Olasılık Teorisi ve İstatistik.

Kitaplar:

* A.H. Kayran ve M.N. Yücel
  "Olasılık Teorisi ve Stokastik Süreçler", Papatya
* Sheldon M. Ross
  "... Olasılık ve İstatistiğe Giriş". Nobel yay.

Değerlendirme

- 1 Vize (%50)
- 1 Final (%50)

(+ Bonus ödevler)

---

* Örnek uzayları, Olaylar ve Rastgele Deney

Rastgele Deney Bir deney aynı şekilde tekrar edildiği halde farklı sonuçlar verebiliyorsa bu deneye rastgele deney denir.

– Kolaylık açısından bu derste "rastgele" kelimesini devamlı kullanmayacağız.

Örnek uzayı Bir deneyde oluşabilecek tüm sonuçlardan oluşan kümeye "örnek uzayı" denir. S ile gösterilir.

* Para atma deneyi } $S = \{\text{Yazı}, \text{Tura}\}$
* Zar atma deneyi $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
* Bir telin kalınlığının ölçümü

$S = \{x \mid x > 0,\ x \in \mathbb{R}^+\}$ ←

– Tellerin 10 mm'den daha ince olması imkansız ise

$S = \{x \mid x > 10\text{ mm},\ x \in \mathbb{R}\}$

– x'in 10 ile 15 mm arasında olması bekleniyorsa

$S = \{x \mid 15\text{mm} > x > 10\text{mm}\ x \in \mathbb{R}\}$

Tanım

* Sonlu veya sonsuz sayılabilir sayıda örnek noktadan oluşan bir örnek uzayına "ayrık örnek uzayı" denir.
* İçinde gerçel sayıların reel ekseni üzerinde en az bir aralığı bulunan örnek uzayına "sürekli örnek uzayı" denir.

TANIM

Örnek uzayının herhangi bir alt kümesine $\boxed{\text{olay}}$ denir.

örnek
Deney: Zar atma
örnek uzayı: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E = \{\text{Çift gelme olayı}\}$

$E = \{2, 4, 6\}$

Deney sonucu E kümesinden herhangi bir eleman ise "E olayı gerçekleşti" denir.

örnek
Deney: 2 zar atma deneyi

$S = \{11, 12, 13, \ldots, 55, 56\}$

E: aynı sayı gelme olayı

$E = \{11, 22, 33, 44, 55, 66\}$

(*) Temel olay

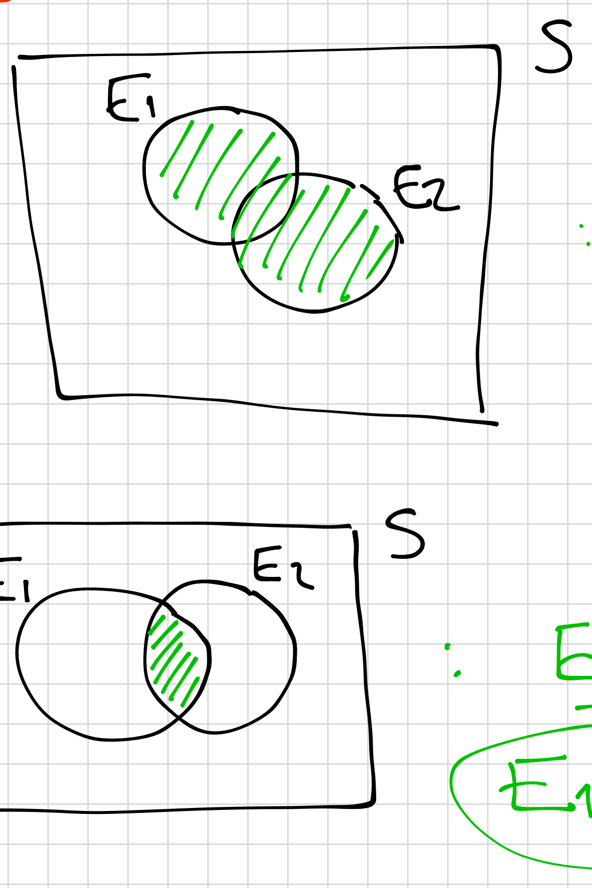
Bir olay ayrık örnek uzayının 1 noktasından oluşuyorsa buna $\boxed{\text{temel olay}}$ denir (* basit olay)

$S = \{11, 12, \ldots, 55, 56\}$

$O_1 = \{11\}$ $O_2 = \{12\}$ ... $O_{36} = \{66\}$

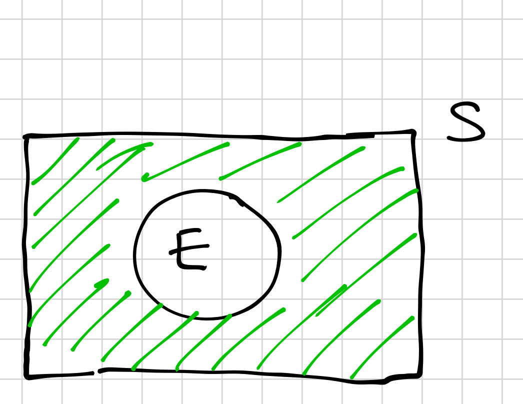
Küme İşlemleri

Birleşim



: $E_1 \cup E_2$

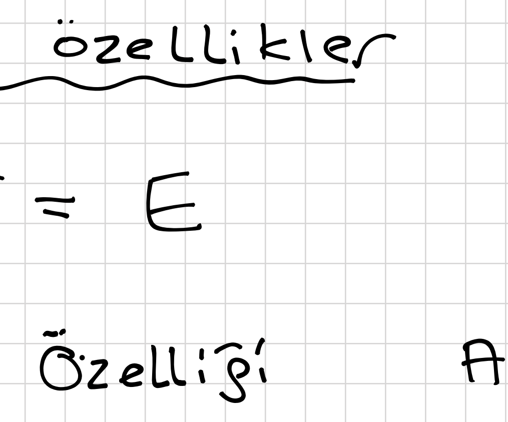
Kesişim



: $E_1 \cap E_2$

$E_1 E_2$

Tümleyen



E^c (* E', $\bar{E}$)

Bazı özellikler

* $(E^c)^c = E$
* Değişme Özelliği $AB = BA$
  $A \cup B = B \cup A$
* DeMorgan Kuralı
  $(AB)^c = A^c \cup B^c$
  $(A \cup B)^c = A^c B^c$
* Dağılma Özelliği
  $(AB) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
  $(A \cup B) \cap C = (AC) \cup (BC)$

Örnek

2 defa para atma deneyi (sıralı)

$S = \{YY, YT, TY, TT\}$

E_1: {en az 1 kez yazı gelme olayı}

$E_1 = \{\underline{Y}Y, \underline{Y}T, T\underline{Y}\}$

E_2: {2 kez yazı gelme olayı}

$E_2 = \{YY\}$

$E_3 = \emptyset$: İmkansız Olay (Impossible Event)

$E_4 = S$: Kesin Olay (Certain Event)

$E_5 = \{$E az 1 kez tura gelme olayı$\}$

$E_5 = \{YT, TY, TT\}$

$E_1 E_5 = \{YT, TY\}$

$E_1^c = \{TT\}$

Örnek Diyelim ki bir rastgele deney için örnek uzayı $S = \mathbb{R}^+$

$E_1 = \{x \mid 10 \leq x \leq 12\}$

$E_2 = \{x \mid 11 \leq x \leq 15\}$

$E_1 E_2 = \{x \mid 11 \leq x \leq 12\}$

$E_1^c = \{x \mid 0 < x < 10 \text{ ve } x > 12\}$

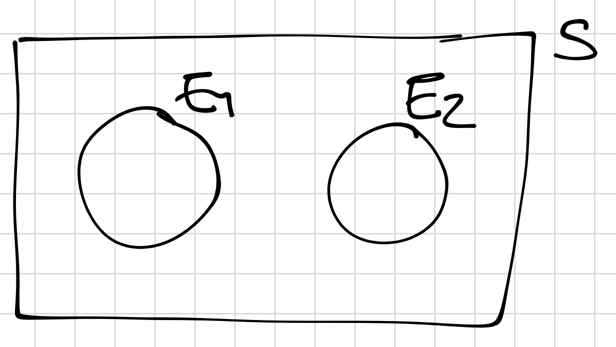
$E_1^c E_2 = \{x \mid 12 < x < 15\}$

(Birbirini Dışlayan) Bağdaşmaz Olaylar (Mutually Exclusive Events)

E_1 ve E_2 olaylarının her ikisinin birden oluşması mümkün değilse, yani

$$E_1 E_2 = \emptyset$$

ise E_1 ve E_2 "bağdaşmaz" olaylardır.



Not: Bağımsızlık ile karıştırmayalım.

OLASILIĞIN İZAHI

Olasılık: (Probability)
- Yapılan bir rastgele deneye ait bir olayın oluşma şansını sayıya dökmek için kullanılır.
- 0 ile 1 arasında değerler alır.

E olayının oluşma olasılığı

$P\{E\}$ /* $Pr\{E\}$ */

ile gösterilir

- $P\{E\} = 0$ $E = \emptyset$
- $P\{E\} = 1$ $E = S$

Eşit Olabilirlik

Bir deneyin örnek uzayına ait temel olayların oluşma şansı aynıysa bu temel olaylar "eşit olabilirli" kabul edilir.

Mesela bir örnek uzayı $\underline{P_1}, \underline{P_2}, \underline{P_3}, \ldots, \underline{P_N}$ eşit olabilirli temel olaylardan oluşuyorsa

$$P\{P_1\} = P\{P_2\} = \ldots = P\{P_N\} = \frac{1}{N}$$

OLASILIĞIN AKSİYOMLARI

Bir rastgele deneyde
S örnek uzayı
E bir olay ($E \subseteq S$)

1. $P\{S\} = 1$
2. $0 \leq P\{E\} \leq 1$
3. E_1 ve E_2 birbirini dışlayan olaylar ise, yani $E_1 E_2 = \emptyset$

$P\{E_1 \cup E_2\} = P\{E_1\} + P\{E_2\}$

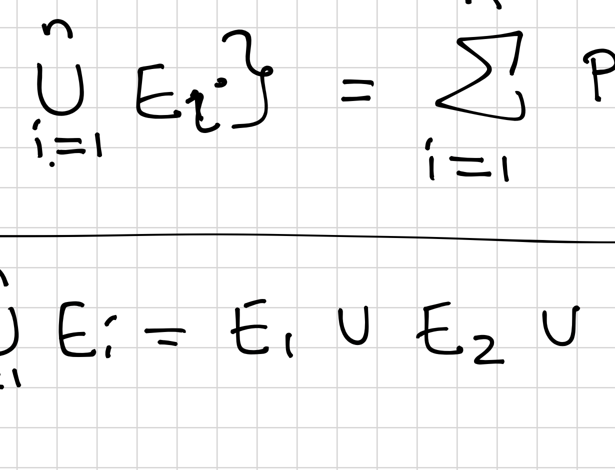
– Bazı sonuçlar –

* $P\{\emptyset\} = 0$
* $P\{E^c\} = 1 - P\{E\}$
* $E_1 \subset E_2 = P\{E_1\} \leq P\{E_2\}$

* Aksiyom 3'ü genelleştirelim

– $E_1, E_2, \ldots, E_n$ "çifter-çifter" bağdaşmaz olaylar ise

yani
$i \neq j$ iken $E_i E_j = \emptyset$ $1 \leq i, j \leq n$



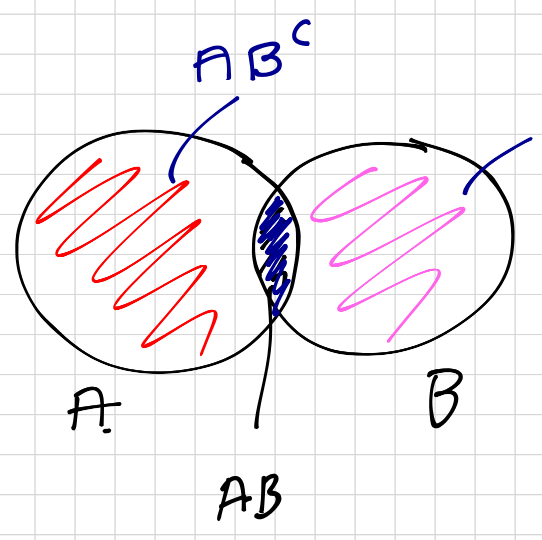
$$\boxed{P\{\bigcup_{i=1}^{n} E_i\} = \sum_{i=1}^{n} P\{E_i\}}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$$

Önerme (Toplam Kuralı)

Bir rastgele deneyde A ve B olayları

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}$$



$$A \cup B = AB^c \cup A^cB \cup AB$$

$$P\{A \cup B\} = \underbrace{P\{AB^c\} + P\{AB\}}_{P(A)} + \underbrace{P\{A^cB\}}_{P(B) - P(AB)}$$

$$P\{A\} = P\{AB^c\} + P\{AB\}$$

$$+ \quad P\{B\} = P\{A^cB\} + P\{AB\}$$

$$= P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}$$