



École nationale des ponts et chaussées

Projet de fin d'études

Pricing cryptocurrency-derivatives.

Préparé par :

M. Yassir EL ORFI

Sous la direction de:

M. Lancine KOUROUMA

Devant le jury composé de :

M. Aurélien ALFONSI

M. Benjamin JOURDAIN

*Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du
Diplôme d'Ingénieur d'État .Option : Math-Finance-Data*

QUANTEAM



École des Ponts

ParisTech

Résumé

Durant ce travail, nous modélisons la volatilité des crypto-monnaies, en particulier du Bitcoin. Pour ce faire, nous utilisons d'abord une approche basée sur l'introduction de sauts stochastiques dans la dynamique du modèle de Heston.

De plus, nous évaluons l'évolution des performances des deux modèles à l'aide d'un test de sous-performance. Les résultats empiriques confirment que les modèles stochastiques peuvent être utilisés pour évaluer les produits dérivés des crypto-monnaies.

En premier lieu, nous introduisons l'environnement de travail ainsi que les différentes composantes de l'entreprise. Ensuite, nous présentons une brève introduction sur le monde du Bitcoin, suivi de définitions et de théorèmes de base concernant les dynamiques des actions, la volatilité, les processus de Levy, les options sur les crypto-monnaies, ainsi que les méthodes et les conditions de calcul des prix de ces options.

En second lieu, et plus important encore, nous abordons la partie consacrée à la modélisation de l'actif sous-jacent et de la volatilité. Nous présentons les modèles couramment utilisés ainsi que leurs limites, puis nous décrivons les méthodes mentionnées précédemment. L'objectif de cette étude est de parvenir à évaluer les options sur les crypto-monnaies.

Abstract

In this study, we model cryptocurrency volatility, specifically focusing on Bitcoin. To do so, we employ an approach based on introducing stochastic jumps to the dynamics of the Heston model.

Furthermore, we evaluate the performance evolution of both models through a underperformance test. Based on empirical results, we confirm that the stochastic models can be used to price cryptocurrency derivatives.

Firstly, we introduce the work environment and the different components of the company. Then, we provide a brief introduction to the world of BTC, followed by definitions and basic theorems concerning equity dynamics, volatility, Levy processes, options on cryptocurrencies, and the methods and conditions for calculating the prices of these options.

Secondly, and most importantly, we delve into the section dedicated to modeling the underlying asset and volatility. Common models will be presented along with their drawbacks, and then the aforementioned methods will be discussed. The aim of this study is to successfully value options on cryptocurrencies.

Dédicace

Je dédie ce travail à ma famille et à mes amis. Un sentiment de gratitude à mes aimants parents, leurs mots d'encouragement et de ténacité résonnent dans mes oreilles et me donnent la force de continuer à travailler encore plus. Mes frères et sœurs qui n'ont jamais quitté mes côtés m'encouragent quelle que soit ma situation.

Je dédie également ce travail à mes nombreux amis qui m'ont soutenu tout au long du processus. J'apprécierai toujours tout ce qu'ils ont fait, et je leur souhaite la réussite dans leurs travaux aussi.

Cher ami lisant mon travail, je te remercie de m'avoir soutenu, et sache que je n'oublierai jamais notre temps ensemble.

À ma mère et mon père.

À ma grande famille.

À mes amis.

À moi.

Remerciement

Je tiens à remercier les membres de mon comité qui ont été plus que généreux de par leurs expertises et de leur précieux temps. Je remercie tout particulièrement M. Alfonsi AURELIEN, mon encadrant, pour ses innombrables heures de réflexion, de lecture, d'encouragement et surtout pour sa patience tout au long du processus. Merci à M. Kourouma LANCINE, ainsi qu'à mon collègue Andrew, de m'avoir accepté dans leur équipe et de m'avoir encadré tout au long de cette période.

Enfin, j'aimerais exprimer ma gratitude envers mes enseignants, mentors et les administrateurs de notre prestigieuse École nationale des ponts et chaussées, qui m'ont soutenu tout au long de cette année. Votre dévouement et votre volonté à nous éduquer ont permis à la grande majorité d'entre nous de poursuivre et de réussir diverses tâches ardues.

Nous vous en sommes vraiment reconnaissants.

List of abbreviations

AR	: Autoregressive
ARIMA	: Autoregressive integrated moving average
CB	: Central Bank
CC	: Crypto-currencies
BTC	: Bitcoin
DL	: Deep learning
FFT	: Fast fourier transform
TTM	: Time to maturity

Mots-clé, Keywords

Options, Crypto-currencies, Monte CARLO, SVCJ.

Contents

Résumé	2
Abstract	2
Dédicace	3
Remerciment	4
List of abbreviation	5
Chapitre 1: Introduction & Notions	9
1 Introduction générale:	10
1.1 Brève introduction au Blockchain	10
1.2 Brève introduction au Peer to Peer	10
1.3 Problématique:	11
1.4 Quanteam:	13
2 Notions basiques:	13
2.1 Modèle de Black and Scholes:	14
2.2 Modèle de Heston	15
2.3 Processus de Lèvy	15
2.4 Processus de Poisson: simple et composé	16
Chapitre 2: Methodologie	18
3 Volatility stochastique avec sauts:	19
3.1 Volatility stochastique avec sauts corrélées:	19
3.2 Stochastic volatility with correlated jumps:	19
4 Calibration et Évaluation des Options:	20
4.1 La Volatilité Stochastique Inspirée Gatheral and Jacquier (2014):	20
4.2 Optimisation des Paramètres:	22
4.3 Évaluation des Options:	23
Chapitre 3: Data	25
5 Options:	26

6 Sous-jacent:	28
Chapitre 4: Résultats empirique	29
7 Résultats de l'optimisation des paramètres:	30
7.1 Volatilité:	30
7.1.1 Black and Scholes	30
7.1.2 SVCJ	31
7.2 Intensité des sauts:	34
7.3 Paramètre de corrélation:	36
8 Pricing des options:	38
A Surfaces de volatilité:	41
B Autoregressive model:	41
C Discrétisation d'Euler-Maruyama:	41
D Summary of database	42
E RMSE and Parameters	44

List of Figures

1 Principe de Peer to Peer en Bitcoin	11
3 3D smiles for different periods	21
4 2D smiles for different periods and different TTM	22
5 BTC ~ 2019	28
6 σ_{BnS} for different periods	31
7 RMSE BnS with confidence level at 95%	31
8 SVCJ Parameters for different periods	32
9 RMSE ξ (SVCJ) with confidence level at 95%	32
10 σ_{BS} and ξ_{SVCJ} comparison	32
11 σ_{Heston} , ξ_{SVJ} and ξ_{SVCJ} comparison	33
12 λ_{SVJ} , λ_{SVCJ} comparison	34
13 Fluctuation du paramètre ρ	36
19 SVCJ Params for different periods	45
20 RMSE SVCJ with confidence level at 95%	45

21	SVJ Params for different periods	45
22	RMSE SVJ with confidence level at 95%	45
23	Stochastic volatility models 1	46
24	Stochastic volatility models' 2	47
25	ξ parameter and BS volatility	48
26	lambda parameter	49
27	rho parameter	50

List of Tables

1	Table of an example of parametres series of each TTM and different periods	21
2	Données des contrats d'option associés aux actifs ETH et BTC (Partie 1).	27
3	Données des contrats d'option associés aux actifs ETH et BTC (Partie 2).	27
4	Données des contrats d'option associés aux actifs ETH et BTC (Partie 3).	27
5	Données des contrats d'option associés aux actifs ETH et BTC (Partie 4).	27
6	Tableau récaputilatif du temps à maturité des options	28
7	Example of daily minimisation to calibrate B&S parameters	30
8	Summary for each periods' parametrs on average	30
9	Example of daily minimisation to calibrate SVCJ parameters	31
10	Summary for each periods' parametrs on average	31
12	Summary statistics of σ for different models over three periods	42
13	Summary statistics of λ for SVJ and SVCJ models over three periods	43
14	Summary statistics of ρ for HESTON, SVJ, and SVCJ models over three periods	43

List of Algorithms

1	Generating Underlying Asset Paths with the SVCJ Model	38
---	---	----

Chapitre 1

Introduction & Notions:

1	Introduction générale:	10
1.1	Brève introduction au Blockchain	10
1.2	Brève introduction au Peer to Peer	10
1.3	Problématique:	11
1.4	Quanteam:	13
2	Notions basiques:	13
2.1	Modèle de Black and Scholes:	14
2.2	Modèle de Heston	15
2.3	Processus de Lèvy	15
2.4	Processus de Poisson: simple et composé	16

1 Introduction générale:

Dans le monde financier, les produits dérivés constituent souvent une partie indispensable des instruments financiers, tels que les swaps, les obligations à zéro coupon, les bons du Trésor, et bien d'autres.

Ces produits dérivés sont généralement basés sur des sous-jacents tels que les actions, les taux de change, les ETF, mais rarement sur les crypto monnaies. Cependant, de nos jours, le marché des crypto monnaies connaît une croissance exponentielle, avec de nouvelles devises crypto introduites régulièrement, tandis que certaines sont plus importantes que les autres. Au sommet de cette hiérarchie, on trouve la première et la plus dominante des crypto monnaies, le bitcoin.

Le bitcoin (BTC) est la devise crypto la plus répandue dans le monde des crypto monnaies. Introduite par Monsieur Satoshi Nakamoto (2008) selon un nouveau principe de décentralisation , cette idée a vu le jour après la récession de 2008 avec pour objectif de lutter contre la corruption qui régnait dans le monde financier. Par conséquent, toute partie intermédiaire a été éliminée, et la circulation de la monnaie se fait grâce aux principes du blockchain et du peer-to-peer.

1.1 Brève introduction au Blockchain

Le principe du blockchain est au cœur du fonctionnement du bitcoin et d'autres crypto monnaies. Il s'agit essentiellement d'un registre public décentralisé et immuable, dont toutes les transactions faites sont enregistrées de manière publique et sécurisée. Contrairement aux systèmes financiers traditionnels, où une autorité centrale, comme une banque, vérifie les transactions, le blockchain permet à un réseau décentralisé de participants, appelés nœuds, de valider et d'enregistrer les transactions.

Chaque bloc dans le blockchain contient un ensemble de transactions validées et est lié au bloc précédent, formant ainsi une chaîne de blocs. Cette liaison entre les blocs rend le système résistant à la falsification et à la modification des données, car toute tentative de modifier un bloc antérieur nécessiterait de modifier tous les blocs suivants, ce qui serait extrêmement difficile et coûteux en ressources.

1.2 Brève introduction au Peer to Peer

Le principe de peer-to-peer (pair-à-pair) est un autre aspect clé du fonctionnement du bitcoin. Contrairement aux systèmes traditionnels où les transactions passent par des intermédiaires, comme les banques, dans le réseau peer-to-peer, les utilisateurs interagissent directement les uns avec les autres sans avoir besoin d'une autorité centrale.

Chaque utilisateur du réseau possède un logiciel client qui lui permet de créer, valider et diffuser des transactions. Lorsqu'une transaction est effectuée, elle est diffusée à tous les nœuds du réseau, qui la vérifient et l'incluent dans un bloc. Une fois le bloc créé, il est ajouté à la chaîne de blocs et devient ainsi une partie permanente de l'historique des transactions.

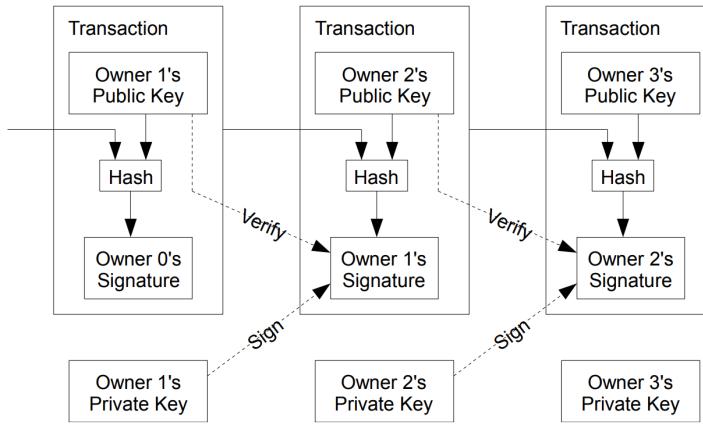


Figure 1: Principe de Peer to Peer en Bitcoin

Grâce à la combinaison du blockchain et du système peer-to-peer, le bitcoin offre un moyen sécurisé et transparent de transférer de la valeur sans avoir besoin d'une autorité centrale pour superviser les transactions. Cela permet également aux utilisateurs de rester relativement anonymes, car les transactions sont identifiées par des adresses publiques plutôt que par des informations personnelles.

1.3 Problématique:

De nos jours, les cryptomonnaies sont de plus en plus présentes dans les portefeuilles d'investissement et de placement, et elles sont largement utilisées pour répondre aux besoins d'une clientèle variée d'investisseurs aux objectifs parfois très différents. Ainsi, de nombreux modèles sont étudiés pour mieux comprendre l'évolution de la valeur des cryptomonnaies, afin de mieux appréhender les risques et, par conséquent, mieux gérer les portefeuilles. Parmi ces modèles, on peut citer par exemple le modèle de [Heston \(1993\)](#).

Ce modèle vise à mieux comprendre la dynamique de la plupart des sous-jacents et à prévoir leur comportement, dans le but de se protéger contre le risque de défaut. Cependant, étant un modèle à un seul facteur pour la variation de la volatilité, il ne correspond pas à la réalité. Une des motivations pour modéliser les cryptomonnaies est la prévision de leurs futures évolutions et la mise en place de stratégies d'investissement. Pour cela, il est nécessaire de comparer les modèles permettant de décrire les liens caractérisant ces deux dynamiques, puis de les confronter à la réalité et de mesurer leurs performances. Cela nous permettra d'utiliser ces modèles pour évaluer et élaborer des stratégies d'investissement plus efficaces et optimales.

Ainsi, le modèle de [Bates \(1996\)](#) est proposé pour intégrer des sauts dans les deux dynamiques, ce type de comportement étant courant lorsque l'on parle des cryptomonnaies, car elles sont souvent sujettes à une forte volatilité. Un saut, dans le modèle de Bates, est un processus de Poisson (ou processus de Lévy) qui génère des variations soudaines pour des intensités données et à des instants précis. Intégrer ce mécanisme dans notre modèle permet de capturer les différents sauts subis par les cryptomonnaies, donnant ainsi naissance au SVCJ (Stochastic Volatility with Correlated Jumps).

En utilisant le modèle SVCJ, nous pouvons comparer les performances de cette approche dans la modélisation de la volatilité des cryptomonnaies, y compris le Bitcoin et le comparer aux modèles usuels. Cette comparaison nous permettra de mieux comprendre quel modèle offre une meilleure adéquation aux données réelles et une meilleure capacité à prédire les futures

variations de volatilité.

L'objet de cette étude est de modéliser la dynamique de l'équity et de la volatilité des cryptomonnaies à l'aide de différents modèles et d'analyser leurs avantages respectifs, dans le but de valoriser les options sur ces actifs sous-jacents.

Dans ce rapport, nous commencerons par mettre en évidence les diverses notions nécessaires à la compréhension du sujet et constituant le jargon de celui-ci, allant des options à la volatilité stochastique, en passant par les processus de Poisson.

Ensuite, le premier chapitre sera consacré à la définition des modèles de Heston, de Bates et des processus de Poisson. Quant au deuxième chapitre, il abordera la modélisation de la dynamique de l'équity et de la volatilité.

Enfin, nous présenterons la méthodologie permettant de valoriser les options sur les cryptomonnaies. En combinant ces différentes approches, nous visons à mieux comprendre la nature complexe de ces actifs numériques et à développer des outils pour évaluer leurs options de manière plus précise et efficace.

Dans le dernier chapitre de notre étude, nous aborderons la notion de bases de données et leur traitement. Nous présenterons ensuite nos résultats empiriques, issus d'une analyse rigoureuse des données collectées. Enfin, pour une meilleure compréhension de notre travail, nous illustrerons nos découvertes à l'aide de graphiques et de tableaux synthétiques.

En vue de l'obtention de mon diplôme d'ingénieur et à l'issue de ma formation à ENPC, j'ai effectué mon stage au sein de Quanteam

Alors une petite présentation aura lieu, notamment la Practice Quant où j'ai passé mon stage.

1.4 Quanteam:

Le groupe Quanteam est une société de conseil et d'ingénierie spécialisée dans les domaines de la finance et des nouvelles technologies. Fondé en 2007 Par Monsieur Julien BENSOUSSAN. En tant que leader dans leur domaine, le groupe Quanteam se distingue par son approche analytique rigoureuse et sa connaissance pointue des marchés financiers. Ils accompagnent les acteurs majeurs de l'industrie financière, tels que les banques, les assurances, les fonds d'investissement, ainsi que les entreprises du secteur technologique. Leurs domaines d'expertise couvrent une large gamme de services, notamment la modélisation financière, l'analyse de risques, la gestion d'actifs, la transformation digitale, la cybersécurité, l'analyse de données (Data Science), et bien d'autres. Avec leur engagement envers l'excellence, l'innovation et la satisfaction client, le groupe Quanteam s'impose comme un partenaire de choix pour accompagner les entreprises dans leur transformation et leur réussite dans un environnement financier en constante évolution

2 Notions basiques:

Pour une formulation dans un cadre mathématique. Supposons que le marché du BTC soit un marché financier en temps continu et sans friction¹. Les emprunts et les ventes à découvert sont autorisés. Le taux d'intérêt sans risque constant $r \geq 0$ et l'horizon temporel $T < \infty$ sont fixés. Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$, le processus de prix de l'actif et l'actif sans risque sont définis par des semi-martingales adaptées $(S_t)_{t \geq 0}$ et $(B_t)_{t \geq 0}$, où $B_0 = 1$ et $B_t = e^{-rt}$ pour $t \geq 0$ respectivement. On suppose que la filtration satisfait les conditions habituelles pour assurer l'absence d'arbitrage, et nous supposons l'existence d'une mesure neutre au risque \mathcal{Q} .

Nous considérons la perspective d'un vendeur d'options et nous vendons à découvert une option d'achat européenne. Le prix de l'option avec un prix d'exercice K et une échéance $\tau = T - t$ à l'instant $t < T$ est noté $C(t, \tau, K)$.

L'horizon temporel fini T est partitionné en $T = \{0, \delta t, 2\delta t, \dots, n * \delta t = T\}$, où $n \in N$ représente la n-ième partition et .Les scénarios sont N trajectoires du processus de prix de l'actif $S(t) = (S_{t,i})$, et celui de la volatilité associé $V(t) = (V_{t,i})$ où $i = 1, \dots, N$ et $t = 0, 1, \dots, T$. Présentons par la suite les différents modèles auxquels peut-on avoir face:

¹absence de coûts de transaction

2.1 Modèle de Black and Scholes:

Le prix de l'actif S_t est géré par l'équation de diffusion stochastique suivante, connue sous le nom de mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

où :

- r est le taux d'intérêt sans risque,
- σ est la volatilité du prix de l'actif sous-jacent,
- W_t est un processus de Wiener.

Le modèle Black-Scholes est l'un des modèles les plus célèbres en finance mathématique, utilisé pour évaluer le prix d'options financières, en particulier les options européennes sur actions sans dividendes. Il a été développé par Fischer Black, Myron Scholes et Robert Merton dans les années 1970. Le modèle repose sur l'hypothèse d'un marché financier idéal avec l'absence d'opportunités d'arbitrage et que le sous-jacent suit une loi log-normale, ce qui n'est pas toujours vrai en réalité.

Le prix d'une option d'achat européenne (call) sur un actif, noté C , est donné par l'équation de Black-Scholes :

$$\begin{aligned} C(T, T - T, K) &= C(T, K) = (S_T - K)^+ \\ &= S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2) \end{aligned}$$

où :

- Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard,
- d_1 et d_2 sont calculés comme suit :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad \text{et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

or, afin de mieux modéliser notre système, on s'écarte d'une modélisation reposant sur volatilité déterministe, par exemple [Black and Scholes \(1973\)](#), ou locale par exemple [Dupire \(1994\)](#), mais plutôt stochastique:

2.2 Modèle de Heston

Par extension du modèle Black-Scholes , le modèle de Heston permet de modéliser la volatilité du prix de l'actif sous-jacent comme un processus stochastique. Considérons le système suivant:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t} \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_{2,t} \end{aligned}$$

où :

- v_t représente la volatilité instantanée du prix de l'actif,
- κ est la vitesse de réversion vers la volatilité moyenne θ ,
- σ_v est la volatilité de la volatilité,
- $W_{1,t}$ et $W_{2,t}$ sont deux processus de Wiener indépendants.

L'équation stochastique à laquelle soumet la volatilité de l'actif est un processus de retour à la moyenne appelé CIR, ou processus Ornstein-Uhlenbeck, comme indiqué dans [John C. Cox and Ross \(1985\)](#).

Cela rend le modèle de Heston plus réaliste pour les marchés financiers, où la volatilité peut présenter des variations importantes dans le temps, le rendant ainsi plus adapté à la réalité. En intégrant la volatilité stochastique, le modèle de Heston permet de mieux saisir les comportements observés sur les marchés, notamment en ce qui concerne le SMILE de volatilité et les queues épaisse dans les distributions de rendements.

Toutefois, il présente à son tour des inconvénients qui rendent son utilisation moins pratique. Il ne considère qu'un seul facteur pour modéliser la volatilité, ce qui est quelque peu restrictif étant donné que divers facteurs influencent la variation de la volatilité. Le modèle de Heston ne capture pas ces variations de volatilité causées par des facteurs multiples, ce qui peut entraîner une sous-estimation des risques réels dans certaines conditions de marché.

De plus, dans notre cas, le modèle de Heston ne prend pas en compte les sauts de prix. Dans les marchés des crypto-monnaies, les sauts de prix sont relativement courants et peuvent avoir un impact significatif sur les options et autres produits dérivés. En l'absence de modélisation des sauts, le modèle de Heston peut ne pas refléter fidèlement les mouvements violents observés sur les marchés.

2.3 Processus de Lèvy

Définition: Processus de Lévy:

Un processus stochastique adapté à valeurs dans R^d , noté $X = (X_t)_{t \geq 0}$, avec $X_0 = 0$ presque sûrement, est appelé un processus de Lévy si :

- L_1 – X a des accroissements indépendants,
- L_2 – X a des accroissements stationnaires,

L_3 — X est stochastiquement continu.^a

^aProcessus stochastique continu

Exemples:

- Linear drift est le processus de Lévy le plus simple, un processus déterministe.
- Le mouvement brownien est le seul processus de Lévy non déterministe avec des trajectoires continues.
- Le processus de Poisson est également des exemples de processus de Lévy .

2.4 Processus de Poisson: simple et composé

Le processus de Lévy le plus simple que l'on puisse considérer est une masse ponctuelle en 1: x_1 . En ajoutant un paramètre d'intensité $\lambda \geq 0$, on obtient λx_1 , et on génère un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ avec des sauts de taille 1 qui se produisent avec un taux moyen de λ , X est appelé un processus de Poisson avec une intensité λ , la distribution de poisson respective (de paramètre λ) est:

$$P[X_t = k] = \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^k}{k!}, \quad \forall k \geq 0$$

On peut montrer que les temps d'attente successifs d'un saut sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle avec un paramètre λ . Réciproquement, en commençant par une séquence $(\tau_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes distribuées $\sim \exp(\lambda)$, et $T_n = \sum_{i=1}^N \tau_i$, le processus de comptage associé

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} 1\{T_n \leq t\}$$

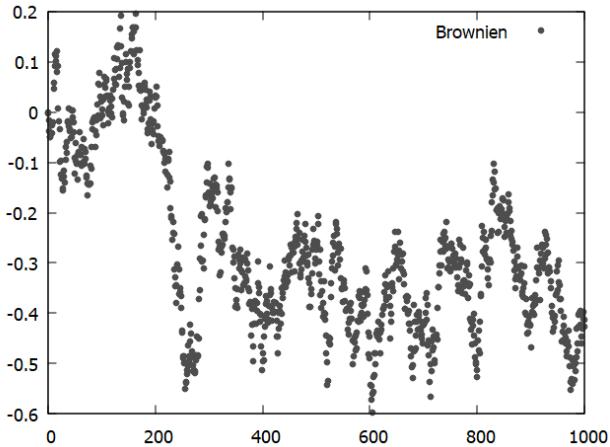
est un processus de Poisson de paramètre λ .

Une extension naturelle du processus de Poisson avec une hauteur de saut de 1 est un processus où la taille du saut est aléatoire. Soient $(Y_i)_{i \geq 1}$ une séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $L(Y_1) = v$.

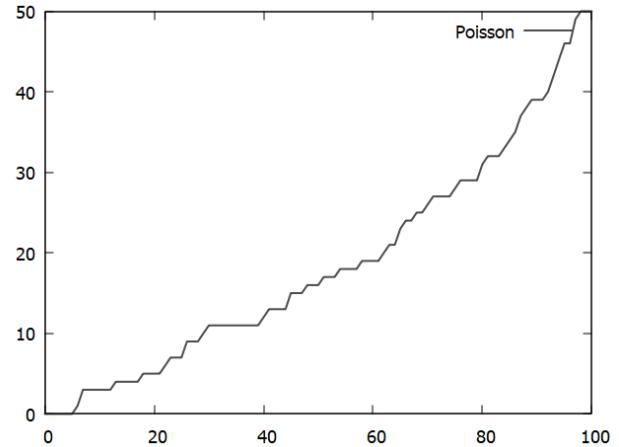
$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

où $(N_i)_{i \geq 0}$ est un processus de Poisson avec une intensité $\lambda \geq 0$ qui est indépendant de $(Y_i)_{i \geq 1}$, définit un processus de Poisson composé $X = (X_i)_{i \geq 0}$ avec une intensité λ et une distribution de taille de saut v .

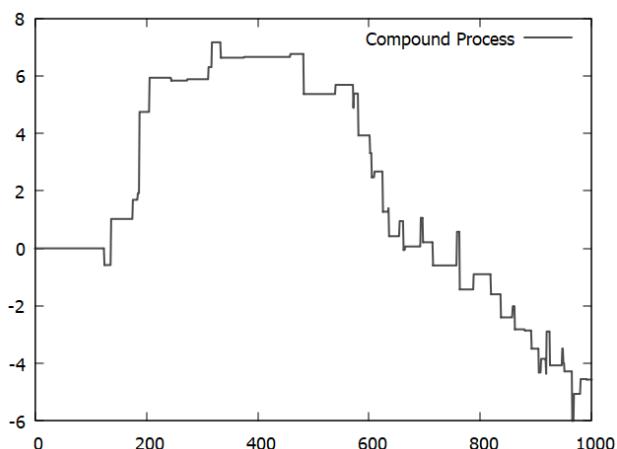
Une dynamique qui contient un drift linéaire, d'un mouvement brownien et d'un processus de Poisson est à nouveau un processus de Lévy: appelé souvent un processus de "saut-diffusion".



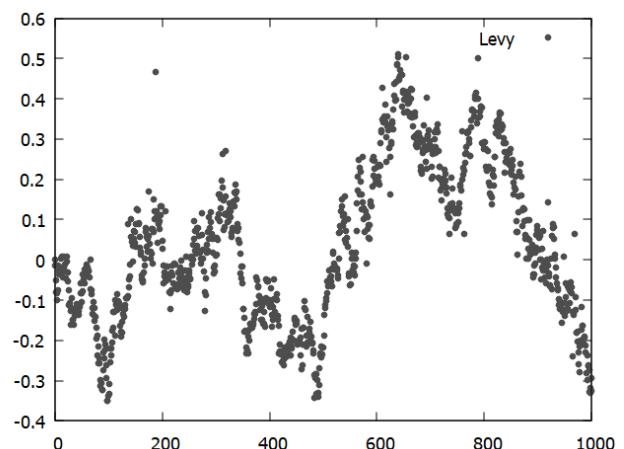
(a) Mouvement Brownien



(b) Processus Poisson simple



(c) Processus Poisson composé



(d) Processus de Levy

Chapitre 2

Methodologie:

3 Volatility stochastique avec sauts:	19
3.1 Volatility stochastique avec sauts corrélées:	19
3.2 Stochastic volatility with correlated jumps:	19
4 Calibration et Évaluation des Options:	20
4.1 La Volatilité Stochastique Inspirée Gatheral and Jacquier (2014):	20
4.2 Optimisation des Paramètres:	22
4.3 Évaluation des Options:	23

3 Volatility stochastique avec sauts:

Afin de modéliser la dynamique du BTC avec les modèles à volatilité stochastique et incorporant des sauts, le modèle en temps continu de [Duffie et al. \(2000\)](#) qui englobe le modèle standard de diffusion à sauts et le modèle SV avec sauts uniquement dans les rendements (SVJ) de [Bates \(1996\)](#), sera très utile.

Soit la discrétisation temporelle finie $T = 0, \delta t, 2\delta t, \dots, m\delta t = T$, où $m \in N$ représente le m-ième jour de négociation et $\delta t = 1/365$. Les scénarios sont N trajectoires du processus de prix d'actif $S_{t,i} = (S(t), i)$, où $i = 1, \dots, N$ et $t = 0, 1, \dots, T$. Dans ce contexte, chaque trajectoire $S_{t,i}$ représente le prix de l'actif pour le i-ème scénario à différents instants de temps t.

3.1 Volatility stochastique avec sauts corrélées:

Les dynamiques du modèle SVCJ :

$$\begin{aligned} d \log S_t &= \mu dt + \sqrt{V_t} dW_{S_t} + Z_s dN_t \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t)dt + \xi \sqrt{V_t} dW_{V_t} + Z_v dN_t \\ \text{Cov}(dW_{S_t}, dW_{V_t}) &= \rho dt \\ P(dN_t = 1) &= \lambda dt \end{aligned}$$

avec $\mu, \kappa, \theta, \xi, \rho, \lambda$ sont des paramètres déterministes, dW_{S_t} et dW_{V_t} sont des processus de Wiener indépendants, et dN_t est un processus de Poisson avec un taux constant λ . Les termes Z_s et Z_v représentent les sauts dans les rendements et la volatilité, respectivement.

3.2 Stochastic volatility with correlated jumps:

Étant donné que le processus de Poisson générant les sauts est le même dans les dynamiques de l'équité et la volatilité, les tailles des sauts peuvent être corrélées; Donc la taille du saut aléatoire Z_s conditionnelle à Z_v est supposée suivre une distribution gaussienne avec une moyenne de $\mu_s + \rho_j Z_v$ et un écart-type σ_s . Le saut dans la volatilité Z_v est supposé suivre une distribution exponentielle avec une moyenne μ_v :

$$Z_s | Z_v \sim N(\mu_s + \rho_{jump} Z_v, \sigma_s^2); \quad Z_v \sim \exp(\mu_v).$$

La corrélation ρ entre les termes de diffusion est introduite pour capturer les éventuels effets de levier entre les rendements et la volatilité. Les sauts peuvent également être corrélés, et le terme de corrélation ρ_{jump} prend en compte cela.

En l'absence de sauts dans la volatilité, le paramètre θ représente la moyenne à long terme de V_t , et le processus converge vers cette valeur à une vitesse régie par le paramètre κ . Le paramètre ξ est appelé la volatilité de la volatilité (vol de vol) et mesure la réactivité de la variance aux chocs de volatilité diffusifs. En l'absence de sauts, le paramètre μ représente le rendement logarithmique attendu.

4 Calibration et Évaluation des Options:

4.1 La Volatilité Stochastique Inspirée Gatheral and Jacquier (2014):

Nous abordons ici la façon dont la surface de volatilité est construite à partir des prix des options et de la volatilité implicite du marché. Étant donné que le marché des contrats à terme sur les cryptomonnaies (CC) est encore relativement immature et peu liquide durant la période considérée, avec un nombre limité d'options activement négociées sur les plate-formes d'échange de cryptomonnaies, les prix des options sans arbitrage sont obtenus en utilisant la paramétrisation de la surface de volatilité basée sur la volatilité stochastique inspirée **SVI**, cf [Gatheral and Jacquier \(2014\)](#).

Soit $\sigma^{BS}(k, \tau = T - t)$ la volatilité implicite du modèle de Black-Scholes, où $k = \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)$ est la log-moneyness et $w(k, \tau) = (\sigma^{BS}(k, \tau))^2 \tau$ est la variance implicite totale.

Pour une échéance τ fixée, la paramétrisation du smile de volatilité implicite totale, telle que présentée initialement dans [Gatheral and Jacquier \(2014\)](#), est donnée par l'équation suivante :

$$w(k, \chi_*) = a + b \left\{ \rho_{svi}(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + (\sigma_{svi})^2} \right\}.$$

Dans l'ensemble de paramètres $\chi_* = \{a, b, \rho_{svi}, m, \sigma_{svi}\}$:

- $a \in R$ régit le niveau général de variance, $b \geq 0$ régule les pentes des extrémités.
- $\rho_{svi} \in [-1, 1]$ contrôle l'asymétrie.
- $m \in R$ permet des décalages horizontaux du smile.
- $\sigma_{svi} > 0$ est la courbure ATM du smile.

Chaque jour, le smile est recalibré pour chaque maturité. La volatilité implicite est obtenue via une procédure de recherche de racine simple, tandis que les paramètres χ_* sont calibrés en utilisant la méthode expliquée dans la section suivante.

De plus, la calibration est sujette à des contraintes non linéaires spécifiées dans [Gatheral and Jacquier \(2014\)](#). Ces contraintes garantissent la convexité des prix des options, éliminant ainsi l'arbitrage des butterflies. L'arbitrage des spreads calendaires est évité en pénalisant les smiles ajustés, ce qui induit une diminution du niveau de la volatilité implicite totale pour un niveau de strike donné.

Pour l'interpolation, la volatilité implicite ATM $\theta_{svi}^T = w(0, T)$ est interpolée pour $t_1 < T < t_2$ en suivant la méthode décrite dans [Gatheral and Jacquier \(2014\)](#), où t_1 et t_2 désignent les instants auxquels les volatilités implicites sont observées.

Le prix de l'option résultant est une combinaison convexe :

$$C(T, K) = \alpha_T C(t_1, K) + (1 - \alpha_T) C(t_2, K),$$

où $\alpha_T = \frac{\sqrt{\theta_{svi}^{t_2}} - \sqrt{\theta_{svi}^T}}{\sqrt{\theta_{svi}^{t_2}} - \sqrt{\theta_{svi}^{t_1}}}$, avec $\alpha_T \in [0, 1]$.

le tableau suivant correspond aux paramètres de la volatilité SVI pour TTM différents ²:

date	ttm	a	b	rho	m	sigma	penalty
20190402	0.0082	0.0038	0.0155	0.3004	-0.0117	0.0417	0.0266
20190402	0.0274	0.0049	0.0385	-0.1975	-0.0938	0.1421	0.0189
20190402	0.0658	0.0152	0.0488	-0.5000	-0.1892	0.1461	0.0191
20190402	0.2384	0.0058	0.1528	-0.0242	0.0019	0.4286	0.0249
20190402	0.4877	0.0653	0.1689	-0.2615	-0.2531	0.5390	0.0150
(a) Period 1							
20191002	0.0055	0.0012	0.0391	0.0166	0.0206	0.0446	0.1131
20191002	0.0247	0.0011	0.0631	-0.1459	0.0074	0.2327	0.0156
20191002	0.0630	0.0125	0.0949	0.0534	0.1000	0.3081	0.0098
20191002	0.1589	0.0317	0.1557	-0.3019	-0.1054	0.5813	0.0032
20191002	0.2356	0.0255	0.2042	-0.2062	-0.0416	0.7581	0.0330
(b) Period 2							
20200202	0.0137	0.0038	0.0237	0.4868	0.0283	0.0100	0.0640
20200202	0.0329	0.0019	0.0571	0.0155	-0.0199	0.1154	0.0119
20200202	0.0712	0.0133	0.0705	-0.1803	-0.0709	0.1005	0.0204
20200202	0.1479	0.0115	0.1300	0.1570	0.0384	0.3282	0.0245
20200202	0.3973	0.0406	0.2022	-0.0622	-0.1353	0.6656	0.0094
(c) Period 3							

Table 1: Table of an example of parametres series of each TTM and different periods

Suivant sont les volatilités implicites du marché en rouge et la surface implicite de volatilité SVI interpolée en bleu pour le 1er avril 2019 qui corresponde à une période de hausse, le 1er octobre 2019 où on peut la décrire par le calme et le 1er février 2020, la période de Covid.

DATE = 20190401, PERIOD = RISING DATE = 20191001, PERIOD = CALM DATE = 20200201, PERIOD = COVID

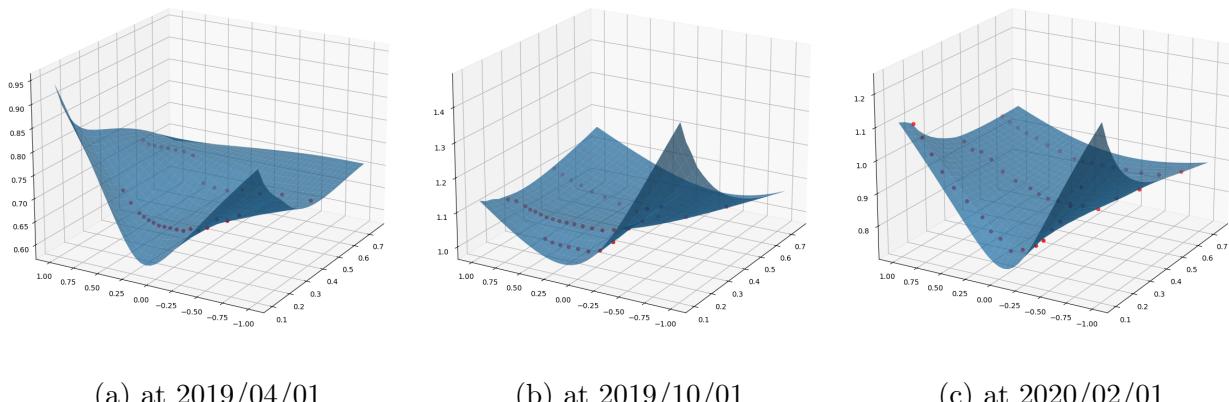


Figure 3: 3D smiles for different periods

²la colonne des pénalités correspondent à la régularisation L_2 de Tikhonov et al. (2011)

La figure suivante correspond à différents Smiles de volatilité SVI pour TTM différents:

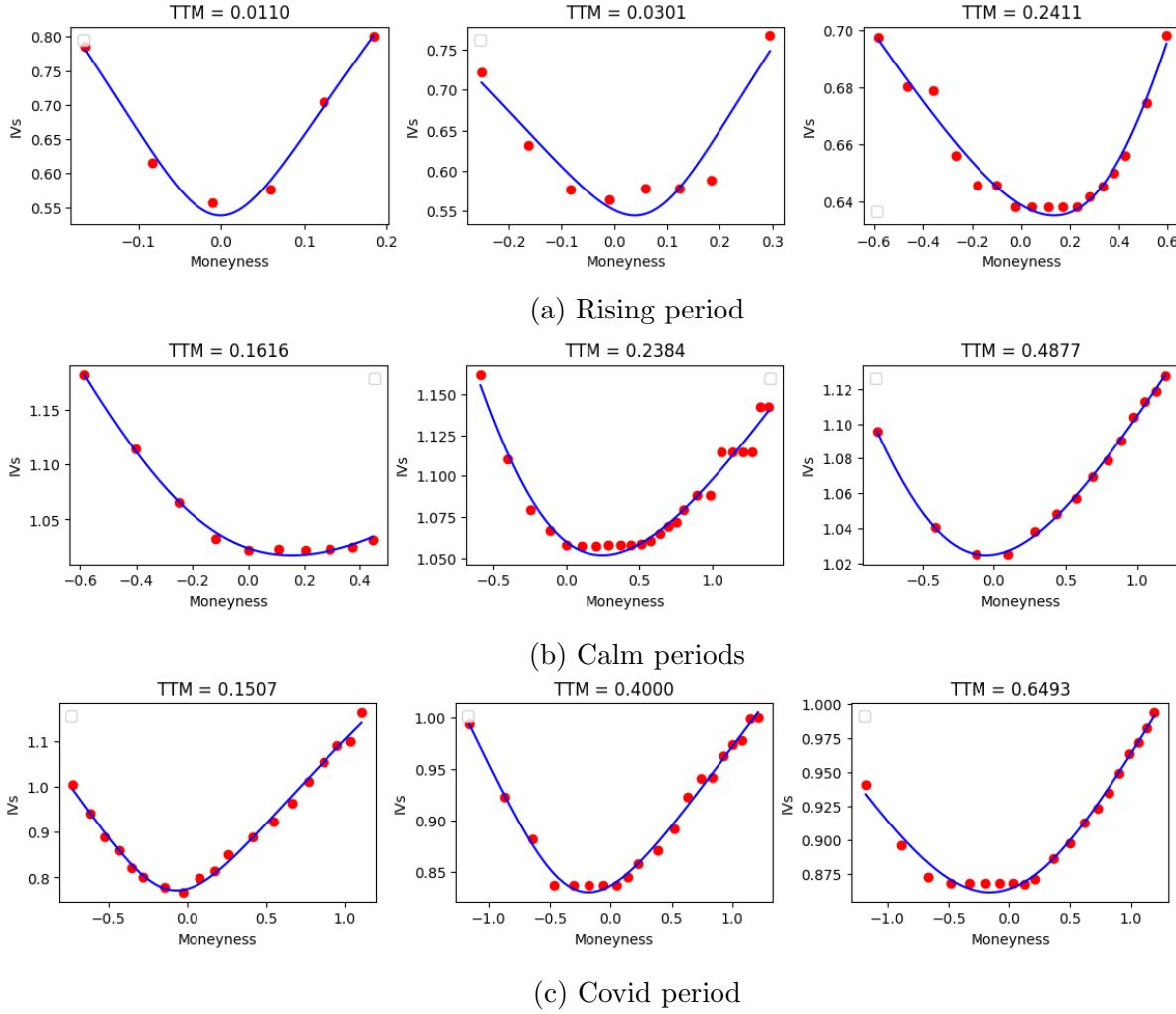


Figure 4: 2D smiles for different periods and different TTM

4.2 Optimisation des Paramètres:

Les paramètres du modèle sont optimisés selon Carr and Madan (1999). Le prix d'une option européenne $C(T, K)$ est donné par la transformée de Fourier rapide (FFT):

$$C(T, K) = \frac{1}{\pi} e^{-\alpha \ln K} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iv \ln K} \psi_T(v) dv,$$

où $\psi_T(v)$ est défini comme suivant:

$$\psi_T(v) = \frac{\exp(-rT\varphi_T(v - (\alpha + 1)i))}{\alpha^2 + \alpha - v^2 + i(2\alpha + 1)v}.$$

il s'agit de la fonction caractéristique du prix amorti au niveau α de l'option $c_T[\ln(K)] = e^{\alpha \ln K} C(T, K)$

On a choisi $\alpha = 1.1$ comme indiqué dans le papier mentionné ci-dessus.

La calibration est effectuée par l'optimisation :

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in \Theta} R(\theta),$$

avec la fonction objectif $R(\theta)$ définie par :

$$R(\theta) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{IV_{\text{Modèle}}(T_i, K_i, \theta) - IV_{\text{Marché}}(T_i, K_i)\}^2 + \theta^T \Gamma \theta},$$

où Θ représente l'espace des paramètres, $IV_{\text{Modèle}}(T_i, K_i, \theta)$ et $IV_{\text{Marché}}(T_i, K_i)$ sont les volatilités implicites du modèle et du marché pour les maturités et les strikes T_i et K_i . La matrice Γ est diagonale semi-définie positive et correspond à la régularisation L2 de [Tikhonov et al. \(2011\)](#), favorisant les paramètres avec des normes plus petites, afin d'éviter le phénomène de Overfitting. Les entrées de Γ sont ajustées individuellement pour chaque paramètre afin de maintenir des ordres de grandeur raisonnables.

L'espace des paramètres $\Theta \subset R^d$ (dans notre cas χ -set) pour chaque modèle considéré est soumis à des contraintes d'inégalité linéaires. Étant donné que l'objectif n'est pas nécessairement convexe, il peut exister plusieurs minima locaux.

Pour explorer l'ensemble des paramètres, les algorithmes basés sur des simulations aléatoires sont plus appropriés que les méthodes locales basées sur le gradient. Dans notre cas, nous utilisons l'optimiseur de programmation séquentielle des moindres carrés (Sequential Least Squares Programming).

Nous corrigons les effets temporels en calibrant les paramètres sur la surface de volatilité implicite au lieu des prix des options. Nous imposons des seuils de liquidité et de moneyness. Les contrats doivent avoir un volume de négociation positif et un delta Black-Scholes absolu dans l'intervalle [0,25, 0,75].

4.3 Évaluation des Options:

Les prix des options sont obtenus quotidiennement. Chaque option est évaluée en fonction de la surface de volatilité implicite (IV) du jour correspondant. Si l'option n'est pas négociée pour la maturité et le strike donnés, la surface de volatilité implicite paramétrée par SVI est interpolée de manière sans arbitrage.

À titre d'illustration, nous examinons les prix des options CC au début de chaque période de marché. La Figure 3 présente les surfaces IV interpolées paramétrées par SVI pour les paramètres SVI dans le Tableau 12. Les prix des options obtenus sont affichés dans le Tableau 11b.

Rappelons que pour une surface IV donnée, les paramètres SVI liés par la formule du [Gatheral and Jacquier \(2014\)](#) sont calibrés pour chaque TTM. Les dynamiques temporelles des paramètres SVI fournissent les informations suivantes :

- Le paramètre a augmente avec le TTM, ce qui correspond à l'augmentation de la variance totale ATM à mesure que le TTM augmente.
- Le paramètre σ_{svi} diminue avec le TTM, indiquant une diminution de la courbure ATM.

- Des valeurs croissantes du paramètre b indiquent des pentes plus élevées des ailes à mesure que le TTM augmente.
- L'asymétrie, exprimée en termes du paramètre ρ_{svi} , varie selon les segments de marché.
- Les valeurs négatives de ρ_{svi} indiquent une préférence pour les puts OTM par rapport aux calls OTM.

Pendant la période haussière, l'asymétrie est proche de zéro pour la plupart des maturités.

Chapitre 3

Jeux de données:

5 Options: 26

6 Sous-jacent: 28

5 Options:

Dans le cadre de cette étude, nous analysons un ensemble de données collectées à partir de l'API de la plateforme Deribit. Ces données sont associées à des contrats d'options financières, principalement l'actif BTC(organique).

Les données que nous utilisons sont diverses informations en rapport avec les contrats d'options, telles que les prix sous-jacents, les prix du marché, les volatilités implicites, les taux d'intérêt, les quantités disponibles aux prix d'achat et de vente, et bien plus encore. Ces informations sont collectées à des moments spécifiques, pour se faire, j'utilise l'API de la plateforme [Deribit-API](#), il s'agit essentiellement de l'ensemble des colonnes suivantes :

- index : L'indice de ligne ou l'identifiant de l'entrée dans le tableau.
- underlying-price : Le prix de l'actif sous-jacent(BTC, ETH, SYNTH BTC, SYNTH ETH...).
- underlying-index : L'identifiant de l'indice de l'actif sous-jacent.
- timestamp : Le moment où les données ont été enregistrées.
- state : L'état du contrat d'option (par exemple, "open" indique que le contrat est actif).
- settlement-price : Le prix de règlement du contrat d'option.
- open-interest : Le nombre de contrats en circulation qui n'ont pas été exercés ou clôturés.
- min-price : Le prix minimal du contrat d'option.
- max-price : Le prix maximal du contrat d'option.
- mark-price : Le prix du marché actuel du contrat d'option.
- mark-iv : La volatilité implicite du contrat d'option, calculée à l'aide du prix du marché.
- last-price : Le dernier prix de transaction du contrat d'option.
- interest-rate : Le taux d'intérêt associé au contrat d'option.
- instrument-name : Le nom ou l'identifiant du contrat d'option.
- index-price : Le prix de l'indice associé au contrat d'option.
- bid-iv : La volatilité implicite du contrat d'option au meilleur prix d'achat.
- best-bid-price : Le prix le plus élevé qu'un acheteur est prêt à payer pour le contrat d'option.
- best-bid-amount : La quantité de contrats disponibles au meilleur prix d'achat.
- best-ask-price : Le prix le plus bas qu'un vendeur est prêt à accepter pour le contrat d'option.
- best-ask-amount : La quantité de contrats disponibles au meilleur prix de vente.
- ask-iv : La volatilité implicite du contrat d'option au meilleur prix de vente.

Voici un aperçu de quelques entrées de données, illustrant les différents paramètres associés aux contrats d'options. Chaque ligne du tableau représente un contrat d'option spécifique à un moment donné. Nous examinons notamment le prix sous-jacent, les prix du marché, la volatilité implicite, l'intérêt ouvert, et d'autres paramètres pertinents.

	underlying_price	underlying_index	timestamp	state	settlement_price
0	8696.35	SYN.BTC-13MAR20	1582973940131	open	0.01
1	8835.84	SYN.BTC-24APR20	1582973940139	open	0.05
2	8835.84	SYN.BTC-24APR20	1582973940145	open	0.05
3	232.65	ETH-26JUN20	1582973940307	open	0.43
4	8835.84	SYN.BTC-24APR20	1582973940330	open	0.05

Table 2: Données des contrats d'option associés aux actifs ETH et BTC (Partie 1).

	open_interest	min_price	max_price	mark_price	mark_iv
0	201.5	0.0005	0.0205	0.00659739	60.95
1	43.1	0.0275	0.08	0.04985728	62.43
2	43.1	0.0275	0.08	0.04985728	62.43
3	143.0	0.4015	0.5445	0.471235	90.05
4	43.1	0.0275	0.08	0.04985728	62.43

Table 3: Données des contrats d'option associés aux actifs ETH et BTC (Partie 2).

	last_price	interest_rate	instrument_name	index_price	bid_iv
0	0.0075	0.0	BTC-13MAR20-10000-C	8638.68	59.35
1	0.054	0.0	BTC-24APR20-10000-C	8638.68	61.48
2	0.054	0.0	BTC-24APR20-10000-C	8638.68	61.48
3	0.49	0.0	ETH-26JUN20-320-P	222.85	0.0
4	0.054	0.0	BTC-24APR20-10000-C	8638.68	61.48

Table 4: Données des contrats d'option associés aux actifs ETH et BTC (Partie 3).

	best_bid_price	best_bid_amount	best_ask_price	best_ask_amount	ask_iv
0	0.006	30.1	0.0075	9.5	63.25
1	0.0485	4.0	0.052	23.3	63.92
2	0.0485	4.0	0.0515	22.4	63.57
3	0.015	2.0	1.1	1.0	416.96
4	0.0485	4.0	0.052	45.7	63.92

Table 5: Données des contrats d'option associés aux actifs ETH et BTC (Partie 4).

Néanmoins, il manque des données cruciales à l'étude qui sont données implicitement, ou bien à l'aide d'un calcul indirect: le Strike de l'option figure dans son nom, la maturité de l'option est calculé comme temps restant du (TTM: time to maturity), la nature de l'option est déduite de la dernière lettre de son nom, etc..

La majorité des options sur lesquelles l'étude est menée, ont le TTM inférieure ou égale à 6 mois, comme le représente le tableau suivant:

	Interval	Percentage
0	0 to a week	10.81%
1	one to two weeks	11.43%
2	two weeks to 3 months	30.42%
3	3 to 6 months	27.32%
4	6 months and above	20.01%

Table 6: Tableau récapitulatif du temps à maturité des options

6 Sous-jacent:

D'autre part, le sous-jacent étant le Bitcoin (BTC), a subi de nombreuses perturbations, notamment en raison des effets du COVID-19 et de la récession économique qui a suivi. Pour mieux analyser ces fluctuations, nous allons décomposer cette base de données en quatre périodes significatives :

- Période Burn: le 31 mars 2018
- Période d'évolution = le 31 mars 2019
- Période calm(avant covid) = le 01 octobre 2019
- Période après covid = le 01 février 2020

Le graphique ci-dessous illustre l'évolution du cours du BTC, en mettant en évidence le point où les restrictions liées au COVID-19 ont commencé à avoir un impact significatif :

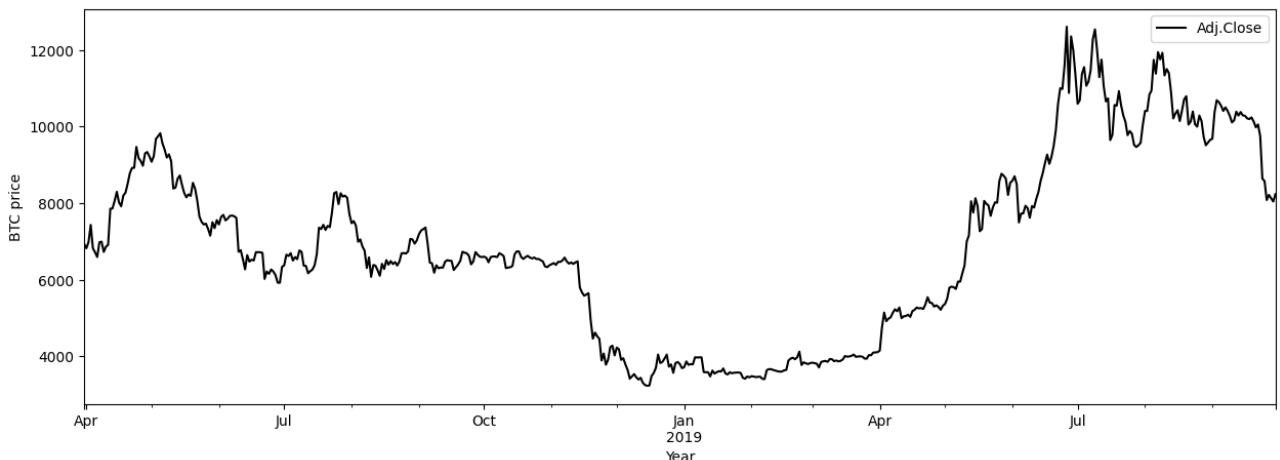


Figure 5: BTC ~ 2019

Chapitre 4

Résultats empiriques:

7 Résultats de l'optimisation des paramètres:	30
7.1 Volatilité:	30
7.2 Intensité des sauts:	34
7.3 Paramètre de corrélation:	36
8 Pricing des options:	38

7 Résultats de l'optimisation des paramètres:

Chaque jour, pendant chaque période, nous effectuons une calibration en utilisant l'approche d'optimisation mentionnée précédemment.

Pour donner un aperçu, les tableaux suivants résument les paramètres ,leurs erreurs et les pénalités -s'il y en a- en les regroupant par ligne, ainsi que les erreurs moyennes par période.

La calibration est basée sur les volatilités implicites moyennes du marché. Nous avons choisi de ne pas prendre en compte l'écart entre le prix d'achat (best ask) et le prix de vente (bid) des options, nous nous sommes concentrés uniquement sur le prix d'achat. Cela vise à exclure toute opportunité d'arbitrage potentiel et à atténuer les pics dans les paramètres et les erreurs de calibration. Bien que ces derniers puissent être présents, nous les négligeons en raison de leur rareté.

Les valeurs RMSE pour chaque modèle sont ensuite présentées. Comme on peut s'y attendre, l'ajustement du modèle s'améliore avec la complexité croissante du modèle. Ainsi, le modèle BS présente en moyenne les valeurs RMSE les plus élevées, tandis que le modèle SVCJ affiche les valeurs les plus basses.

Conférer les annexes pour tout autre modèle.

7.1 Volatilité:

7.1.1 Black and Scholes

	date	cost	rmse	penalty	SIGMA
	2019-04-01	0.0493	0.0493	0.0000	0.6453
	2019-04-02	0.0390	0.0390	0.0000	0.7234
	2019-04-03	0.0828	0.0828	0.0000	0.8210
	2019-04-04	0.0732	0.0732	0.0000	0.8498
	2019-04-05	0.0531	0.0531	0.0000	0.8210

Table 7: Example of daily minimisation to calibrate B&S parameters

	cost	rmse	penalty	SIGMA
Rising	0.04	0.04	0.0	0.91
Calm	0.09	0.09	0.0	0.83
Cvid	0.07	0.07	0.0	0.93

Table 8: Summary for each periods' parametrs on average

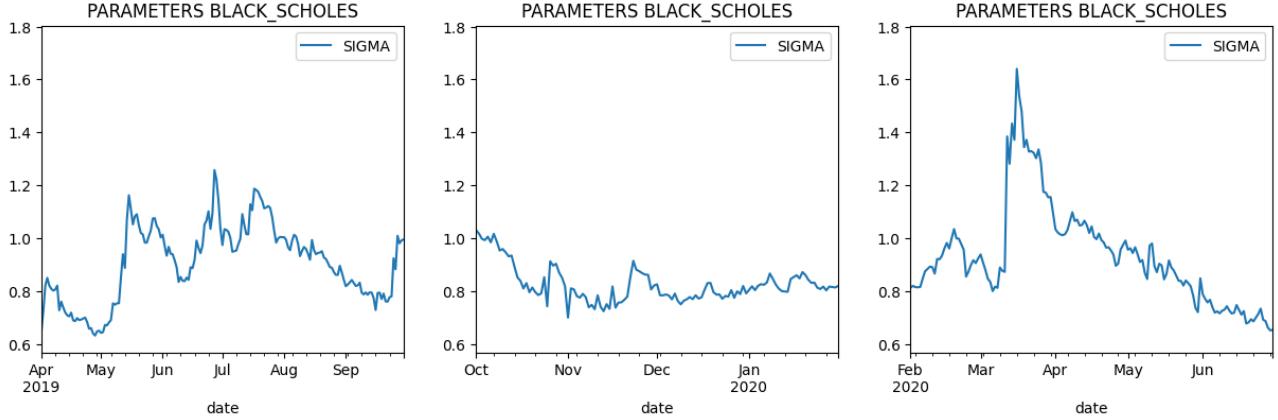


Figure 6: σ_{BnS} for different periods

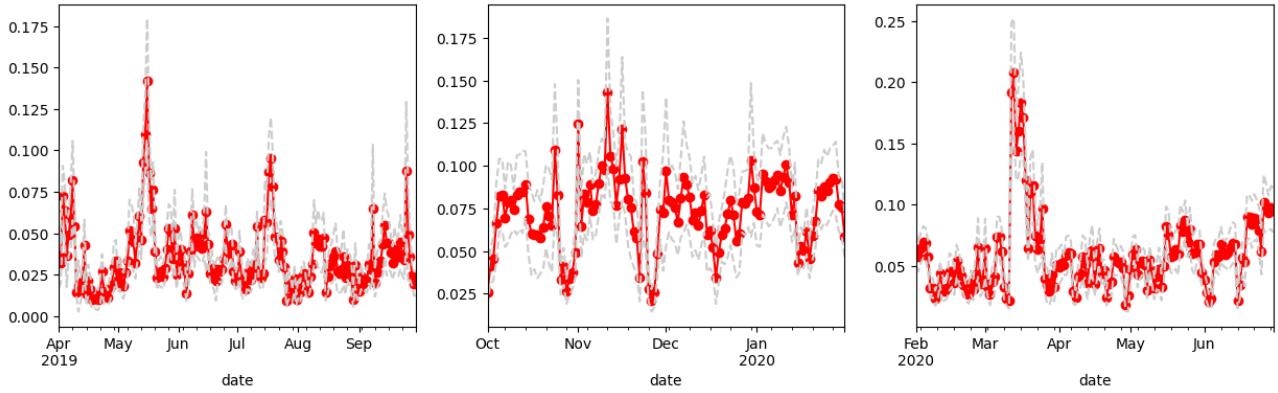


Figure 7: RMSE BnS with confidence level at 95%

7.1.2 SVCJ

date	rmse	κ	ρ	V_0	theta	ξ	λ	μ_S	σ_S	μ_V
190505	0.0094	1.1512	0.1016	0.3566	0.5283	0.8975	0.8439	0.0519	0.0000	0.0214
190402	0.0488	1.0383	-0.0527	0.4172	0.1216	0.9231	0.7099	-0.0385	0.0000	0.0118
190401	0.0112	0.9483	-0.2329	0.1507	0.5259	0.5262	0.4351	0.3758	0.0000	0.0638
190501	0.0075	0.0394	0.1134	0.2925	0.3402	0.5366	0.4069	0.3109	0.0000	0.5862
190415	0.0241	0.9983	0.0241	0.2796	0.6069	0.0000	0.3583	0.0626	0.3758	0.2769

Table 9: Example of daily minimisation to calibrate SVCJ parameters

	rmse	κ	ρ	V_0	theta	ξ	λ	μ_S	σ_S	μ_V
Rising	0.0200	0.5100	0.1400	0.7400	0.0900	0.8800	0.3100	-0.0400	0.0000	0.4500
Calm	0.0200	0.7500	0.2800	0.3000	0.3800	0.8300	0.8500	-0.3000	0.0000	0.9900
Cvid	0.01944	0.6100	0.2200	0.5200	0.1800	0.8900	1.0400	-0.3500	0.0000	0.5400

Table 10: Summary for each periods' parametr on average

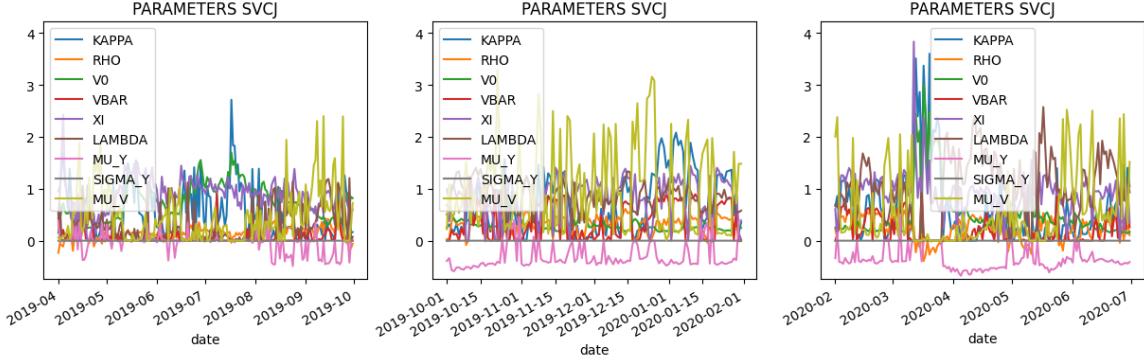


Figure 8: SVCJ Parameters for different periods

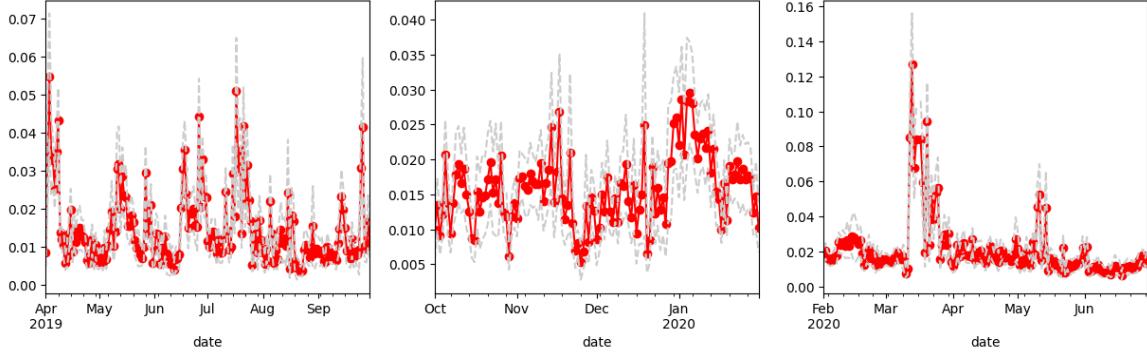


Figure 9: RMSE ξ (SVCJ) with confidence level at 95%

En examinant le graphe ci dessous de la volatilité du modèle de Black-Scholes σ_{BS} et la vol de vol du modèle SVCJ ξ_{SVCJ} , il est clair que les deux modèles présentent des similitudes dans leurs moyennes; σ_{BS} est comprise tout au long entre 50% et 175%. Cependant, les différences fondamentales apparaissent lorsque l'on se penche sur les écarts-types. Le modèle SVCJ présente une volatilité nettement plus élevée, avec des pics prononcés tout au long des trois périodes, pouvant aller jusqu'à 250% et descendre à 0%. Cette volatilité accrue peut être attribuée aux éléments de sauts stochastiques introduits dans le modèle, reflétant la nature violentes des fluctuations de prix associées aux événements inattendus ou bien du comportement humain.

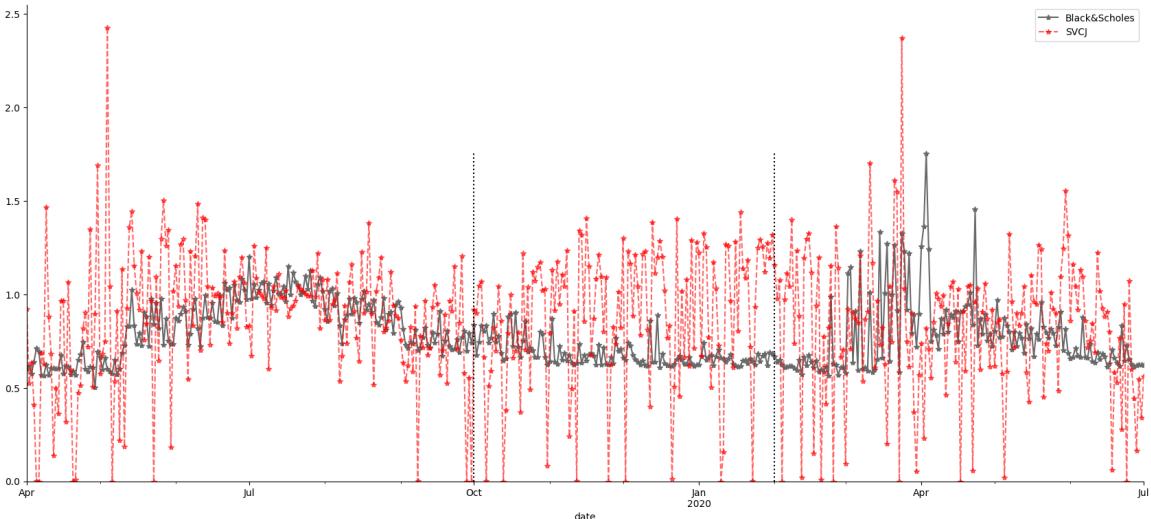


Figure 10: σ_{BS} and ξ_{SVCJ} comparison

D'autre part, le modèle de Black-Scholes montre des pics plus petits, sauf durant la période du COVID où il présente des pics plus significatifs. Cela peut être interprété comme une réaction du modèle de Black-Scholes aux chocs majeurs, tels que la pandémie, en produisant des variations relativement plus importantes.

Le Tableau 12 résume les propriétés statistiques de ce paramètre par modèle et segment de marché. Pendant la période calme et de hausse, la volatilité stochastique aboutit des niveaux de volatilité des volatilités (vol-of-vol) à $quantile_{50} \geq 83\%$ et $quantile_{50} \geq 75\%$, respectivement. Pendant la période de Covid, les niveaux de la volatilité dans les modèles SV, SVJ et SVCJ restent élevés allant jusqu'à 104%.

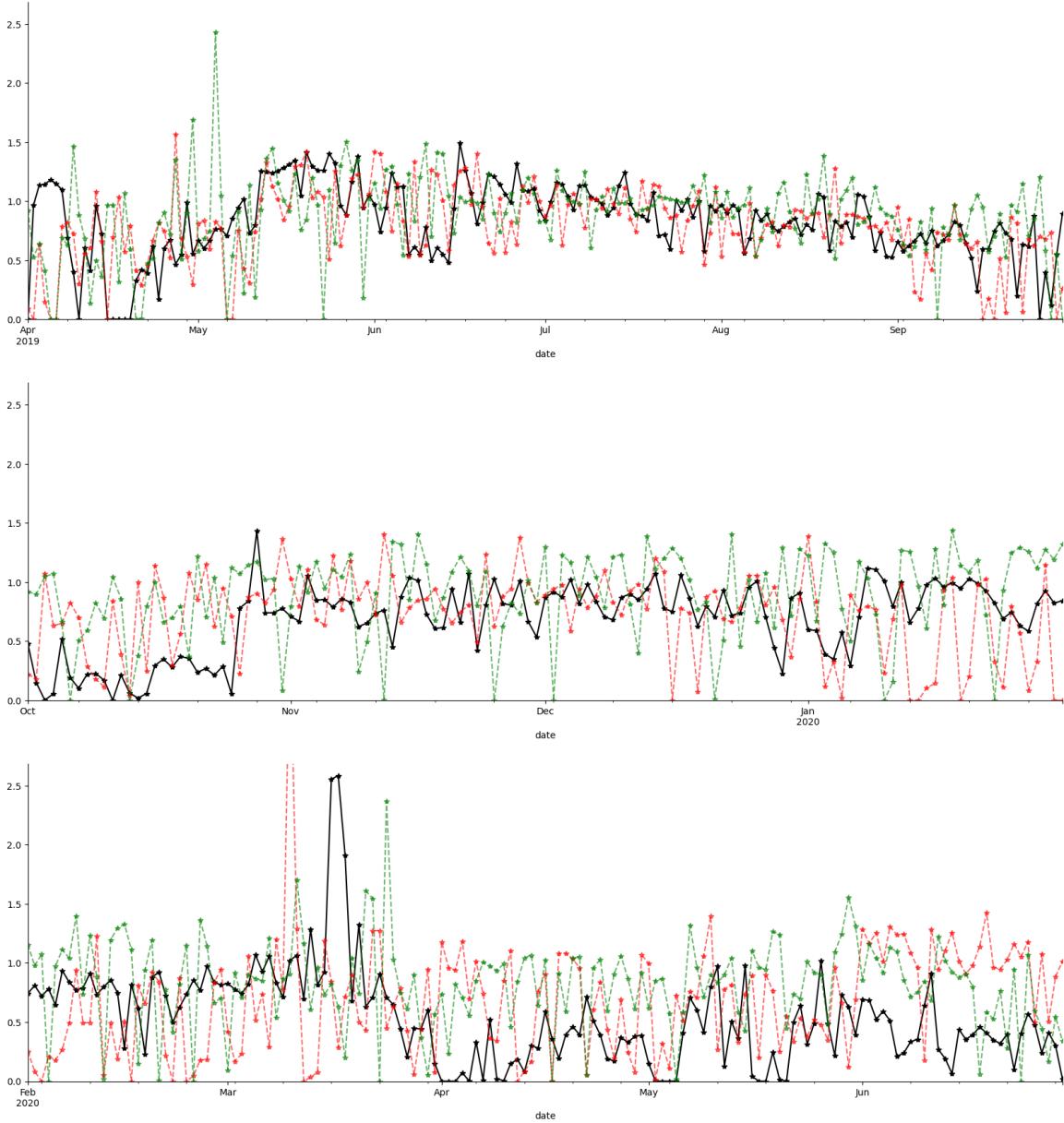


Figure 11: σ_{Heston} , ξ_{SVJ} and ξ_{SVCJ} comparison

En passant aux modèles plus stochastiques: Heston **SV**, **SVJ** et **SVCJ**, il est évident que les modèles SVJ et SVCJ semblent évoluer de manière synchrone, ce qui peut suggérer des événements communs entraînant des perturbations du marché.

Toutefois, leurs différences significatives résident dans l'intensité de ces sauts, en d'autres termes leurs réactivités à ces événements. Le modèle SVCJ présente des sauts de volatilité plus prononcés, reflétant potentiellement des événements plus rares mais plus impactant.

D'un autre côté, le modèle Heston (SV) se distingue par sa dynamique. Bien qu'il ne présente pas de sauts explicites comme les modèles SVJ et SVCJ, il arrive en temps à matcher les deux autres modèles. De plus, le modèle Heston a tendance à converger vers zéro pendant la période du COVID, chose normale étant un processus de CIR, ceci indique une certaine retenue ou régulation de la volatilité.

7.2 Intensité des sauts:

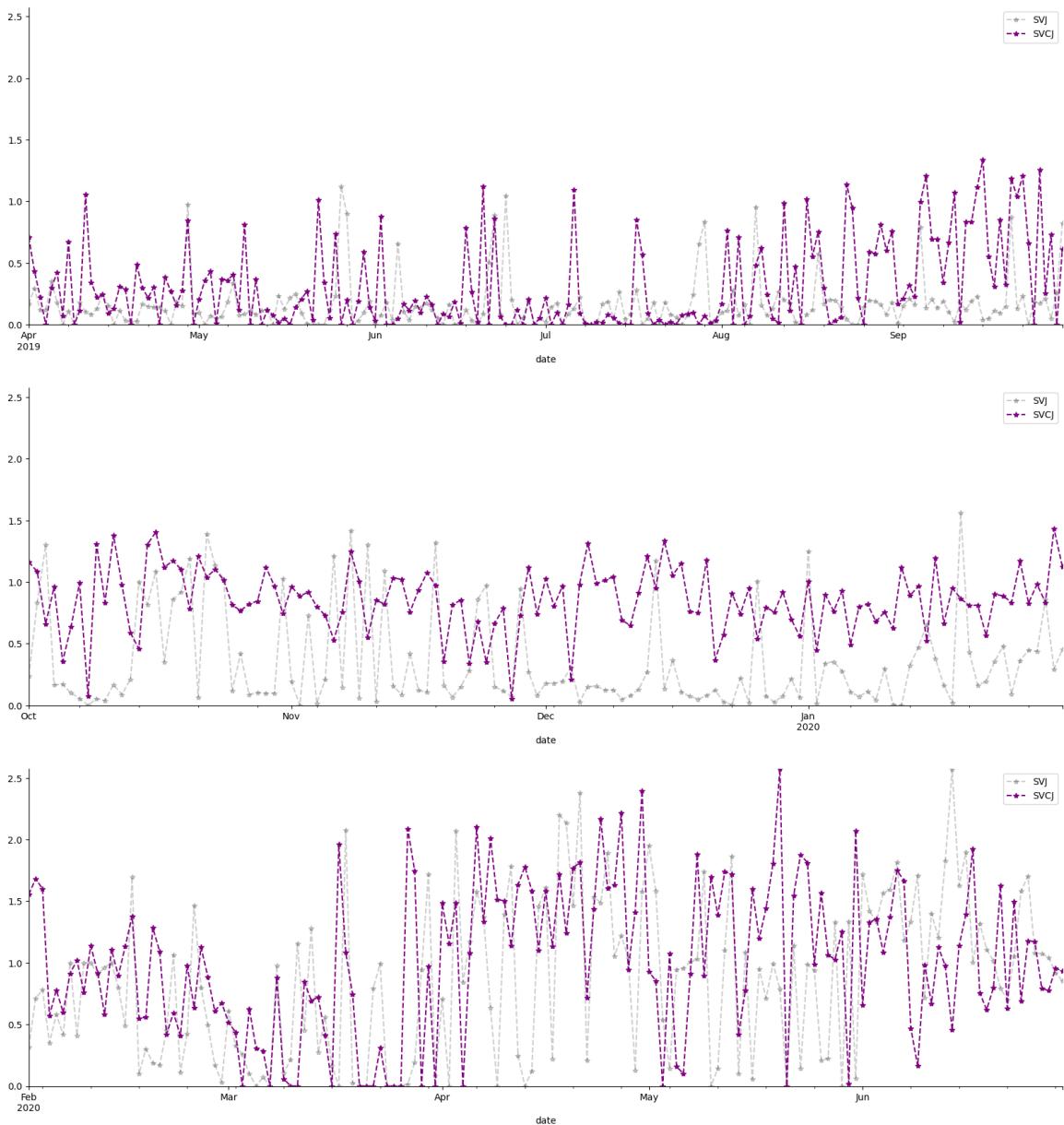


Figure 12: $\lambda_{SVJ}, \lambda_{SVCJ}$ comparison

Les variables d'intensité λ , dans les modèles SVJ et SVCJ, révèle des tendances intéressantes. Tout d'abord, il est remarquable que les moments d'arrivée des sauts semblent se produire à des

moments similaires, suggérant une certaine synchronisation. Cependant, les niveaux d'intensité varient considérablement entre les deux modèles.

Durant la période de calme, nous constatons que λ dans le modèle SVJ demeure relativement faible, avec quelques sauts observés. Or, dans le modèle SVCJ, l'intensité λ est nettement plus volatile, présentant des fluctuations. Bien que les deux modèles ne dépassent pas 1.4 en termes d'intensité, cette différence de volatilité met en évidence la propension du modèle SVCJ à des mouvements plus brusques et dynamiques pendant les périodes de marché relativement calmes.

Lors de la période de hausse, nous observons un changement de dynamique. L'intensité dans le modèle SVJ devient plus volatile, tandis que dans le modèle SVCJ, elle semble se stabiliser et devenir plus stationnaire. Les deux modèles n'excèdent pas 1.6 en termes d'intensité, soulignant ainsi que même pendant des phases de marché en hausse, l'intensité de sauts reste relativement prévisible.

Toutefois, during Covid les intensités dans les deux modèles deviennent plus volatiles, avec des valeurs qui peuvent atteindre 2.5.

A remarquer que lorsque les niveaux d'intensité λ augmentent, ξ tendent également à augmenter. En d'autres termes, les sauts revalorisent la volatilité, ce qui signifie l'importance d'une approche stochastique à sauts lors de l'analyse des dynamiques de marché.

7.3 Paramètre de corrélation:

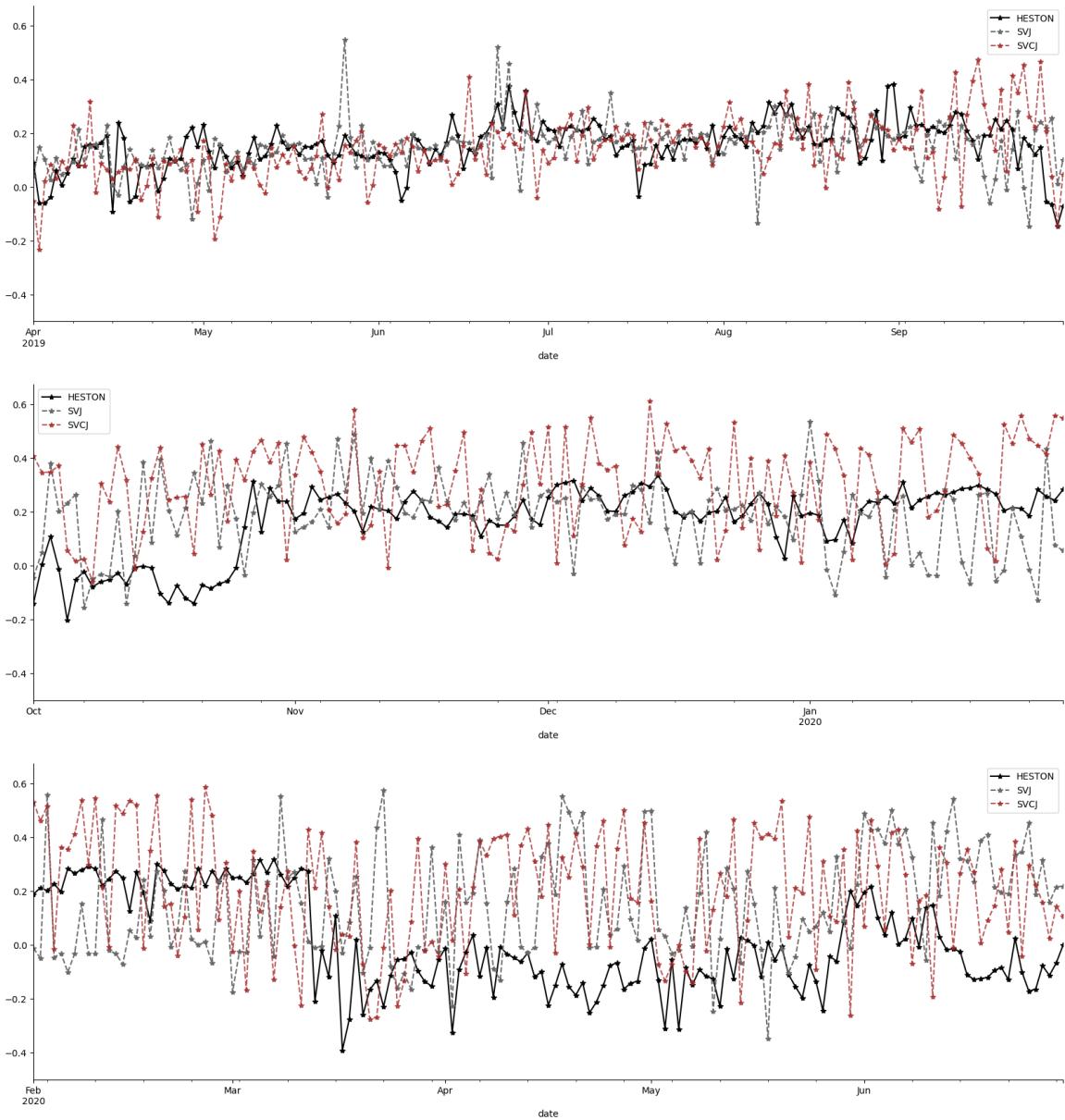


Figure 13: Fluctuation du paramètre ρ

Le paramètre ρ requiert aussi une analyse approfondie, à l'aide des informations fournies dans le graph ci-dessous et le tableau 14. En examinant les résultats de la première période, nous constatons que les moyennes de ρ sont relativement similaires pour les trois modèles : 0.1561 pour HESTON, 0.1506 pour SVJ et 0.1422 pour SVCJ. Cette convergence suggère une certaine cohérence dans la manière dont les modèles évaluent la corrélation entre les fluctuations des prix et de la volatilité. Cependant, il est important de noter que des valeurs négatives pour ρ sont également présentes pendant cette période. Cette observation peut être expliquée par les mouvements contraires entre les prix et la volatilité dans certaines circonstances, où une augmentation des prix peut s'accompagner d'une diminution de la volatilité, et vice versa.

Durant la deuxième période, les moyennes de ρ diffèrent et affichent une tendance à la hausse, suggérant une corrélation potentiellement plus prononcée entre les mouvements des prix et de la

volatilité au cours de cette période. Encore une fois, les valeurs négatives persistent, soulignant la nature complexe des interactions entre ces deux facteurs.

À l'approche de la fin de la période, il est intéressant de noter qu'une proportion significative de la distribution présente des valeurs négatives pour ρ , particulièrement marquée dans le modèle Heston.

En termes de comparaison, les trois modèles concordent plus ou moins durant la période de stabilité, tandis que durant les deux autres périodes, des déviations commencent à se manifester, en particulier dans le modèle SV.

8 Pricing des options:

La calibration proposée par [Gatheral and Jacquier \(2014\)](#) nous a permis de capturer la volatilité implicite. Il repose sur une paramétrisation de la surface de volatilité implicite en utilisant plusieurs paramètres pour décrire la dynamique de la volatilité implicite totale au fil du temps, ce qui est essentiel pour évaluer des produits dérivés tels que les options.

Pour utiliser la volatilité SVI dans le cadre de la tarification d'options, plusieurs modèles, notamment les modèles stochastiques de volatilité comme le modèle SVCJ (Stochastic Volatility with Correlated Jumps), peuvent être employés. Ces modèles prennent en compte la volatilité stochastique, les sauts de prix, et d'autres facteurs pour estimer le prix des options en fonction des données de volatilité SVI simulées.

Une fois que le modèle SVCJ est calibré avec des données de marché, les paramètres tels que κ (taux de réversion), V_{BAR} (niveau de volatilité à long terme), ξ (volatilité de volatilité), λ (intensité des sauts), μ_Y (moyenne des sauts) et σ_Y (écart type des sauts) sont déterminés, et on peut maintenant générer des chemins(paths) de l'actif sous-jacent en se basant sur ce pseudo-algorithme :

Algorithm 1 Generating Underlying Asset Paths with the SVCJ Model

Require: $npaths \geq 0$, $S_0 \geq 0$

Require: $\kappa, \rho, V_0, V_{BAR}, \xi, \lambda, \mu_Y, \sigma_Y, \mu_V$

Ensure: Set of Underlying Asset Paths

```

for  $i \leftarrow 1$  to  $npaths$  do                                 $\triangleright$  For each path
    Initialize an empty array path                       $\triangleright$  To store path prices
    Initialize the initial price  $price = S_0$ 
    for date in period do
        Generate random variables  $W$  and  $W_1$  from the standard normal distribution
        Calculate  $W_2$  based on  $\rho$ ,  $W$ , and  $W_1$ :  $W_2 = \rho \cdot W + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot W_1$ 
        Generate random variables  $Z_V$  and  $Z_Y$  from the appropriate distribution
        Generate a random variable  $dj$  from a Bernoulli distribution with parameter  $\lambda \cdot dt$ 
        Update volatility using the SVCJ model: (see annex C)
            volatility = volatility +  $\kappa \cdot (V_{BAR} - \max(0, volatility)) \cdot dt + \xi \cdot \sqrt{\max(0, volatility)} \cdot dt \cdot W_2 + Z_V \cdot dj$ 
        Update price using the SVCJ model:
             $price = price \cdot \left(1 + (rate - \lambda \cdot (\mu_Y + corr \cdot \mu_V)) \cdot dt + \sqrt{\max(0, volatility)} \cdot dt \cdot W_1 + Z_Y \cdot dj\right)$ 
     $\triangleright$  Note: In our case, interest rate is set to 0
    Add the current price to the array path
end for
    Add the array path to the set of paths
end for
Return the set of paths

```

Cet algorithme utilise les chemins générés par la méthode **paths**, parcourt chaque chemin, calcule le payoff de l'option à chaque étape de temps dans la période d'évaluation, puis moyenne les payoffs sur tous les chemins pour obtenir une estimation du prix de l'option. Cette méthode de Monte Carlo est couramment utilisée pour évaluer des options à des maturités et strikes différents.

Il en résulte les prix dans le tableau qui suit. À titre de comparaison, nous évaluons des options avec des strikes et des maturités fictifs pour chaque date dont le cours du sous-jacent est connue:

	label	price
0	2019-04-01-3000-30	1093.3829
1	2019-04-01-3000-90	1154.0951
2	2019-04-01-4000-30	251.2697
3	2019-04-01-4000-90	459.6578
4	2019-04-01-5000-30	25.5785
5	2019-04-01-5000-90	149.3338
6	2019-10-01-7000-30	1683.3372
7	2019-10-01-7000-90	2150.9137
8	2019-10-01-8000-30	1027.5289
9	2019-10-01-8000-90	1614.7894
10	2019-10-01-9000-30	578.6639
11	2019-10-01-9000-90	1203.0870
12	2020-02-01-9000-30	1078.8945
13	2020-02-01-9000-90	1594.7133
14	2020-02-01-10000-30	528.3563
15	2020-02-01-10000-90	1121.7790
16	2020-02-01-11000-30	257.8719
17	2020-02-01-11000-90	795.9704

(a) Black & Scholes Prices

	label	price
0	2019-04-01-3000-30	1146.8142
1	2019-04-01-3000-90	1038.1730
2	2019-04-01-4000-30	926.8615
3	2019-04-01-4000-90	816.8852
4	2019-04-01-5000-30	707.1821
5	2019-04-01-5000-90	634.0468
6	2019-10-01-7000-30	2412.6102
7	2019-10-01-7000-90	2412.6102
8	2019-10-01-8000-30	2260.1059
9	2019-10-01-8000-90	2183.8537
10	2019-10-01-9000-30	2066.0030
11	2019-10-01-9000-90	1987.4359
12	2020-02-01-9000-30	2136.1361
13	2020-02-01-9000-90	2136.1361
14	2020-02-01-10000-30	1971.4831
15	2020-02-01-10000-90	1889.1566
16	2020-02-01-11000-30	1769.5259
17	2020-02-01-11000-90	1689.7722

(b) SVCJ Prices

Il est important de noter que le modèle SVCJ prend en compte la volatilité stochastique et les sauts de volatilité, ce qui le rend plus adapté à la modélisation des variations de prix extrêmes et des événements de saut imprévus. Cela peut expliquer les différences de prix observées entre les deux modèles. En revanche, le modèle de Black-Scholes repose sur l'hypothèse d'une volatilité constante, ce qui peut conduire à des prix légèrement plus bas par rapport à la réalité.

Les prix selon le modèle de Black-Scholes ou le modèle SVCJ peuvent être considérés comme raisonnables lorsqu'ils sont appliqués à des contrats présentant des paramètres similaires. Chaque modèle adopte une approche différente, mais ils peuvent donner des estimations de prix qui enveloppent les valeurs des contrats avec des paramètres relativement similaires.

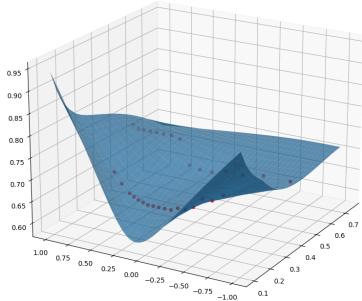
Pour illustrer cela, nous présentons ci-dessous un extrait d'une table de données réelles dont les paramètres sont proches de ceux de la table 11a. Notez en particulier les lignes 4, 10, 16 et 17

Ticker Date	01APR19	25SEP20	26JAN21
Instrument Name	BTC-01MAY19-7000-C	BTC-25AUG20-10000-C	BTC-26MAR21-16000-C
Underlying Index	BTC-01MAY19	BTC-25AUG20	BTC-26MAR21
Underlying Price	4077.67	9666.62	9273.74
Vega	5.99109	15.942	28.1757
Theta	-0.73049	-5.61196	-4.01925
Rho	2.28253	9.50311	14.67906
Gamma	7.00E-05	5.00E-05	6.00E-05
Delta	0.09642	0.19466	0.31109
Interest Rate	0	0	0
Bid IV	65.32	93.25	76.83
Best Bid Price	499.02	1191.22	965.72
Best Bid Amount	2	0.078	1.8

Annexes

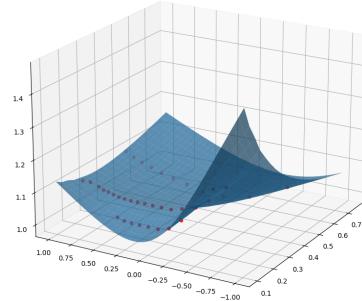
A Surfaces de volatilité:

DATE = 20190401, PERIOD = RISING



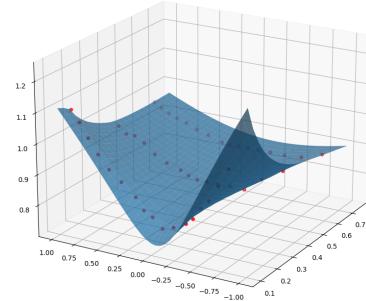
(a) 3D smile at 2019/04/01

DATE = 20191001, PERIOD = CALM



(b) 3D smile at 2019/10/01

DATE = 20200201, PERIOD = COVID



(c) 3D smile at 2020/02/01

B Autoregressive model:

Pour un AR(1):

$$y_t = c + \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\text{E}(y_t) = \mu = \frac{c}{1 - \varphi}. \quad / \quad \text{Var}(y_t) = \text{E}(y_t^2) - \mu^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \varphi^2}$$

$$\text{ACF} : \rho_h = \phi^h \quad / \quad \text{PACF} : \rho_{11} = \phi, \rho_{hh} = 0 \quad \forall h \geq 2$$

C Discréétisation d'Euler-Maruyama:

La discréétisation d'Euler-Maruyama est une méthode numérique couramment utilisée pour résoudre des équations différentielles stochastiques (EDS) stochastiques. Elle est particulièrement utile pour simuler des trajectoires de processus stochastiques en utilisant des pas de temps discrets.

La méthode d'Euler-Maruyama consiste à approximer l'évolution d'un processus stochastique $X(t)$ entre les instants t et $t + \Delta t$ par une marche aléatoire. La formule de mise à jour est la suivante :

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \mu(X(t), t) \cdot \Delta t + \sigma(X(t), t) \cdot \Delta W(t)$$

où :

- $X(t)$ est la valeur du processus à l'instant t .
- $\mu(X(t), t)$ est la dérive du processus (la tendance).
- $\sigma(X(t), t)$ est la volatilité du processus (l'écart-type).
- Δt est le pas de temps discret.
- $\Delta W(t)$ est un incrément de Wiener (un processus de Wiener standardisé).

Cette formule est utilisée itérativement pour simuler la trajectoire du processus stochastique en avançant dans le temps par petits pas discrets, on se sert de cette formule pour la simulation des trajectoires des modèles stochastiques.

D Summary of database

	HESTON	SVJ	SVCJ	BnS
mean	0.8207	0.7777	0.8743	0.8361
std	0.3167	0.3322	0.3497	0.1603
min	0.0000	0.0000	0.0000	0.5013
25%	0.6227	0.6213	0.6934	0.7133
50%	0.8380	0.8065	0.9231	0.8409
75%	1.0392	0.9855	1.0633	0.9743
max	1.4902	1.5677	2.4288	1.2015

(a) Period 1

	HESTON	SVJ	SVCJ	BnS
mean	0.6835	0.7166	0.8959	0.6854
std	0.3046	0.3591	0.3698	0.0727
min	0.0001	0.0000	0.0000	0.6096
25%	0.4995	0.5643	0.7010	0.6321
50%	0.7500	0.7950	1.0151	0.6629
75%	0.9030	0.9477	1.1887	0.7119
max	1.4334	1.4035	1.4409	0.9052

(b) Period 2

	HESTON	SVJ	SVCJ	BnS
mean	0.5615	0.7206	0.8408	0.7847
std	0.4878	0.6642	0.4548	0.2061
min	0.0000	0.0000	0.0000	0.5657
25%	0.2748	0.2874	0.6117	0.6334
50%	0.4975	0.7285	0.8810	0.7265
75%	0.7756	1.0120	1.0432	0.8727
max	3.8296	6.3307	3.8330	1.7540

(c) Period 3

Table 12: Summary statistics of σ for different models over three periods

	SVJ	SVCJ	SVJ	SVCJ	SVJ	SVCJ
mean	0.1608	0.3293	0.3694	0.8530	0.8575	1.0114
std	0.2068	0.3642	0.3896	0.2790	0.6495	0.6125
min	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
25%	0.0460	0.0347	0.0875	0.6948	0.1789	0.6239
50%	0.1183	0.1972	0.2097	0.8541	0.9447	0.9841
75%	0.1814	0.5836	0.4423	1.0232	1.3351	1.4929
max	1.1236	1.3805	1.4164	1.5538	2.5713	2.5745

(a) Period 1

(b) Period 2

(c) Period 3

Table 13: Summary statistics of λ for SVJ and SVCJ models over three periods

	HESTON	SVJ	SVCJ
mean	0.1561	0.1506	0.1422
std	0.0911	0.0946	0.1203
min	-0.1459	-0.1458	-0.2329
25%	0.1067	0.0997	0.0739
50%	0.1646	0.1578	0.1393
75%	0.2131	0.1973	0.2095
max	0.3817	0.5474	0.4741

(a) Period 1

	HESTON	SVJ	SVCJ
mean	0.1674	0.1886	0.3081
std	0.1306	0.1453	0.1743
min	-0.2021	-0.1541	-0.0587
25%	0.1280	0.1029	0.1628
50%	0.2035	0.2053	0.3475
75%	0.2585	0.2684	0.4453
max	0.4472	0.5356	0.6383

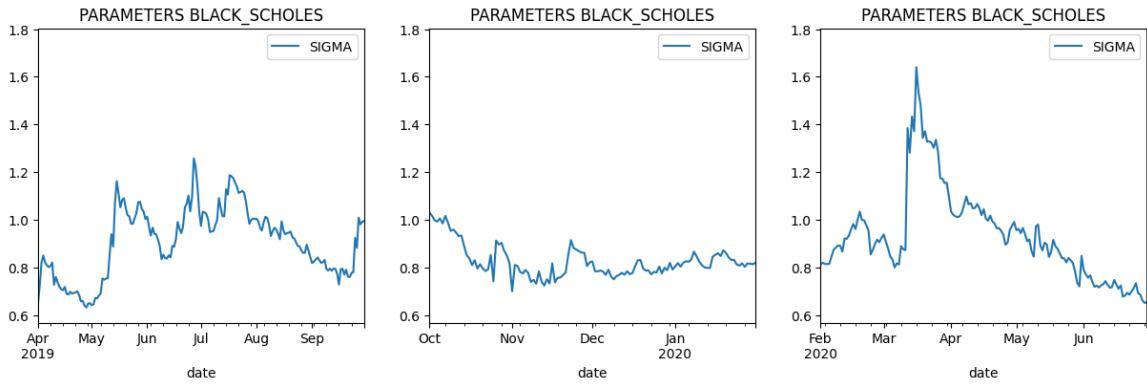
(b) Period 2

	HESTON	SVJ	SVCJ
mean	0.0063	0.1394	0.1968
std	0.1794	0.2373	0.2218
min	-0.4970	-1.0000	-0.3918
25%	-0.1248	-0.0190	0.0101
50%	-0.0270	0.1333	0.2085
75%	0.1992	0.3158	0.3906
max	0.3193	0.6397	0.5871

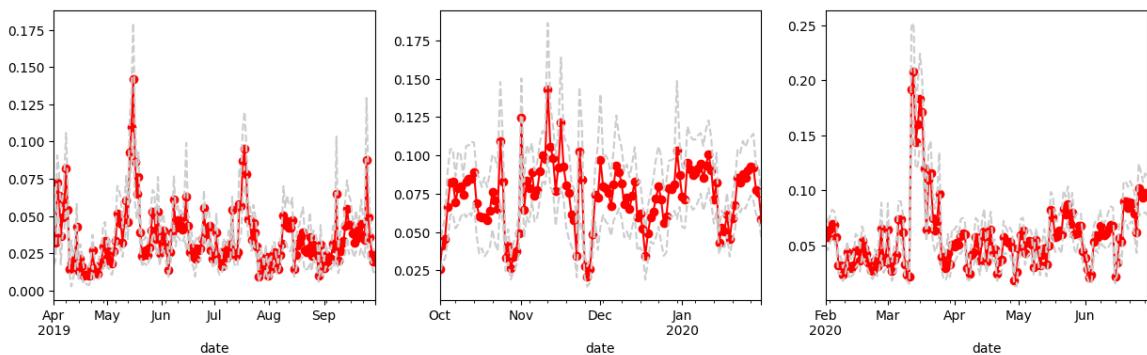
(c) Period 3

Table 14: Summary statistics of ρ for HESTON, SVJ, and SVCJ models over three periods

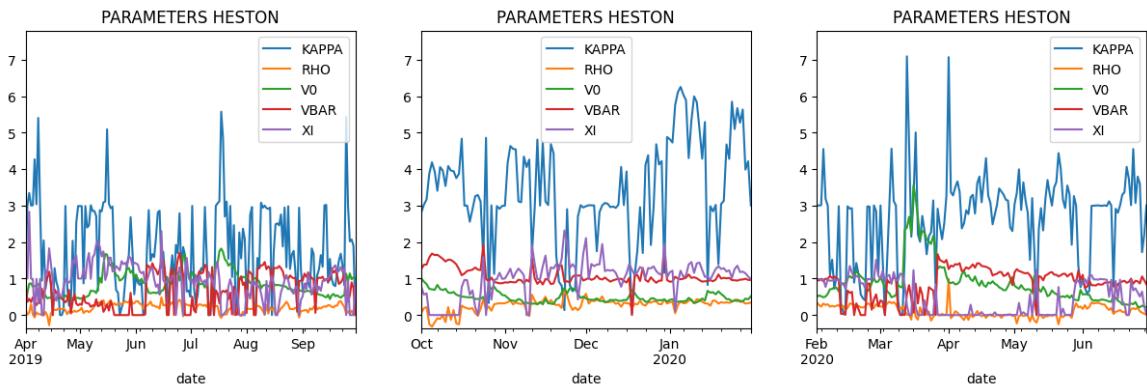
E RMSE and Parameters



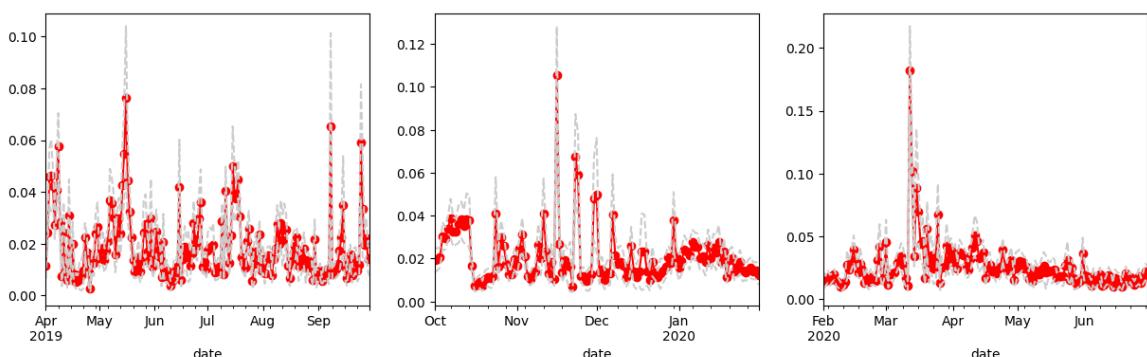
σ_{BnS} for different periods



RMSE BnS with confidence level at 95%



Heston Params for different periods



RMSE Heston with confidence level at 95%

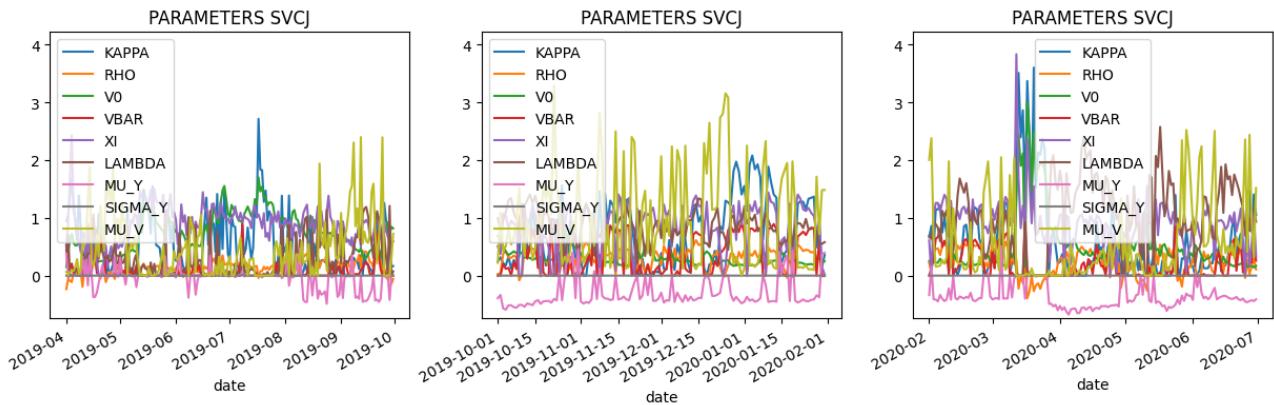


Figure 19: SVCJ Params for different periods

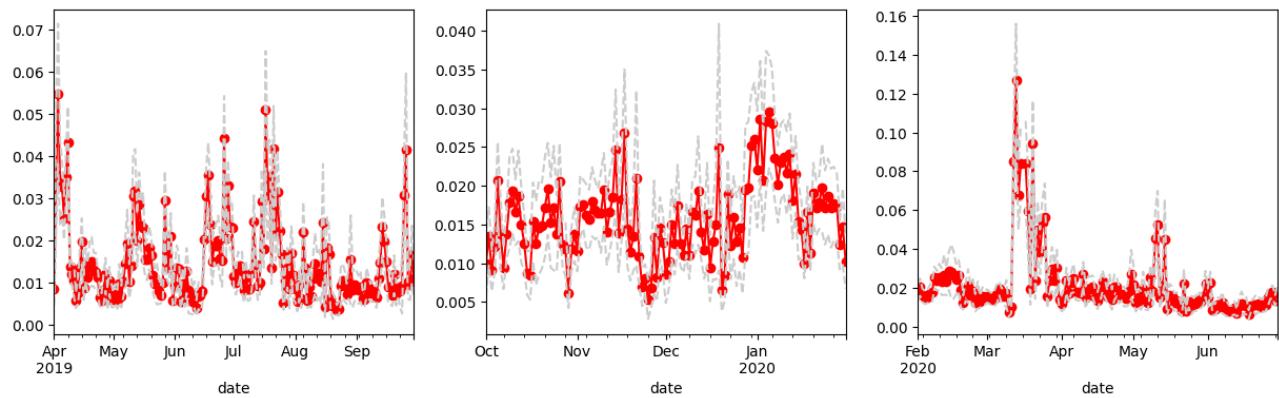


Figure 20: RMSE SVCJ with confidence level at 95%

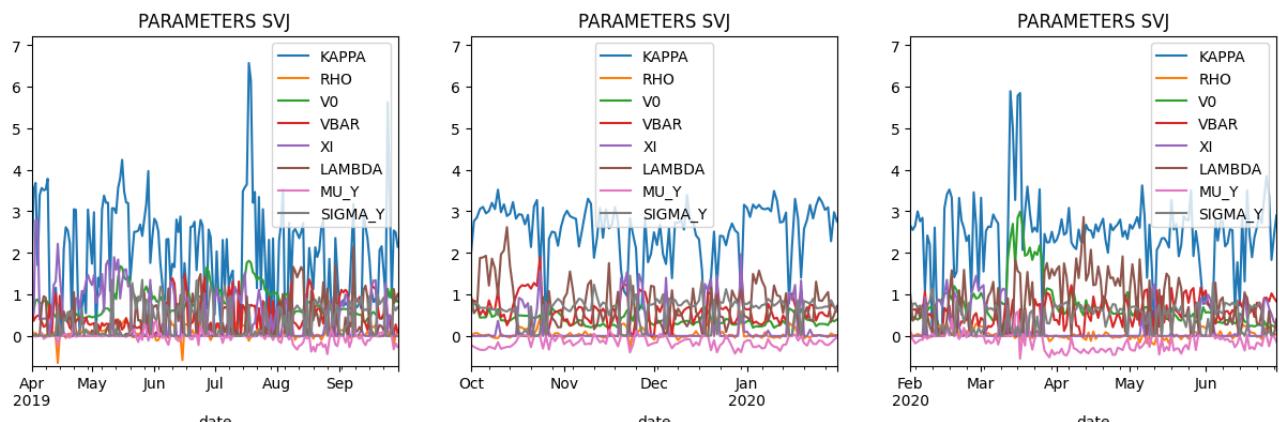


Figure 21: SVJ Params for different periods

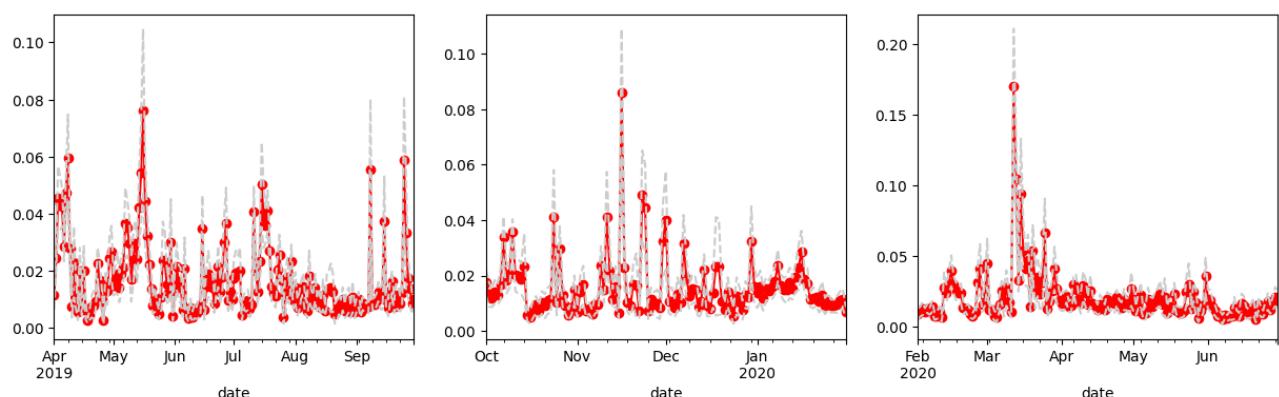


Figure 22: RMSE SVJ with confidence level at 95%

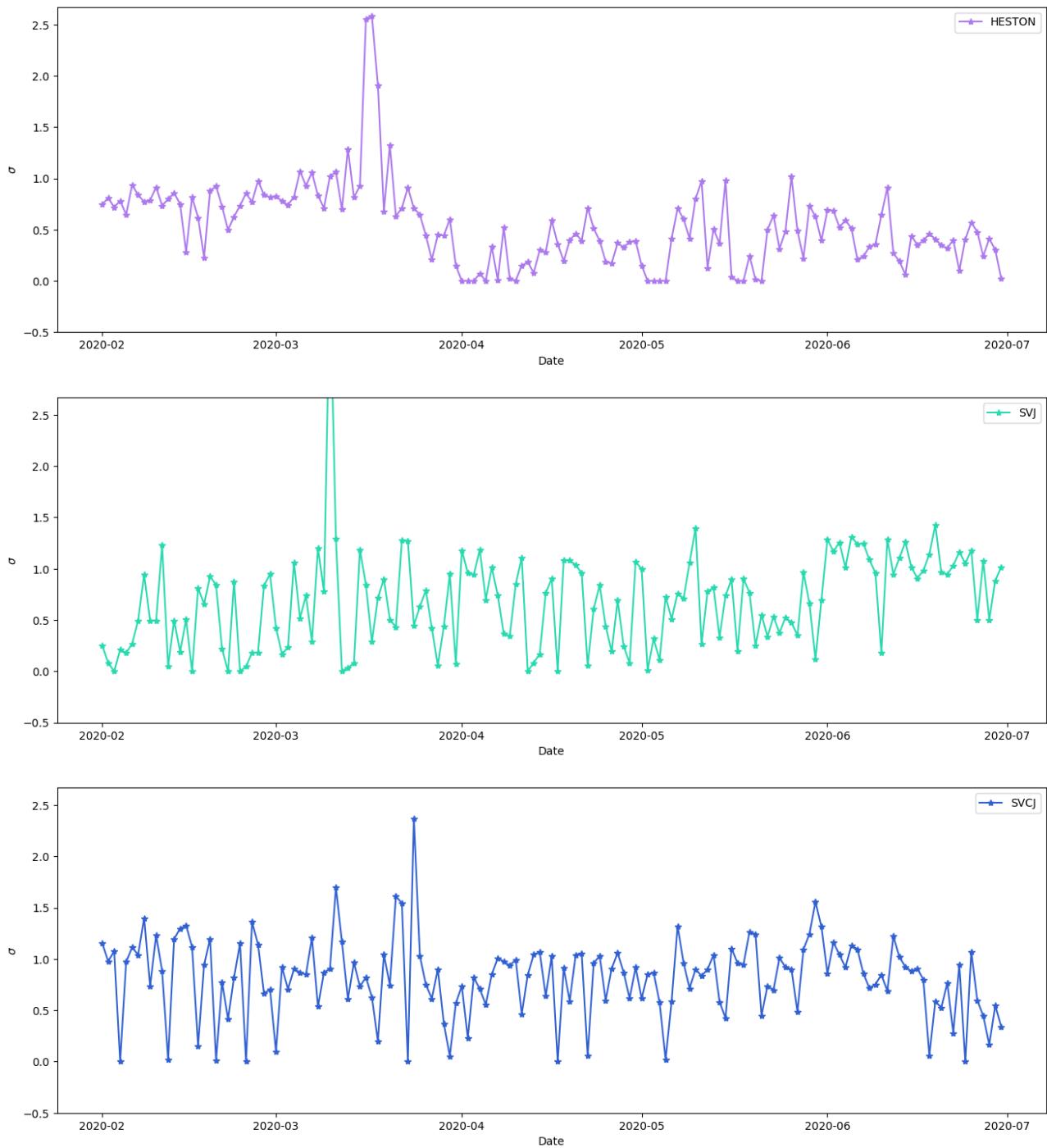


Figure 23: Stochastic volatility models 1

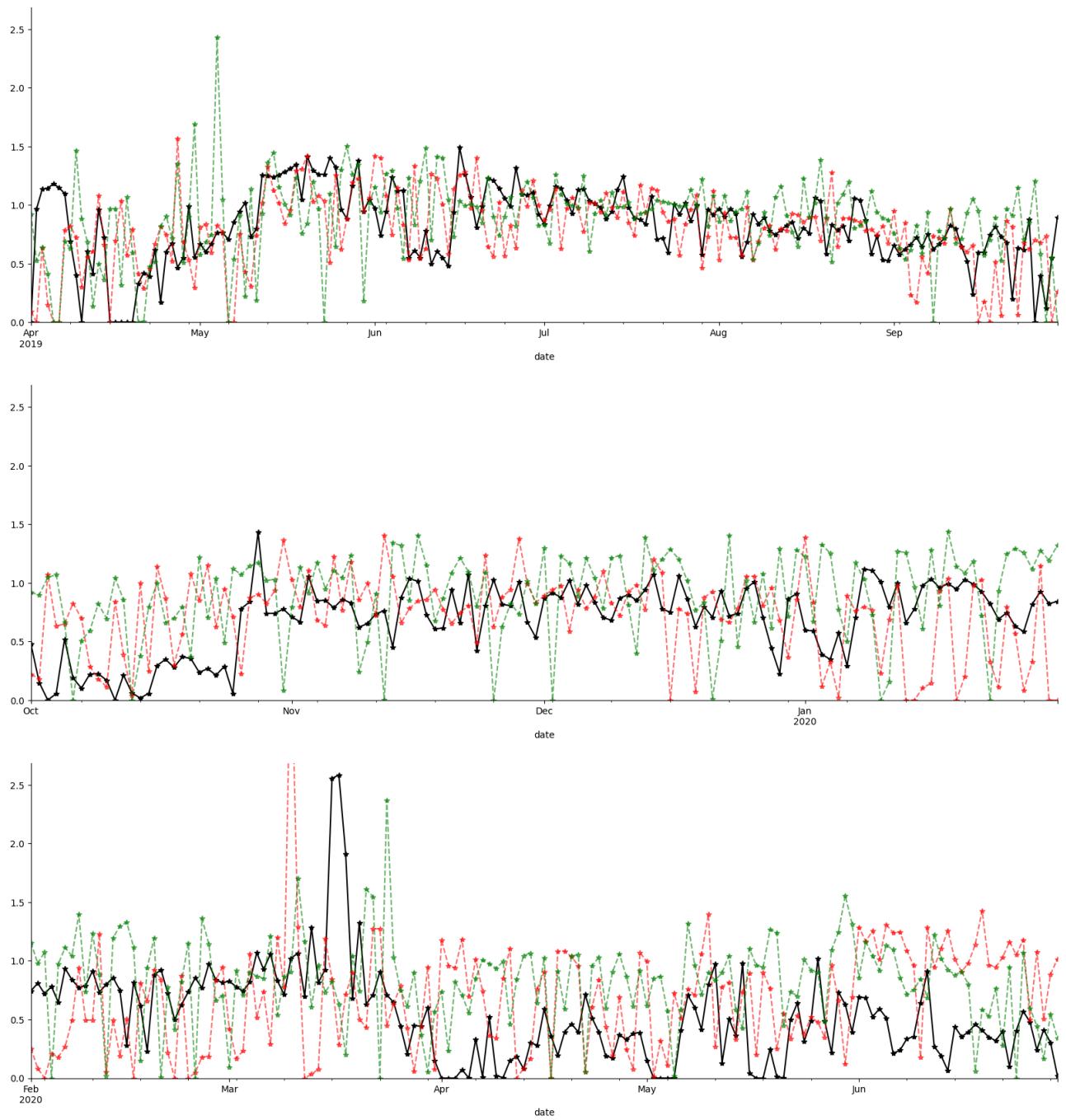


Figure 24: Stochastic volatility models' 2

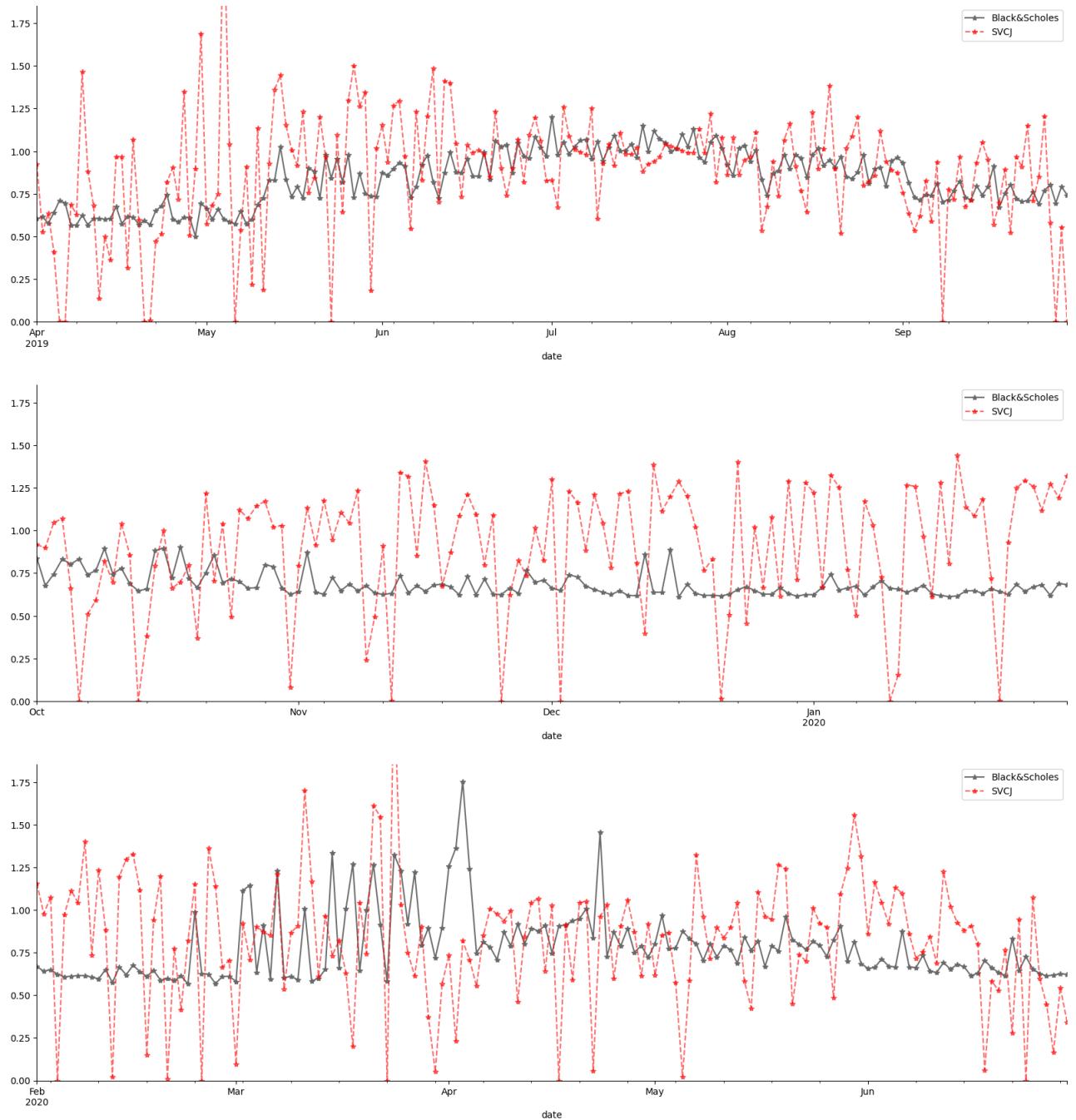


Figure 25: ξ parameter and BS volatility

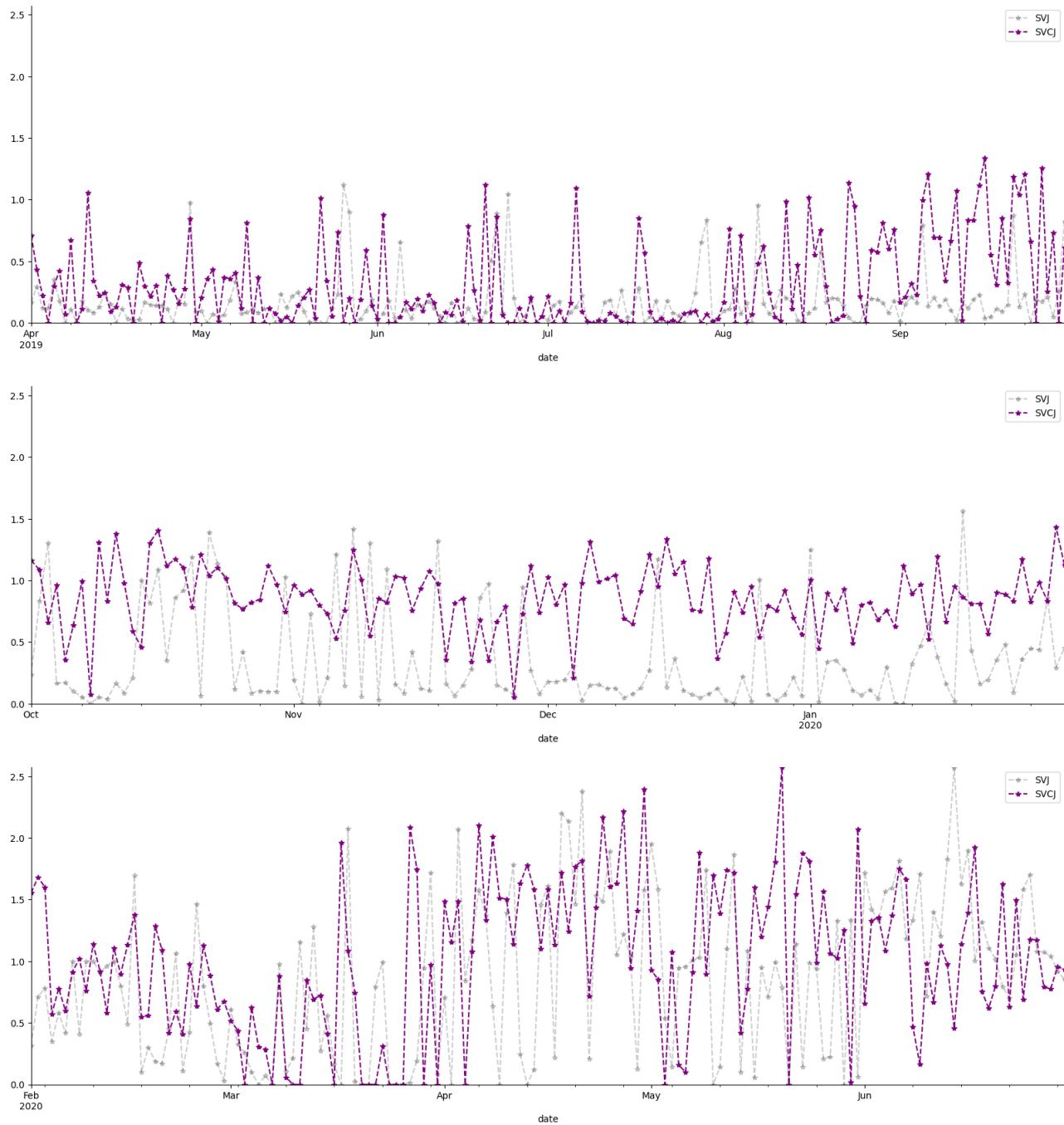


Figure 26: lambda parameter

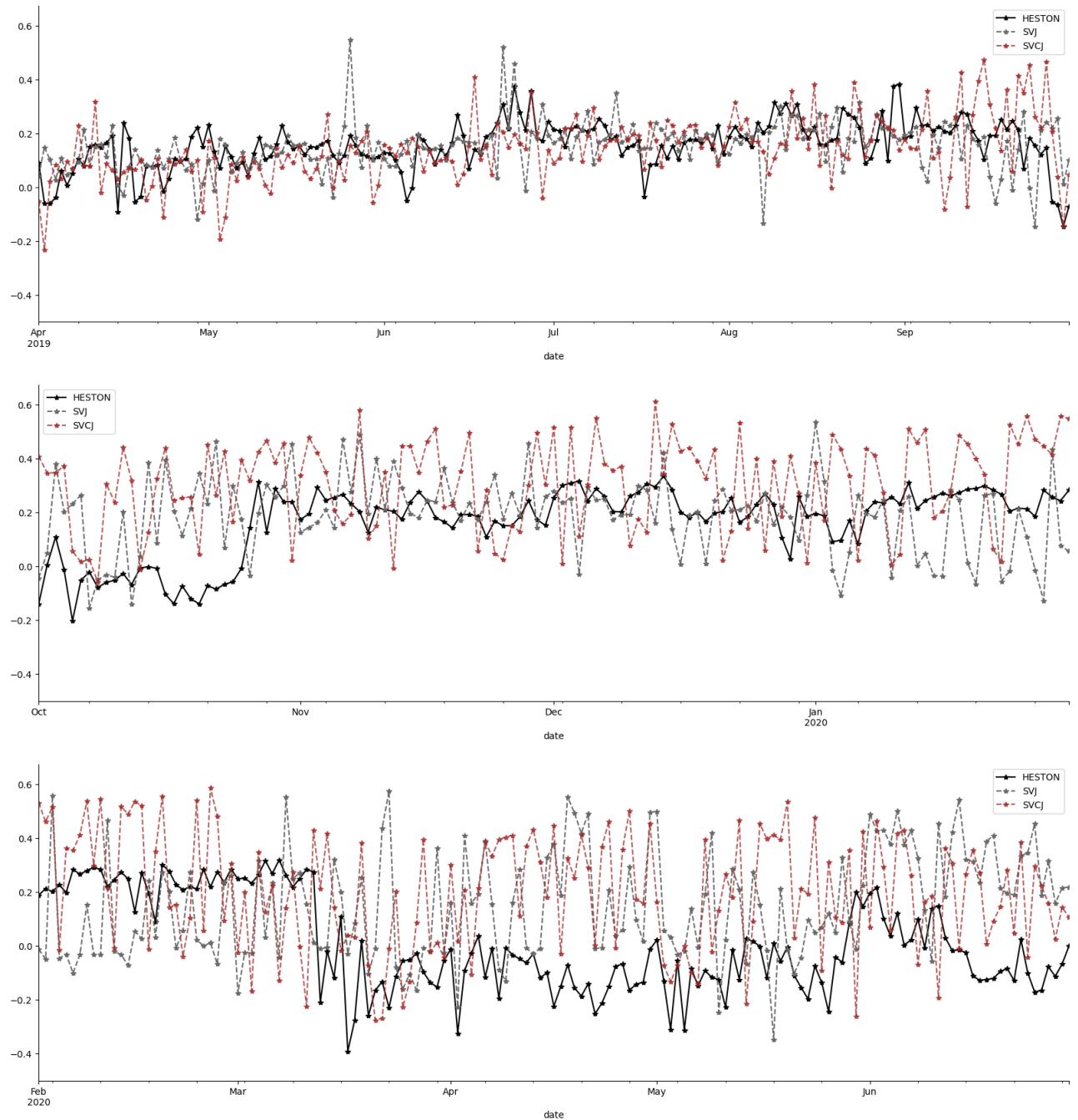


Figure 27: rho parameter

References

- David S. Bates. 1996. Jumps and Stochastic volatility: Exchange Rate Processes Implicity in Deutsche Mark Options. *The Review of Financial Studies*, volume 9, number 1 (1996), 69–107.
- Fisher S. Black and Myron S. Scholes. 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 4 (1973), 637–654.
- Tim Bollerslev. 1986. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31 (1986), 307–327.
- P. Carr and D. Madan. 1999. Option valuation using the fast fourier transform. *Journal of Computational Finance* 2 (1999), 61–73.
- D. Duffie, Pan J., and Singleton K. 2000. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica* 68 (2000), 1343–1376.
- B. Dupire. 1994. Pricing with a smile. *Journal of Mathematical Finance* (1994).
- Robert F. Engle. 1982. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica* 50 (1982), 3987–1007.
- J. Gatheral and A. Jacquier. 2014. Arbitrage-free svi volatility surfaces. *Quantitative Finance* 14 (2014), 59–71.
- Steven L Heston. 1993. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies* 6 130 (1993), 327–343.
- Jr. John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll and Stephen A. Ross. 1985. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica Vol. 53, No. 2* (1985), 385–407 .
- Mathworks. [n. d.]. <https://www.mathworks.com/help/econ/specify-egarch-models-using-egarch.html>
- AJ McNeil and R Frey. 2000. Estimation of tail-related risk measures for hetroeroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance* 7 (2000), 271–300.
- Satoshi Nakamoto. 2008. *Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System.* <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>
- Daniel B Nelson. 1991. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica* 59 (1991), 347–70.
- A. Tikhonov, A. Leonov A, and A. Yagola A. 2011. Nonlinear ill-posed problems.. *DeGruyter* (2011).

