③ Negatif Binom Dağılımı

Tanım: Bir dizi Bernoulli Denemesi düşünelim. Her denemede başarı olma ihtimali p olsun.

X: r adet başarılı deneme gerçekleşinceye kadar yapılan deneme sayısı ise, X Negatif Binom dağılımlı bir rastgele değişkendir. Parametreleri p ve r'dir.

$X \sim \text{NegatifBinom}(p, r)$

$R_X = \{r, r+1, r+2, \dots\}$

$r=1 \Rightarrow X$ geometrik bir R.D. dir.

x-1 deneme, r-1 başarı; x. deneme başarılı

$$P(X) = \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r} \cdot p^{r-1} \cdot p = \binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r} p^r \qquad x = r, r+1, \dots$$

Negatif Binom → Ortalama ve Varyans

$$E[X] = \sum_x x \cdot p(x)$$

$$E[X^k] = \sum_{x=r}^{\infty} x^k \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

$$x\binom{x-1}{r-1} = x \cdot \frac{(x-1)!}{(r-1)!(x-r)!} = r\binom{x}{r}$$

$$E[X^k] = \frac{r}{p}\sum_{x=r}^{\infty} x^{k-1}\binom{x}{r} p^{r+1}(1-p)^{x-r}$$

$y = x+1$ diyelim

$$= \frac{r}{p}\sum_{y=r+1}^{\infty}(y-1)^{k-1}\binom{y-1}{r} p^{r+1}(1-p)^{y-(r+1)}$$

$$= \frac{r}{p} E[(Y-1)^{k-1}] \qquad Y \sim \text{NegatifBinom}(p, r+1)$$

$$E[X^k] = \frac{r}{p} E[(Y-1)^{k-1}]$$

$k=1 \Rightarrow E[X] = \mu_X = \frac{r}{p}$ ortalama

$k=2 \Rightarrow E[X^2] = \frac{r}{p} E[Y-1] = \frac{r}{p}\left[E[Y] - 1\right] = \frac{r}{p}\left(\frac{r+1}{p} - 1\right)$

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{r}{p}\left(\frac{r+1}{p} - 1\right) - \frac{r^2}{p^2}$$

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}} \text{ Varyans}$$

POISSON DAĞILIMI

Δt'lik aralıklara bölünmüş bir zaman aralığında ... başarılı deneme sayısı ... olsun.

X: T uzunluğundaki bir sürede görülen başarılı deneme sayısı

$X \sim \text{Poisson}(\lambda, T)$

$\alpha = \lambda T$

X'in OYF'si

$$P(X=x) = f(x) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^x}{x!}$$

Örnek

Bir bakır teldeki hata sayısı Poisson dağılımına uymaktadır. 1 metre telde ortalama 2.3 hata vardır. 1 metre telde 2 hata olma ihtimali nedir?

X: 1 metre teldeki hata sayısı

$\lambda = 2.3$ hata / metre

$T = 1$ m

$\alpha = 2.3$ hata/m $\cdot$ 1 m

$\alpha = 2.3$ hata

$$P(X=x) = e^{-\alpha}\frac{\alpha^x}{x!}$$

$$P(X=2) = e^{-2.3}\frac{2.3^2}{2!} = 0.265$$

b) 5 metrede 10 adet hata olma olasılığı nedir?

Y: 5 m.'deki hata sayısı

$\alpha = \lambda \cdot T = 2.3$ hata/m $\cdot$ 5 m

$\alpha = 11.5$ hata

$$P(Y=10) = e^{-11.5} \cdot \frac{(11.5)^{10}}{10!} = 0.1129$$

Binom Dağılımı ile Poisson Dağılımı Arasındaki ilişki.

Binomiyel bir rastgele değişken X'in parametreleri n ve p ise

$X \sim \text{Binom}(n, p)$

n büyük, p küçükse X'i Poisson dağılımı ile modelleyebiliriz

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$\lambda = n \cdot p$ sabit.

$n \to \infty$

$$p(x) = \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)/n^x}{x!/n^x} \cdot p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-x+1}{n}}{x!} \cdot n^x$$

$$= \frac{1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!} \cdot (np)^x \left(1-\frac{np}{n}\right)^{n-x}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right\} = 1$$

$\lambda = np$ olsun

$$\left(1-\frac{np}{n}\right)^{n-x} = \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n &= e^{-\lambda} \\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x &= 1\end{aligned}\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} p(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \qquad x > 0$$

Poisson — Ortalama ve Varyans

$$\mu_X = E(X) = \lambda T = \alpha$$

$$\sigma_X = V(X) = \lambda T = \alpha$$

Sürekli Rastgele Değişkenler

Bir rastgele değişkenin alabileceği değerler sayılamaz sonsuz sayıda noktadan oluşuyorsa (reel sayılar) bu Rastgele Değişken'e "sürekli R.D." denir.

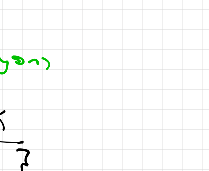
- X: bir bakır telin kalınlığı

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (O.Y.F)

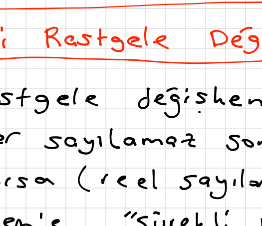
X bir sürekli R.D. ise, X'in OYF'si ($f(x)$) aşağıdaki şartları sağlamalıdır:

① $f(x) \geq 0$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$



③ $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$



- $P(X=x) = 0 \qquad \int_x^x f(x)\,dx = 0$

- Sınırların önemi yok yani:

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2)$

$= P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 < X < x_2)$

Örnek

X sürekli bir R.D. ve OYF'si

$$f(x) = \begin{cases} k, & 0 \leq x \leq 20 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

a) $k = ?$

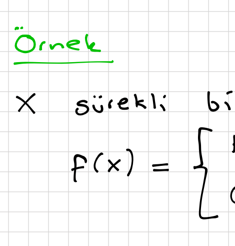
$$\int_0^{20} k\,dx = 1$$

$$kx\Big|_0^{20} = 1$$

$20k = 1$

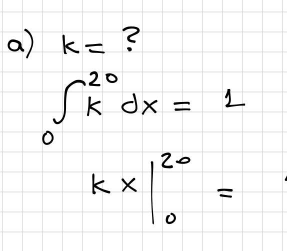
$k = 1/20$

b) $P(X < 10) = \int_0^{10}\frac{1}{20}\,dx$



$$= \frac{1}{20}x\Big|_0^{10} = \frac{1}{2}$$

Birikimli (Toplamsal, Kümülatif) Dağılım Fonksiyonu (BDF)



$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

$$/* \; F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du \; */$$

$$f(a) = \frac{d}{da}F(a)$$

BDF şu şartları sağlıyor:

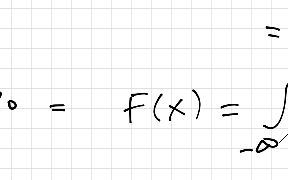
① $0 \leq F(x) \leq 1$

② $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

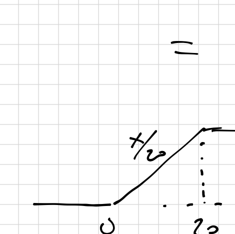
③ $F(x)$ azalmayan bir fonksiyondur yani:

$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$



$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

Örnek



BDF = ?

$x < 0 \Rightarrow F(x) = 0$

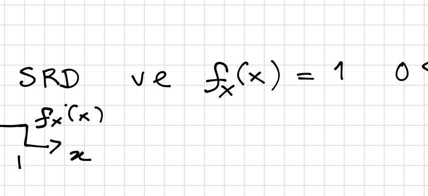
$0 < x < 20 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(u)\,du + \int_0^x f(u)\,du$

$$= \int_0^x \frac{1}{20}\,du$$

$$= \frac{1}{20}x$$

$x \geq 20 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,du + \int_0^{20}\frac{1}{20}\,du + \int_{20}^{x} 0\,du$

$$= 1$$



Sürekli R.D.'lerin ortalaması (Beklenen değeri)

Tanım: X, SRD ise beklenen değeri

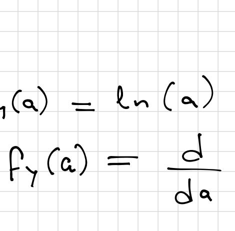
$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

Sürekli R.D.'lerin fonksiyonlarının beklenen değeri

X bir SRD ve $g(X)$, X'in bir fonksiyonu olsun. $E[g(X)] = ?$

Örnek

X bir SRD ve $f_X(x) = 1 \quad 0 < x < 1$



$Y = e^X$'in beklenen değeri?

Y'nin OYF $f_Y(y)$, BDF $F_Y(y)$

X'in OYF $f_X(x)$, BDF $F_X(x)$ olsun

$R_X = (0, 1) \longrightarrow R_Y = (e^0, e^1)$

$F_X(a) = P(X \leq a)$

$F_Y(a) = P(Y \leq a) = P(e^X \leq a)$

$= P(\ln(e^X) \leq \ln(a))$

$= P(X \leq \ln(a))$

$= F_X(\ln(a)) = \int_0^{\ln(a)} f_X(u)\,du$

$= \int_0^{\ln(a)} 1\,du$

$= \ln(a)$

$F_Y(a) = \ln(a)$

$$f_Y(a) = \frac{d}{da}\ln(a) = \frac{1}{a} \qquad 1 \leq a \leq e$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{y} \qquad 1 \leq y \leq e$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_1^e y \cdot \frac{1}{y}\,dy = e - 1$$

Tanım $g(X)$, X'in bir fonksiyonu olsun.

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x)\,dx$$

örnek önceki örnek.

$$E[e^X] = \int_0^1 e^x \cdot 1 \cdot dx = e - 1$$

Varyans

X bir SRD ise varyansı:

$$V(X) = Var(X) = \sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f(x)\,dx$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2]$$

$$= E[X^2] - 2\mu_X \underbrace{E[X]}_{\mu_X} + \mu_X^2$$

$$\boxed{\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2}$$

Örnek

$$f(x) = 0.05 \qquad 0 < x < 20$$

$$\mu_X = \int_0^{20} (x)(0,05)\,dx$$

$$= 0,05 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{20}$$

$$= 200 \times 0.05 = \underline{\underline{10}}$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2$$

$$= \int_0^{20} x^2 \cdot (0,05)\,dx - 10^2$$

$$= 0,05 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^{20} - 100$$

$$= 0,05 \cdot \frac{8000}{3} - 100$$

$$= \frac{400}{3} - \frac{300}{3} = \underline{\underline{\frac{100}{3}}}$$

Bazı özellikler:

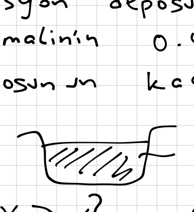
1. $E(X-\mu_X) = 0$
2. $E(aX+b) = a\,E(X) + b$
3. $V(aX+b) = a^2\,V(X)$

Örnek:

Bir benzin istasyonuna haftalık 1 kez benzin sağlanmaktadır. Bir hafta yapılan benzin satış (1000 ton olarak) X Rastgele değişkeni ile gösterilsin. öyle ki, X'in OYF'si

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

1 haftada yapılan benzin satışının istasyon deposundaki benzini bitirme ihtimalinin 0.01 olması için benzin deposunun kaç ton olması gerekir?



α: deponun hacmi

$$P\{X > \alpha\} = 0.01$$

$$\int_{\alpha}^{1} 5(1-x)^4\,dx = 0.01$$

$$\frac{5}{-5}(1-x)^5\Big|_{\alpha}^{1} = 0.01$$

$$(1-\alpha)^5 = 0.01$$

$$1-\alpha = \sqrt[5]{0.01}$$

$$\alpha = 1 - \sqrt[5]{0.01} = 0.6019 \text{ bin ton}$$

$\therefore$ Deponun 601.9 ton olması gerekir