Ayrık
~ Rastgele Değişkenler X, Y
~ Olasılık Kütle fonksiyonu

$$P(X=x) = p(x)$$

~ X'in değer uzayı R_x ise

$$\sum_{x_i \in R_x} p(x_i) = 1$$

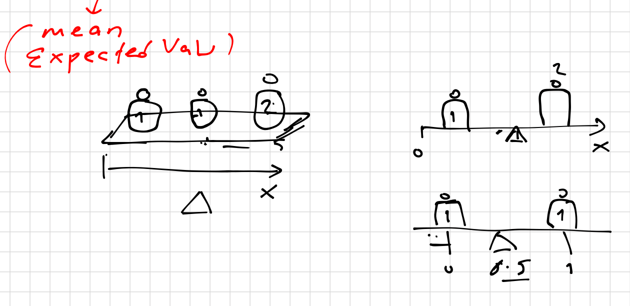
~ BDF veya CDF

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i)$$

– $0 \le p(x) \le 1$
$0 \le F(x) \le 1$

~ $F(x)$ azalmayan bir fonksiyondur.

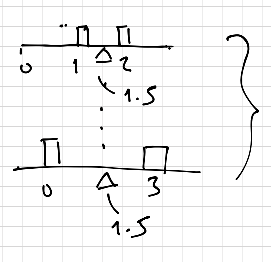
Ortalama ve Varyans.
(Beklenen Değer)
(mean
Expected Val.)



X bir ayrık R.D., R_x değer uzayı, $p(x)$ O.K.F'si ise X'in ortalaması (veya beklenen değeri):

$$\boxed{E(X) = \mu_x = \sum_{x_i \in R_x} x_i \cdot p(x)}$$

Varyans

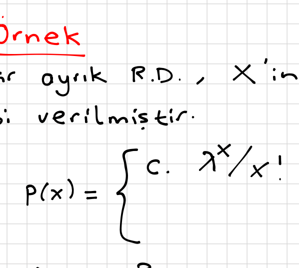


X'in varyansı

$$V(x) = Var(X) = \sigma_x^2 = \boxed{\sum_{x_i \in R_x} (x_i - \mu_x)^2 p(x_i)}$$

Standart Sapma $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$
$= \sqrt{V(x)}$

Örnek
X bir ayrık R.D., $R_x = \{0, 1\}$
O.K.F'si $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$
$E(X) = ?$ $V(X) = ?$



$$\mu_x = E[X] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_x^2 = V(X) = \sum_{x \in R_x} (x_i - \mu_x)^2 \cdot p(x)$$
$$= \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}$$
$$= 0.125 + 0.125$$
$$= 1/4$$
$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \frac{1}{2}$$

Örnek
Bir ayrık R.D., X'in O.K.F'si aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$p(x) = \begin{cases} c \cdot \lambda^x / x!, & x \ge 0,\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) $c = ?$

$$\sum_{x \in R_x} p(x) = 1$$
$$\sum_{x=0}^{\infty} c \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = 1$$
$$c \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}}_{e^{\lambda}} = 1$$
$$c \cdot e^{\lambda} = 1$$
$$\boxed{c = e^{-\lambda}}$$

b) $\mu_x = ?$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$$
$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{x!}$$
$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$
$$m \triangleq x - 1$$
$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!}}_{e^{\lambda}}$$

$$\boxed{\mu_x = \lambda}$$ Varyans ödev

Rastgele Değişkenlerin Fonksiyonları

X bir ayrık R.D. ve $g(X)$, X'in bir fonksiyonu olsun.

$$E[g(x)] = \sum_{x \in R_x} g(x) \cdot p(x)$$

ile bulunur.

Örnek X'in O.K.F'si

$p(-1) = 0.2$
$p(0) = 0.5$
$p(1) = 0.3$ ise

ve $g(X) = X^2$ ise $E[X^2] = ?$

x	$g(x) = X^2$
-1	1
0	0
1	1

$g(1) = p(-1) + p(1)$
$= 0.5$
$g(0) = 0.5$

$Y = g(X)$ Y'nin okf'si

$$E[X^2] = \sum g(x) \cdot p(x)$$
$$= (-1)^2 \times 0.2 + 0^2 \times 0.5 + (1)^2 \times 0.3 = 0.5$$

$$E[Y] = 0 \times g(0) + 1 \times g(1)$$
$$= 0 + 1 \times 0.5 = \underline{0.5}$$

Varyans (Ek)

$$V(x) = E[(X - \mu_x)^2]$$
$$= E[X^2 - 2X\mu_x + \mu_x^2]$$
$$= \sum_{x \in R_x} (x^2 - 2x\mu_x + \mu_x^2)\, p(x)$$
$$= \underbrace{\sum_{x \in R_x} x^2 p(x)}_{E[X^2]} - \sum_{x \in R_x} 2x\mu_x\, p(x) + \sum_{x \in R_x} \mu_x^2\, p(x)$$
$$= E[X^2] - 2\mu_x \sum_{x \in R_x} x\, p(x) + \mu_x^2 \sum_{x \in R_x} p(x)$$
$$= E[X^2] - 2\mu_x \cdot \mu_x + \mu_x^2 \cdot 1$$
$$\boxed{V(X) = E[X^2] - \mu_x^2}$$

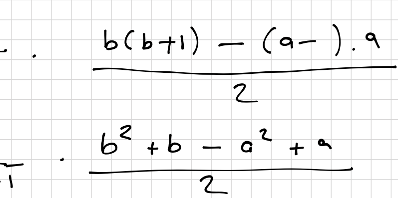
Bazı Önemli Ayrık Olasılık Dağılımları

① AYRIK BİRBİÇİMLİ DAĞILIM
(Düzgün, Uniform)

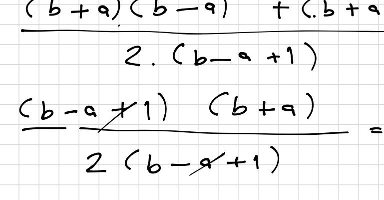
X bir ayrık R.D.,
$R_x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ değer uzayı ve bu uzaydaki her noktada olasılık aynı olsun, yani

$$P(X = x_i) = p(x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ise bu R.D'ye "Ayrı Birbiçimli R.D." denir.



X'in değer uzayı tamsayılardan oluşuyorsa



$$P(X = x) = \begin{cases} 1/(b-a+1), & a \le x \le b;\ a, x, b \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

Ortalama

$$E(X) = \mu_x = \sum_{x=a}^{b} x \cdot \frac{1}{b-a+1}$$
$$= \frac{1}{b-a+1} \cdot \frac{b(b+1) - (a-\ )\cdot a}{2}$$
$$= \frac{1}{b-a+1} \cdot \frac{b^2 + b - a^2 + a}{2}$$
$$= \frac{(b+a)(b-a) + (b+a)}{2 \cdot (b-a+1)}$$
$$= \frac{\cancel{(b-a+1)}\,(b+a)}{2\,\cancel{(b-a+1)}} = \frac{a+b}{2}$$

Varyans

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - \mu_x^2$$
$$= \sum_{x=a}^{b} x^2 \frac{1}{b-a+1} - \frac{(b+a)^2}{2}$$
$$= \dots$$
$$= \frac{(b-a+1)^2}{12} = \sigma_x^2$$

② BİNOM DAĞILIMI

Bernoulli Denemesi

Muhtemel 2 adet sonucu olan bağımsız deneylere "Bernoulli Denemesi" denir.
Sonuçlardan birine "başarılı", diğerine de "başarısız" deneme denir.

örnek

– Para atma deneyi
Y, T

– Zar atmada 2 gelmesi
– 2'dir
– 2 değildir.

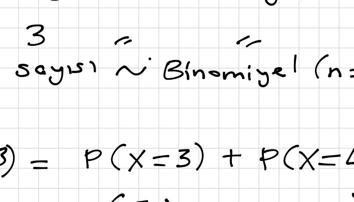
Tanım –
Bir rastgele deney (n) adet Bernoulli Denemesi'nden oluşuyor, öyle ki:
① Denemeler birbirinden bağımsız
② Her denemede başarılı olma ihtimali aynı ve (p) olsun.

X: Bu deneydeki "başarılı" sonuç sayısını gösteren bir rastgele değişken ise, X'e "Binomiyel R.D." denir ve parametreleri (n, p)'dir.

$$X \sim \text{Binomiyel}(n, p)$$

X'in OKF'si:

$$P(X = x) = p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x \in \mathbb{Z},\ n \ge x \ge 0$$
$$R_x = \{0, 1, \dots, n\}$$



Örnek
Bir haberleşme sistemi (n) adet parçadan oluşuyor ve her parçanın bozulmuş olma ihtimali $(1-p)$'dir ve bozulmalar birbirinden bağımsızdır. Bu sistemin çalışıyor olması için parçaların en az yarısının sağlam olması gerekiyor. (p)'nin hangi değerleri için 5 parçalı bir sistem 3 parçalı bir sisteme tercih edilmeli.

X: 5 parçalı sistemde sağlam parça sayısı ~ Binomiyel(n = 5, p)
Y: 3 " " " " sayısı ~ Binomiyel(n = 3, p)

$$P(X \ge 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$
$$P(X = x) = \binom{5}{x} p^x (1-p)^{5-x}$$
$$P(Y = y) = \binom{3}{y} p^x (1-p)^{3-y}$$
$$P(Y \ge 2) = P(Y=2) + P(Y=3)$$

$$\binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + \binom{5}{5} p^5 > \binom{3}{2} p^2 (1-p) + \binom{3}{3} p^3$$

...

$$3(p-1)^2 (2p-1) \ge 0$$
$$2p - 1 > 0 \quad p > 1/2$$

ise 1. kurulum kullanılır.

(Binom) Ortalama ve Varyans.

$$X \sim \text{Binomiyel}(n, p)$$

$$E(X^k) = \sum_{x=0}^{n} x^k p(x)$$
$$= \sum_{x=0}^{n} x^k \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$x \binom{n}{x} = x \cdot \frac{n!}{(n-x)!\, x!}$$
$$= \frac{n(n-1)!}{[(n-1)-(x-1)]!\,(x-1)!}$$
$$= n \binom{n-1}{x-1}$$

$$= n \cdot p \sum_{x=1}^{n} x^{k-1} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} \cdot (1-p)^{[n-1-(x-1)]}$$

$j = x-1$ olsun.

$$E[X^k] = n.p. \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^{k+1} \binom{n-1}{j} . p^j (1-p)^{n-1-j}$$

J : Binomiyel$(n-1, p)$

$$E[X^k] = n.p. E[(J+1)^{k-1}]$$

$k=1$ dersek beklenen değeri buluruz.

$$E[X] = n.p. E(1) = \underline{n.p}$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2$$

$k=2$ dersek $E[X^2]$ bulunur.

$$E[X^2] = n.p. E(J+1)$$
$$= n.p. (E(J)+1)$$
$$= np[(n-1).p+1]$$

$$V(X) = np[(n-1)p+1] - (np)^2$$
$$= np[\cancel{np} - p + 1 - \cancel{np}]$$
$$\boxed{V(X) = np(1-p)} \text{ VARYANS}$$

---

③ Geometrik Dağılım

Bir dizi Bernoulli denemesinden oluşan bir rastgele deneyden her denemede başarılı sonuç gelme olasılığı p olsun ve denemelerin birbirinden bağımsız olduğunu varsayalım.

X : Başarılı bir sonuç gelinceye kadar yapılan deneme sayısı ise X bir "Geometrik Rastgele Değişken"dir.

$$\boxed{X \sim \text{Geometrik}(p)}$$

$$R_X = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}^+$$

OKF'si $\quad P(X=x) = p(x) = (1-p)^{x-1} p$

$$\underbrace{0000\dots0}_{x-1 \text{ defa başarısız}} \bullet \rightarrow \text{başarılı olması}$$

(Geometrik) Ortalama ve Varyansı

$q \triangleq 1-p$ olsun.

$$p(x) = q^{x-1} . p$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x . q^{x-1} . p$$
$$= \sum_{x=1}^{\infty} [x-1+1] q^{x-1} p$$
$$= \sum_{x=1}^{\infty} (x-1) q^{x-1} p + \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} p}_{1}$$
$$= q \sum_{x=1}^{\infty} (x-1) q^{x-2} p + 1$$

$y \triangleq x-1$ olsun

$$= q \left(\sum_{y=0}^{\infty} y . q^{y-1} . p \right) + 1$$
$$= q \sum_{y=1}^{\infty} y . q^{y-1} . p + 1$$

Tekrar $x=y$ diyelim

$$= q . \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} x\, q^{x-1} . p}_{E(X)} + 1$$

$$E(X) = q\, E(X) + 1$$

$$E(X) = 1/p \quad \text{ortalama}$$

Varyans — ödev

$$\left\{ \sigma_X^2 = \frac{1-p}{p^2} \right\}$$

HAFIZASIZLIK (Belleksizlik) Özelliği

X bir geometrik R.D. ve $k, i \in \mathbb{Z}^+$, $k \geq i$ olsun.

$$P(X \geq k+i \mid X > i) = P(X \geq k)$$