Örnek

Bir benzin istasyonuna ortalamada saatte $\boxed{25}$ araç geliyor. İstasyon açıldıktan sonra gelen ilk aracın $\boxed{6.}$ dakikadan sonra gelme ihtimali nedir?

X : ilk araç gelinceye kadar geçen süre (saat)

$X \sim$ Üstel ($\lambda = 25$ araç/saat)

OYF: $f(x) = 25 \cdot e^{-25x}$, $x > 0$

$\int e^{-\alpha x} dx$

$$P\left(X > \frac{6}{60}\right) = P(X > 0.1) = \int_{0.1}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0.1}^{\infty} 25 \cdot e^{-25x}\,dx = -\frac{25}{25} e^{-25x}\Big|_{0.1}^{\infty}$$

$\lim_{x \to \infty} e^{-25x} = 0$

$$= 0 - (-e^{-2.5}) = e^{-2.5} = \underline{0.082}$$

b) %90 olasılıkla hiçbir aracın gelmeyeceği en küçük zaman aralığı nedir?

$$P(X > t) = 0.9 = \int_t^{\infty} 25 \cdot e^{-25}\,dx = 0.9$$

$$\Rightarrow e^{-25t} = 0.9$$

$$-25t = \ln(0.9)$$

$$t = -\frac{\ln(0.9)}{25} = 0.25 \text{ saat} = \underline{15 \text{ dk}}$$

Üstel Dağılımın Belleksizlik Özelliği

Negatif olmayan bir R.D.'de belleksizlik özelliği varsa aşağıdaki şart sağlanır:

$$P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s) \quad \forall s, t > 0$$

$$\frac{P(\{X > s+t\} \cap \{X > t\})}{P(X > t)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > t)}$$

X üstel dağılımlı ise

$$= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = \underset{\underset{1 - F_X(s)}{\parallel}}{e^{-\lambda s}} = P(X > s)$$

GAMA DAĞILIMI

Bir Poisson sürecinde (r) adet başarılı olay gerçekleşinceye kadar geçen süreç uzunluğu (zaman, uzaklık vb) X ise, X Gama dağılımlı bir R.D.'dir.

$X \sim$ Gama (r, λ)

/* r tamsayı ise bu dağılıma Erlang dağılımı da denir */

/* $r = 1 \Rightarrow X \sim$ Üstel (λ) */

X'in OYF'si:

$$f(x) = \frac{\lambda^r \cdot x^{r-1} \cdot e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}, \quad x > 0$$

Gama Fonksiyonu

Gama fonksiyonu } $\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$

$u = x^{r-1}$ $\quad dv = e^{-x} dx$

$du = (r-1) x^{r-2} dx$ $\quad v = -e^{x}$

$$\Gamma(r) = \underbrace{\left[-e^{-x} x^{r-1}\right]_0^{\infty}}_{0} + \int_0^{\infty} (r-1) x^{r-2} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(r) = (r-1) \cdot \Gamma(r-1) \quad r > 1$$

r tamsayı ise

$\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(2) = (2-1) \cdot 1 = 1$

$\Gamma(3) = (3-1) \cdot 1 = 2$

$\Gamma(4) = (4-1) \cdot (3-1) \cdot (2-1) \cdot 1$

$\vdots \quad =$

$$\boxed{\Gamma(r) = (r-1)!}$$

$\int_0^{\infty} x f(x) dx$

Ortalama ve Varyans

$$E(X) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} x \cdot \lambda^r \cdot x^{r-1} \cdot e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r)} \cdot \int_0^{\infty} (\lambda x)^r e^{-(\lambda x)} \frac{\lambda dx}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r)} \cdot \frac{\Gamma(r+1)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}(r) = \frac{r}{\lambda} = \mu_X$$

$$\sigma_X^2 = V(X) = E(X^2) - \mu_X^2$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\Gamma(r)} \cdot \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda^r \cdot x^{r-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} (x\lambda)^{r+1} \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-(\lambda x)} \cdot \left(\frac{d\lambda x}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r)} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \cdot \Gamma(r+2)$$

$$= \frac{(r+1) r}{\lambda^2}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{r^2 + r}{\lambda^2} - \frac{r^2}{\lambda^2} = \frac{r}{\lambda^2}$$

Genel Örnekler

Örnek 2021 Güz Vize S1

Elimizde 6 tane beyaz, 5 tane siyah kart var. Bu kartların üzerine her kartta farklı bir sayı olmak kaydıyla 1 ile 11 arasında sayılar yazıyoruz. X rastgele değişkeni Beyaz kartlara yazılan sayıların en küçüğü olsun. a) X'in değer uzayı nedir?

$$\underline{\underline{R_X}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

b) X'in Olasılık Kütle fonksiyonu nedir?

- 11 karta 11! farklı şekilde sayı yazılabilir. Beyaz kartlardan en küçük sayı x değerini alır.

- 6 tane beyaz kart. X bunlardan biri

- Diğer 5 beyaz kartta $(x+1)$ ile 11 arasında sayılar yazılabilir

$(11 - x) - 1 + 1 = 11 - x$ tane

Sayıyı 5 beyaz karta

$$\binom{11-x}{5} \cdot 5!$$

şekilde yazabiliriz

Geri kalan 5 siyah kartı kalan yerlere herhangi bir şekilde koyabiliriz. $\rightarrow 5!$ adet

$$P(X = x) = p(x) = \frac{6 \cdot \binom{11-x}{5} 5!\, 5!}{11!}, \quad 1 \leq x \leq 6$$

$$= \cdots$$

$$p(x) = \frac{\binom{11-x}{5}}{\binom{11}{6}} \quad 1 \leq x \leq 6$$

$\sum_{x=1}^{6} p(x) = 1$ olduğu görülür.

örnek X ayrık, OKF'si

$$P(X = x) = p(x) = \begin{cases} \alpha\, 2^{-|x|}, & x \in \{-2, 0, 1, 2\} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

a) $\alpha = ?$

$$\sum_{\forall x \in R_X} p(x) = 1$$

$$\alpha (2^{-2} + 1 + 2^{-1} + 2^{-2}) = 1$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

b) X'in birikimli dağılım fonksiyonunu açıklayarak bulunuz.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\substack{\forall x_i \in R_X \\ x_i \leq x}}^{x} p(x_i)$$

Buradan

$x < -2 \Rightarrow F(x) = 0$

$-2 \leq x < 0 \quad F(x) = p(-2) = \frac{1}{8}$

$0 \leq x < 1 \quad F(x) = p(-2) + p(0) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$

$1 \leq x < 2 \quad F(x) = \frac{5}{8} + p(1) = \frac{7}{8}$

$2 \leq x \quad F(x) = \frac{7}{8} + p(2) = \underline{\underline{1}}$

c) X'in bir fonksiyonu $g(x) = x^2 + 1$ olarak verilmişse $E[g(X)] = ?$

$$E[g(X)] = \sum_{\forall x \in R_X} g(x) \cdot p(x)$$

$$= [(-2)^2 + 1] \cdot \frac{1}{8} + (0^2 + 1) \cdot \frac{1}{2} + (1^2 + 1) \cdot \frac{1}{4} + (2^2 + 1) \cdot \frac{1}{8}$$

$$\boxed{E(g(X)) = \frac{9}{4}}$$

Örnek 2021 / Yıliçi

- Bir masada 14 adet kart var.
- Bu kartların 5'inin bir yüzü yeşil, 9'unun " " kırmızı
- Bir oyuncuya birer birer 2 kart veriyoruz.

X : 2 kart verildikten sonra oyuncudaki yeşil kart sayısı.

a) $R_X = ? = \{0, 1, 2\}$

b) $E(X) = ?$

Şu olayları tanımlayalım:

Y_1 : 1. kartın yeşil olma olayı

Y_2 : 2 " " " "

$X = 0$ olayı $Y_1^c Y_2^c$ olayına denktir.

$X = 1$ " $Y_1 Y_2^c \cup Y_1^c Y_2$ " "

$X = 2$ " $Y_1 Y_2$ olayına denktir.

$P(Y_1) = \frac{5}{14}$ $\quad P(Y_1^c) = \frac{9}{14}$

$P(Y_2 \mid Y_1) = \frac{4}{13}$ $\quad P(Y_2 \mid Y_1^c) = \frac{5}{13}$

$P(Y_2^c \mid Y_1) = \frac{9}{13}$ $\quad P(Y_2^c \mid Y_1^c) = \frac{8}{13}$

$$P(X = 0) = P(Y_1^c Y_2^c) = P(Y_2^c \mid Y_1^c) P(Y_1^c) = \frac{8}{13} \cdot \frac{9}{14} = \frac{36}{91}$$

$$P(X = 1) = P(Y_1 Y_2^c) + P(Y_1^c Y_2) = P(Y_2^c \mid Y_1) \cdot P(Y_1) + P(Y_2 \mid Y_1^c) P(Y_1^c) = \cdots = \frac{45}{91}$$

$$P(X = 2) = \cdots = \frac{10}{91}$$

$$E(X) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) = \frac{5}{7}$$