

\*i.p.\*

# BIMU2004

## Olasılık Teorisi ve İstatistik

### Zorunlu Ödev - Çözümler

İstanbul Üniversitesi - Cerrahpaşa  
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü - Güz 2023

Son tarih: 29 Aralık 2023 @ 14:00

Version 1.0

LÜTFEN OKUYUN

## KURALLAR

- 1-) Bu ödevin yapılması **ZORUNLUDUR**. Bu ödevden alacağınız not toplam notunuzun %20'sini oluşturur.
- 2-) BAŞKA BİR ÖĞRENCİNİN CEVABINI KULLANMAK YASAKTIR. CEVAPLARI BİRBİRİNE BENZEYEN KAĞITLARA GEREKLİ İŞLEMLER YAPILACAKTIR. **KOPYA ÇEKENLER DERSTEN GEÇEMEZ**.
- 3-) Ödevde sadece fonksiyon değeri hesaplamak ve basit işlemler yapmak için hesap makinası kullanabilirsiniz. Çözüm adımlarınız belirtilmeli ve sayısal değerli sonuç isteniyorsa, her adımda bulunan değerler istenilen ondalıkta yazılmalıdır. Bunun dışında sorunun bir kısmını veya hepsini online yapay zeka araçlarına veya başka bir öğrenciye yaptırmak yasaktır. **ChatGPT, Google Bard benzeri yapay zeka araçları kullanmak yasaktır**. Bu tür araçlar kullanıldığı tespit edilirse, ödev 0 puan olarak değerlendirilecektir ve kopya olarak değerlendirilip gerekli işlemler yapılacaktır.
- 4-) Çözümlerinizi ya kurşun kalemle beyaz renkli düz, çizgili veya kareli bir kağıda yazarak yapınız. Geniş alan kullanarak, okunabilir şekilde yazınız ve yanlış yaptığınız yerleri **SİLEREK** iptal ediniz, üstünü çizerek değil. Okunmayan yazılar, muğlak veya kötü yazılmış ifadeler bulunan cevaplar dikkate alınmayabilir. Ödev elektronik olarak teslim edilmeyecektir. Eğer şehir dışında iseniz, ödevi bir arkadaşınız aracılığıyla teslim edebilirsiniz.
- 5-) **Çözümlerinizde ne yaptığınızı adım adım göstermeniz ve yaptığınız işlemlerde kullandığınız formülleri yazmanız gerekiyor. Sadece işlem yaparsanız cevap doğru dahi olsa kabul edilmez.**
- 6-) **Sayısal değer isteyen çözümlerde çözümlerinizi kesirli bırakmayın. Aksi yazılmamışsa, 3 basamak ondalığa kadar ondalıklı yazınız.**
- 7-) Son cevabınızı kare içine alın. Kare içine almazsanız son yazdığınız şeyi cevap olarak

kabul edeceğim.

- 8-) Gereksiz bilgi yazmayın. Fazladan bişey yazayım, ya tutarsa gibi düşünürseniz puan alamazsınız.
- 9-) Ödevi çözdükten sonra sayfa sayısı 1'den fazlaysa bir naylon dosya içine koyarak veya zımbalayarak teslim ediniz.
- 10-) Bana soru sormak için lütfen CANVAS kullanın. Soru sormak için mail atmayın. Soru sormak için mail atarsanız cevaplarınız gecikebilir. Canvas üzerinden yazılan mesajlara 24 saat içinde cevap verilecektir.

Kolay gelsin. (Mustafa Dağtekin)

Birikimli Standard Normal Dağılım Tablosu. $\phi(z)$										
z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

SORULAR

**S0:** Önceki sayfadaki açıklamaları okuyun! Bu soruyu da cevap kağıdına ”**Açıklamaları Okudum**” yazarak cevaplayınız!

**S1:** Bir sürekli rastgele değişken olan  $X$  için aşağıdaki ifadenin doğru olduğunu varsayalım:

$$P\{X \geq x\} = \frac{1}{1+x}, \quad x \geq 0$$

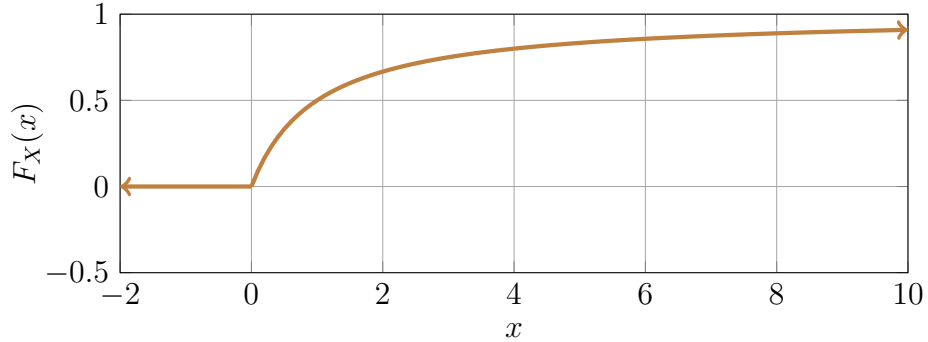
Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir. Virgülden sonra en az 4 basamak yazın.)

(a) (10 puan)  $X$ 'in birikimli dağılım fonksiyonunu bulunuz ve basit bir grafiğini çiziniz.

**Çözüm 1a):**

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{X \leq x\} \\ &= 1 - P\{X \geq x\} \\ &= 1 - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{x}{1+x} \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Burdan:



(b) (10 puan)  $X$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz ve basit bir grafiğini çiziniz.

**Çözüm 1b):**

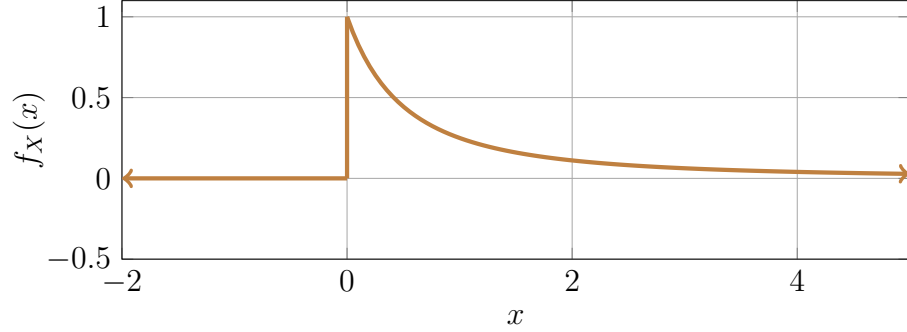
$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{d}{dx} F_X(x) \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{1+x} \right) \end{aligned}$$

\*i.p.\*

$$= \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= (1+x)^{-2} \quad x \geq 0$$

Çizersek:



- (c) (15 puan)  $X$ 'in bir fonksiyonu  $Y = X^2$  olarak verilmişse,  $Y$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

**Çözüm** (1c):

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \\ &= P\{X^2 \leq y\} \\ &= P\{0 \leq X \leq \sqrt{y}\} \\ &= F_X(\sqrt{y}) \\ &= \frac{\sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}} \\ &= \frac{\sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}}, \quad 0 \leq y \end{aligned}$$

Burdan:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) \\ &= \frac{d}{dy} \left( \frac{\sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y} (\sqrt{y} + 1)^2}, \quad y > 0 \end{aligned}$$

bulunur.

S2:

Bir TV modelinde markaları A ve B olan iki türlü renk kontrol çipinden biri kullanılmaktadır. A çiplerinden rastgele seçilen bir çipin hatalı olma olasılığı 0.0001 iken B çiplerinden rastgele seçilen bir çipin hatalı olma olasılığı 0.0002'dir. A çipi içeren bir TV 1000 dolara mal edilip 2000 dolara satılıyor, B çipi içeren bir TV 800 dolara mal edilip 1600 dolara satılmaktadır. Satılan TV'ler bozuk çıkarsa sağlam bir TV ile değiştirilmektedir. Bir elektronik mağazası bu TV'lerden 500,000 adet almak istiyor. Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir. Virgülden sonra en az 4 basamak yazın.)

- (a) (10 puan) Mağaza TV'lerin 200 binini A çipli, 300 binini B çipli olarak almak istiyor. Bu TV'lerden ortalama ne kadar para kazanır? (Bozuk ürünlerin yenisiyle değiştirileceğini dikkate alın)

Çözüm 2a:

Şu rastgele değişkenleri tanımlayalım:

$X$ : A çipli TV'lerden çıkan bozuk ürün sayısı

$X \sim \text{Binom}(n = n_1 = 2 \times 10^5, p = p_1 = 1 \times 10^{-4})$

$Y$ : B çipli TV'lerden çıkan bozuk ürün sayısı

$X \sim \text{Binom}(n = n_2 = 3 \times 10^5, p = p_2 = 2 \times 10^{-4})$

$W$ : Kazanç

$$W = (2 \times 10^5 \times 2000) - (X + 2 \times 10^5) \times 1000 \\ + (3 \times 10^5 \times 1600) - (Y + 3 \times 10^5) \times 800$$

TL olur. Bu da:

$$W = 2 \times 10^9 - 1000X + 0.24 \times 10^9 - 800Y \\ = 2.24 \times 10^9 - 1000X - 800Y$$

şeklinde basitleştirilebilir. Kazancın ortalama değeri:

$$E[W] = E[2.24 \times 10^9 - 1000X - 800Y] \\ = 2.24 \times 10^9 - 1000E[X] - 800E[Y]$$

olur. Burada:

$$E[X] = n_1 p_1 = 2 \times 10^5 \times 1 \times 10^{-4} = 20$$
$$E[Y] = n_2 p_2 = 3 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-4} = 60$$

şeklindedir.

Burdan:

$$\begin{aligned} E[W] &= 2.24 \times 10^9 - 1000 \times 20 - 800 \times 60 \\ &= 2.24 \times 10^9 - 20 \times 10^3 - 48 \times 10^3 \\ &= 2.24 \times 10^9 - 68 \times 10^3 \\ &= 2.24 \times 10^9 - 0.68 \times 10^6 \\ &= 2.23932 \times 10^9 \end{aligned}$$

TL olur.

- (b) (10 puan) Mağazanın bütün TV'leri A çipli olarak aldığını düşünelim. En fazla 12 adet TV'nin bozuk çıkma olasılığı nedir?

**Çözüm** (2b):

$X$ : A çipli 500,000 TV'den çıkan bozuk ürün sayısı.  $X \sim \text{Binom}(n = 5 \times 10^5, p = 1 \times 10^{-4})$  rastgele değişkeni.

Bize sorulan şey:

$$P\{X \leq 12\} = \sum_{x=0}^{12} \binom{5 \times 10^5}{x} (1 \times 10^{-4})^x (1 - 1 \times 10^{-4})^{5 \times 10^5 - x}$$

Bu işlemi standart normal dağılımla modelleyerek yapalım.

$$E[X] = \mu_X = np = 5 \times 10^5 \times 1 \times 10^{-4} = 50$$
$$\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5 \times 10^5 \times 1 \times 10^{-4} \times 0.9999} = 7.07107$$

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma}$$

transformasyonu ile:

$$P\{X \leq 12\} = P\left\{Z \leq \frac{12 - 50}{7.07107}\right\}$$

$$\begin{aligned} &= P\{Z \leq -5.36656\} \\ &= P\{Z \geq 5.36656\} \\ &= 1 - P\{Z \leq 5.36656\} \\ &= 1 - \Phi(5.36656) \\ &\approx 0 \end{aligned}$$

**S3:**

Bir durağa otobüsler Poisson süreci ile gelmektedir ve ortalamada 10 dakikada 1 otobüs geliyor. Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir. Virgülden sonra en az 4 basamak yazın.)

(a) (10 puan) Durağa 1 saat içinde en fazla 3 otobüs gelme olasılığı nedir?

**Çözüm** **3a**:

$X$ : 1 saat içinde gelen otobüs sayısı.  $X \sim \text{Poisson}(\alpha)$  rastgele değişkeni.

$$\lambda = \frac{60 \text{ dk/saat}}{10 \text{ dk}} \times 1 \text{ otobüs} = 6 \text{ otobüs/saat}$$

$$\alpha = \lambda T = 6 \text{ otobüs/saat} \times 1 \text{ saat} = 6 \text{ otobüs}$$

OKF:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\alpha^x}{x!} e^{-\alpha} \\ &= \frac{6^x}{x!} e^{-6} \\ &= \frac{6^x}{x!} e^{-6}, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Bize sorulan şey:

$$\begin{aligned} P\{X \leq 3\} &= \sum_{x=0}^3 \frac{6^x}{x!} e^{-6} \\ &= \frac{6^0}{0!} e^{-6} + \frac{6^1}{1!} e^{-6} + \frac{6^2}{2!} e^{-6} + \frac{6^3}{3!} e^{-6} \\ &= e^{-6} + 6e^{-6} + \frac{36}{2} e^{-6} + \frac{216}{6} e^{-6} \end{aligned}$$

\*i.p.\*

$$= e^{-6} + 6e^{-6} + 18e^{-6} + 36e^{-6}$$

$$= 61e^{-6}$$

$$\approx 0.1512$$

- (b) (10 puan) Durağa 4. otobüs gelinceye kadar geçen sürenin 1 buçuk saatten uzun olma ihtimali nedir?

Çözüm (3b):

Y: 4. otobüsün gelmesine kadar geçen süre (saat).  $Y \sim \text{Gama}(\lambda = 6, r = 4)$  rastgele değişkeni.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} y^{r-1} e^{-\lambda y} \\ &= \frac{6^4}{\Gamma(4)} y^{4-1} e^{-6y} \\ &= \frac{6^4}{3!} y^{4-1} e^{-6y}, \quad y \geq 0 \\ &= 216y^3 e^{-6y}, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

Bize sorulan:

$$\begin{aligned} P\{Y > 1.5\} &= \int_{1.5}^{\infty} 216y^3 e^{-6y} dy \\ &= 0.0212 \end{aligned}$$

S4:

Nasreddin hoca yarın şu şartlara göre ağaç kesmeye gitme ihtimali vardır.

- Sabah hava açık olursa, %80 ihtimalle ağaç kesmeye gidecektir.
- Sabah hava bulutlu olursa, %40 ihtimalle ağaç kesmeye gidecektir.
- Sabah hava yağmurlu olursa, %10 ihtimalle ağaç kesmeye gidecektir.
- Yarın %30 ihtimalle hava açık, %50 ihtimalle hava bulutlu, %20 ihtimalle hava yağmurlu olacaktır.

Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir. Virgülden sonra en az 4 basamak yazın.)

- (a) (10 puan) Nasrettin hocanın yarın ağaç kesmeye gitme ihtimali nedir?



**Çözüm** (4a):

Olayları tanımlayalım:

$A$ : Hava açık

$B$ : Hava bulutlu

$Y$ : Hava yağmurlu

$K$ : Ağaç kesmeye gitme

Burda verilenleri yazalım:

$$P\{K|A\} = 0.8$$

$$P\{K|B\} = 0.4$$

$$P\{K|Y\} = 0.1$$

$$P\{A\} = 0.3$$

$$P\{B\} = 0.5$$

$$P\{Y\} = 0.2$$

Toplu olasılık kuralından:

$$\begin{aligned} P\{K\} &= P\{K|A\}P\{A\} + P\{K|B\}P\{B\} + P\{K|Y\}P\{Y\} \\ &= 0.8 \times 0.3 + 0.4 \times 0.5 + 0.1 \times 0.2 \\ &= 0.24 + 0.2 + 0.02 \\ &= 0.46 \end{aligned}$$

- (b) (15 puan) Nasrettin hoca iki gün üstüste ağaç kesmeye gitmediyse bu iki günde de de havanın açık olmuş olma ihtimali nedir?

**Çözüm** (4b):

Burda hava durumu günlerden bağımsız olarak aynı olasılıklarla gerçekleşiyor. Bunu dikkate alarak herhangi bir günde ağaç kesmeye gidilmemesi şartı altında havanın açık olma olasılığını bulalım.

$$P\{\overline{K}\} = 1 - 0.46 = 0.54$$

$$P\{A|\overline{K}\} = \frac{P\{\overline{K}|A\}P\{A\}}{P\{\overline{K}\}}$$

$$P\{\overline{K}|A\} = 1 - P\{K|A\} = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$P\{A|\overline{K}\} = \frac{0.2 \times 0.3}{0.54} = 0.1111$$

$A_1$ : Hava ilk gün açık

$A_2$ : Hava ikinci gün açık

$\overline{K}_1$ : 1. gün ağaç kesmeye gitmeme

$\overline{K}_2$ : 2. gün ağaç kesmeye gitmeme

olsun. Burdan:

$$P\{A_1|\overline{K}_1\} = P\{A|\overline{K}\} = 0.1111$$

$$P\{A_2|\overline{K}_2\} = P\{A|\overline{K}\} = 0.1111$$

$$\begin{aligned} P\{A_1|\overline{K}_1\} \cdot P\{A_2|\overline{K}_2\} &= 0.1111^2 \\ &= 0.0123 \end{aligned}$$

---