BIMU2004
Olasılık Teorisi ve İstatistik
Bütünleme Sınavı Çözümleri

İstanbul Üniversitesi - Cerrahpaşa

Bilgisayar Mühendisliği Bölümü - Güz 2022

18 Ocak 2023 08:30-09:40

Son güncelleme: 2023-01-26 10:20

LÜTFEN OKUYUN:

- Sınava sizin için belirlenen sınıfta giriniz.
- Bu sınavın süresi 70 dakikadır. Süre bittiğinde cevap kağıdını doldurmaya devam edenler kopya çekmiş sayılır.
- Lütfen soruları kurşun kalemle, TÜRKÇE, kısa ve anlaşılır olarak cevaplayınız.
- **Anlaşılmayan, muğlak ifadeler kullanmak**, kötü yazı yazmak notunuza negatif olarak etki edecektir. **Çözüm adımlarınız anlaşılır olmalıdır.** Çözümlerde eksik varsa puan alamazsınız veya en fazla kısmi puan alırsınız. Soruların çözümü tam olmalıdır. İntegralleri veya Toplamları çözmeden bırakmak puan kaybına sebep olur.
- Sınavda 1 adet hesap makinası kullanabilirsiniz. Bunların dışında her türlü defter, kitap, notlar, sözlük ve elektronik sözlük yasaktır.
- **Hesap makinası ve silgi paylaşmak kopya sayılacaktır!**
- Bilgisayar, PDA, cep telefonu türünden elektronik cihazlar kullanmak yasaktır.
- Soruları çözmeye başlamadan lütfen okuyun.
- Soru ve cevap kağıtlarına isim ve numaranızı yazınız.
- Soru ve cevap kağıtlarınızı çıkarken cevap kağıdınızla beraber teslim ediniz.
- Bu sınavda toplam 100 puanlık soru vardır.
- **SINAVDA KOPYA ÇEKENLER, KOPYA VERENLER VE BUNLARA TEŞEBBÜS EDENLER SINAVDAN "0" ALACAKTIR VE DEKANLIĞA ŞİKAYET EDİLECEKLERDİR!**.
- Çözümlerinizi ondalık sayı olarak verecekseniz noktadan sonra en az 3 basamak hassasiyet olmalıdır.
- Çözümleriniz kesirli ise sadeleştirin, mesela sonuç $\frac{2}{4}$ ise $\frac{1}{2}$ yapılmalıdır.

Başarılar. (Mustafa Dağtekin)

Birikimli Standard Normal Dağılım Tablosu. $\phi(z)$

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Bazı formüller	
$\int x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} \;+c$	$\lim_{x\to\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$

SORULAR

S0: Önceki sayfadaki açıklamarı okuyun! Bu soruyu da cevap kağıdına **"Açıklamaları Okudum"** yazarak cevaplayınız!

S1: X ve Y sürekli rastgele değişkenler ve bunların Birleşik Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir. Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir.)

$$f(x,y) = \begin{cases} \alpha\,\mathrm{e}^{-x}\,, & 0 < x+y < 1\,,\quad 0 < x,\ 0 < y \\ \\ 0\,, & \text{diğer} \end{cases}$$

(a) `(10 puan)` α'nın değerinin **e** olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1a:

Birleşik OYF için aşağıdaki sağlanmalı:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$$

O zaman:

$$1 = \int_0^1 \int_0^{1-x} \alpha\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$1 = \alpha \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$1 = \alpha\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \alpha\left[-1(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1$$

$$1 = \alpha(1-\mathrm{e}^{-1}) + \alpha(2\,\mathrm{e}^{-1}-1)$$

$$1 = \alpha\,\mathrm{e}^{-1}$$

$$\alpha = \mathrm{e} \qquad \blacksquare$$

(b) `(10 puan)` X'nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz ve grafiğini çiziniz. (Bu fonksiyonun tanımlı olduğu aralığı da belirtmeniz gerekiyor.)

Çözüm (1b):

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ \mathrm{d}y \\
&= \int_{0}^{1-x} \ \mathrm{d}y \\
&= \mathrm{e}^{1-x}\ \ [y]_0^{1-x} \\
&= (1-x)\ \mathrm{e}^{1-x}, \qquad 0 < x < 1, \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

(c) `(10 puan)` $X = x$ şartı altında Y'nin beklenen değerini bulunuz. (İpucu: x cinsinden çıkması lazım. Ayrıca bu sonucun geçerli olduğu bölgeyi de vermeniz gerekiyor.)

Çözüm (1c):

$$
\begin{aligned}
f(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) > 0 \text{ olan yerler için} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{1-x}}{(1-x)\ \mathrm{e}^{1-x}}, \qquad 0 < y < 1-x \\
&= \frac{1}{1-x}, \qquad 0 < y < 1-x \\
E[Y|X=x] &= \int_0^{1-x} y\ f(y|x)\ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{1-x} y\ \frac{1}{1-x}\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{1-x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} \\
&= \frac{(1-x)^2}{2(1-x)} \\
E[Y|X=x] &= \frac{1-x}{2}, \qquad 0 < x < 1 \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

S2: İki adet torbanın ikisinde de üzerine 1, 2 ve 3 yazılmış üçer top bulunuyor. İki torbadan da rastgele birer top çekilip üzerinde yazan sayılara bakılıyor ve toplar torbaya geri konuyor. X rastgele değişkeni çekilen 2 toptaki sayıların arasındaki fark olsun. Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir.)

(a) `(10 puan)` X'in Olasılık Kütle Fonksiyonu'nu değer uzayını da belirterek bulunuz.

Çözüm (2a):

Şöyle bir olay tanımlayalım:

$E_{i,j}$: Birinci torbadan i, 2nci torbadan j nolu topu çekme olayı., $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,2,3\}$.

Bir torbadan çekilen sayı diğer torbadan çekilen sayıyı etkilemeyeceği için $E_{i,j}$'ler birbirinden bağımsızdır ve $P(E_{i,j}) = \frac{1}{9}$'dur.

X'in değer uzayını göstermek için bir tablo yapalım, satırlar birinci torbadan çekilen toptaki sayı, sütunlar ikinci torbadan çekilen toptaki sayı ve hücrelerdeki sayılar de X'in aldığı değer olsun.

X	j		
i	**1**	**2**	**3**
1	0	1	2
2	1	0	1
3	2	1	0

O zaman, $R_X = \{0,1,2\}$ olmak üzere:

$$P(X=0) = \mathsf{p}(0) = P(E_{1,1}) + P(E_{2,2}) + P(E_{3,3}) = \frac{3}{9}$$

$$P(X=1) = \mathsf{p}(1) = P(E_{2,1}) + P(E_{1,2}) + P(E_{2,3}) + P(E_{3,2}) = \frac{4}{9}$$

$$P(X=2) = \mathsf{p}(2) = P(E_{3,1}) + P(E_{1,3}) = \frac{2}{9}$$

Şöyle toparlarsak, X'in OKF'si:

$$\mathsf{p}(x) = P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x=0 \\ \frac{4}{9} & x=1 \\ \frac{2}{9} & x=2 \\ 0 & \text{diğer.} \end{cases} \qquad \blacksquare$$

(b) `(10 puan)` X'in ortalama ve varyansı nedir?

Çözüm (2b):

$$E(X) = \sum_{\forall x,\, x\in R_X} x\,\mathsf{p}(x)$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9}$$

$$E(X) = \mu_X = \frac{8}{9} = 0.9889 \qquad \blacksquare$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{4}{9} + 2^2 \cdot \frac{2}{9}$$

$$= \frac{12}{9}$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = \frac{12}{9} - \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

$$= \frac{12}{9} - \frac{64}{81}$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = \frac{44}{81} = 0.5432 \quad \blacksquare$$

(c) `(10 puan)` Bu deneyin 100 defa tekrar edildiğini varsayalım. X_i: i'nci deneyde iki topta görülen sayıların arasındaki fark olsun. $P\{(X_1 + X_2 + ... + X_{100}) > 100\}$ nedir?

Çözüm 2c:

Merkezi limit teoremine göre, $X_1, X_2, ..., X_n$ ortalaması μ, varyansı σ^2 olan aynı dağılıma sahip bağımsız rastgele değişklenler ise n sonsuza giderken

$$Z = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n - n\,\mu}{\sqrt{\sigma^2 n}}$$

rastgele değişkeni *standart normal dağılıma* yakınsar. Bu durumda $n = 100$ için yukardaki dönüşümü uygulayarak yaklaşık değeri bulabiliriz. $Y = X_1 + X_2 + ... + X_{100}$ diyelim.

$$P\{Y > 100\} = P\left(Z > \frac{100 - 100 \cdot \frac{8}{9}}{\sqrt{100 \cdot \frac{44}{81}}}\right)$$

$$P\{Y > 100\} = P(Z > 1.51)$$

$$= 1 - \phi(1.51)$$

$$= 1 - 0.9345 \qquad \text{(tablodan)}$$

$$P\{Y > 100\} \approx 0.0655 \quad \blacksquare$$

S3: `(10 puan)` X, ortalaması 0.5 olan olan üssel dağılımlı bir rastgele değişken olsun. $P(\beta < X) = 0.25$ olmasını sağlayan β değerini bulunuz. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir.)

Çözüm 3:

Üstel (veya üssel) rastgele değişkenler sürekli dağılıma sahiptirler. X üssel dağılımlı bir rastgele değişkense OYF'si:

$$f(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}, \qquad 0 < x$$

olur. Burda λ parametresi Poisson sürecinden gelmektedir. Öyle ki:

$$E(X) = 0.5 = \frac{1}{\lambda}$$
$$\lambda = \frac{1}{0.5}$$
$$\lambda = 2$$

Ayrıca

$$P(X > \beta) = \int_{\beta}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$$

Burdan:

$$0.25 = \int_{\beta}^{\infty} 2\, \mathrm{e}^{-2x} \mathrm{d}x$$
$$0.25 = 2 \cdot \frac{-1}{2} \left[\mathrm{e}^{-2x}\right]_{\beta}^{\infty}$$
$$0.25 = \mathrm{e}^{-2\beta}$$
$$\ln(0.25) = -2\beta$$
$$\beta = 0.6931 \qquad \blacksquare$$

S4: İki adet torbadan:

- Torba 1'de 3 adet kırmızı, 2 adet siyah top,
- Torba 2'de 4 adet kırmızı, 3 adet siyah top

bulunuyor. Torba 1'den rasgele 1 adet top çekilip Torba 2'ye konuyor. Sonra, Torba 2'den 1 adet rastgele top çekilip Torba 1'e konuyor. Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Cevaplarken olay tanımlarını yapmanız ve kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir.)

(a) `(10 puan)` 2. torbadan çekilden topun kırmızı olma ihtimali nedir?

Çözüm 4a:

Olaylarımızı tanımlayalım:

- K_1: 1. torbadan kırmızı çekme olayı, $P(K_1) = \frac{3}{5}$.
- B_1: 1. torbadan siyah çekme olayı, $B_1 = K_1^C$, $P(B_1) = \frac{2}{5}$
- K_2: 2. torbadan kırmızı çekme olayı
- B_2: 2. torbadan kırmızı çekme olayı

Ayrıca:

$$P(K_2|K_1) = \frac{5}{8}$$

$$P(B_2|K_1) = \frac{3}{8}$$

$$P(K_2|B_1) = \frac{4}{8}$$

$$P(B_2|B_1) = \frac{4}{8}$$

Ve K_1 ve B_1 olayları Torba 1'den top çekme rastgele deneyi için *birbirini dışlayan* ve *birbirini tamamlayan* olaylardır. Bu deneyin örnek uzayına S_1 dersek, bu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$S_1 = \{K_1, B_1\}$$

$$K_1 \cap B_1 = \phi$$

$$K_1 \cup B_1 = S_1$$

Bu yüzden toplu olasılık kuralı kullanabiliriz:

$$P(K_2) = P(K_2|B_1)P(B_1) + P(K_2|K_1)P(K_1)$$

$$= \frac{4}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{3}{8}$$

$$P(K_2) = \frac{23}{40} = 0.575 \quad \blacksquare$$

(b) `(10 puan)` 1. torbadan da, 2. torbadan da kırmızı çekilme ihtimali nedir?

Çözüm 4b:

Bize sorulan $P(K_1K_2)$'dir. Şartlı olasılık tanımından:

$$P(K_1K_2) = P(K_2|K_1)P(K_1)$$

$$P(K_1K_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5}$$

$$P(K_1K_2) = \frac{3}{8} = 0.375 \quad \blacksquare$$

(c) `(10 puan)` Deney sonunda her iki torbadaki renk sayısının deney başındakiyle aynı olma ihtimali nedir?

Çözüm 4c:

Bunun olması için 1. torbadan ne renk çekildiyse, 2. torbadan da onun çekilmesi lazım. O zaman bize sorulan $P(K_2K_1) + P(B_2B_1)$'dir.$P(K_2K_1)$ önceki şıkta bulunmuştu.

$$\begin{aligned} P(B_2B_1) &= P(B_2|B_1)P(B_1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{5} = 0.20 \end{aligned}$$

Toplarsak:

$$\begin{aligned} P(K_2K_1) + P(B_2B_1) &= \frac{3}{8} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{23}{40} = 0.575 \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

LÜTFEN SINAV KAĞITLARINIZA İSİM YAZARAK CEVAP KAĞIDIYLA BERABER TESLİM EDİNİZ.