BIMU2004
Olasılık Teorisi ve İstatistik
Final - Çözümler

İstanbul Üniversitesi - Cerrahpaşa
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü - Güz 2023

10 Ocak 2024 15:20 - 16:30

Son güncelleme: 2024-01-23 17:59

LÜTFEN OKUYUN:

- Sınava sizin için belirlenen sınıfta giriniz.
- Bu sınavın süresi 70 dakikadır. Süre bittiğinde cevap kağıdını doldurmaya devam edenler kopya çekmiş sayılır.
- Lütfen soruları kurşun kalemle, TÜRKÇE, kısa ve anlaşılır olarak cevaplayınız. **Anlaşılmayan, muğlak ifadeler kullanmak**, kötü yazı yazmak notunuza negatif olarak etki edecektir.
- Sınavda 1 adet hesap makinası ve her iki yüzüne notlarınızı yazdığınız, üstüne isminiz ve numaranız yazılı 1 adet A4 sayfası kullanabilirsiniz. Bunların dışında her türlü defter, kitap, notlar, sözlük ve elektronik sözlük yasaktır.
- Materyalin paylaşılması yasaktır. **Hesap makinası ve silgi paylaşmak kopya sayılacaktır!**
- Bilgisayar, PDA, cep telefonu türünden elektronik cihazlar kullanmak yasaktır.
- Soruları çözmeye başlamadan lütfen okuyun.
- Soru, cevap ve A4 formül kağıtlarına isim ve numaranızı yazınız.
- Soru kağıtlarınızı çıkarken cevap kağıdınızla beraber teslim ediniz. **A4 Formül kağıtlarınız sizde kalsın.**
- Bu sınavda toplam 100 puanlık soru vardır.
- **SINAVDA KOPYA ÇEKENLER, KOPYA VERENLER VE BUNLARA TEŞEBBÜS EDENLER SINAVDAN "0" ALACAKTIR VE DEKANLIĞA ŞİKAYET EDİLECEKLERDİR!**.
- **Çözümlerinizde ne yaptığınızı adım adım göstermeniz ve yaptığınız işlemlerde kullandığınız formülleri yazmanız gerekiyor. Sadece işlem yaparsanız cevap doğru dahi olsa kabul edilmez.**
- Çözümlerinizi ondalık sayı olarak verecekseniz noktadan sonra en az 3 basamak hassasiyet olmalıdır.
- Çözümleriniz kesirli ise sadeleştirin, mesela sonuç $\frac{2}{4}$ ise $\frac{1}{2}$ yapılmalıdır.
- Birikimli Standart Normal Dağılım Tablosu gerektiren sorularda cevabı $\phi(z)$ olarak yazınız.

Başarılar. (Mustafa Dağtekin)

Bazı Formüller

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{m+1}}{1-\alpha} \qquad \lim_{x\to\infty} x\, \mathrm{e}^{-cx} = 0, \quad c>0 \qquad \Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1}\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$$

SORULAR ARKA SAYFADA

SORULAR

S1: Bir sürekli rastgele değişken olan X için aşağıdaki ifadenin doğru olduğunu varsayalım:

$$\mathsf{P}\left\{X \geq b/2\right\} = (b+1)\ \mathrm{e}^{-\alpha b}, \qquad b \geq 0$$

Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir. Virgülden sonra en az 4 basamak yazın.)

(a) `(10 puan)` α'nın değerinin 1 olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1a:

Önce şu değişimi yapalım: $b = 2x$ ve $x \geq 0$ olsun. Bu değişim ile ifade şu hale gelir:

$$\mathsf{P}\left\{X \geq x\right\} = (2x+1)\ \mathrm{e}^{-2\alpha x}, \qquad x \geq 0$$

Bildiğiniz üzere X'in birikimli yoğunluk fonksiyonu şu şekilde ifade edilir:

$$F_X(x) = \mathsf{P}\left\{X \leq x\right\} = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$$

Bu da:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - \mathsf{P}\left\{X \geq x\right\} \\ &= 1 - (2x+1)\ \mathrm{e}^{-2\alpha x}, \qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

Olur. X'in Olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için $F_X(x)$'in türevini alalım:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ F_X(x) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ \left[1 - (2x+1)\ \mathrm{e}^{-2\alpha x}\right] \\ &= 0 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ \left[(2x+1)\ \mathrm{e}^{-2\alpha x}\right] \\ &= \left[-2\ \mathrm{e}^{-2\alpha x} - (2x+1)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ \mathrm{e}^{-2\alpha x}\right] \\ &= \left[-2\ \mathrm{e}^{-2\alpha x} - (2x+1)\ (-2\alpha)\ \mathrm{e}^{-2\alpha x}\right] \\ &= \left[-2\ \mathrm{e}^{-2\alpha x} + 2\alpha(2x+1)\ \mathrm{e}^{-2\alpha x}\right] \\ f_X(x) &= 4\alpha x\ \mathrm{e}^{-2\alpha x} + (2\alpha - 2)\ \mathrm{e}^{-2\alpha x}, \qquad x > 0 \end{aligned}$$

OYF'nin özeliklerinden biri:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ \mathrm{d}x = 1$$

olmalı. Ayrıca bir değişken dönüşümü yapalım:

$$y = 2\alpha x$$

dersek:

$$\mathrm{d}y = 2\alpha\ \mathrm{d}x$$

olur.

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\infty} \left[4\alpha x\ \mathrm{e}^{-2\alpha x} + (2\alpha - 2)\ \mathrm{e}^{-2\alpha x}\right]\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\infty} 4\alpha x\ \mathrm{e}^{-2\alpha x}\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} (2\alpha - 2)\ \mathrm{e}^{-2\alpha x}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\infty} 2y\ \mathrm{e}^{-y}\ \frac{1}{2\alpha}\ \mathrm{d}y + \int_{0}^{\infty} (2\alpha - 2)\ \mathrm{e}^{-y}\ \frac{1}{2\alpha}\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_{0}^{\infty} y\ \mathrm{e}^{-y}\ \mathrm{d}y + \frac{(2\alpha - 2)}{2\alpha} \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-y}\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\alpha}\ \Gamma(2) + \frac{(2\alpha - 2)}{2\alpha}\ \Gamma(1) \\
&= \frac{1}{\alpha}\ 1! + \frac{(\alpha - 1)}{\alpha}\ 0! \\
&= \frac{1}{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha = 1}$$

(b) `(10 puan)` X'in olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz ve sınırlarını belirtiniz.

Çözüm 1b:

Önceki şıkta bulundu.

$$f_X(x) = 4x\ \mathrm{e}^{-2x}, \qquad x > 0$$

(c) `(10 puan)` $Y = X^5$ ise, Y'nin beklenen değerini bulunuz.

Çözüm 1c:

Y'nin beklenen değeri şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X^5) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^5 \; f_X(x) \; \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\infty} x^5 \; 4x \; \mathrm{e}^{-2x} \; \mathrm{d}x \\
&= 4 \int_{0}^{\infty} x^6 \; \mathrm{e}^{-2x} \; \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Değişken dönüşümü yapalım:

$$s = 2x$$

$$\mathrm{d}s = 2 \; \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \; \mathrm{d}s$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X^5) &= 4 \int_{0}^{\infty} \left(\frac{s}{2}\right)^6 \; \mathrm{e}^{-s} \; \frac{1}{2} \; \mathrm{d}s \\
&= \frac{4}{2^7} \int_{0}^{\infty} s^6 \; \mathrm{e}^{-s} \; \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2^5} \int_{0}^{\infty} s^6 \; \mathrm{e}^{-s} \; \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2^5} \; \Gamma(7) \\
&= \frac{1}{2^5} \; 6! \\
&= \frac{720}{32}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathsf{E}(X^5) = 22.5}$$

S2: Bir oyuncak modelinde markaları A ve B olan iki türlü kontrol çipinden biri kullanılmaktadır. A çiplerinden rastgele seçilen bir çipin hatalı olma olasılığı 0.1 iken B çiplerinden rastgele seçilen bir çipin hatalı olma olasılığı 0.2'dir. A çipi içeren bir oyuncak 1.7 dolara mal edilip 2.5 dolara satılıyor, B çipi içeren bir oyuncak 1 dolara mal edilip 1.6 dolara satılmaktadır. Satılan bir oyuncak bozuk çıkarsa sağlam bir oyuncak ile değiştirilmektedir. Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir. Virgülden sonra en az 4 basamak yazın.)

(a) `(10 puan)` Bu firma 20 tane A çipli, 30 tane B çipli oyuncak sattığında bu alışverişten edeceği karın beklenen değeri ne olur? (Bozuk ürünlerin yenisiyle değiştirileceğini dikkate alın ve ürünlerin başka sebeplerden dolayı bozulma olasılığını dikkate almayın.)

Çözüm 2a:

Şu rastgele değişkenleri tanımlayalım:

X: A çipli TV'lerden çıkan bozuk ürün sayısı
$X \sim \text{Binom}(n = n_1 = 20, p = p_1 = 0.1)$

Y: B çipli TV'lerden çıkan bozuk ürün sayısı
$X \sim \text{Binom}(n = n_2 = 30, p = p_2 = 0.2)$

W: Kazanç
$W = 20 \cdot (2.5 - 1.7) + 30 \cdot (1.6 - 1) - 1.7 \cdot X - Y$
$W = 34 - 1.7 \cdot X - Y$

olur.

W'nin beklenen değeri şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[W] &= \mathsf{E}[34 - 1.7X - Y] \\
&= 34 - 1.7\,\mathsf{E}[X] - \mathsf{E}[Y] \\
&= 34 - 1.7 \cdot n_1 \cdot p_1 - n_2 \cdot p_2 \\
&= 34 - 1.7 \cdot 20 \cdot 0.1 - 30 \cdot 0.2 \\
&= 34 - 3.4 - 6 \\
&= 24.6
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathsf{E}[W] = 24.6}$$

(b) `(10 puan)` Bu firma 200 tane A çipli ürün satarsa bu ürünlerin en az 25 tanesinde A çipinin bozuk çıkma olasılığı nedir?

Çözüm 2b:

X: 200 adet A çipli ürünün içinde bozuk çıkan ürün sayısı ise:

$$X \sim \text{Binom}(n = 200, p = 0.1)$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\{X \geq 25\} &= 1 - \mathsf{P}\{X < 25\} \\
&= 1 - \mathsf{P}\{X \leq 24\} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{24} \binom{200}{k} \cdot 0.1^k \cdot 0.9^{200-k}
\end{aligned}
$$

Bunu Standart Normal ağılıma benzeterek hesaplayalım:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\{X \geq 25\} &= 1 - \mathsf{P}\{X < 25\} \\
&= 1 - \mathsf{P}\left\{\frac{X - 200 \cdot 0.1}{\sqrt{200 \cdot 0.1 \cdot 0.9}} < \frac{25 - 200 \cdot 0.1}{\sqrt{200 \cdot 0.1 \cdot 0.9}}\right\} \\
&= 1 - \mathsf{P}\left\{Z < \frac{25 - 20}{4.2426}\right\} \\
&= 1 - \mathsf{P}\{Z < 0.9428\} \\
&= 1 - \phi(1.1785) \\
&= 1 - 0.881
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathsf{P}\{X \geq 25\} = 0.119}$$

S3: Ahmet ve Meltem bir buluşma noktasında 12'de buluşmak için anlaşmışlardır. Ahmet ve Meltem'in buluşma noktasına gelme zamanları bağımsız olsun ve:

- Ahmetin durağa vardığı an 11:45'ten başlayarak ortalaması 15 dakika olan üssel dağılıma sahip bir rastgele değişken ile ifade edilsin.
- Meltem'in durağa vardığı an 12:15'ten başlayarak ortalaması 10 dakika olan üssel dağılıma sahip bir rastgele değişken ile ifade edilsin.

Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir. Virgülden sonra en az 4 basamak yazın.)

(a) `(10 puan)` Ahmet ve Meltem'in buluşma noktasına en fazla 5 dakika farkla gelme olasılığı nedir?

Çözüm 3a:

Şu rastgele değişkenleri tanımlayalım:

X: Ahmet'in 11:45'ten başlayarak durağa vardığı an (dakika olarak)

$X \sim$ Üssel(λ_1)

$E[X] = \frac{1}{\lambda_1} = 15$ dakika

$\lambda_1 = \frac{1}{15}$

$f_X(x) = \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x}, \qquad x > 0$

Y: Meltem'in 12:15'ten sonra durağa ilk vardığı an (dakika olarak). Burda 0 noktası farklı bir yerde.

$Y \sim$ Üssel(λ_2)

$E[Y] = \frac{1}{\lambda_2} = 10$ dakika

$\lambda_2 = \frac{1}{10}$

$f_Y(y) = \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 y} \qquad y > 0$

Bize sorulan:

$$\mathsf{P}\{|X - (Y + 30)| \leq 5\}$$

Burda 30 eklememizin sebebi Y rastgele değişkeninin başlangıç noktası X'den 30 dakika daha geçtir. Burdan:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\{|X - (Y + 30)| \leq 5\} &= \mathsf{P}\{-5 \leq X - (Y + 30) \leq 5\} \\
&= \mathsf{P}\{-5 \leq X - Y - 30 \leq 5\} \\
&= \mathsf{P}\{25 \leq X - Y \leq 35\}
\end{aligned}$$

Ayrıca ortak (birleşik) olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım:

$$\begin{aligned}
f_{X,Y}(x, y) &= f_X(x) \cdot f_Y(y) \\
&= \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 y} \\
&= \lambda_1 \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x} \mathrm{e}^{-\lambda_2 y} \\
&= \lambda_1 \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}, \qquad x, y > 0
\end{aligned}$$

Şimdi:

$$\mathsf{P}\{25 \leq X - Y \leq 35\} = \int_0^\infty \int_{25+y}^{35+y} \lambda_1 \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^\infty \int_{25+y}^{35+y} \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x} \mathrm{e}^{-\lambda_2 y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda_2 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_2 y} \int_{25+y}^{35+y} \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \lambda_2 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_2 y} \left[-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\right]_{25+y}^{35+y} \mathrm{d}y \\
&= \lambda_2 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_2 y} \left[-\mathrm{e}^{-\lambda_1 (35+y)} + \mathrm{e}^{-\lambda_1 (25+y)}\right] \mathrm{d}y \\
&= \lambda_2 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_2 y} \left[-\mathrm{e}^{-\lambda_1 (35+y)} + \mathrm{e}^{-\lambda_1 (25+y)}\right] \mathrm{d}y \\
&= \lambda_2 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_2 y} \left[-\mathrm{e}^{-\lambda_1 35} \mathrm{e}^{-\lambda_1 y} + \mathrm{e}^{-\lambda_1 25} \mathrm{e}^{-\lambda_1 y}\right] \mathrm{d}y \\
&= \lambda_2 \left(\mathrm{e}^{-\lambda_1 25} - \mathrm{e}^{-\lambda_1 35}\right) \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_1) y} \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\mathrm{e}^{-\lambda_1 25} - \mathrm{e}^{-\lambda_1 35}\right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{= 0.0551}$$

(b) `(10 puan)` Ahmet'in buluşma noktasına Meltem'den önce gelme olasılığı nedir?

Çözüm 3b:

Bize sorulan:

$$\mathsf{P}\{X < Y + 30\}$$

Birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu önceki şıkta bulduk. Şimdi biz önde $\mathsf{P}\{X > Y + 30\}$'u bulalım. Sonra 1'den çıkaralım.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\{X > Y + 30\} &= \int_0^{\infty} \int_{y+30}^{\infty} \lambda_1 \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \lambda_1 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_2 y} \int_{y+30}^{\infty} \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \lambda_1 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_2 y} \left[-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\right]_{y+30}^{\infty} \mathrm{d}y \\
&= \lambda_1 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_2 y} \left[\mathrm{e}^{-\lambda_1 (y+30)}\right] \mathrm{d}y \\
&= \lambda_1 \, \mathrm{e}^{-\lambda_1 30} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2) y} \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \, \mathrm{e}^{-\lambda_1 30}
\end{aligned}
$$

$$\mathsf{P}\{X > Y + 30\} = 0.0541$$

Şimdi:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{X < Y + 30\} &= 1 - \mathsf{P}\{X > Y + 30\} \\ &= 1 - 0.0541\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathsf{P}\{X < Y + 30\} = 0.9459}$$

S4: Bir para atma deneyinde hileli para kullanılmaktadır. Hileli paranın yazı gelme olasılığı 0.4, tura gelme olasılığı 0.6'dır. Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir. Virgülden sonra en az 4 basamak yazın.)

(a) `(10 puan)` Para atma deneyi TURA gelinceye kadar tekrar ediliyor, TURA gelince duruluyor. İlk atışta TURA gelmemişse, 5. atışta TURA gelme olasılığı nedir?

Çözüm 4a:

X: TURA gelinceye kadar atılan para sayısı

$X \sim \text{Geometrik}(p = 0.6)$

$\mathsf{p}_X(x) = p(1-p)^{x-1}, \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$

Bize sorulan:

$$\mathsf{P}\{X = 5 | X > 1\}$$

Bakalım:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{X = 5 | X > 1\} &= \frac{\mathsf{P}\{(X = 5) \cap (X > 1)\}}{\mathsf{P}\{X > 1\}} \\ &= \frac{\mathsf{P}\{X = 5\}}{1 - \mathsf{P}\{X = 1\}} \\ &= \frac{p(1-p)^{5-1}}{1-p} \\ &= \frac{0.6(1-0.6)^{5-1}}{1-0.6} \\ &= \frac{0.6(0.4)^4}{0.4} \\ &= 0.6(0.4)^3\end{aligned}$$

$$= 0.0384$$

$$\boxed{\mathsf{P}\{X = 5 | X > 1\} = 0.0384}$$

Ya da hafızasızlık özelliğinden faydalanarak:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\{X = 5 | X > 1\} &= \mathsf{P}\{X = 4\} \\
&= p\,(1-p)^3 \\
&= 0.6 \times (1-0.6)^3 \\
&= 0.6 \times (0.4)^3 \\
&= 0.0384
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathsf{P}\{X = 5 | X > 1\} = 0.0384}$$

Aynı sonuca ulaşırız.

(b) `(10 puan)` Para atma deneyi TURA gelinceye kadar tekrar ediliyor, TURA gelince duruluyor. İlk TURA ilk atıştan itibaren n'inci adımda gelmişsse, n'in çift sayı olma olasılığı nedir?

Çözüm 4b:

Yukardaki rastgele değişken burada da geçerli. n'in çift sayı olma olasılığı şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\{X = n,\quad n \text{ çift sayı}\} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{X = 2k\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p\,(1-p)^{2k-1}
\end{aligned}$$

$q = 1 - p$ diyelim

$$\mathsf{P}\{X = n,\quad n \text{ çift sayı}\} = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k}$$

$$= \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{\infty} (q^2)^k$$

verilen formülleri kullanırsak

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\{X = n, \quad n \text{ çift sayı}\} &= \frac{p}{q} \frac{q^2}{1-q^2} \\
&= \frac{p}{q} \frac{q^2}{(1+q)(1-q)}
\end{aligned}$$

$p = 1 - q$ demiştik

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\{X = n, \quad n \text{ çift sayı}\} &= \frac{q}{1+q} \\
&= \frac{1-p}{1+(1-p)} \\
&= \frac{1-p}{2-p} \\
&= \frac{1-0.6}{2-0.6} \\
&= \frac{0.4}{1.4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathsf{P}\{X = n, \quad n \text{ çift sayı}\} = \frac{2}{7} = 0.2857}$$

(c) `(10 puan)` Para atma deneyi 10 defa tekrar ediliyor. Bu atışların 3 veya 4 tanesinin TURA gelme olasılığı nedir?

Çözüm 4c:

X: 10 defa atılan paralardan TURA gelenlerin sayısı

$X \sim \text{Binom}(n = 10, p = 0.6)$

$\mathsf{P}\{X = x\} = \mathsf{p}_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n$

Burdan:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\{(X=3)\cup(X=4)\} &= \mathsf{P}\{X=3\}+\mathsf{P}\{X=4\} \\
&= \binom{10}{3}\, p^3\ (1-p)^{10-3}+\binom{10}{4}\, p^4\ (1-p)^{10-4} \\
&= \binom{10}{3}\, 0.6^3\ (1-0.6)^7+\binom{10}{4}\, 0.6^4\ (1-0.6)^6 \\
&= 0.0425+0.1115
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\mathsf{P}\{(X=3)\cup(X=4)\}=0.1540}
$$

LÜTFEN SINAV KAĞIDINI İSİM YAZARAK CEVAP KAĞIDIYLA BERABER TESLİM EDİNİZ.