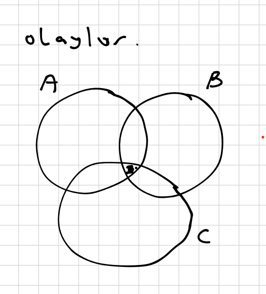
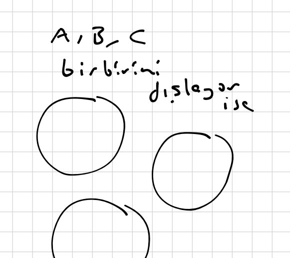
* Toplu Olasılık ' devam

A, B, C olaylar.



A, B, C birbirini dışlayan ise



$$P\{A \cup B \cup C\} = P\{A\} + P\{B\} + P\{C\} - P\{AB\} - P\{AC\} - P\{BC\} + P\{ABC\}$$

$= P(A) + P(B) + P(C)$

Şartlı Olasılık

A ve B olayları için B olayının oluştuğu bilindiğinde, A olayının B koşulu altında oluşma olasılığı

$P\{A/B\}$ şeklinde gösterilir ve $P\{B\} > 0$ olmak koşuluyla

$$\boxed{P\{A|B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}}, \quad P\{B\} > 0}$$

Örnek

400 adet çipin yüzey hatası bulundurma ve bozuk olma durumları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Yüzey hatası var mı?

		E	H	
Bozuk mu	E	10	18	28
	H	30	342	372
		40	360	

Rastgele seçilen bir çipte yüzey hatası varsa bu çipin bozuk olma ihtimali nedir?

F : Bir çipte yüzey hatası olma olayı

D : Bir çipin bozuk olma olayı.

$P\{F\} = \frac{40}{400} = 0.1 \qquad P\{F^c\} = \frac{360}{400} = 0.9$

$P\{D\} = \frac{28}{400} = 0.07 \qquad P\{D^c\} = 0.93$

$P\{D|F\} = \frac{P\{DF\}}{P\{F\}} = \frac{10/400}{40/400} = 0.25$

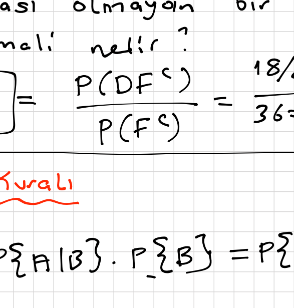
· Yüzey hatası olmayan bir çipin bozuk olma ihtimali nedir?

$\boxed{P\{D|F^c\}} = \frac{P(DF^c)}{P(F^c)} = \frac{18/400}{360/400} = \boxed{0.05}$

Çarpım Kuralı

$P\{AB\} = P\{A|B\} \cdot P\{B\} = P\{B|A\} P\{A\}$

Toplu Olasılık Kuralı

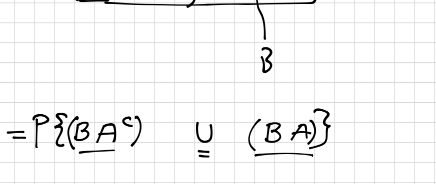


$P\{B\} = P\{(BA^c) \cup (BA)\}$

$= P\{BA^c\} + P\{BA\}$

$$\boxed{P\{B\} = P\{B|A\}P\{A\} + P\{B|A^c\}P\{A^c\}}$$

Genelleştirme



$E_1, E_2, \dots, E_n$ "çifter çifter" birbirini dışlayan olaylar yani:

$1 \leq i, j \leq n$

$i \neq j$ için $E_i E_j = \emptyset$

ve $E_1, E_2, \dots, E_n$ "birbirini tamamlayan" olaylar yani

$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = S$ ise

$$\boxed{P(B) = P(B|E_1)P(E_1) + P(B|E_2)P(E_2) + P(B|E_3)P(E_3) + \dots + P(B|E_n)P(E_n)}$$

Zincir Kuralı

$P(ABC) = P(C|AB)\,P(AB)$

$= P(C|AB)\,P(B|A)\,P(A)$

$E_1, E_2, \dots, E_n$ için

$P(E_1 E_2 \dots E_n) = P(E_n | E_{n-1} E_{n-2} \cdots E_2 E_1)$

$\cdot P(E_{n-1} | E_{n-2} \dots E_1)$

$\cdot P(E_{n-2} | E_{n-3} \dots E_1)$

$\vdots$

$\cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_1)$

Örnek

Bir yarı iletken fabrikasında üretilen çiplerden Ali'nin tasarladıklarının bozuk çıkma olasılığı 0.1, Berna'nın " " " " 0.005'tir. Bütün çipler bu iki mühendis tarafından tasarlanıyor.

Çiplerin %20'sini Ali tasarlıyor.

%80'ini Berna "

Üretilen çiplerden rastgele seçilen bir çipin bozuk olma olasılığı nedir?

F : Bir çipin bozuk olması

H : Çipi Ali'nin tasarlama olayı.

(H^c : " Berna'nın " ")

$P(H) = 0.2 \qquad P(H^c) = 0.8$

$P(F|H) = 0.1 \qquad P(F|H^c) = 0.005$

$P(F) = P(F|H)P(H) + P(F|H^c)P(H^c)$

$= 0.1 \times 0.2 + 0.8 \times 0.005$

$\boxed{P(F) = 0.024}$

Bağımsızlık

Bir A olayı bir B olayının oluşmasını veya B " A " etkilemiyorsa A ve B bağımsız olaylardır denir.

A ve B'nin bağımsız olması durumunda

$P(A|B) = P(A)$

$P(B|A) = P(B)$

$\boxed{A \text{ ve } B \text{ bağımsız ise } P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$ (independent)

Soru A ve B birbirini dışlayan (mutually exclusive) ise bağımsız olabilirler mi?
$P(AB) = 0$

İmkansız olmayan iki olay birbirini dışlıyorsa bağımsız olamazlar.

Örnek

Bir zar atma deneyinde aşağıdaki olaylar tanımlanıyor.

A: Tek sayı gelme olayı $A = \{1,3,5\}$ $P(A) = 3/6 = 1/2$

B: Çift sayı gelme olayı $B = \{2,4,6\}$ $P(B) = 3/6 = 1/2$

C: $\{2,3\}$ $P(C) = 2/6$

a) $AB = \emptyset$ bağımsız olamaz

b) $P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{1/6}{2/6} = P(A)$

∴ A ile C olayları birbirinden bağımsızdır.

A ve B bağımsız ise

A^c ve B

A ve B^c

A^c ve B^c

de bağımsız olaylardır.

Bağımsız Olaylar Dizisi

n adet olayın birbirinden bağımsız olması için $2^n - n - 1$ adet şartın sağlanması gerekir.

$E_1, E_2, \dots, E_n$ olaylar

$P(E_1 E_2) = P(E_1) P(E_2)$

$P(E_1 E_2 E_3) = P(E_1)P(E_2)P(E_3)$

$P(E_1 \dots E_n) = P(E_1) \dots P(E_n)$

Örnek 3 olay için A, B, C $\quad 2^3 - 3 - 1 = 4$

$P(AB) = P(A)P(B)$

$P(AC) = P(A)P(C)$

$P(BC) = P(B)P(C)$

$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

BAYES' KURALI

E ve F olayları için

$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)$

$P(F|E) = \frac{P(EF)}{P(E)} = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E)} \quad P(E) > 0$

$$\boxed{P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)}}$$

Örnek

Çoktan seçmeli bir testte bir soruyu yanıtlayan öğrenci ya yanıtı bilir ya da tahmin eder. Öğrencinin bir soru yanıtını bilme olasılığı p, tahmin etme olasılığı 1-p olsun. Öğrencinin doğru yanıt verdiği bir soruyu bilerek işaretlemiş olma ihtimali nedir?

B : Sorunun cevabını bilme olayı

D : Doğru şıkkı işaretleme olayı

$P(B|D) = ?$

$P(B) = p$

$P(D|B) = 1 \qquad P(D|B^c) = \frac{1}{m}$

$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{p}{p + \frac{1-p}{m}}$

$P(D) = P(D|B)P(B) + P(D|B^c)P(B^c)$

$= 1 \cdot p + \frac{1}{m}(1-p)$

Örnek

Bir Covid testi %99 ihtimalle doğru sonuç veriyor. Nüfusun %0.5'inin Covid olduğu biliniyor. Test pozitif ise bu kişinin gerçekten Covid olma ihtimali nedir?

H : Bir kişinin gerçekten Covid olma olayı

T : Testin pozitif çıkma olayı

$P(T|H) = 0.99 \qquad P(T|H^c) = 0.01$

$P(H) = 0.005$

$P(H|T) = ?$

$P(H|T) = \frac{P(T|H) \cdot P(H)}{P(T)} \approx 0.33$

$P(T) = P(T|H)P(H) + P(T|H^c)P(H^c)$

$= 0.99 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995$