BIMU2004
Olasılık Teorisi ve İstatistik
Final Soru ve Çözümleri

İstanbul Üniversitesi - Cerrahpaşa
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü - Güz 2021

27 Aralık 2021 11:10-12:20

`Son güncelleme: 2022-01-18 12:53`

SORULAR ve ÇÖZÜMLER

S1: İki sürekli rastgele degişken X ve Y'nin Birleşik Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \ \mathrm{e}^{-(x+y)} & , \quad 0 < x < y \quad x, y \in \mathbb{R} \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

(a) `(10 puan)` α'nın değerini açıklayarak bulunuz.

Çözüm 1a:

OYF'nin sağlaması gereken şartlardan biri:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y$$

O zaman:

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^{\infty} \int_0^{y} \alpha \mathrm{e}^{-(x+y)} \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \\
&= \alpha \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y} \left(\int_0^{y} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x \right) \ \mathrm{d}y \\
&= \alpha \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y} \Big[-\mathrm{e}^{-x} \Big]_0^{y} \ \mathrm{d}y \\
&= \alpha \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y} \ \mathrm{d}y - \alpha \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2y} \ \mathrm{d}y \\
&= \alpha - \frac{\alpha}{2} \\
\alpha &= 2 \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

(b) `(15 puan)` X, Y'in bir fonksiyonu $g(X,Y) = \max(X,Y)$ olarak verilmişse, $g(X,Y)$'in beklenen değerini açıklayarak bulunuz.

Çözüm 1b:

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

$g(x,y)$ şöyle yazılabilir:

$$g(x,y) = \begin{cases} x & , \quad x > y \\ y & , \quad x < y \end{cases}$$

$x > y$ için $f(x,y) = 0$'dır. Burdan:

$$\begin{aligned} E[g(X,Y)] &= \int_0^{\infty}\int_0^{y} y\ 2\ \mathrm{e}^{-(x+y)}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^{\infty} y\ \mathrm{e}^{-y}\ (1-\mathrm{e}^{-y})\ \mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^{\infty} y\ \mathrm{e}^{-y}\ \mathrm{d}y - 2\int_0^{\infty} y\ \mathrm{e}^{-2y}\ \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Burda Gama fonksiyonunu hatırlayalım:

$$\begin{aligned} \Gamma(r) &= \int_0^{\infty} x^{r-1}\ \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x \\ &= (r-1)! \qquad r \text{ tamsayı ise} \end{aligned}$$

Hesapladığımız beklenen değer hesabında ilk terim burdan kolayca bulunur:

$$\begin{aligned} 2\int_0^{\infty} y\ \mathrm{e}^{-y}\ \mathrm{d}y &= \Gamma(2) \\ &= 2 \times 1! \\ &= 2 \end{aligned}$$

İkinci terim için $z = 2y$ dersek.

$$2\int_0^\infty y\ \mathrm{e}^{-2y}\ \mathrm{d}y = 2\int_0^\infty (z/2)\ \mathrm{e}^{-z}\ (1/2)\mathrm{d}z$$
$$= 2 \times \frac{2}{4}$$
$$= \frac{1}{2}$$

Böylece:

$$E[g(X,Y)] = 2 - 1/2$$
$$= \frac{3}{2} \qquad \blacksquare$$

(c) `(15 puan)` $Y = y$ olma şartı altında X'in şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonunu açıklayarak bulunuz.

Çözüm 1c:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$
$$f_Y(y) = \int_0^y 2\ \mathrm{e}^{-x-y}\ \mathrm{d}x$$
$$= 2\ \mathrm{e}^{-y}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^y$$
$$= 2\ \mathrm{e}^{-y}(1-\mathrm{e}^{-y}) \qquad (y > 0)$$
$$f(x|y) = \frac{2\ \mathrm{e}^{-x-y}}{2\ \mathrm{e}^{-y}(1-\mathrm{e}^{-y})} \qquad (y > x > 0)$$

$$f(x|y) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-y}} \qquad (0 < x < y) \qquad \blacklozenge$$

S2: Bir yazıcı imalatçısı A markalı bir yazıcı üretmektedir. Bu yazıcıda zamanla oluşan teknik arızalar Poisson sürecini takip ediyor ve 1 yılda ortalama 0.25 arıza görülüyor. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

(a) `(10 puan)` Bir yazıcının 10 yılda 1 ile 3 arasında (1 ve 3 dahil) arıza görme ihtimali nedir? Açıklayarak çözünüz.

Çözüm 2a:

$\lambda = 0.25$ arıza/yıl ise, 10 yılda $\alpha = 10 \times 0.25 = 2.5$ arıza olur. X: Bir yazıcının 10 yılda gördüğü arıza sayısı ise, X, Poisson dağılımlı ve $\alpha = 2.5$ parametrelidir. Burda O.K.F.:

$$
\begin{aligned}
P(X=x)=\mathrm{p}(x)=\mathrm{e}^{-\alpha}\ \frac{\alpha^x}{x!} \\
=\mathrm{e}^{-2.5}\ \frac{2.5^x}{x!} \qquad x>0
\end{aligned}
$$

olur. Bizden istenen $P(1 \leq X \leq 3)$'dur. Burdan:

$$
\begin{aligned}
P(1 \leq X \leq 3) &= P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) \\
&= \mathrm{e}^{-2.5}\left(\frac{2.5^1}{1!}+\frac{2.5^2}{2!}+\frac{2.5^3}{3!}\right) \\
&= 0.6755 \qquad \blacktriangle
\end{aligned}
$$

(b) `(15 puan)` Bir şirket aynı anda sadece 1 tanesini kullanmak üzere bu yazıcılardan n tane alıyor. Bir yazıcıda ilk arıza görüldüğünde yazıcı bozuldu varsayılıyor. Kullanılan yazıcı bozulunca yeni bir yazıcı açılıp kullanılmaya başlanıyor. İlk yazıcı başlatıldıktan itibaren n'inci yazıcı bozuluncaya kadar geçen sürenin 15 yıldan daha uzun olma ihtimalinin en az 0.50 olma şartını sağlayan en küçük yaklaşık n değeri ne olmalıdır? Açıklayarak çözünüz.

Çözüm 2b:

X_i: i'inci yazıcı başlatıldığı andan bozuluncaya kadar geçen süre olsun. X_i, bir üssel rasgele değişkendir ve parametresi $\lambda = 0.25$'dir. $E(X_i)=\mu=\frac{1}{\lambda}=4$, $Var(X_i)=\sigma^2=\frac{1}{\lambda^2}=16$'dır.

$X = X_1+X_2+...+X_n$, ilk yazıcı başlatıldıktan itibaren n'inci yazıcı bozuluncaya kadar geçen süre olur. Bizden istenen $P(X_1+X_2+...+X_n>15)>0.50$ eşitsizliğini sağlayan en küçük n değeridir.

Merkezi limit teoreminden faydalanarak aşağıdaki rastgele değişken yaklaşık olarak Standard Normal'dir diyebiliriz.

$$
Z=\frac{X_1+X_2+...+X_n-n\ \mu}{\sigma\ \sqrt{n}}
$$

O zaman $P(X>15)=P(Z>\frac{15-n\ \mu}{\sigma\sqrt{n}})$'dir.

Ayrıca $P(Z>z)=1-\phi(z)=0.5$ yapan z değeri 0'dir. Burdan:

$$
\begin{aligned}
\frac{15-n\ \mu}{\sigma\sqrt{n}} &\geq 0 \\
15 &\geq n\ \mu \\
n &\geq \frac{15}{\mu} \\
n &\approx 4
\end{aligned}
$$

Yani, 4 adet yazıcının çalışma süresinin toplamda 15'i geçme ihtimali 0.50'nin üzerindedir.

S3: İki tane kavanozdan birinde 2 beyaz 4 kırmızı top var, diğerinde 1 beyaz 1 kırmızı top var. Bu kavanozlardan ilkinden rastgele bir top çekilip diğer kavanoza koyuluyor. Sonra bu ikinci kavanozdan rastgele bir top çekilip ilk kavanoza konuyor. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

(a) `(10 puan)` İkinci kavanozdan beyaz top çekmiş olma olasılığı nedir? Açıklayarak çözünüz.

Çözüm 3a:

Olayları şöyle tanımlayalım:

B_1 : 1. kavanozdan beyaz çekilme olayı. $P(B_1) = \frac{1}{3}$.

B_2 : 2. kavanozdan beyaz çekilme olayı. $P(B_2|B_1) = \frac{2}{3}$, $P(B_2|B_1^C) = \frac{1}{3}$, O zaman:

$$
\begin{aligned}
P(B_2) &= P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|B_1^C)P(B_1^C) \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\
P(B_2) &= \frac{4}{9} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

(b) `(10 puan)` İkinci kavanozdan beyaz top çekilmiş olması şartı altında ilk kavanozdan ikinci kavanoza aktarılan topun beyaz olmuş olma ihtimali nedir? Açıklayarak çözünüz.

Çözüm 3b:

$$
\begin{aligned}
P(B_1|B_2) &= \frac{P(B_2|B_1)P(B_1)}{P(B_2)} \\
&= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} \\
&= \frac{1}{2} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

S4: `(15 puan)` Ahmet 7 tane seviyesi olan bir Bilgisayar Oyunu oynuyor. Ahmet'in bu oyunda j'inci seviyeden $(j+1)$'inci seviyeye atlama ihtimali p_j, $j = 1, 2, .., 6$. Mesela: 1. seviyeden 2. seviyeye çıkma ihtimali p_1, 2. seviyeden 3. seviyeye çıkma ihtimali p_2, vs.. X, Ahmet'in ulaşabileceği en yüksek seviye ise, X'in Olasılık Kütle Fonksiyonu nedir? (p_1, p_2,.., p_6 cinsinden.) (Not: Açıklayarak çözünüz.)

Çözüm 4:

$i \leq< 6$ için $X = i$ olayının oluşması için Ahmet'in ilk i seviyeyi başarıyla geçmesi, bir sonraki seviyeyi de geçememiz olması lazım. $X = 7$ olması için de bütün seviyelerde başarılı olması lazım. Bu durumda OKF şöyle yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= (1-p_1)\\
P(X=2) &= p_1\ (1-p_2)\\
P(X=3) &= p_1\ p_2\ (1-p_3)\\
P(X=4) &= p_1\ p_2\ p_3\ (1-p_4)\\
P(X=5) &= p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ (1-p_5)\\
P(X=6) &= p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5\ (1-p_6)\\
P(X=7) &= p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5\ p_6
\end{aligned}
$$