

**BIMU2004**  
**Olasılık Teorisi ve İstatistik**  
**Vize Mazeret Sınavı Çözümleri**

İstanbul Üniversitesi - Cerrahpaşa  
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü - Güz 2022

13 Aralık 2022 11:20-12:30

Son güncelleme: 2022-12-15 15:46

**LÜTFEN OKUYUN:**

- Sınava sizin için belirlenen sınıfta giriniz.
- Bu sınavın süresi 70 dakikadır. Süre bittiğinde cevap kağıdını doldurmaya devam edenler kopya çekmiş sayılır.
- Lütfen soruları kurşun kalemle, TÜRKÇE, kısa ve anlaşılır olarak cevaplayınız. **Anlaşılmayan, muğlak ifadeler kullanmak, kötü yazı yazmak notunuza negatif olarak etki edecektir.**
- Sınavda 1 adet hesap makinası kullanabilirsiniz. Bunların dışında her türlü defter, kitap, notlar, sözlük ve elektronik sözlük yasaktır.
- **Hesap makinası ve bilgi paylaşmak kopya sayılacaktır!**
- Bilgisayar, PDA, cep telefonu türünden elektronik cihazlar kullanmak yasaktır.
- Soruları çözmeye başlamadan lütfen okuyun.
- Soru ve cevap kağıtlarına isim ve numaranızı yazınız.
- Soru ve cevap kağıtlarınızı çıkarken cevap kağıdınızla beraber teslim ediniz.
- Bu sınavda toplam 100 puanlık soru vardır.
- **SINAVDA KOPYA ÇEKENLER, KOPYA VERENLER VE BUNLARA TEŞEBBÜS EDENLER SINAVDAN "0" ALACAKTIR VE DEKANLIĞA ŞİKAYET EDİLECEKLERDİR!**
- Çözümlerinizi ondalık sayı olarak verecekseniz noktadan sonra en az 3 basamak hassasiyet olmalıdır.
- Çözümlerinizi kesirli ise sadeleştirin, mesela sonuç  $\frac{2}{4}$  ise  $\frac{1}{2}$  yapılmalıdır.

Başarılar. (Mustafa Dağtekin)

Birikimli Standard Normal Dağılım Tablosu. $\phi(z)$										
z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Bazı formüller ( $0 < b < 1, c > 0$ )

$$\sum_{x=1}^{\infty} b^{cx} = \frac{b^c}{1-b^c}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} x b^{cx} = \frac{b^c}{(b^c-1)^2}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} x^2 b^{cx} = \frac{b^c + b^{2c}}{(1-b^c)^3}$$

## SORULAR

**S1:** Bir AYRIK rastgele değişken olan  $X$ 'in Olasılık Kütles Fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$p(x) = \begin{cases} \alpha x \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}, & 1 \leq x, \quad x \in \mathbb{Z}^+ \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

(a) (10 puan)  $\alpha = \frac{9}{4} = 2.25$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm** (1a):

O.K.F. şu şartı sağlamalıdır:

$$\sum_{x \in R_X} p(x) = 1$$

Buradan :

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{\infty} \alpha x \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} &= 1 \\ \alpha \sum_{x=1}^{\infty} x \left(\frac{1}{4}\right)^x &= 1 \\ \alpha \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{4} - 1\right)^2} &= 1 \\ \alpha &= 4 \times \frac{9}{16} \\ \alpha &= \frac{9}{4} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(b) (10 puan)  $X$ 'in 4 veya 5 değeri alma olasılığını bulunuz.

**Çözüm** (1b):

$$\begin{aligned} P(X = 4) + P(X = 5) &= \frac{9}{4} \times 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \frac{9}{4} \times 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \\ &= \frac{9}{256} + \frac{45}{4096} \\ &= \frac{189}{3096} = 0.0461 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(c) (10 puan)  $X$ 'in bir fonksiyonu  $g(X) = X + \frac{1}{X}$  olarak verilmişse,  $g(X)$ 'in beklenen değeri bulunuz.

**Çözüm (1c):**

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \sum_{x \in R_X} g(x) p(x) \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{9}{4} x \left(\frac{1}{4}\right)^x \\ &= \frac{9}{4} \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \left(\frac{1}{4}\right)^x + \frac{9}{4} \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x \\ &= \frac{9}{4} \frac{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^3} + \frac{9}{4} \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{5}{3} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{29}{12} = 2.4167 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**S2:** Bir oyun bilgisayarı perakendecisinin yeni bilgisayarlara ihtiyacı var. Bu perakendecinin almak istediği bilgisayarları üreten 3 adet firma var: Monster, MSI ve Casper. Bu perakendeci, Monster marka bilgisayardan  $n$  tane, MSI marka bilgisayardan  $2n$  tane ve Casper marka bilgisayardan  $3n$  tane alıyor. Monster marka bilgisayarın bozuk çıkma olasılığı  $p$ , MSI marka bilgisayarın bozuk çıkma olasılığı  $2p$  ve Casper marka bilgisayarın bozuk çıkma olasılığı  $3p$  olsun.

(a) (10 puan) Rastgele seçilen bir bilgisayarın sağlam olma ihtimali nedir?

**Çözüm (2a):**

Olaylarımızı tanımlayalım.

$M$ : Seçilen bilgisayarın Monster olma olayı,

$I$ : Seçilen bilgisayarın MSI olma olayı,

$C$ : Seçilen bilgisayarın Casper olma olayı,

$D$ : Seçilen bilgisayarın sağlam olma olayı,

$D^C$ : Seçilen bilgisayarın bozuk olma olayı.

Bildiğimiz değerler:

$$\begin{aligned} P(M) &= \frac{n}{6n} = \frac{1}{6} \\ P(I) &= \frac{2n}{6n} = \frac{2}{6} \\ P(C) &= \frac{3n}{6n} = \frac{3}{6} \\ P(D^C|M) &= p, \quad P(D|M) = 1 - p \\ P(D^C|I) &= 2p, \quad P(D|I) = 1 - 2p \\ P(D^C|C) &= 3p, \quad P(D|C) = 1 - 3p \end{aligned}$$

Burdan:

$$\begin{aligned}
P(D) &= P(D|M) P(M) + P(D|I) P(I) + P(D|C) P(C) \\
&= (1-p) \cdot \frac{1}{6} + (1-2p) \cdot \frac{2}{6} + (1-3p) \cdot \frac{3}{6} \\
&= \frac{1}{6} \{ (1-p) + (2-4p) + (3-9p) \} \\
&= \frac{1}{6} (6-14p) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

- (b) (10 puan) Rastgele seçilen bir bilgisayarın bozuk olduğu ortaya çıkıyor. Bu bilgisayarın markasının MSI olma ihtimali nedir?

**Çözüm** (2b):

Bize sorulan  $P(I|D^C)$ .

$$\begin{aligned}
P(I|D^C) &= \frac{P(D^C|I)P(I)}{P(D^C)} \\
P(D^C) &= 1 - P(D) = \frac{14p}{6} \\
&= \frac{2p \cdot \frac{2}{6}}{\frac{14p}{6}} \\
&= \frac{2}{7} = 0.2857 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

- S3:** (10 puan)  $X$ , ortalaması 0.5, varyansı 4 olan Normal dağılımlı bir rastgele değişken olsun.  $P(X > c) = 0.25$  olmasını sağlayan  $c$  değerini bulunuz.

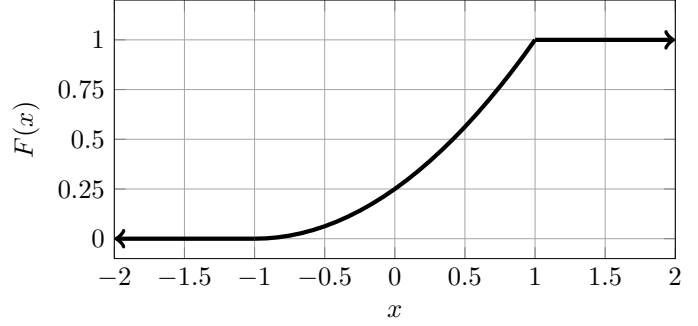
**Çözüm** (3):

Standardize ederiz.  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$  dönüşümünü uygulayalım.

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{c-0.5}{2}\right) &= 0.25 \\
1 - \phi\left(\frac{c-0.5}{2}\right) &= 0.25 \\
\phi\left(\frac{c-0.5}{2}\right) &= 0.75 \\
\frac{c-0.5}{2} &= 0.67 \quad (\text{tablodan.}) \\
c &= 1.84 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**S4:**  $X$  sürekli bir rastgele değişken ve BİRİKİMLİ (toplamsal, kümülatif) Dağılım fonksiyonu ve grafiği aşağıdaki gibidir:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -1 \\ \frac{x^2 - 1}{4} + \frac{x + 1}{2} & , \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$



(a) (10 puan)  $X$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

**Çözüm** (4a):

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

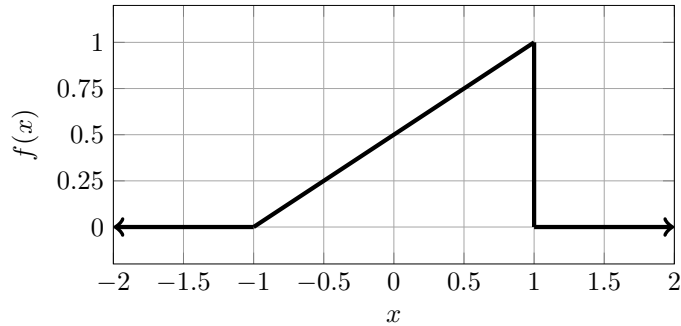
olduğunu biliyoruz. Burdan:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{4} + \frac{1}{2} & , \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

Sadeleştirilim:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + 1}{2} & , \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

Bunu çizelim:



(b) (10 puan)  $P(-0.25 < X < 0.25)$ 'i bulunuz.

**Çözüm** (4b):

$$\begin{aligned} P(-0.25 < X < 0.25) &= F(0.25) - F(-0.25) \\ &= \{0.25(0.25^2 - 1) + 0.5(0.25 + 1)\} - \{0.25((-0.25)^2 - 1) + 0.5(-0.25 + 1)\} \\ &= 0.3906 - 0.1406 \\ &= 0.25 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**S5:** Bir otobüs durağına gelen otobüs sayısı Poisson dağılımını takip etmektedir ve ortalamada durağa 5 saat içinde 12 otobüs gelmektedir. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- (a) (10 puan) Otobüs seferleri sabah 09:00'da başlamaktadır. Bu durağa saat 10:30 ile 11:20 arasında en az 2 otobüs gelme ihtimali nedir?

**Çözüm** (5a):

Birim saat başına gelen otobüs sayısına bakalım:

$$\lambda = 12/5 = 2.4 \quad \text{otobüs/saat}$$

Saymaya başlama saati önemli değildir, o yüzden:

$X$  : 50 dakikalık sürede gelen otobüs sayısı.

$$50 \text{ dk} = 50/60 = 5/6 \text{ saat. } \alpha = 5/6 \text{ saat} \times 12/5 \text{ otobüs/saat} = 2 \text{ otobüs}$$

$$\begin{aligned} P(X = x) &= e^{-2} \frac{2^x}{x!} \quad x \geq 0 \\ P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\} \\ &= 1 - e^{-2} \left\{ \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} \right\} \\ &= 1 - e^{-2} (1 + 2) \\ &= 1 - 0.4960 \\ &= 0.594 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- (b) (10 puan) Saat 09:00'dan sonra ilk otobüsün durağa 10:00'dan sonra gelme ihtimali nedir?

**Çözüm** (5b):

$Y$ : Saat 9'dan itibaren ilk otobüsün gelmesine kadar geçen zaman (saat cinsinden) ise  $Y$  bir üssel rasgele değişkendir. OKF'si,  $\lambda = 2.4$  otobüs/saat, olmak üzere

$$P(Y = y) = f(y) = \lambda e^{-\lambda y} \quad y > 0$$

Bize sorulan  $P(Y > 1)$ 'dir.

$$\begin{aligned}
P(Y > 1) &= \int_1^{\infty} f(y) \, dy \\
&= \lambda \int_1^{\infty} e^{-\lambda y} \, dy \\
&= \lambda \cdot \frac{-1}{\lambda} [e^{-\lambda y}]_1^{\infty} \\
&= e^{-\lambda} \\
&= e^{-2.4} \\
&= 0.0907 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

---

LÜTFEN SINAV KAĞITLARINIZA İSİM YAZARAK CEVAP KAĞIDIYLA BERABER TESLİM EDİNİZ.