BIMU2004
Olasılık Teorisi ve İstatistik
Bütünleme Sınavı Soru ve Çözümleri

İstanbul Üniversitesi - Cerrahpaşa
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü - Güz 2020

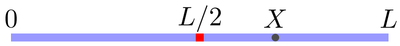
4.Şubat.2020 14:00 - 15:30 arası

SORULAR ve ÇÖZÜMLER

S1: L uzunluğunda bir çubuk rastgele ikiye bölünüyor. Çubuğun bölünme noktası çubuk boyunca eşit olasılığa sahiptir. Aşağıdaki soruları açıklama yaparak çözünüz.

(a) `(14 puan)` İki parçadan kısa olanın uzunluğunun beklenen değeri ne olur?

Çözüm 1a:



Uzunluğu L olan bir çubuğun bir ucuna 0, diğer ucuna bitiş noktası olarak L diyelim. Bu çubukta rasgtele bir nokta seçelim ve çubuğu burdan bölelim. Bu noktanın 0 noktasına olan uzunluğuna X dersek, X bir birbiçimli dağılımlı rastgele değişkendir ve olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{L}, & 0 < x < L \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

Kısa bölümün uzunluğu X'in bir fonksiyonu olarak verilebilir, öyle ki, $g(X)$ kısa olanın uzunluğu ise:

$$g(X) = \begin{cases} X, & 0 < X < L/2 \\ L - X & L/2 < X < L \end{cases}$$

O zaman bizden istenen $E[g(X)]$'tir.

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{L/2} x \, \frac{1}{L} \, \mathrm{d}x + \int_{L/2}^{L} (L - x) \, \frac{1}{L} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{L/2} + \frac{1}{L} \left[Lx - \frac{x^2}{2} \right]_{L/2}^{L} \\ &= \frac{1}{L} \left(\frac{L^2}{4} + L^2 - \frac{L^2}{2} - L \cdot \frac{L}{2} + \frac{L^2}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E[g(X)] = \frac{L}{4}} \quad \blacksquare$$

(b) `(15 puan)` Çubuğun bir ucuna 0 diğer ucuna L diyelim ve çubuk üzerindeki noktalar bu eksendeki (0,L) arasındaki reel sayılar olsun. Çubuğu bölmeden önce kalemle rastgele bir nokta işaretleyelim Bu nokta eksen üzerinde b noktası olsun ($0 < b < L$). Çubuğu rastgele böldükten sonra bu kalemle işaretlediğimiz noktayı ihtiva eden çubuk parçasının ortalama uzunluğu nedir?

Çözüm 1b:

$h(X)$, b'yi ihtiva eden parçanın uzunluğu olsun. Eğer X, b'den büyükse, b, 0 ile X arasında bir yerdedir. Eğer tersi doğruysa, b, diğer parçadadaır. O zaman:

$$h(X) = \begin{cases} X, & L > X > b > 0 \\ L - X, & 0 < X < b < L \end{cases}$$

olur. Bizden istenen $E[h(X)]$'tir.

$$
\begin{aligned}
E[h(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^b (L-x)\,\frac{1}{L}\,\mathrm{d}x + \int_b^L x\,\frac{1}{L}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{L}\left[Lx - \frac{x^2}{2}\right]_0^b + \frac{1}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_b^L \\
&= \frac{1}{L}\left(Lb - \frac{b^2}{2} + \frac{L^2-b^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{L}\,(Lb - b^2 + \frac{L^2}{2}) \\
&= \frac{b(L-b)}{L} + \frac{L}{2}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{E[g(X)] = \frac{b}{L}(L-b) + \frac{L}{2}} \quad \blacksquare$$

S2: X ve Y sürekli rasgele değişkenler ve birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$
f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{c}{x} \;, & 0 < y < x < 1, \qquad x,y \in \mathbb{R} \\ 0 \;, & \text{diğer} \end{cases}
$$

Aşağıdaki soruları çözünüz. Çözerken açıklama yazmayı unutmayınız.

(a) `(14 puan)` c nedir?

Çözüm 2a:

Önce X'in marjinal dağılımını bulalım, zaten kullanacağız:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^x c/x\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{c}{x}\cdot x \\
&= c \quad (0 < x < 1)
\end{aligned}
$$

$f_X(x)$ OYF şartlarını sağlamalıdır. Burdan:

$$\int_0^1 c\ \mathrm{d}x = 1$$

$$\boxed{c = 1} \quad \blacksquare$$

(b) `(14 puan)` X ve Y'nin korelasyon katsayısını bulunuz.

Çözüm 2b:

Sırasıyla lazım olacak bütün değerleri bulalım:

Beklenen değerler:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 x\cdot 1\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^1 \int_0^x y\cdot\frac{1}{x}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x}[y^2/2]_0^x\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Varyanslar:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^1 x^2\cdot 1\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\
&= \frac{1}{9} - \frac{1}{16} \\
&= \frac{7}{144}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_0^1 \int_0^x y^2 \cdot \frac{1}{x} \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x} \left[\frac{1}{3} y^3\right]_0^x \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \left[x^3\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_0^1 \int_0^x x \cdot y \cdot \frac{1}{x} \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} \left[y^2\right]_0^x \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \, dx \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Kovaryans ve Korelasyon:

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) = \sigma_{XY} &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\sigma_{XY} = \frac{1}{24}} \quad \blacksquare$$

$$Corr(X,Y) = \rho_{XY} = \frac{\rho_{XY}}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

$$\boxed{\rho_{XY} = \frac{\sqrt{21}}{7} = 0.6547} \quad \blacksquare$$

(c) `(14 puan)` X'in 0.5'ten büyük olduğu biliniyorsa, bu şart altında Y'nin 0.7'den büyük olma ihtimali nedir? (Yani: $P(Y > 0.7 | X > 0.5)$)

Çözüm 2c:

A ve B olayları için, B şartı altında A'nın oluşma ihtimali:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad P(B) > 0 \qquad \text{olan yerlerde}$$

O halde:

$$P(Y > 0.7 | X > 0.5) = \frac{P(Y > 0.7, X > 0.5)}{P(X > 0.5)}$$

$$
\begin{aligned}
P(Y > 0.7, X > 0.5) &= \int_{0.7}^1 \int_{0.7}^x \frac{1}{x} \, dy \, dx \\
&= \int_{0.7}^1 \frac{1}{x} \, [x]_{0.7}^x \, dx \\
&= \int_{0.7}^1 \frac{1}{x} \, (x - 0.7) \, dx \\
&= \int_{0.7}^1 1 \, dx - \int_{0.7}^1 0.7 \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
&= 0.3 - 0.7 \left[\ln(x)\right]_{0.7}^1 \\
&= 0.3 + 0.7 \cdot \ln(0.7) \\
&= 0.05032
\end{aligned}
$$

Yukarda dıştaki integrali 0.7'den başlattık, çünkü X ve Y'nin birleşik değer uzayı sadece X'in Y'den büyük olduğu bölgelerde tanımlı.

$$P(X > 0.5) = \int_{0.5}^1 1 \, dx = 0.5$$

$$P(Y > 0.7 | X > 0.5) = \frac{0.05032}{0.5}$$

$$\boxed{P(Y > 0.7 | X > 0.5) = 0.0252} \quad \blacksquare$$

S3: Her gün her saat açık olan büyük bir mağazaya müşteriler Poisson sürecini takip ederek geliyorlar ve saatte ortalama 30 müşteri geldiğini varsayalım. Aşağıdaki soruları cevaplayınız. Çözerken açıklama yazmayı unutmayınız.

(a) `(14 puan)` Bu mağazaya 24 saatte gelen müşteri sayısının 705 ile 740 arasında olma ihtimali yaklaşık olarak nedir?

Çözüm (3):

X: 24 saatte gelen müşteri sayısı olsun. X, Poisson dağılımlı bir rastgele değişkendir ve parametresi:

$$\begin{aligned}\alpha &= \lambda \times T\\ &= 30 \text{ müşteri/saaat} \times 24 \text{ saat}\\ &= 720 \text{ müşteri}\end{aligned}$$

X'in OKF'si:

$$\mathrm{p}_X(x) = P(X = x) = \mathrm{e}^{-720}\frac{720^x}{x!}$$

Bize sorulan $P(705 \leq X \leq 740)$. İşlemi elle yaptığımız ve yaklaşık değer sorulduğu için Standart Normal Dağılıma benzeterek yapalım.

$$E(X) = \mu_X = \alpha = 720$$
$$V(X) = \sigma_X^2 = 720$$
$$\sigma_X = \sqrt{720} = 26.8328$$

olduğunu biliyoruz. X'i standart normal dağılıma dönüştüreceğiz. Yani:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Standart Normal dağılımlı bir rastgele değişken olur. Burdan:

$$\begin{aligned}P(705 \leq X \leq 720) &\approx P\left(\frac{705 - 720}{26.8328} < Z < \frac{740 - 720}{26.8328}\right)\\ &= P(-0.559 < Z < 0.7454)\\ &= \phi(0.7454) - \phi(-0.559)\end{aligned}$$

Tablodan:

$$P(705 < X < 720) \approx 0.773 - 0.287$$
$$\boxed{P(705 < X < 720) \approx 0.486} \quad \blacksquare$$

(b) `(15 puan)` Her gün sonu, son 24 saat için gelen toplam müşteri sayısına göre mağaza elemanlarına aşağıdaki tabloya göre ikramiye veriliyor.

Müşteri Sayısı	:	İkramiye Miktarı
700'dan az	:	İkramiye Ödenmiyor
700 ile 749 arasında	:	1000 TL
750 ve üstü	:	3000 TL

Bu durumda bir 24 saat için ortalamada yaklaşık olarak ne kadar ikramiye verilir?

Çözüm (3):

Verilen ikramiye miktarına Y dersek, Y'nin değer uzayı $R_Y = 0, 1000, 3000$ dir. Y, X'in bir fonksiyonudur, $Y = g(X)$ dersek, $g(X)$ aşağıdaki gibidir:

$$Y = g(X) = \begin{cases} 0, & X < 700 \\ 1000, & 700 \leq X < 750 \\ 3000, & X \geq 750 \end{cases}$$

Bize sorulan $E[g(X)]$ veya $E(Y)$'dir. Bu da:

$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{x=0}^{\infty} g(x)p(x)\\ &= \sum_{x=0}^{699} 0 \cdot p(x) + \sum_{x=700}^{749} 1000 \cdot p(x) + \sum_{x=750}^{\infty} 3000 \cdot p(x)\end{aligned}$$

Bildiğimiz üzere $\sum_a^b \mathrm{p}(x) = P(a < X < b)$ idi, bu yüzden yukardaki eşitliği aşağıdaki gibi yazabiliriz (ilk ifade 0 olduğu için hesaba katmaya gerek yok):

$$\begin{aligned}E(Y) = 1000 \cdot P(699 < X < 750)\\ + 3000 \cdot P(750 \leq X)\end{aligned}$$

Bunu Poisson OKF'si kullanarak değil, normal dağılıma benzeterek yapalım, fakat sınırları şu şekilde yazarsak daha iyi sonuç alırız:

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= 1000 \cdot P(699.5 < X < 749.5) \\
&\qquad + 3000 \cdot P(749.5 < X) \\
&\approx 1000 \cdot P\left(\frac{699.5 - 720}{26.8328} < Z < \frac{749.5 - 720}{26.8328}\right) \\
&\qquad + 3000 \cdot P\left(Z > \frac{749.5 - 720}{26.8328}\right) \\
&= 1000 \cdot P(-0.764 < Z < 1.099) \\
&\qquad + 3000 \cdot P(Z > 1.099) \\
&= 1000(0.864 - 0.224) + 3000 \cdot (1 - 0.864) \\
&= 640 + 408
\end{aligned}
$$

$$\boxed{= 1048 \quad \text{TL}} \qquad \blacksquare$$