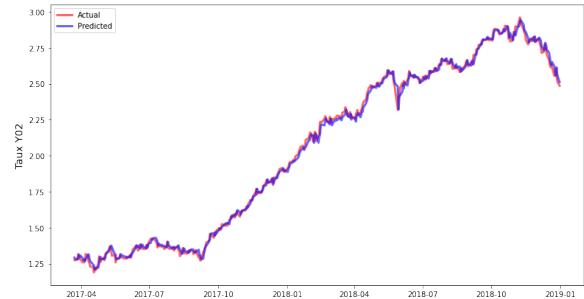
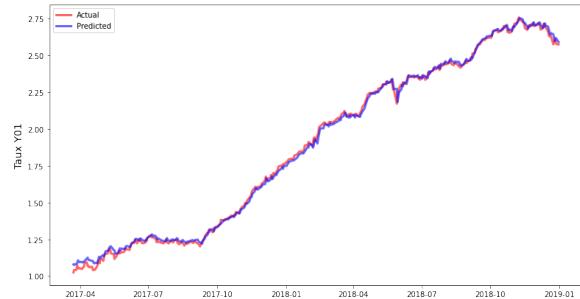


Figure 14: Sorties du modèle LSTM pour différentes maturités du sub1

9.2.2 SVR:

Les prédictions données par le modèle SVR pour la première tranche de la base de données sont comme suivant:



1

Figure 15: Sorties du modèle SVR pour différentes maturités du sub2

9.2.3 Dynamic nelson siegel:

Pour prévoir simplement les taux par DNS, Diebold and Li (2006) propose fixation du paramètre $\frac{1}{\tau_t} = \lambda_t = 0.0609$ ça représente la valeur maximisant la courbature.

Les prédictions données par le modèle DNS pour la première tranche de la base de données sont comme suivant:

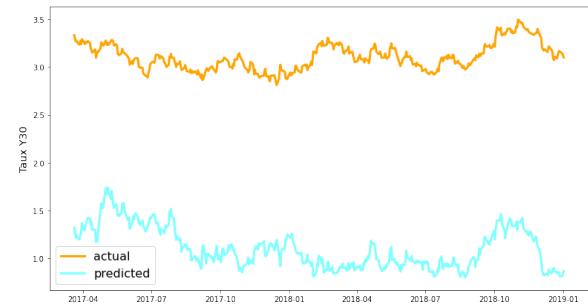
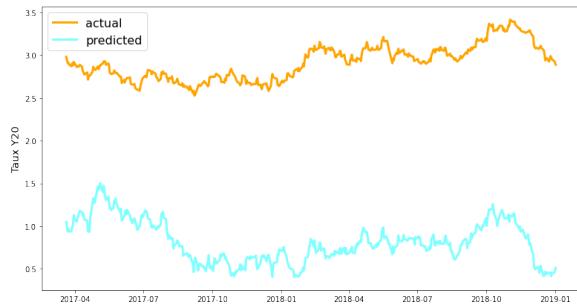
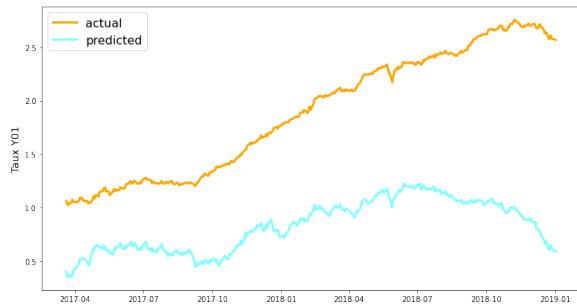


Figure 16: Sorties du modèle SVR pour différentes maturités du sub1

9.3 Subdata 2:

Comme présentée pour la première base de données, la dichotomie est la suivante:

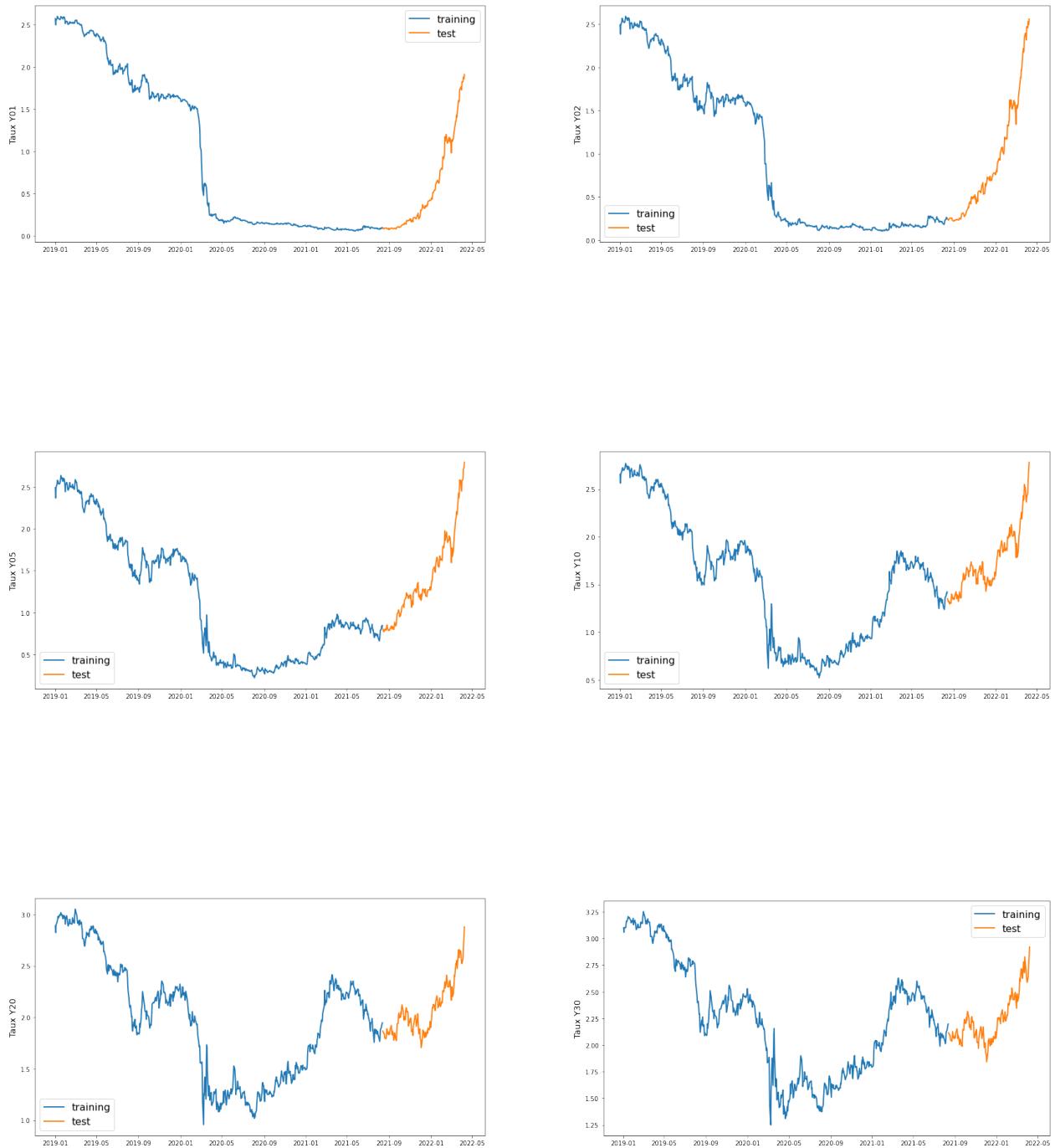


Figure 17: Apprentissage et test des différentes maturités du sub2

9.3.1 LSTM:

Les prédictions données par le modèle LSTM pour la deuxième tranche de la base de données sont comme suivant:

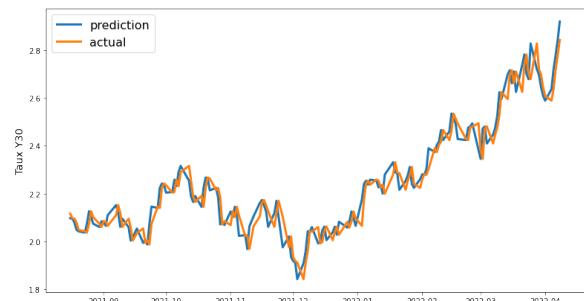
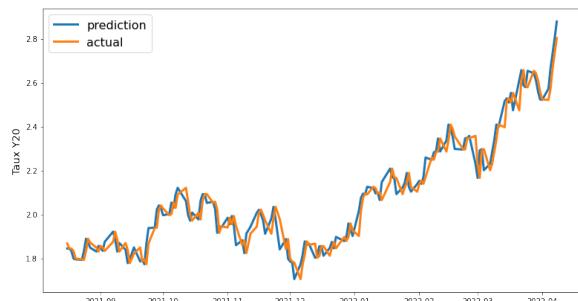
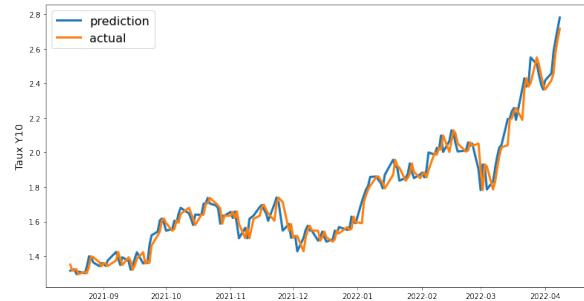
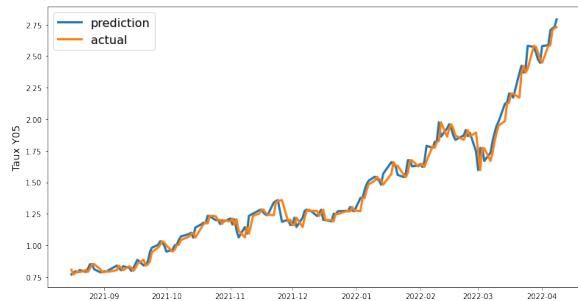
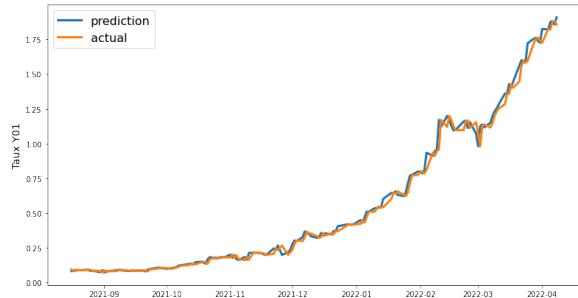


Figure 18: Sorties du modèle LSTM pour différentes maturités du sub2

9.3.2 SVR:

Les prédictions données par le modèle SVR pour la seconde tranche de la base de données sont comme suivant:

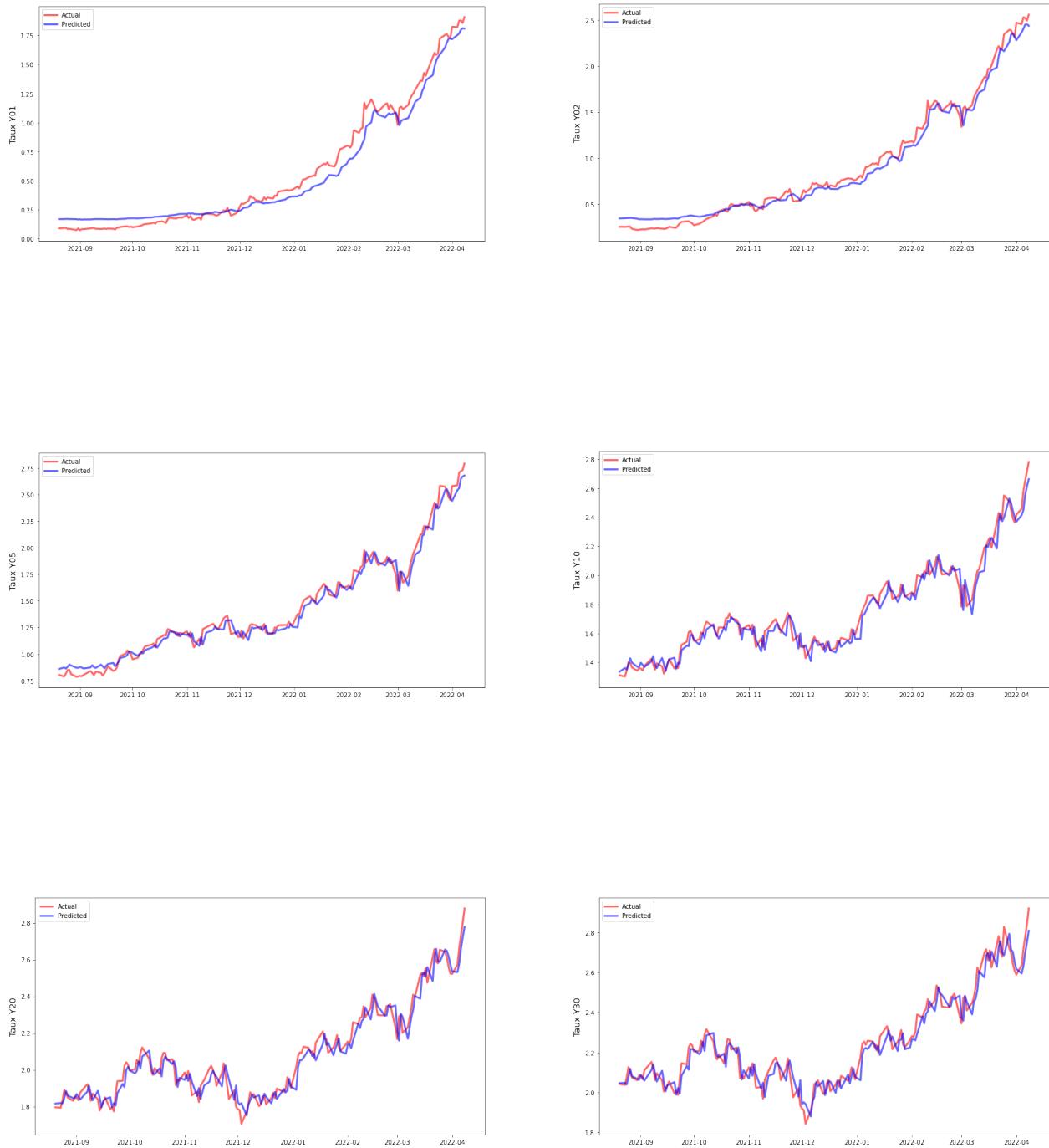


Figure 19: Sorties du modèle SVR pour différentes maturités du sub2

9.3.3 Dynamic nelson siegel:

Les prédictions données par le modèle DNS pour la seconde tranche de la base de données sont comme suivant:

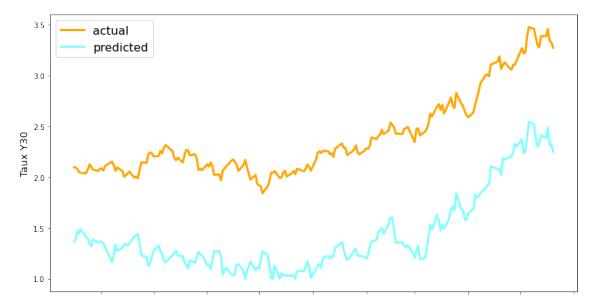
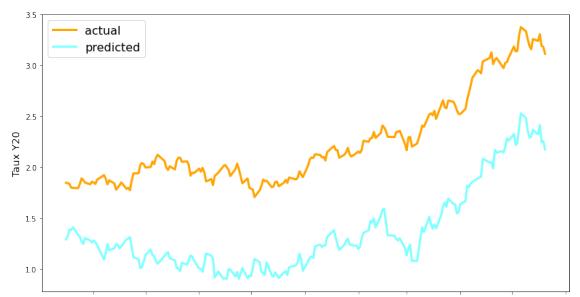
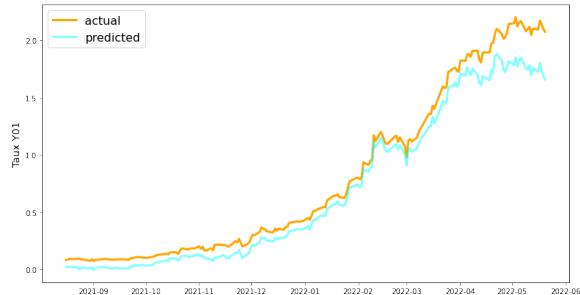


Figure 20: Sorties du modèle SVR pour différentes maturités du sub2

9.4 Erreurs de prévisions:

$$\text{RMSD} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2}{N}}$$

Root-mean-square deviation

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2$$

Mean squared error

$$M = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{x_t - \hat{x}_t}{x_t} \right|$$

ou MAPE Mean absolute percentage error

$$\text{MAE} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \hat{x}_i|}{n}$$

Mean absolute error

9.4.1 LSTM :

<i>sub1</i>	1 year	2 years	5 years	10 years	20 years	30 years
RMSE	1.53e-02	3.73e-02	3.29e-02	3.42e-02	3.39e-02	3.36e-02
MSE	2.33e-04	1.39e-03	1.08e-03	1.17e-03	1.15e-03	1.13e-03
MAPE	6.65e-03	1.53e-02	1.12e-02	1.04e-02	9.08e-03	8.47e-03
MAE	1.14e-02	2.93e-02	2.58e-02	2.72e-02	2.63e-02	2.63e-02
<i>sub2</i>	1 year	2 years	5 years	10 years	20 years	30 years
RMSE	3.80e-02	5.23e-02	5.81e-02	5.68e-02	5.12e-02	5.18e-02
MSE	1.45e-03	2.74e-03	3.37e-03	3.22e-03	2.63e-03	2.68e-03
MAPE	5.41e-02	4.17e-02	2.95e-02	2.53e-02	2.00e-02	1.87e-02
MAE	2.31e-02	3.42e-02	4.15e-02	4.44e-02	4.14e-02	4.22e-02

Table 13: Différents erreurs du modèle LSTM pour les deux tranches .

9.4.2 SVR:

<i>sub1</i>	1 year	2 years	5 years	10 years	20 years	30 years
RMSE	2.07e-02	2.59e-02	3.39e-02	3.49e-02	3.38e-02	3.39e-02
MSE	4.30e-04	6.73e-04	1.15e-03	1.22e-03	1.14e-03	1.15e-03
MAPE	9.83e-03	1.02e-02	1.13e-02	1.06e-02	9.01e-03	8.56e-03
MAE	1.61e-02	1.98e-02	2.61e-02	2.78e-02	2.62e-02	2.65e-02
<i>sub2</i>	1 year	2 years	5 years	10 years	20 years	30 years
RMSE	8.85e-02	8.13e-02	3.63e-01	6.14e-02	5.24e-02	5.21e-02
MSE	7.84e-03	6.61e-03	1.32e-01	3.78e-03	2.75e-03	2.71e-03
MAPE	2.08e-01	1.05e-01	1.98e-01	2.70e-02	2.00e-02	1.85e-02
MAE	7.39e-02	6.65e-02	3.15e-01	4.74e-02	4.17e-02	4.16e-02

Table 14: Différents erreurs du modèle SVR pour les deux tranches .

9.4.3 DNS:

<i>sub1</i>	1 year	2 years	5 years	10 years	20 years	30 years
RMSE	1.12e+00	1.29e+00	1.38e+00	1.76e+00	2.11e+00	2.01e+00
MSE	1.26e+00	1.67e+00	1.91e+00	3.11e+00	4.47e+00	4.05e+00
MAPE	1.29e+00	1.72e+00	1.51e+00	2.21e+00	2.88e+00	1.90e+00
MAE	1.05e+00	1.23e+00	1.33e+00	1.73e+00	2.10e+00	2.00e+00
<i>sub2</i>	1 year	2 years	5 years	10 years	20 years	30 years
RMSE	1.44e-01	3.37e-01	6.21e-01	1.11e+00	8.92e-01	9.70e-01
MSE	1.44e-01	3.37e-01	6.21e-01	1.11e+00	8.92e-01	9.70e-01
MAPE	1.54e+00	6.53e-01	6.89e-01	1.71e+00	6.93e-01	7.09e-01
MAE	1.14e-01	2.87e-01	5.93e-01	1.09e+00	8.77e-01	9.58e-01

Table 15: Différents erreurs du modèle DNS pour les deux tranches .

9.5 Interprétations et commentaires:

L'objectif de cette étude est de comparer la prédition de la structure à terme des BDTs entre les modèles Nelson-Siegel, LTSM et SVR. Le modèle le plus approprié pour prédire les données de séries temporelles, en se basant sur les différents résidus, est LSTM.

L'écart des taux BDTs est un indice de risque de défaut pour l'entreprise, par conséquent, cette étude est utile car elle non seulement offre le meilleur modèle de prévision des séries temporelles mais prédit également le risque futur. Les études existantes sur la prédition de la structure des termes et d'autres indicateurs de risque à l'aide des modèles d'apprentissage constituent que peu en les comparant avec les études menées à fin de prédition des prix des actions et des indices boursiers.

Cette étude est importante car elle démontre que divers modèles d'apprentissage automatique peuvent être appliqués aux séries de données temporelles. L'étude confirme également que les méthodes basées sur les données, telles que LSTM et SVR sont plus performantes que la méthode Nelson-Siegel basée sur un modèle, qui est généralement utilisée dans l'analyse de la structure à terme des taux. La performance des méthodes guidées par le modèle peut diminuer si les données présentent un nombre important de valeurs aberrantes.

Dans notre base de données, la présence des valeurs aberrantes (suite aux événements perturbants) a rendu difficile la réalisation des prédictions avec les méthodes guidées par le modèle. Au contraire, les méthodes dirigées par les données n'étaient pas affectées par les valeurs aberrantes , car elles ne prennent en compte que les jeux de données comprenant des valeurs aberrantes. Comme la plupart des données disponibles aujourd'hui comportent de nombreuses valeurs aberrantes, il n'est pas surprenant que les méthodes guidées par les données soient plus performantes que les méthodes guidées par les modèles.

Certaines études montrent que les modèles linéaires tels que les AR sont plus meilleurs que les ANN et les SVM pour la prévision des séries temporelles. Cependant, les données des séries de taux ne sont pas persistantes et volatiles, et ainsi DNS, basé sur le processus AR, est moins performant que les méthodes d'apprentissage automatique.

En d'autres termes, du fait de la non-linéarité, les techniques d'apprentissage peuvent être utilisées avec succès pour modéliser et prévoir des séries temporelles.

Sur la base des résultats empiriques donnés ci-dessus, nous avons deux implications : La première est que la méthode basée sur les données est plus efficace en termes de pouvoir prédictif que le modèle théorique. Bien sûr, la méthode guidée par les données a un nombre de paramètres beaucoup plus important que la méthode guidée par le modèle et une mise en œuvre beaucoup plus lente que la méthode guidée par le modèle et une vitesse d'implémentation beaucoup plus lente. Cependant, il est acceptable d'utiliser un algorithme d'apprentissage automatique sans avoir besoin de connaissances préalables, telles que la structure à terme des taux d'intérêt.

Deuxièmement, les performances de tous les modèles sont inégales selon la période de données. Dans la période de données très volatiles (sous-période 2), tous les modèles étaient moins prévisibles que dans la période de données moins volatiles (sous-période 1). Dans les deux approches la performance du modèle n'est pas stable lorsque les données sont très volatiles. Les figures montrent que la structure à terme des taux de 2010 à 2022 semble régulière mais imprévisibles liés aux turbulences financières autour des années 2011 et 2019.

La volatilité inhabituelle est l'un des éléments qui ont réduit la performance de prévision de tous les modèles. Par conséquent, il est nécessaire d'envisager une nouvelle approche capable d'obtenir de solides performances de prévision indépendamment de la volatilité des données.

References

- CBM. 2022. *Central Bank of Morocco*. <https://www.bkam.ma/en>
- Francis X. Diebold and Canlin Li. 2006. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics* 130 (2006), 337–364.
- Kennedy R. O’Shea L. Emerson, S. and O’Brien. 2019. Trends and Applications of Machine Learning in Quantitative Finance. (2019).
- Benjamin Lindemann. 2021. A survey on long short-term memory networks for time series prediction. *Procedia CIRP* 99 (2021), 650–655.
- C. Nelson and A. Siegel. 1987. Parsimonious modeling of yield curves. *J.of Business* 60 (1987), 473–489.
- Paiva and F. D. Cardoso. 2018. Decision-Making for Financial Trading: A Fusion Approach of Machine Learning and Portfolio Selection. *Expert Systems with Applications*. (2018).
- Patterson. 2017. Deep Learning: A Practitioner’s Approach, O'Reilly Media. (2017).
- F. Perez-cruz, J. A. Afonso-rodriguez, and J. Giner. 2003. Estimating GARCH models using support vector machines. *Quantitative Finance* (2003), 163–172.
- Scikitlearn. 2022. *types of kernel*. <https://scikit-learn.org/stable/modules/svm.html#parameters-of-the-rbf-kernel>
- L. E. O. Svensson. 1994. Estimating and interpreting forward interest rates : Sweden 1992-1994. *IMF Working Papers* 114 (1994).
- Wang and Luo. 2012. Signal Processing: The Rise of the Machines. *Deutsche Bank Quantitative Strategy* (2012).
- Curt Wells. 1996. The Kalman Filter in Finance. *Advanced Studies in Theoretical and Applied Econometrics* 32 (1996), 75–86.