BIMU2004
Olasılık Teorisi ve İstatistik
Bütünleme - Çözümler

İstanbul Üniversitesi - Cerrahpaşa
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü - Güz 2023

31 Ocak 2024 14:00 - 15:10

Son güncelleme: 2024-02-12 11:02

Soru	S1 (20p)	S2 (25p)	S3 (15p)	S4 (25p)	S5 (15p)	Toplam
ÖÇ	1,2,3	1,2,3	1,2,3	1,2,3	1,2,3	
PÇ	1	2	2	2	1	
Puan						

LÜTFEN OKUYUN:

- Sınava sizin için belirlenen sınıfta giriniz.
- Bu sınavın süresi 70 dakikadır. Süre bittiğinde cevap kağıdını doldurmaya devam edenler kopya çekmiş sayılır.
- Lütfen soruları kurşun kalemle, TÜRKÇE, kısa ve anlaşılır olarak cevaplayınız. **Anlaşılmayan, muğlak ifadeler kullanmak**, kötü yazı yazmak notunuza negatif olarak etki edecektir.
- Sınavda 1 adet hesap makinası ve her iki yüzüne notlarınızı yazdığınız, üstüne isminiz ve numaranız yazılı 1 adet A4 sayfası kullanabilirsiniz. Bunların dışında her türlü defter, kitap, notlar, sözlük ve elektronik sözlük yasaktır.
- Materyalin paylaşılması yasaktır. **Hesap makinası ve silgi paylaşmak kopya sayılacaktır!**
- Bilgisayar, PDA, cep telefonu türünden elektronik cihazlar kullanmak yasaktır.
- Soruları çözmeye başlamadan lütfen okuyun.
- Soru, cevap ve A4 formül kağıtlarına isim ve numaranızı yazınız.
- Soru kağıtlarınızı çıkarken cevap kağıdınızla beraber teslim ediniz. **A4 Formül kağıtlarınız sizde kalsın.**
- Bu sınavda toplam 100 puanlık soru vardır.
- **SINAVDA KOPYA ÇEKENLER, KOPYA VERENLER VE BUNLARA TEŞEBBÜS EDENLER SINAVDAN "0" ALACAKTIR VE DEKANLIĞA ŞİKAYET EDİLECEKLERDİR!**.
- **Çözümlerinizde ne yaptığınızı adım adım göstermeniz ve yaptığınız işlemlerde kullandığınız formülleri yazmanız gerekiyor. Sadece işlem yaparsanız cevap doğru dahi olsa kabul edilmez. İşlem sonucunda elde ettiğiniz cevabı KARE içine alınız.**
- Çözümlerinizi ondalık sayı olarak verecekseniz noktadan sonra en az 3 basamak hassasiyet olmalıdır.
- Çözümlerinizi kesirli yazmak istiyorsanız sadeleştirin, mesela sonuç $\frac{2}{4}$ ise $\frac{1}{2}$ yapılmalıdır.
- Birikimli Standart Normal Dağılım Tablosu gerektiren sorularda tablodan gelecek değerler için $\phi()$ fonksiyonunu kullanın.

Başarılar. (Mustafa Dağtekin)

SORULAR ARKA SAYFADA

SORULAR

- **Çözümlerinizde ne yaptığınızı adım adım göstermeniz ve yaptığınız işlemlerde kullandığınız formülleri yazmanız gerekiyor. Sadece işlem yaparsanız cevap doğru dahi olsa kabul edilmez. İşlem sonucunda elde ettiğiniz cevabı KARE içine alınız.**
- Çözümlerinizi ondalık sayı olarak verecekseniz noktadan sonra en az 3 basamak hassasiyet olmalıdır.
- Çözümlerinizi kesirli yazmak istiyorsanız sadeleştirin, mesela sonuç $\frac{2}{4}$ ise $\frac{1}{2}$ yapılmalıdır.
- Birikimli Standart Normal Dağılım Tablosu gerektiren sorularda tablodan gelecek değerler için $\phi()$ fonksiyonunu kullanın.

S1: Diyelim ki bir X rastgele değişkeninin beklenen değerinin 3 ve varyansının 1 olduğunu biliyoruz. Aşağıdaki değerleri bulunuz:

(a) `(10 puan)` $E\left[(4X-1)^2\right]$

Çözüm 1a:

$$\begin{aligned}
E\left[(4X-1)^2\right] &= E\left[16X^2-8X+1\right] \\
&= 16E\left[X^2\right]-8E\left[X\right]+1 \\
E[X^2] &= \mathrm{Var}(X)+(E[X])^2 \\
&= 1+3^2 \\
&= 10 \\
E\left[(4X-1)^2\right] &= 16\cdot(1+3^2)-8\cdot 3+1 \\
&= 16\cdot 10-24+1 \\
&= 160-24+1 \\
&= 137
\end{aligned}$$

(b) `(10 puan)` $V(5-2X)$

Çözüm 1b:

$$\begin{aligned}
V(5-2X) &= V(-2X+5) \\
&= (-2)^2V(X) \\
&= 4\cdot 1 \\
&= 4
\end{aligned}$$

S2: X ve Y **AYRIK** rastgele değişkenler ve birleşik (ortak) olasılık **kütle** fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiş olsun:

$$\mathsf{p}(x,y) = \alpha \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+y} \qquad 0 < x < y < \infty \;\; \text{ve} \;\; x, y \in \mathbb{Z}^+ \text{ (pozitif tam sayı)}$$

Aşağıdaki soruları cevaplayınız:

(a) `(10 puan)` $\alpha = 3$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 2a:

$$\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=x+1}^{\infty} \alpha \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+y} = 1$$

$$\alpha \sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=x+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+y} = 1$$

$$\alpha \sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \sum_{y=x+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{y} = 1$$

$$\alpha \sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 0}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$$\alpha \sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \cdot 2 = 1$$

$$\alpha \sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \cdot 2 = 1$$

$$\alpha \sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} \cdot 2 = 1$$

$$\alpha \sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = 1$$

$$\alpha \cdot \frac{1/4}{1-1/4} = 1$$

$$\alpha \cdot \frac{1/4}{3/4} = 1$$

$$\alpha \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$\alpha = 3$$

(b) `(15 puan)` $X = x$ olma şartı altında Y rastgele değişkeninin koşullu olasılık kütle fonksiyonunu bulunuz (sınırlarını belirtiniz).

Çözüm 2b:

$$\mathsf{p}(y|x) = \frac{\mathsf{p}(x,y)}{\mathsf{p}_X(x)}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{p}_X(x) &= \sum_{y=x+1}^{\infty} \alpha \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+y} \\
&= \alpha \sum_{y=x+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+y} \\
&= \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \sum_{y=x+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{y} \\
&= \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 0}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \cdot 2 \\
&= \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} \cdot 2 \\
&= \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \\
&= 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \\
&= 3 \left(\frac{1}{4}\right)^{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{p}(y|x) &= \frac{\alpha \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+y}}{3\left(\frac{1}{4}\right)^{x}} \\
&= \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+y}}{3\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{y-x} \qquad \text{for } \; 1 \le x < y < \infty
\end{aligned}$$

$$\text{İpucu: } \sum_{k=i}^{m} \alpha^k = \frac{\alpha^i - \alpha^{m+1}}{1-\alpha}$$

S3: `(15 puan)` X SÜREKLİ rastgele değişkeni (0,1) aralığında birbiçimli (uniform, düzgün) dağılıma sahip olsun. $Y = a + (b-a)X$ rastgele değişkeninin (a, b) aralığında birbiçimli dağılıma sahip bir sürekli rastgele değişken olduğunu gösteriniz.

Çözüm 3:

X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$\mathsf{p}_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Burdan, Y'nin birikimli dağılımını kullanarak:

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(a + (b-a)X \leq y) \\
&= P\left(X \leq \frac{y-a}{b-a}\right) \\
&= F_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right) \\
&= \begin{cases} 0 & y < a \\ \frac{y-a}{b-a} & a \leq y \leq b \\ 1 & y > b \end{cases}
\end{aligned}$$

Bu durumda, Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}
\mathsf{p}_Y(y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathsf{F}_Y(y) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{y-a}{b-a}\right) \\
&= \frac{1}{b-a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y-a) \\
&= \frac{1}{b-a} \cdot 1 \\
&= \frac{1}{b-a} \quad , a \leq y \leq b
\end{aligned}$$

Bu da Y rastgele değişkeninin (a, b) aralığında birbiçimli dağılıma sahip olduğunu gösterir.

S4: Bir torbada k adet kırmızı ($k \geq 2$) ve m adet mavi ($m \geq 2$) top vardır. Torbadan yerine konmadan 2 top çekiliyor. Aşağıdaki soruları cevaplayınız:

(a) `(10 puan)` Çekilen her iki topun da kırmızı olma ihtimalini k ve m cinsinden ifade ediniz.

Çözüm 4a:

Olayları şöyle tanımlayalım:

- R_1: İlk çekilen topun kırmızı olması. $\mathsf{P}(R_1) = \frac{k}{k+m}$
- R_2: İkinci çekilen topun kırmızı olması.
- R_1^C: İlk çekilen topun mavi olması. $\mathsf{P}(R_1^C) = \frac{m}{k+m}$
- R_2^C: İkinci çekilen topun mavi olması.

Bize sorulan olay, $\mathsf{P}(R_1 R_2)$'dir. Burdan:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(R_1 R_2) &= \mathsf{P}(R_1) \cdot \mathsf{P}(R_2|R_1) \\ &= \frac{k}{k+m} \cdot \frac{k-1}{k+m-1}\end{aligned}$$

(b) `(15 puan)` İkinci çekilen top kırmızı ise ilk çekilen topun kırmızı olmuş olma ihtimalini k ve m cinsinden ifade ediniz.

Çözüm 4b:

Olayları şöyle tanımlayalım:

- R_1: İlk çekilen topun kırmızı olması. $\mathsf{P}(R_1) = \frac{k}{k+m}$
- R_2: İkinci çekilen topun kırmızı olması.
- R_1^C: İlk çekilen topun mavi olması. $\mathsf{P}(R_1^C) = \frac{m}{k+m}$
- R_2^C: İkinci çekilen topun mavi olması.

Bize sorulan $\mathsf{P}(R_1|R_2)$'dir. Bayes teoremi kullanarak:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(R_1|R_2) &= \frac{\mathsf{P}(R_1 R_2)}{\mathsf{P}(R_2)} \\ &= \frac{\mathsf{P}(R_2|R_1)\mathsf{P}(R_1)}{\mathsf{P}(R_2)}\end{aligned}$$

$\mathsf{P}(R_2)$'yi bulmak için toplam olasılık teoremini kullanarak:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(R_2) &= \mathsf{P}(R_1R_2) + \mathsf{P}(R_1^C R_2) \\
&= \mathsf{P}(R_1)\cdot\mathsf{P}(R_2|R_1) + \mathsf{P}(R_1^C)\cdot\mathsf{P}(R_2|R_1^C) \\
&= \frac{k}{k+m}\cdot\frac{k-1}{k+m-1} + \frac{m}{k+m}\cdot\frac{k}{k+m-1} \\
&= \frac{k(k-1)}{(k+m)(k+m-1)} + \frac{mk}{(k+m)(k+m-1)} \\
&= \frac{k(m+k-1)}{(k+m)(k+m-1)} \\
&= \frac{k}{k+m}
\end{aligned}
$$

Bu durumda:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(R_1|R_2) &= \frac{\frac{k}{k+m}\cdot\frac{k-1}{k+m-1}}{\frac{k}{k+m}} \\
&= \frac{k-1}{k+m-1}
\end{aligned}
$$

S5: `(15 puan)` 3'ü kırmızı, 7'si siyah olan 10 adet karttan 500 kez, her seferinde yerine koyarak, rastgele bir kart seçiliyor. Kırmızı kart gelme sayısının 145 ile 155 arasında olma ihtimali yaklaşık olarak nedir?

Çözüm 5:

Bu durumda, X rastgele değişkeni, 500 kez kart çekme deneyinde kırmızı kart gelme sayısını temsil eder. X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$
\mathsf{p}_X(x) = \binom{500}{x}\left(\frac{3}{10}\right)^x\left(\frac{7}{10}\right)^{500-x}
$$

Bu durumda, X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu kullanarak:

$$
\mathsf{P}(145 \le X \le 155) = \sum_{x=145}^{155}\binom{500}{x}\left(\frac{3}{10}\right)^x\left(\frac{7}{10}\right)^{500-x}
$$

Bu hesaplamayı yapmak için normal dağılımın yaklaşımını kullanabiliriz. Bu durumda, X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu kullanarak:

$$\mu = 500 \cdot \frac{3}{10} = 150$$

$$\sigma^2 = 500 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = 105$$

$$\sigma = \sqrt{105} \approx 10.25$$

Bu durumda, normal dağılımın yaklaşımını kullanarak:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(145 \leq X \leq 155) &\approx \mathsf{P}\left(\frac{145-150}{10.25} \leq Z \leq \frac{155-150}{10.25}\right) \\
&\approx \mathsf{P}(-0.49 \leq Z \leq 0.49) \\
&\approx \mathsf{P}(Z \leq 0.49) - \mathsf{P}(Z \leq -0.49) \\
&\approx \phi(0.49) - \phi(-0.49) \\
&\approx 0.6864 - 0.3136 \\
&\approx 0.3728
\end{aligned}$$

LÜTFEN SINAV KAĞIDINI İSİM YAZARAK CEVAP KAĞIDIYLA BERABER TESLİM EDİNİZ. A4 FORMÜL KAĞITLARINIZ SİZDE KALSIN.