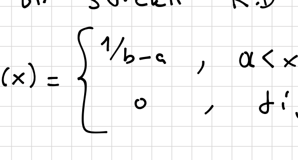
BAZI ÖZEL SÜREKLİ R.D'LER.

① Sürekli Birbiçimli Dağılım (Düzgün)

X bir sürekli R.D ve OYF'si

$$f(x) = \begin{cases} 1/b-a, & a<x<b \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$



ise, X'e "sürekli birbiçimli R.D" denir.

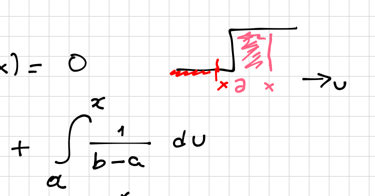
BDF $F(x)$

$x<a \rightarrow F(x) = 0$

$a<x<b \rightarrow F(x) = 0 + \int_a^x \frac{1}{b-a}\,du$

$$= \frac{u}{b-a}\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

$x \geqslant b \qquad F_x(x) = 1$



↳ Ortalama ve Varyans.

⊙ $\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

$$\mu_x = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$\boxed{\mu_x = \frac{b+a}{2}}$$

⊙ $\sigma_x^2 = V(X) = E[(X-\mu_x)^2]$

$$= E(X^2) - \mu_x^2$$

$$E(x^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{3(b-a)}(b^3-a^3)$$

$$= \frac{1}{3\cancel{(b-a)}}\cancel{(b-a)}(b^2+ab+a^2)$$

$$= \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4(b^2+ab+a^2) - 3(a+b)^2}{12}$$

$$= \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}$$

$$= \frac{b^2-2ab+a^2}{12}$$

$$\boxed{\sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

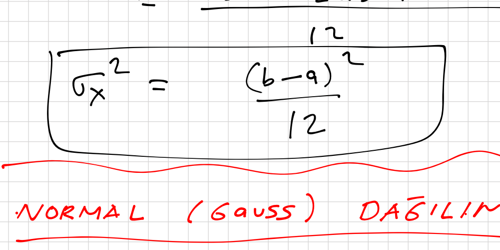
NORMAL (GAUSS) DAĞILIM

X bir sürekli R.D. ve $\underbrace{\mu_x=\mu}_{\text{ortalama}}$, $\underbrace{\sigma_x^2=\sigma^2}_{\text{varyans}}$ olsun

X normal dağılımlı ise, OYF'si:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<x<+\infty$$

olur.



Standart Normal RD'ler

Z, ortalaması $\mu=0$, varyansı $\sigma^2=1$ olan normal dağılımlı bir R.D. ise, Z bir "STANDART NORMAL R.D."dir.

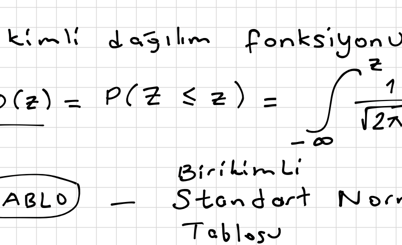
Z'nin OYF'si

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2} \qquad -\infty<z<+\infty$$

Birikimli dağılım fonksiyonu

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-u^2/2}\,du$$

TABLO — Birikimli Standart Normal Dağılım Tablosu



Örnek

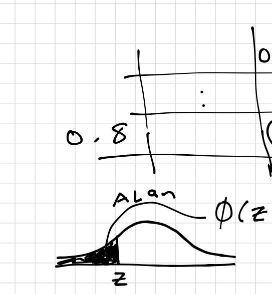
a) $P(Z \leq 1.53)$

$= \Phi(1.53)$

$= 0.9366$

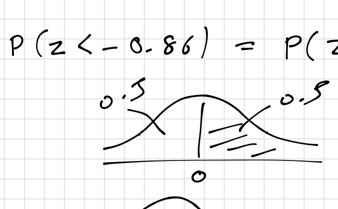
b) $P(Z>1.26) = 1 - \Phi(1.26)$

c) $P(z_1<Z<z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$

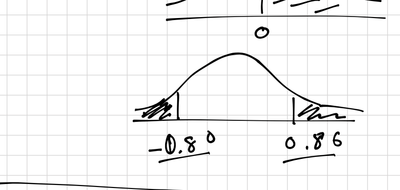


d) $P(z<-0.86) = P(z>0.86)$

$= 1 - \Phi(0.86)$



STANDARDİZASYON



Teorem $\quad X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \quad \text{bir standard normal R.D'dir.}$$

$X \rightarrow Z$ dönüşümüne "Standardizasyon" denir.

Örnek $\quad X \sim \text{Normal}(\sigma^2=4, \mu=10)$

$$P(X>13) = 1 - F_X(X<13)$$

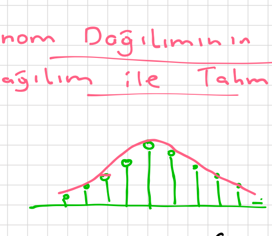
$$Z = \frac{X-10}{\sqrt{4}} = \frac{X-10}{2}$$

$$P\left(\frac{X-10}{2} > \frac{13-10}{2}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{3}{2}\right) = 1 - \underbrace{\Phi(1.5)}_{0.933}$$

$$P(X>13) = \boxed{0.067}$$

Binom Dağılımının Standart Normal Dağılım ile Tahmini



$X \sim \text{Binom}(n, p)$

$E(X) = np \qquad V(X) = \sigma_x^2 = np(1-p)$

Eğer $n \cdot p$ ve $n(1-p)$ büyük değerler alıyorsa Binom Dağılımlı R.D. Normal Dağılımla modellenebilir.

Tanım

$X \sim \text{Binom}(n,p)$

$n \cdot p \gg 10$ ve $n(1-p) \gg 10$

ise

$$Z = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

yaklaşık olarak standart normal bir R.D.'dir.

Örnek

$X \sim \text{Binom}(p=10^{-5}, n=16 \cdot 10^6)$

$P(X \leq 150) = ?$

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X \leq 150) = \sum_{k=0}^{150} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Normal dağılıma yaklaştırırsak:

$\mu = np = 160 > 10$

$n \cdot (1-p) \cong 1.6 \times 10^{+6} \cdot \underbrace{(1-10^{-5})}_{1} > 10$

$\sigma_x \cong np(1-p) \approx 160$

$$Z = \frac{X-160}{\sqrt{160}} \quad \text{bir standart normal RD'dir}$$

$$P(X \leq 150) = P\left(\frac{X-160}{\sqrt{160}} \leq \frac{150-160}{\sqrt{160}}\right)$$

$$= P(Z < -0.75)$$

$$= 1 - P(Z<0.75) = 0.227$$

$$= 1 - \Phi(0.75) =$$

Poisson → Standart Normal Dönüşümü

$X \sim \text{Poisson}(\alpha = \lambda T) \qquad \sigma_x^2 = \mu_x = \alpha$

$\alpha \gg 10$ ise

$$Z = \frac{X-\alpha}{\sqrt{\alpha}} \quad \text{yaklaşık olarak}$$

bir standart normal R.D.'dir.

Örnek

Bir yüzeydeki parçacık sayısı X olsun. m^2 başına ortalama 1000 parçacık bulunuyor. 1 m^2'de 950 veya daha az parçacık bulunma ihtimali nedir?

$X: \text{Poisson}(\alpha = 1000 \text{ parçacık}/m^2 \times 1m^2)$

$$P(X \leq 950) = \sum_{x=0}^{950} e^{-\alpha}\frac{\alpha^x}{x!}$$

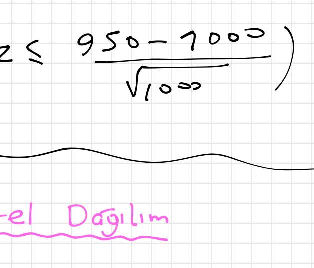
$$Z = \frac{X-1000}{\sqrt{1000}}$$

$$P\left(Z \leq \frac{950-1000}{\sqrt{1000}}\right) = \Phi(0.1581)$$

↓ Tablodan

Üstel Dağılım

Örnek $\quad$ Poisson Süreci



- t ekseni boyunca birim başına λ adet başarılı olay bulunuyor.
- X : Başlangıç noktasında ilk başarılı olay gerçekleşinceye kadar geçen (süre/uzunluk vb) $\boxed{t}$ miktarı
- N : 0 ile X arasındaki başarılı olay sayısı. $\sim \text{Poisson}(\alpha = \lambda x)$

$$P(N=0) = P(X \geqslant x) = e^{-\lambda x} \cdot \frac{(\lambda x)^0}{0!} \quad x>0$$

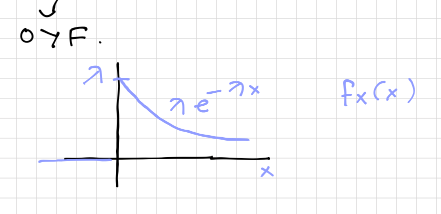
$$P(X \geqslant x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_x(x) \quad x>0$$

BDF $\quad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ olur.

$$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)$$

$$\boxed{f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x>0 \text{ için}}$$

OYF.



Tanım

X üstel dağılımlı bir R.D. ise ve parametresi λ ise, X'in OYF'si

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}} \quad \text{olur.}$$

Ortalama ve Varyans

$$E(X) = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

önce $E(X^n)$'i inceleyelim.

$$E(X^n) = \int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

Kısmi integral uygulayalım.

$$\int u \cdot dv = uv| - \int v\,du$$

$dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$

$v = -e^{-\lambda x}$

$u = x^n$

$du = n x^{n-1} dx$

$$E(X^n) = \int_0^\infty x^n \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \underbrace{-x^n e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty}_{(0-0)} + \int_0^\infty n x^{n-1} e^{-\lambda x}\,dx$$

$$+ \frac{n}{\lambda}\underbrace{\int_0^\infty \lambda x^{n-1} e^{-\lambda x}\,dx}_{E(X^{n-1})}$$

$$= \frac{n}{\lambda}\underbrace{\int_0^\infty \lambda x^{n-1} e^{-\lambda x}\,dx}_{E(X^{n-1})}$$

$$E(X^n) = \frac{n}{\lambda} E(X^{n-1})$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda} E(1) = \frac{1}{\lambda} \Big\} \text{ortalama}$$

$$E(X^2) = \frac{2}{\lambda} \cdot E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$