BIMU2004
Olasılık Teorisi ve İstatistik
Yıliçi Sınavı Soruları ve Çözümleri

İstanbul Üniversitesi - Cerrahpaşa

Bilgisayar Mühendisliği Bölümü - Güz 2021

1 Kasım 2021 11:10-12:25

`Son güncelleme: 2021-12-27 16:01`

S1: Elimizde 6 tane beyaz 5 tane de siyah kart olduğunu düşünelim. Bu kartların üzerine rastgele 1'den 11'e kadar, her kartta farklı sayı olması kaydıyla, sayı yazıyoruz. X rastgele değişkeni beyaz kartların üzerindeki en küçük sayı olsun. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

(a) `(10 p)` X'in değer uzayı nedir? Açıklayınız. (Kısa bir açıklama)

Çözüm 1a:

X'in değeri en az 1 olabilir, en fazla da 6 olabilir. Toplamda 6 tane beyaz kart var hepsini en yüksek yerlere yerleştirirsek beyaz kartların en küçüğünün üzerindeki sayı $X = 6$ olur, daha büyük olmaz.

$$\boxed{R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$$

Not: Bunu şöyle yazmak yanlıştır: $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

(b) `(10 p)` X'in Olasılık Kütle Fonksiyonunu açıklayarak bulunuz.

Çözüm 1b:

11 karta 11! farklı şekilde sayı yazılabilir. Beyaz kartlardan en küçük numaralısı $X = x$ değerini alır. 6 karttan herhangi bir tanesi bu numarayı alabileceği için buraya 6 tane ihtimalden biri gelebilir. Diğer 5 beyaza $x + 1$ ile 11 arasında sayılar yazılabilir, yani toplamda $11 - x - 1 + 1 = 11 - x$ tane sayıyı 5 beyaz karta $\binom{11-x}{5}$ 5! şekilde yazabiliriz. Geriye kalan 5 siyahı kalan sayıların herhangi bir dizilişiyle numaralandırabiliriz, bu da 5! adettir. Böylece O.K.F.:

$$P(X=x)=\mathrm{p}(x)=\frac{6\binom{11-x}{5}\,5!\,5!}{11!},\qquad 1\leq x\leq 6$$
$$P(X=x)=\mathrm{p}(x)=\frac{\binom{11-x}{5}\,6!\,5!}{11!},\qquad 1\leq x\leq 6$$
$$P(X=x)=\mathrm{p}(x)=\frac{\binom{11-x}{5}}{\binom{11}{6}},\qquad 1\leq x\leq 6\qquad\blacksquare$$

Burdan:

$$P(X=1)=\mathrm{p}(1)=\frac{6}{11}=0.5455$$
$$P(X=2)=\mathrm{p}(2)=\frac{3}{11}=0.2727$$
$$P(X=3)=\mathrm{p}(3)=\frac{4}{33}=0.1212$$
$$P(X=4)=\mathrm{p}(4)=\frac{1}{22}=0.0455$$
$$P(X=5)=\mathrm{p}(5)=\frac{1}{77}=0.01299$$
$$P(X=6)=\mathrm{p}(6)=\frac{1}{462}=0.00216$$

Bunları topladığımızda 1 olduğu görülecektir.

S2: Ahmet yağmurlu bir günde 0.34 ihtimalle evden çıkmakta, 0.66 ihtimalle de evde kalmaktadır. Yağmursuz bir günde ise 0.83 ihtimalle evden çıkmakta, 0.17 ihtimalle de evde kalmaktadır. Herhangi bir gün yağmur yağma ihtimalinin 0.21 olduğunu varsayalım ve bu ihtimal bütün günler için aynı olsun. Aşağıdaki soruları açıklamalı olarak cevaplayınız.

(a) `(10 p)` Ahmet dün evden çıkmışsa dün yağmur yağmış olma ihtimali nedir?

Çözüm 2a:

Önce bazı olayları tanımlayalım:

E: Ahmet'in evden çıkma olayı

Y: Yağmur yağma olayı

Bunlar biliniyor:

$$P(Y) = 0.21$$
$$P(Y^c) = 0.79$$
$$P(E|Y) = 0.34$$
$$P(E^c|Y) = 0.66$$
$$P(E|Y^c) = 0.83$$
$$P(E^c|Y^c) = 0.17$$

Bize sorulan $P(Y|E)$'dir. Bayes Kuralını kullanırsak:

$$P(Y|E) = \frac{P(E|Y)P(Y)}{P(E)}$$
$$P(E) = P(E|Y)P(Y) + P(E|Y^c)P(Y^c)$$
$$P(E) = 0.34 \times 0.21 + 0.83 \times 0.79$$
$$P(E) = 0.7271$$
$$P(Y|E) = \frac{0.34 \times 0.21}{0.7271}$$
$$\boxed{P(Y|E) = 0.0982} \quad \blacksquare$$

(b) `(10 p)` Ahmet'in, bu hafta Salı gününden başlayarak, evden ilk çıktığı günün önümüzdeki ilk Perşembe, Cuma veya Cumartesi olma ihtimali nedir?

Çözüm 2b:

Ahmet'in evden çıkma olayı E idi ve ihtimalini bir önceki şıkta 0.7271 olarak bulduk. X: Salı gününden başlayarak evden çıktığı ilk gün ise, X bir Geometrik rastgele değişkendir ve parametresi $p = 0.7271$'dir. Bize sorulan $P(3 \leq X \leq 5)$'dir. Burdan:

$$P(X = x) = \mathrm{p}(x) = (1-p)^{x-1}\, p$$
$$P(3 \leq X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$
$$P(3 \leq X \leq 5) = (0.2729^2 + 0.2729^3 + 0.2729^4) \times 0.7271$$
$$\boxed{P(3 \leq X \leq 5) = 0.073} \quad \blacksquare$$

S3: Bir ayrık rasgele degişken X'in Olasılık Kütle Fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$P(X = x) = \mathrm{p}(x) = \begin{cases} \alpha\, 2^{-|x|} \quad , & x \in \{-2, 0, 1, 2\} \quad x \in \mathbb{Z} \\ 0 \quad , & \text{diğerleri} \end{cases}$$

(a) `(10 puan)` α'nın değerini açıklayarak bulunuz.

Çözüm 3a:

OKF'nin aşağıdaki şartı sağlaması gerekir:

$$\sum_{\forall x \in R_X} \mathrm{p}(x) = 1$$

Öyleyse

$$\begin{aligned}
\alpha \times (2^{-2} + 1 + 2^{-1} + 2^{-2}) &= 1 \\
\alpha \times \left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) &= 1 \\
\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}
\end{aligned} \quad \blacksquare$$

(b) `(10 puan)` X'in birikimli dağılım fonksiyonunu açıklayarak bulunuz.

Çözüm 3b:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\forall x_i \in R_x, x_i \leq x}^{x} \mathrm{p}(x_i)$$

Burdan:

$$\begin{aligned}
&F(x) = 0 && x < -2 \text{ için} \\
&F(x) = \mathrm{p}(-2) = \frac{1}{8} \quad -2 \leq x < 0 \text{ için} \\
&F(x) = \mathrm{p}(-2) + \mathrm{p}(0) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8} && 0 \leq x < 1 \text{ için} \\
&F(x) = \frac{5}{8} + \mathrm{p}(1) = \frac{7}{8} && 1 \leq x < 2 \text{ için} \\
&F(x) = \frac{7}{8} + \mathrm{p}(2) = 1 && 2 \leq x \text{ için}
\end{aligned}$$

Burdan:

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 \ , & x < -2 \\ \frac{1}{8} \ , & -2 \leq x < 0 \\ \frac{5}{8} \ , & 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{8} \ , & 1 \leq z < 2 \\ 1 \ , & x \geq 2 \end{cases}} \qquad \blacksquare$$

(c) `(10 puan)` X'in bir fonksiyonu $g(X) = X^2 + 1$ olarak verilmişse, $g(X)$'in beklenen değerini açıklayarak bulunuz.

Çözüm 3c:

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \sum_{\forall x \in R_x} g(x)\ \mathrm{p}(x) \\ &= [(-2)^2+1] \times \frac{1}{8} + [0^2+1] \times \frac{1}{2} + [1^2+1] \times \frac{1}{4} + [2^2+1] \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{5}{8} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$\boxed{E[g(X)] = \frac{9}{4}} \qquad \blacksquare$$

S4: Bir masada 14 adet kart vardır. Bu kartların 5'inin bir yüzü yeşil, 9'unun bir yüzü kırmızı olsun. Bu kartlar rengi görünmeyecek şekilde ters çevrilip karıştırılıyor. Bir oyuncuya bu kartların içinden rastgele birer birer kart çekerek toplamda 2 adet kart veriliyor. X: 2 kart verildikten sonra oyuncunun sahip olduğu yeşil kart sayısını gösteren bir rastgele değişken ise aşağıdaki soruları cevaplayınız.

(a) `(10 puan)` X'in değer uzayını açıklayarak bulunuz.

Çözüm 4a:

Oyuncu kart verme işleminden sonra 0, 1 veya 2 yeşil kart sahibi olabilir. Öyleyse:

$$\boxed{R_X = \{0, 1, 2\}}$$

(b) `(10 puan)` X'in beklenen değerini açıklayarak bulunuz.

Çözüm 4b:

Şöyle iki olay tanımlayalım:

Y_1: Verilen birinci kartın yeşil olma olayı

Y_2: Verilen ikinci kartın yeşil olma olayı

Ayrıca:
$X = 0$ olayı $Y_1^c Y_2^c$ olayına eşit.
$X = 1$ olayı $Y_1^C Y_2 \bigcup Y_1 Y_2^C$ olayına eşit.
$X = 2$ olayı da $Y_1 Y_2$ olayına eşittir.

$$\begin{aligned}
P(Y_1) &= \frac{5}{14} \\
P(Y_1^c) &= 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14} \\
P(Y_2|Y_1) &= \frac{4}{13} \\
P(Y_2^c|Y_1) &= 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13} \\
P(Y_2|Y_1^C) &= \frac{5}{13} \\
P(Y_2^c|Y_1^c) &= 1 - \frac{5}{13} = \frac{8}{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= P(Y_1^c Y_2^c) \\
&= P(Y_2^{|} Y_1^c) P(Y_1^c) \\
&= \frac{8}{13} \times \frac{9}{14} \\
&= \frac{36}{91}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X = 1) &= P(Y_1 Y_2^c) + P(Y_1^c Y_2) \\
&= P(Y_2^c|Y_1) P(Y_1) + P(Y_2|Y_1^c) P(Y_1^c) \\
&= \frac{9}{13} \times \frac{5}{14} + \frac{5}{13} \times \frac{9}{14} \\
&= \frac{45}{91}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X = 2) &= P(Y_1 Y_2) \\
&= P(Y_2|Y_1) P(Y_1) \\
&= \frac{4}{13} \times \frac{5}{14} \\
&= \frac{10}{91}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) \\
&= \frac{45}{91} + \frac{20}{91} \\
&= \frac{65}{91}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{E(X) = \frac{5}{7}} \qquad \blacksquare$$

(c) `(10 puan)` Verilen ilk kartın kırmızı olması şartı altında oyuncunuya verilen ikinci kartın yeşil olma ihtimali nedir? Açıklayarak bulunuz.

Çözüm 4c:

Bir önceki şıktaki tanımlamaları kullanırsak bizden istenen istenen $P(Y_2|Y_1^c)$. Eğer 1. kart kırmızı geldiyse elde 8'i kırmızı, 5'i sarı olmak üzere 13 kart kalmış demektir. Böylece:

$$\boxed{P(Y_2|Y_1^c) = \frac{5}{13}} \qquad \blacksquare$$