*

BIMU2004
Olasılık Teorisi ve İstatistik
Yıliçi Sınavı - Çözümler

İstanbul Üniversitesi - Cerrahpaşa
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü - Güz 2023

21 Kasım 2023 15:20 - 16:30

Son güncelleme: 2023-11-30 09:17

Numara	:	
İsim-Soyisim	:	
Sınava Girdiği Sınıf	:	
İmza	:	

Soru	S1 (30p)	S2 (10p)	S3 (30p)	S4 (30p)	Toplam
ÖÇ	1,2,3	1,2,3	1,2,3	1,2,3	
PÇ	1	2	3	4	
Puan					

LÜTFEN OKUYUN:

- Sınava sizin için belirlenen sınıfta giriniz.
- Bu sınavın süresi 70 dakikadır. Süre bittiğinde cevap kağıdını doldurmaya devam edenler kopya çekmiş sayılır.
- Lütfen soruları kurşun kalemle, TÜRKÇE, kısa ve anlaşılır olarak cevaplayınız. **Anlaşılmayan, muğlak ifadeler kullanmak**, kötü yazı yazmak notunuza negatif olarak etki edecektir.
- Sınavda 1 adet hesap makinası ve her iki yüzüne notlarınızı yazdığınız, üstüne isminiz ve numaranız yazılı 1 adet A4 sayfası kullanabilirsiniz. Bunların dışında her türlü defter, kitap, notlar, sözlük ve elektronik sözlük yasaktır.
- Materyalin paylaşılması yasaktır. **Hesap makinası ve silgi paylaşmak kopya sayılacaktır!**
- Bilgisayar, PDA, cep telefonu türünden elektronik cihazlar kullanmak yasaktır.
- Soruları çözmeye başlamadan lütfen okuyun.
- Soru, cevap ve A4 formül kağıtlarına isim ve numaranızı yazınız.
- Soru, cevap ve A4 formül kağıtlarınızı çıkarken cevap kağıdınızla beraber teslim ediniz.
- Bu sınavda toplam 100 puanlık soru vardır.
- **SINAVDA KOPYA ÇEKENLER, KOPYA VERENLER VE BUNLARA TEŞEBBÜS EDENLER SINAVDAN "0" ALACAKTIR VE DEKANLIĞA ŞİKAYET EDİLECEKLERDİR!**.
- Çözümlerinizi ondalık sayı olarak verecekseniz noktadan sonra en az 3 basamak hassasiyet olmalıdır.
- Çözümleriniz kesirli ise sadeleştirin, mesela sonuç $\frac{2}{4}$ ise $\frac{1}{2}$ yapılmalıdır.

Başarılar. (Mustafa Dağtekin)

SORULAR ARKA SAYFADA

SORULAR

S1: 2 adet torbadan:

- Torba 1'de 2 adet kırmızı, 6 adet siyah top,
- Torba 2'de 3 adet kırmızı, 4 adet siyah top,

bulunuyor. Sırasıyla aşağıdaki adımlar uygulanıyor:

1. adım: Torba 1'den rastgele 1 adet top çekilip Torba 2'ye konuyor.

2. adım: Torba 2'den rastgele 1 adet top çekilip Torba 1'e konuyor.

3. adım: Torba 1'den rastgele 1 adet top çekiliyor.

Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir. Virgülden sonra en az 4 basamak yazın.)

(a) `(10 puan)` 3. adımda 1. torbadan çekilden topun kırmızı olma ihtimali nedir?

Çözüm 1a:

Olay tanımları yapalım:

- K_i: i. adımda çekilen topun kırmızı olması
- K_i^C: i. adımda çekilen top siyah olması

$P\{K_i\} = 1 - P\{K_i^C\}$ olduğu aşikardır. Bize $P\{K_3\}$ soruluyor.

Olasılıkları hesaplayalım:

$$P\{K_1\} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} P\{K_2\} &= P\{K_2|K_1\}P\{K_1\} + P\{K_2|K_1^C\}P\{K_1^C\} \\ &= \frac{4}{8}\cdot\frac{2}{8} + \frac{3}{8}\cdot\frac{6}{8} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{9}{32} \\ &= \frac{13}{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{K_3\} &= P\{K_3|K_1K_2\}P\{K_1K_2\} + P\{K_3|K_1K_2^C\}P\{K_1^CK_2\} \\ &\quad + P\{K_3|K_1^CK_2^C\}P\{K_1^CK_2^C\} + P\{K_3|K_1^CK_2\}P\{K_1^CK_2\} \\ &= P\{K_3|K_1K_2\}P\{K_2|K_1\}P\{K_1\} + P\{K_3|K_1K_2^C\}P\{K_2^C|K_1\}P\{K_1\} \\ &\quad + P\{K_3|K_1^CK_2\}P\{K_2|K_1^C\}P\{K_1^C\} + P\{K_3|K_1^CK_2^C\}P\{K_2^C|K_1^C\}P\{K_1^C\} \end{aligned}$$

$*$

$$= \frac{2}{8}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{2}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{2}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{6}{8}+\frac{2}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{6}{8}$$

$$= \frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{27}{256}+\frac{15}{128}$$

$$\boxed{P\{K_3\} = \frac{69}{256} = 0.2696 \quad \blacksquare}$$

(b) `(10 puan)` 2. adım sonunda her iki torbadaki renk dağılımının deney başındakiyle aynı olma ihtimali nedir?

Çözüm 1b:

Her iki adımda da aynı renk top çekmeliyiz. Bize sorulan $P\{K_2K_1\} + P\{K_2^C K_1^C\}$ olasılığıdır.

Olasılıkları hesaplayalım:

$$P\{K_2K_1\} = P\{K_2|K_1\}P\{K_1\}$$

$$= \frac{4}{8}\cdot\frac{2}{8}$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$P\{K_2^C K_1^C\} = P\{K_2^C|K_1^C\}P\{K_1^C\}$$

$$= \frac{5}{8}\cdot\frac{6}{8}$$

$$= \frac{15}{31}$$

$$\boxed{P\{K_2K_1\} + P\{K_2^C K_1^C\} = \frac{1}{8} + \frac{15}{32} = \frac{19}{32} = 0.59375 \quad \blacksquare}$$

(c) `(10 puan)` 3. adımda çekilen top siyah ise 1. adımda çekilen topun siyah olmuş olma ihtimali nedir?

Çözüm 1c:

Bize sorulan $P\{K_1^C|K_3^C\}$ olasılığıdır.

Bayes kuralını kullanalım:

$$P\{K_1^C|K_3^C\} = \frac{P\{K_3^C K_1^C\}}{P\{K_3^C\}}$$

şeklindedir. K_3 olayı K_1 ve K_2 olaylarına bağlı olduğundan bunu aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned} P\{K_3^C K_1^C\} &= P\{K_3^C K_2 K_1^C\} + P\{K_3^C K_2^C K_1^C\} \\ &= P\{K_3^C | K_1^C K_2\} P\{K_1^C K_2\} + P\{K_3^C | K_1^C K_2^C\} P\{K_1^C K_2^C\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{K_3^C | K_1^C K_2\} &= \frac{3}{8} \\ P\{K_3^C | K_1^C K_2^C\} &= \frac{6}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{K_1^C K_2\} &= P\{K_2 | K_1^C\} P\{K_1^C\} \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{8} \\ &= \frac{18}{64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{K_1^C K_2^C\} &= P\{K_2^C | K_1^C\} P\{K_1^C\} \\ &= \frac{5}{8} \cdot \frac{6}{8} \\ &= \frac{30}{64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{K_3^C K_1^C\} &= \frac{3}{8} \cdot \frac{18}{64} + \frac{6}{8} \cdot \frac{30}{64} \\ &= \frac{117}{256} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{K_3^C\} &= 1 - P\{K_3\} \\ &= 1 - \frac{69}{256} \\ &= \frac{187}{264} \\ P\{K_1^C | K_3^C\} &= \frac{\frac{117}{256}}{\frac{187}{256}} \end{aligned}$$

*

$$\boxed{P\{K_1^C | K_3^C\} = 0.6257 \quad \blacksquare}$$

Böylece:

S2: `(10 puan)` Bir düğünde misafirler yuvarlak masalara oturtulacaktır ve önceden kimin nereye oturacağı daha önceden belirlenmektedir. 10 kişilik bir masaya 5 çift oturtulacaktır. Çiftlerin yanyana oturması şartıyla kaç farklı oturma düzeni vardır. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir. Virgülden sonra en az 4 basamak yazın.)

Çözüm 2:

1 çifti, hangi çiftin sağda, hangisinin solda olduğuna bakmaksızın herhangi bir yere oturtalım. Geriye kalan 8 çifti kendi aralarındaki sırasına bakmadan 4! şekilde oturtabiliriz. Ayrıca her çift kendi arasında 2! şekilde oturabilir. Böylece toplam oturma düzeni sayısı:

$$\boxed{4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! = 768 \quad \blacksquare}$$

S3: Bir AYRIK rastgele degişken olan X'in Olasılık Kütle Fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir. Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir. Virgülden sonra en az 4 basamak yazın.)

$$\mathsf{p}(x) = \begin{cases} \alpha\ x \left[\dfrac{1}{\ln(x)}\right]^x & , \quad 2 \le x \le 5\ , \quad x \in \mathbb{Z}^+ \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

(a) `(10 puan)` $\alpha \approx 0.12545$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 3a:

$$\sum_{x=2}^{5} \mathsf{p}(x) = 1$$

$$\sum_{x=2}^{5} \alpha x \left[\frac{1}{\ln(x)}\right]^x = 1$$

$$\alpha \sum_{x=2}^{5} x \left[\frac{1}{\ln(x)}\right]^x = 1$$

$$\alpha \left(2\left[\frac{1}{\ln(2)}\right]^2 + 3\left[\frac{1}{\ln(3)}\right]^3 + 4\left[\frac{1}{\ln(4)}\right]^4 + 5\left[\frac{1}{\ln(5)}\right]^5\right) = 1$$

*

$$\alpha\left(2\left[\frac{1}{0.693147}\right]^2+3\left[\frac{1}{1.09861}\right]^3+4\left[\frac{1}{1.38629}\right]^4+5\left[\frac{1}{1.60944}\right]^5\right)=1$$

$$\alpha\,(2\cdot 0.828535+3\cdot 0.917431+4\cdot 0.520342+5\cdot 0.195312)=1$$

$$\alpha\,(1.65707+2.75229+2.08137+0.976562)=1$$

$$\alpha\,(7.46729)=1$$

$$\alpha=\frac{1}{7.46729}$$

$$\boxed{\alpha\approx 0.12545 \quad \blacksquare}$$

(b) `(10 puan)` X'in varyansı nedir?

Çözüm 3b:

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2$$

$$E[X]=\alpha\left(2\cdot 2\left[\frac{1}{0.693147}\right]^2+3\cdot 3\left[\frac{1}{1.09861}\right]^3+4\cdot 4\left[\frac{1}{1.38629}\right]^4+5\cdot 5\left[\frac{1}{1.60944}\right]^5\right)$$

$$=\alpha\,(2\cdot 2\cdot 0.828535+3\cdot 3\cdot 0.917431+4\cdot 4\cdot 0.520342+5\cdot 5\cdot 0.195312)$$

$$=\alpha\,(3.31414+8.25693+8.32547+4.88281)$$

$$=\alpha\,(24.7794)$$

$$=2.729820$$

$$E[X^2]=\alpha\left(2^2\cdot 2\left[\frac{1}{0.693147}\right]^2+3^2\cdot 3\left[\frac{1}{1.09861}\right]^3+4^2\cdot 4\left[\frac{1}{1.38629}\right]^4+5^2\cdot 5\left[\frac{1}{1.60944}\right]^5\right)$$

$$=\alpha\left(2^2\cdot 2\cdot 0.828535+3^2\cdot 3\cdot 0.917431+4^2\cdot 4\cdot 0.520342+5^2\cdot 5\cdot 0.195312\right)$$

$$=\alpha\,(5.25707+22.3308+33.2038+24.4141)$$

$$=\alpha\,(85.2058)$$

$$=8.26935$$

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2$$

$$=8.26935-2.729820^2$$

*

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = 0.81743 \quad \blacksquare}$$

(c) `(10 puan)` Y rastgele değişkeni $Y = (X-3)^2$ olarak verilmişse, Y'in olasılık kütle fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm 3c:

Y'nin OKF'si $P\{Y = Y\} = \mathsf{p}_Y(y)$, X'in OKF'si $P\{X = X\} = \mathsf{p}_X(x)$ olsun diyelim. Y'yi X'in bir fonksiyonu, $g(X) = Y = (X-3)^2$ olacak şekilde yazalım. X'in değer uzayındaki bütün noktaların $g(X)$'ye göre değerlerini bulalım:

X	$Y = g(X) = (X-3)^2$
2	1
3	0
4	1
5	4

Burdan Y'nin değer uzayı $\{0, 1, 4\}$ olur. Y'nin OKF'si şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\mathsf{p}_Y(0) &= P\{Y = 0\} \\
&= P\{X = 3\} \\
&= \mathsf{p}_X(3) \\
&= \alpha \cdot 3 \left[\frac{1}{\ln(3)}\right]^3 \\
&= 0.12545 \cdot 3 \cdot 0.917431 \\
&= 0.34375
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{p}_Y(1) &= P\{Y = 1\} \\
&= P\{X = 2\} + P\{X = 4\} \quad \text{(çünkü her iki değerde de } g(X) \text{ aynı).} \\
&= \mathsf{p}_X(2) + \mathsf{p}_X(4) \\
&= \alpha \cdot 2 \left[\frac{1}{\ln(2)}\right]^2 + \alpha \cdot 4 \left[\frac{1}{\ln(4)}\right]^4 \\
&= 0.12545 \cdot 2 \cdot 0.828535 + 0.12545 \cdot 4 \cdot 0.520342 \\
&= 0.21875 + 0.34375 \\
&= 0.5625
\end{aligned}$$

*

$$
\begin{aligned}
\mathsf{p}_Y(4) &= P\{Y=4\} \\
&= P\{X=5\} \\
&= \mathsf{p}_X(5) \\
&= \alpha \cdot 5 \left[\frac{1}{\ln(5)}\right]^5 \\
&= 0.12545 \cdot 5 \cdot 0.195312 \\
&= 0.12109
\end{aligned}
$$

Şu şekilde formal olarak yazılabilir:

$$
\boxed{\mathsf{p}_Y(y) = \begin{cases} 0.34375 \;, & y=0 \\ 0.5625 \;, & y=1 \\ 0.12109 \;, & y=4 \\ 0 \;, & \text{diğer} \end{cases} \qquad \blacksquare}
$$

S4: Bir kişi arabasıyla hedefine ulaşmak için iki yoldan birisini seçecektir. Bu yollarda bulunan benzin istasyonlarının sayısının Poisson sürecini takip ettiğini varsayalım ve 1. yolda **kilometre başına** ortalamada 0.05 adet yakıt istasyonu, 2. yolda **kilometre başına** ortalama 0.1 adet yakıt istasyonu bulumaktadır. Bu kişinin arabasında mevcut yakıt 1. yoldan giderse 20 km, 2. yoldan giderse 15 km kadar yeterli olmaktadır. Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir. Virgülden sonra en az 4 basamak yazın.)

(a) `(15 puan)` Bu kişinin yakıtı bitmeden bir yakıt istasyonuna varma olasılığını yüksek tutmak için hangi yoldan gitmelidir?

Çözüm 4a:

- X_1: 1. yoldan giderse 20 km içinde en az 1 yakıt istasyonu olma sayısı. Bu durumda, $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ olur. $\lambda_1 = 0.05$ istasyon/km $\alpha_1 = \lambda_1 \cdot 20 = 1$ olur. Bu durumda bizim istediğimiz $P\{X_1 \geq 1\}$ olasılığıdır. Bu olasılığı hesaplamak için $P\{X_1 = 0\}$ olasılığını bulup 1'den çıkaracağız. $P\{X_1 = 0\}$ olasılığını bulmak için Poisson dağılımının OKF'sini kullanacağız:

$$
\mathsf{p}_{X_1}(x) = \frac{\alpha_1^x e^{-\alpha_1}}{x!}
$$

$$
\mathsf{p}_{X_1}(0) = \frac{\alpha_1^0 e^{-\alpha_1}}{0!}
$$

*

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1 \cdot e^{-1}}{1} \\
&= \frac{1}{e} \\
P\{X_1 = 0\} &= \frac{1}{e} \\
P\{X_1 \geq 1\} &= 1 - P\{X_1 = 0\} \\
&= 1 - \frac{1}{e} \\
&= 0.632121
\end{aligned}
$$

- X_2: 2. yoldan giderse 15 km içinde en az 1 yakıt istasyonu olma sayısı. Bu durumda $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ olur. $\lambda_2 = 0.1$ istasyon/km $\alpha_2 = \lambda_2 \cdot 15 = 1.5$ olur. Bu durumda bizim istediğimiz $P\{X_2 \geq 1\}$ olasılığıdır. Bu olasılığı hesaplamak için $P\{X_2 = 0\}$ olasılığını bulup 1'den çıkaracağız. $P\{X_2 = 0\}$ olasılığını bulmak için Poisson dağılımının OKF'sini kullanacağız:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{p}_{X_2}(x) &= \frac{\alpha_2^x e^{-\alpha_2}}{x!} \\
\mathsf{p}_{X_2}(0) &= \frac{\alpha_2^0 e^{-\alpha_2}}{0!} \\
&= \frac{1.5^0 \cdot e^{-1.5}}{1} \\
&= \frac{1}{e^{1.5}} \\
P\{X_2 = 0\} &= \frac{1}{e^{1.5}} \\
P\{X_2 \geq 1\} &= 1 - P\{X_2 = 0\} \\
&= 1 - \frac{1}{e^{1.5}} \\
&= 0.776869
\end{aligned}
$$

Görülüyor ki 2. yol seçilmelidir çünkü:

$$
P\{X_2 \geq 1\} > P\{X_1 \geq 1\}
$$

*

$$0.776869 > 0.632121$$

2. yol seçilmelidir. ■

(b) `(15 puan)` Diyelim ki 3. bir yolda da **kilometre başına** ortalama λ_3 adet yakıt istasyonu düşüyor. Bu kişi bu yolu seçerse yakıtı 30 km sonra bitiyor. Bu kişinin bir yakıt istasyonuna yakıtı bitmeden yetişme olasılığı 0.9 ise λ_3 değeri kaç olmalıdır?

Çözüm 4b:

- X_3: 3. yoldan giderse 30 km içinde yakıt istasyonu sayısı. Bu durumda $X_3 \sim \text{Poisson}(\alpha = 30\lambda_3)$ olur. λ_3 değeri bize soruluyor. Bu durumda bizim istediğimiz $P\{X_3 \geq 1\}$ olasılığıdır. Bu olasılığı hesaplamak için $P\{X_3 = 0\}$ olasılığını bulup 1'den çıkaracağız. $P\{X_3 = 0\}$ olasılığını bulmak için Poisson dağılımının OKF'sini kullanacağız:

$$\begin{aligned}
\mathsf{p}_{X_3}(x) &= \frac{\alpha_3^x e^{-\alpha_3}}{x!} \\
\mathsf{p}_{X_3}(0) &= \frac{\alpha_3^0 e^{-\alpha_3}}{0!} \\
&= \frac{1 \cdot e^{-\alpha_3}}{1} \\
P\{X_3 = 0\} &= \frac{1}{e^{\alpha_3}} \\
P\{X_3 \geq 1\} &= 1 - P\{X_3 = 0\} \\
&= 1 - \frac{1}{e^{\alpha_3}} \\
&= 0.9
\end{aligned}$$

Burdan:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{e^{\alpha_3}} &= 0.9 \\
\frac{1}{e^{\alpha_3}} &= 0.1 \\
e^{\alpha_3} &= 10 \\
\alpha_3 &= \ln(10) \\
\alpha_3 &\approx 2.30259
\end{aligned}$$

$*$

$$\boxed{\lambda_3 = \frac{\alpha_3}{30} \approx 0.07675 \quad \text{istasyon/km} \qquad \blacksquare}$$

LÜTFEN SINAV KAĞIDI ve A4 KAĞITLARINIZA İSİM YAZARAK CEVAP KAĞIDIYLA BERABER TESLİM EDİNİZ.