

# Henüz Bitmedi

## BIMU2004 Olasılık Teorisi ve İstatistik 3 Ders Sınavı - Soru Çözümleri

İstanbul Üniversitesi - Cerrahpaşa  
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü - Güz 2023

14 Temmuz 2023 @ 15:00

LÜTFEN OKUYUN

### KURALLAR:

- 1 ÖDEVİNİZİ YAPARKEN BAŞKA BİR ÖĞRENCİNİN CEVABINI KULLANMAK YASAKTIR. CEVAPLARI BİRBİRİNE BENZEYEN KAĞITLARA GEREKLİ İŞLEMLER YAPILACAKTIR. **KOPYA ÇEKENLER DERSTEN GEÇEMEZ.**
- 2 Ödevde bilgisayar araçları kullanmak YASAKTIR. Cevaplarınızda çözümün her adımının yazılmış olması lazımdır. **ChatGPT ve Google Bard kullanmak yasaktır.**
- 3 Çözümlerinizi ya kurşun kalemle beyaz renkli düz, çizgili veya kareli bir kağıda yazarak yapınız. Geniş alan kullanarak, okunabilir şekilde yazınız ve yanlış yaptığınız yerleri SİLEREK iptal ediniz, üstünü çizerek değil. Okunmayan yazılar, muğlak veya kötü yazılmış ifadeler bulunan cevaplar dikkate alınmayabilir (**MS Word vs. gibi kelime işlemcileri ile yazılmış kağıtlar kabul edilmez**).
- 4 **Çözümlerinizde ne yaptığınızı, yaptığınız işlemlerin bilimsel dayanağını açıklamanız gerekiyor. Sadece sonucu yazarsanız cevap doğru dahi olsa kabul edilmez.**
- 5 Son cevabınızı kare içine alın. Kare içine almazsanız son yazdığınız şeyi cevap olarak kabul edeceğim.
- 6 Gereksiz bilgi yazmayın. Fazladan bişey yazayım, ya tutarsa gibi düşünürseniz puan alamazsınız.
- 7 (Kalemle yapanlar için:) Ödevi çözdükten sonra **ilk sayfaya isim, soyisim, numara yazıp ve imza atınız.** Sonra **Microsoft Office Lens, Cam Scanner, Adobe Scan** vs. gibi "döküman modu" olan bir tarayıcı mobil uygulama veya masaüstü tarayıcı kullanarak ödev çözümlerinizi tek dosya PDF'e çevirin. Döküman modunda yapılmamış, arka planı görünen, karanlık, bulanık cevap kağıtlarından not düşülecektir. Şunlar önemli:
  - Cam Scanner link: <https://www.camscanner.com/>
  - Microsoft Lens link: [Link](#)
  - Adobe Scan link: <https://acrobat.adobe.com/tr/tr/mobile/scanner-app.html>
  - Tarayıcı uygulamaları kullanırken, "döküman" (document) modunu kullanın. Fotoğraf modu kullanmayın. Soluk çıkıyorsa parlaklığı ve/veya kontrastı ayarlayın.
  - Resim çekip resmi bir Word dosyasına yapıştırıp PDF'e çevirmeyin.
  - Taradığınız sayfalarda yazılar bulanık olmamalıdır. Bulanık yazılar okunmazsa not verilmez veya not düşülür.
  - Dosyalarınız 5MB'dan büyük olmamalıdır!
  - Bu konularda yardım için bana Canvas üzerinden ve e-mail ile ulaşın.
  - Bu kurallara uymayanlardan puan kırılacaktır.
  - Virgülden sonra en az 4 basamak yazın.
- 8 SADECE 1 ADET PDF DOSYASI GÖNDERİNİZ. Birden fazla dosya gönderirseniz sadece rastgele biri seçilecektir.

# Henüz Bitmedi

9 Dosya ismini aşağıdaki gibi yapınız, 1306XXXX yazan yere kendi numaranızı yazınız:

olasilik-2023-3ders-1306XXXX.pdf

10 PDF dosyasını SÜRE BİTME DEN 1 saat önce CANVAS'a yüklemeniz gerekiyor. Sonradan gönderilen dosyalar dikkate alınmayacaktır. CANVAS'la ilgili sorun yaşayanlar bana acilen mail atsınlar. Son dakikada yaşanan sorunlardan sorumlu değilim.

Kolay gelsin. (Mustafa Dağtekin)

# Henüz Bitmedi

Birikimli Standard Normal Dağılım Tablosu. $\phi(z)$										
z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

# Henüz Bitmedi

Bazı formüller

$$\int x e^{-x} dx = -(x+1) e^{-x} + c \quad \left| \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = 0 \right.$$

## SORULAR

**S0:** Önceki sayfadaki açıklamaları okuyun! Bu soruyu da cevap kağıdına ”**Açıklamaları Okudum**” yazarak cevaplayınız!

**S1:**  $X$  ve  $Y$  sürekli rastgele değişkenler ve bunların Birleşik Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir. Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir. Virgülden sonra en az 4 basamak yazın.)

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha e^{-x}, & 0 < x + y < 1, \quad 0 < x, \quad 0 < y \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

(a) (10 puan)  $\alpha$ 'nın değerinin  $e \approx 2.71828$  olduğunu gösteriniz.

**Solution** (1a):

Birleşik OYF için aşağıdaki sağlanmalı:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

O zaman:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \alpha e^{-x} dy dx \\ 1 &= \alpha \int_0^1 (1-x) e^{-x} dx \\ 1 &= \alpha [-e^{-x}]_0^1 - \alpha [-1(x+1) e^{-x}]_0^1 \\ 1 &= \alpha(1 - e^{-1}) + \alpha(2e^{-1} - 1) \\ 1 &= \alpha e^{-1} \\ \alpha &= e = 2.7183 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(b) (10 puan)  $X$ 'nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz ve grafiğini çiziniz. (Bu fonksiyonun tanımlı olduğu aralığı da belirtmeniz gerekiyor.)

# Henüz Bitmedi

**Solution** **1b**:

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dy \\f_X(x) &= \int_0^{1-x} \alpha e^{-x} \, dy \\f_X(x) &= \alpha e^{-x} \int_0^{1-x} 1 \, dy \\f_X(x) &= \alpha e^{-x} [y]_0^{1-x} \\f_X(x) &= \alpha e^{-x} (1-x) \\f_X(x) &= e^{-x} (1-x) \quad , \quad 0 < x < 1\end{aligned}$$

- (c) (10 puan)  $X = x$  şartı altında  $Y$ 'nin beklenen değerini bulunuz. (İpucu:  $x$  cinsinden çıkması lazım. Ayrıca bu sonucun geçerli olduğu bölgeyi de vermeniz gerekiyor.)

**Solution** **1c**:

$$\begin{aligned}f(y|x) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) > 0 \text{ olan yerler için} \\&= \frac{e^{1-x}}{(1-x) e^{1-x}}, \quad 0 < y < 1-x \\&= \frac{1}{1-x}, \quad 0 < y < 1-x \\E[Y|X=x] &= \int_0^{1-x} y f(y|x) \, dy \\&= \int_0^{1-x} y \frac{1}{1-x} \, dy \\&= \frac{1}{1-x} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} \\&= \frac{(1-x)^2}{2(1-x)} \\E[Y|X=x] &= \frac{1-x}{2}, \quad 0 < x < 1 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

# Henüz Bitmedi

**S2:** İki adet torbanın ikisinde de üzerine 1, 2 ve 4 yazılmış üçer top bulunuyor. İki torbadan da rastgele birer top çekilip üzerinde yazan sayılara bakılıyor ve toplar torbaya geri konuyor.  $X$  rastgele değişkeni çekilen 2 toptaki sayıların arasındaki fark olsun. Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir. Virgülden sonra en az 4 basamak yazın.)

(a) (10 puan)  $X$ 'in Olasılık Kütle Fonksiyonu'nu değer uzayını da belirterek bulunuz.

**Solution** (2a):

Şöyle bir olay tanımlayalım:

$E_{i,j}$ : Birinci torbadan  $i$ , 2nci torbadan  $j$  nolu topu çekme olayı.,  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ .

Bir torbadan çekilen sayı diğer torbadan çekilen sayıyı etkilemeyeceği için  $E_{i,j}$ 'ler birbirinden bağımsızdır ve  $P(E_{i,j}) = \frac{1}{9}$ 'dur.

$X$ 'in değer uzayını göstermek için bir tablo yapalım, satırlar birinci torbadan çekilen toptaki sayı, sütunlar ikinci torbadan çekilen toptaki sayı ve hücrelerdeki sayılar da  $X$ 'in aldığı değer olsun.

$X$	$j$		
$i$	1	2	4
1	0	1	3
2	1	0	2
4	3	2	0

$$P(X = 0) = p(0) = P(E_{1,1}) + P(E_{2,2}) + P(E_{4,4}) = \frac{3}{9}$$

$$P(X = 1) = p(1) = P(E_{2,1}) + P(E_{1,2}) = \frac{2}{9}$$

$$P(X = 2) = p(2) = P(E_{2,4}) + P(E_{4,2}) = \frac{2}{9}$$

$$P(X = 3) = p(3) = P(E_{1,4}) + P(E_{4,1}) = \frac{2}{9}$$

Şöyle toparlarsak,  $X$ 'in OKF'si:

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 0 \\ \frac{2}{9} & x = 1 \\ \frac{2}{9} & x = 2 \\ \frac{2}{9} & x = 3 \\ 0 & \text{diğer.} \end{cases} \quad \blacksquare$$

(b) (10 puan)  $X$ 'in ortalama ve varyansı nedir?

# Henüz Bitmedi

(c) (10 puan) Bu deneyin 200 defa tekrar edildiğini varsayalım.  $X_i$ :  $i$ 'nci deneyde iki topta görülen sayıların arasındaki fark olsun.  $P\{(X_1 + X_2 + \dots + X_{200}) > 100\}$  nedir?

**S3:** (10 puan)  $X$ , ortalaması 0.6 olan üssel dağılımlı bir rastgele değişken olsun.  $P(\beta < X) = 0.35$  olmasını sağlayan  $\beta$  değerini bulunuz. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir. Virgülden sonra en az 4 basamak yazın.)

**S4:** İki adet torbadan:

- Torba 1'de 4 adet kırmızı, 2 adet siyah top,
- Torba 2'de 4 adet kırmızı, 2 adet siyah top

bulunuyor. Torba 1'den rasgele 1 adet top çekilip Torba 2'ye konuyor. Sonra, Torba 2'den 1 adet rastgele top çekilip Torba 1'e konuyor. Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Cevaplarken kullanacağınız formülleri yazmanız gerekmektedir. Ayrıca uygun terminoloji ve sembolleri kullanmanız gerekmektedir. Virgülden sonra en az 4 basamak yazın.)

- (a) (10 puan) 2. torbadan çekilden topun kırmızı olma ihtimali nedir?
- (b) (10 puan) 1. torbadan da, 2. torbadan da kırmızı çekilme ihtimali nedir?
- (c) (10 puan) Deney sonunda her iki torbadaki renk sayısının deney başındakiyle aynı olma ihtimali nedir?

LÜTFEN SINAV KAĞITLARINIZA İSİM YAZARAK CEVAP KAĞIDIYLA BERABER TESLİM EDİNİZ.