Olasılık Teorisi ve İstatistik
Bütünleme Sınavı - Çözümler

İstanbul Üniversitesi - Cerrahpaşa
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü - Güz 2019

14.Ocak.2020 17:00

S1: X ve Y **SÜREKLİ** rastgele değişkenleri için "*Birleşik Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu*" aşağıdaki gibidir. Verilen soruları cevaplayınız.

$$f_{\mathrm{XY}}(x,y) = \begin{cases} \alpha \ \dfrac{x}{y} \ , & 0 < x \leq y < 1 \\ \quad 0 \ , & \text{diğer} \end{cases}$$

(a) `(10 puan)` α'nın değerini bulunuz.

Çözüm 1a:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{XY}}(x,y) \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \\ &= \int_{0}^{1} \int_{0}^{y} \alpha \ \frac{x}{y} \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \\ &= \int_{0}^{1} \alpha \ \frac{1}{y} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y \mathrm{d}y \\ &= \int_{0}^{1} \alpha \ \frac{y}{2} \ \mathrm{d}y \\ &= \frac{\alpha}{2} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \\ \alpha &= 4 \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

(b) `(10 puan)` $Y = y$ olma şartı altında X'in şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz. Fonksiyonun sırlarını yazmayı ihmal etmeyiniz.

Çözüm 1b:

$$f_{\mathrm{X|Y}}(x|y) = \frac{f_{\mathrm{XY}}(x,y)}{f_Y(y)}, \qquad f_Y(y) \neq 0 \text{ olma şartıyla}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^y \alpha \, \frac{x}{y} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\alpha}{2}\, y, \qquad 0 < y < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{X|Y}}(x|y) &= \frac{\alpha \, \frac{x}{y}}{\frac{\alpha}{2}\, y} \\ &= \frac{2x}{y^2} \qquad 0 < x < y < 1 \text{ aralığında} \end{aligned}$$

(c) `(10 puan)` X ve Y'nin korelasyon katsayısını bulunuz. (α'yı doğru bulmamış olma ihtimalini de düşünerek sonucu α cinsinden de yazınız) ($E(XY)$ korelasyon katsayısı değil!)

Çözüm 1c:

Korelasyon katsayısı:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{XY}} &= \frac{\sigma_{\mathrm{XY}}}{\sigma_X \, \sigma_Y} \\ \sigma_{\mathrm{XY}} &= E(XY) - \mu_X \mu_Y \\ \sigma_X^2 &= E(X^2) - \mu_X^2 \\ \sigma_Y^2 &= E(Y^2) - \mu_Y^2 \end{aligned}$$

formülleri ile veriliyor. Hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\mu_X = E(X) &= \int_0^1 \int_0^y x \ \alpha \ \frac{x}{y} \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \alpha \int_0^1 \ \frac{1}{y} \ \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^y \mathrm{d}y \\
&= \frac{\alpha}{3}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{\alpha}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_Y = E(Y) &= \int_0^1 \int_0^y y \ \alpha \ \frac{x}{y} \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \alpha \int_0^1 \ \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y \mathrm{d}y \\
&= \frac{\alpha}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{\alpha}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^1 \int_0^y x^2 \ \alpha \ \frac{x}{y} \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \alpha \int_0^1 \ \frac{1}{y} \ \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^y \mathrm{d}y \\
&= \frac{\alpha}{4}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \frac{\alpha}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_0^1 \int_0^y y^2 \ \alpha \ \frac{x}{y} \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \alpha \int_0^1 \ y \ \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{\alpha}{2}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \frac{\alpha}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \frac{\alpha}{16} - \left(\frac{\alpha}{9}\right)^2 \\
\sigma_Y^2 &= \frac{\alpha}{8} - \left(\frac{\alpha}{6}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(XY) = E(X) &= \int_0^1 \int_0^y x \, y \ \alpha \ \frac{x}{y} \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \alpha \int_0^1 \ \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^y \mathrm{d}y \\
&= \frac{\alpha}{3} \int_0^1 \ y^3 \ \mathrm{d}y \\
&= \frac{\alpha}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{XY}} &= \frac{\alpha}{12} - \frac{\alpha}{9} \ \frac{\alpha}{6} \\
&= \frac{\alpha}{12} - \frac{\alpha^2}{54}
\end{aligned}$$

Son olarak:

$$
\begin{aligned}
\rho_{\mathrm{XY}} &= \frac{\sigma_{\mathrm{XY}}}{\sigma_X\, \sigma_Y} \\
&= \frac{\frac{\alpha}{12} - \frac{\alpha^2}{54}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{16} - \left(\frac{\alpha}{9}\right)^2\right)\left(\frac{\alpha}{8} - \left(\frac{\alpha}{6}\right)^2\right)}}
\end{aligned}
$$

Bulduğumuz $\alpha = 4$ değerini yerine koyarsak

$$\rho_{\mathrm{XY}} = 0.686 \qquad \blacksquare$$

S2: Bir fabrikada elektronik pazarı için direnç üretilmektedir. Üretilen dirençlerin gerçek ölçülen değeri beklenen değerden %10'dan daha fazla hatalı çıkarsa o dirençler bozuk sayılmaktadır (Örneğin: 100 Ohmluk bir direnç ölçüldüğünde 90 ile 110 Ohm arasında bir değer çıkarsa sağlam, aksi takdirde bozuk sayılıyor). Bu dirençlerin değerlerinin normal dağılımı takip ettiğini varsayarsak:

(a) `(10 p)` Beklenen değeri 1000 Ohm olan bir kısım dirençten rasgele seçilen bir direncin sağlam sayılma ihtimalinin en az 0.90 olması için bu dirençlerin değerlerinin varyansı en fazla ne olmalıdır?

(b) `(10 p)` Beklenen değeri $\mathcal{R}$ Ohm olan bir kısım dirençten rasgele seçilen bir direncin sağlam sayılma ihtimalinin 0.27 olduğunu ve bu dirençlerin değerlerinin standart sapmasının 25 Ohm olduğunu varsayarsak $\mathcal{R}$ ne olmalıdır?

S3: Bir ayrık rasgele degişken X'in değer uzayı $R_X = \{2, 3, k\}$'dır. (Bu değerler harici değer alma ihtimalleri sıfırdır). Bu rasgele değişken için olasılık kütle fonksiyonu $\mathrm{p}(x) = 1/x$'tir.

(a) `(10 puan)` k'nın değerini bulunuz.

(b) `(10 puan)` X'in birikimli dağılım fonksiyonunu bulunuz ve grafik ile gösteriniz.

(c) `(10 puan)` X'in ortalama, varyans ve standart sapmasını bulunuz.

(d) `(10 puan)` X'in bir fonksiyonu $g(X) = X^2+1$ olarak verilmişse, $Y = g(X)$'in olasılık kütle fonksiyonunu bulunuz.

S4: Bir kitaptaki hata sayısı, X, Poisson sürecini takip ediyor ve kitabın sayfa başına ortalama λ hata vardır. Aşağıdaki soruları cevaplayınız:

(a) `(10 puan)` 500 sayfalık bir kitapta ortalama 250 hata varsa λ kaç olmalıdır?

(b) `(10 puan)` $\lambda = 0.25$ ise 3 sayfada hata sayısının 2'den az olma ihtimali edir?