BIMU2004
Olasılık Teorisi ve İstatistik
Bütünleme Sınavı Soru ve Çözümleri

İstanbul Üniversitesi - Cerrahpaşa
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü - Güz 2021

19 Ocak 2022 08:30-09:40

`Son güncelleme: 2022-01-24 11:19`

SORULAR ve ÇÖZÜMLER

S1: İki sürekli rastgele degişken X ve Y'nin Birleşik Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\ x\ \mathrm{e}^{-y} &, \quad 0 < x < y \quad x, y \in \mathbb{R} \\ 0 &, \quad \text{diğer} \end{cases}$$

(a) `(10 puan)` α'nın değerini açıklayarak bulunuz.

Çözüm 1a:

Zaten $f_Y(y)$ bize sonradan gerekeceği için önce ona bakalım:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^y f(x,y)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^y \alpha\ x\ \mathrm{e}^{-y}\ \mathrm{d}x \\ &= \alpha\ \mathrm{e}^{-y} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y \\ &= \frac{\alpha}{2}\ y^2\ \mathrm{e}^{-y} \qquad 0 < y < \infty \text{ aralığında} \end{aligned}$$

Burdan:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty \frac{\alpha}{2}\ y^2\ \mathrm{e}^{-y}\ \mathrm{d}y \\ &= \frac{\alpha}{2}\ \Gamma(3) \\ &= \frac{\alpha}{2}\ 2! \\ \alpha &= 1 \end{aligned}$$

(b) `(15 puan)` X, Y'in bir fonksiyonu $g(X,Y) = \frac{Y^2}{X}$ olarak verilmişse, $g(X,Y)$'in beklenen değerini açıklayarak bulunuz.

Çözüm (1b):

$$
\begin{aligned}
E[g(X,Y)] &= \int_0^\infty \int_0^y g(x,y) f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \int_0^y \frac{y^2}{x}\ x\ \mathrm{e}^{-y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty y^2\ \mathrm{e}^{-y} \int_0^y 1\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty y^3\ \mathrm{e}^{-y}\ \mathrm{d}y \\
&= \Gamma(4) \\
&= 3! \\
E[g(X,Y)] &= 6
\end{aligned}
$$

(c) `(15 puan)` $Y = y$ olma şartı altında X'in şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonunu açıklayarak bulunuz. Bulduğunuz formülün hangi aralıkta geçerli olduğunu göstermeyi unutmayınız.

Çözüm (1c):

$$
\begin{aligned}
f(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \\
&= \frac{x\ \mathrm{e}^{-y}}{\frac{1}{2}\ y^2\ \mathrm{e}^{-y}} \\
&= \frac{2x}{y^2} \qquad 0 < x < y < \infty \quad \text{aralığında}
\end{aligned}
$$

S2: Bir bakır teldeki hatalar Poisson sürecini takip ediyor ve 1 metre uzunluğundaki bir bakır telde ortalama 0.25 hata görülüyor. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

(a) `(10 puan)` 2.2 metrelik bir bakır telde 1, 2 veya 3 hata görülme ihtimali nedir? Açıklayarak hesaplayınız.

Çözüm (2a):

X: 2.2 metredeki hata sayısı, Poisson(α)

$$\begin{aligned}\lambda &= 0.25 \ hata/metre\\ L &= 2.2 \ metre\\ \alpha &= \lambda \times L\\ &= 2.2 \times 0.25\\ &= 0.55 \ hata\end{aligned}$$

Bize sorulan $P(1 \leq X \leq 3)$.

$$\begin{aligned}P(X = x) &= \mathrm{e}^{-0.55}\frac{0.55^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, ...\\ P(1 \leq X \leq 3) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)\\ &= \mathrm{e}^{-0.55}\big(0.55 + \frac{0.55^2}{2!} + \frac{0.55^3}{3!}\big)\\ &= 0.4206\end{aligned}$$

(b) `(10 puan)` Bir bakır telde bir uçtan başlayarak tel üzerinde giderek inceleme yapıldığında 3. hata bulununcaya kadar incelenen bakır tel uzunluğu ortalamada kaçtır? Açıklayarak hesaplayınız.

Çözüm 2a:

X: Bir bakır telde bir uçtan başlayarak tel üzerinde giderek inceleme yapıldığında 3. hata bulununcaya kadar incelenen bakır tel uzunluğu, Erlang dağılımı, $\lambda = 0.25$, $r = 3$.

$$\begin{aligned}E(X) &= \frac{r}{\lambda}\\ &= 3/0.25\\ &= 12 \ \ \text{metre}\end{aligned}$$

S3: İki tane kavanozdan birinde 2 beyaz 4 kırmızı top var, diğerinde 1 beyaz 1 kırmızı top var. Bu kavanozlardan ilkinden rastgele bir top çekilip diğer kavanoza koyuluyor. Sonra bu ikinci kavanozdan rastgele bir top çekilip ilk kavanoza konuyor. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

(a) `(10 puan)` İkinci kavanozdan beyaz top çekmiş olma olasılığı nedir? Açıklayarak çözünüz.

Çözüm 3a:

Olayları şöyle tanımlayalım:
B_1 : 1. kavanozdan beyaz çekilme olayı. $P(B_1) = \frac{1}{3}$.
B_2 : 2. kavanozdan beyaz çekilme olayı. $P(B_2|B_1) = \frac{2}{3}$, $P(B_2|B_1^C) = \frac{1}{3}$, O zaman:

$$
\begin{aligned}
P(B_2) &= P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|B_1^C)P(B_1^C) \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\
P(B_2) &= \frac{4}{9} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

(b) `(10 puan)` İkinci kavanozdan beyaz top çekilmiş olması şartı altında ilk kavanozdan ikinci kavanoza aktarılan topun beyaz olmuş olma ihtimali nedir? Açıklayarak çözünüz.

Çözüm 3b:

$$
\begin{aligned}
P(B_1|B_2) &= \frac{P(B_2|B_1)P(B_1)}{P(B_2)} \\
&= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} \\
&= \frac{1}{2} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

S4: Hilesiz bir para defalarca atılıyor. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

(a) `(10 puan)` 10000 atışta gelen tura sayısının 4955 ile 5040 arasında olma ihtimali yaklaşık olarak kaçtır? Lütfen gidiş yolunuzu da açıklayınız.

Çözüm 4a:

X: 10000 atıştan gelen tura sayısı; binom, $n = 10000$ ve $p = 0.5$.

$$
P(X = x) = \binom{n}{x} \, p^x \, (1-p)^{n-x}
$$

Bize sorulan $P(4955 \leq X \leq 5040)$. Bunu direkt olarak bulmak için:

$$
P(4955 \leq X \leq 5040) = \sum_{x=4955}^{5040} \binom{10000}{x} \, p^x \, (1-p)^{10000-x}
$$

$n = 10000$, $p = 0.5$ ve $np = 5000$ ve $n(1-p) = 5000$ olduğundan bunu direkt olarak hesaplamak yerine Standart Normal Dağılıma benzeterek çözebiliriz. Öncelikle X'in ortalama ve standart sapmasına bakalım:

$$
E(X) = \mu_X = n \, p = 5000
$$

$$
\sqrt{V(X)} = \sigma_X = \sqrt{n \, p \, (1-p)} = 50
$$

Burdan: $Z = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$ dönüşümünü uygulayarak:

$$\begin{aligned} P(4955 \leq X \leq 5040) &= P(\frac{4955-5000}{50} \leq Z \leq \frac{5040-5000}{50}) \\ &= P(-0.9 < Z < 0.8) \\ &= P(Z < 0.8) - \Big[1 - P(Z < -0.9)\Big] \\ &= 0.604 \end{aligned}$$

(b) `(10 puan)` Sırayla atılırken ilk atıştan itibaren 10. turaya kadar yapılan atış sayısının ortalama ve varyansı nedir? Açıklayarak hesaplayınız.

Çözüm 4b:

X: 10'ncu turaya kadar yapılan atış sayısı, Negatif Binom, $p = 0.5$ ve $r = 10$. Negatif Binom dağılımlı bir rastgele değişkenin ortalama ve varyansını biliyoruz.

$$\begin{aligned} \mu_X &= \frac{r}{p} = \frac{10}{0.5} = 20 \\ \sigma_X^2 &= \frac{r(1-p)}{p^2} = 20 \end{aligned}$$