

# Olasılık Teorisi ve İstatistik

## İÜC Bilgisayar Mühendisliği

Final Sınavı  
28.Aralık.2018

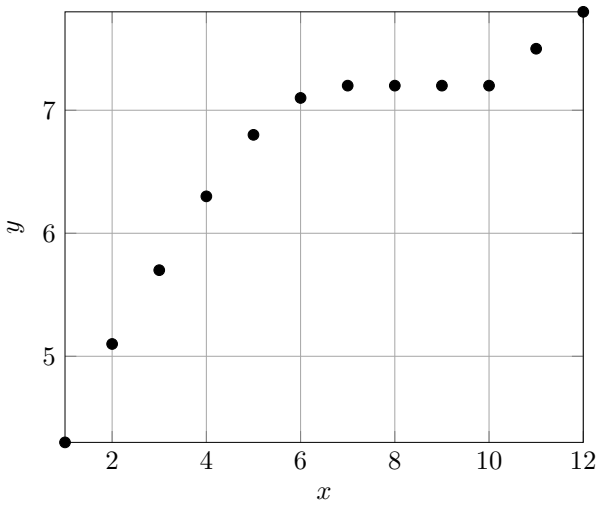
Numara	:	
İsim	:	
Soyisim	:	
İmza	:	

Bu sınavda, kapak sayfası dahil olmak üzere, 4 sayfa ve 17 soru vardır. Sınavda toplam 125 puanlık soru vardır. Bu sınavın süresi **70 dakikadır**. Lütfen test sorularını kağıdın üzerinde işaretleyiniz. Klasik sorular için cevaplarınızı sorulardan sonra gelen boş kısımlara yapınız, eğer bu kısımlar yetmezse gözetmenenden kağıt isteyiniz. **Bazı sorular çoktan seçmelidir ve şıkların önünde harf veya çember vardır. Lütfen önüne harf olan şıklardan doğru cevabı yuvarlak içine alınız, çemberli şıklarda doğru cevapların için doldurunuz.** Lütfen soruları TÜRKÇE kısa ve anlaşılır olarak cevaplayınız. **Anlaşılmayan, muğlak ifadeler kullanmak, kötü yazı yazmak notunuza negatif olarak etki edecektir.** Sınavda 1 adet hesap makinesi kullanabilirsiniz. Sınavda hatırlamanıza yardımcı olacak formüller ve tablolar için 1 adet A4 kağıdının arkasına içinde soru çözümleri olmayan not kağıdı ve derste bahsettiğimiz 10 sayfalık "cheat sheet" in çıktısını arkalı önlü 5 sayfa olacak şekilde getirebilirsiniz. Fotokopi veya bilgisayar çıktısı olabilir. Ayrıca kendi getirdiğiniz Birikimli Standart Normal Dağılım tablosu kullanabilirsiniz. Her türlü defter, kitap, notlar, sözlük ve elektronik sözlük yasaktır. Materyalin paylaşılması yasaktır. **SINAVDA KOPYA ÇEKENLER, KOPYA VERENLER VE BUNLARA TEŞEBBÜS EDENLER SINAVDAN "0" ALACAKTIR VE DEKANLIĞA ŞİKAYET EDİLECEKLERDİR!** Başarılar. (Mustafa Dağtekin)

**Soru 1:** [5 Puan] Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A. Birikimli dağılım fonksiyonu 1'den büyük değerler alabilir.  
B. Birikimli dağılım fonksiyonu *azalmayan* bir fonksiyondur, yani ya artar veya aynı kalır, hiç azalmaz.  
C. Birikimli dağılım fonksiyonu *artmayan* bir fonksiyondur, yani ya azalır veya aynı kalır, hiç artmaz.  
D. Birikimli dağılım fonksiyonu negatif değerler alabilir.

**Soru 2:** [5 Puan] Aşağıdaki grafikte bir rastgele örnekten alınan  $x$  ve  $y$  rastgele değişkenlerinin serpm diyagramı bulunmaktadır.  $x$  eksen  $x$  rastgele değişkenini,  $y$  eksen  $y$  rastgele değişkenini göstermektedir.



Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A.  $x$  ve  $y$  arasında pozitif korelasyon vardır ve korelasyon katsayısı 0 ile 1 arasındadır, sınırlar dahil değildir.  
B.  $x$  ve  $y$  arasında negatif korelasyon vardır ve korelasyon katsayısı 0 ile -1 arasındadır, sınırlar dahil değildir.

C.  $x$  ve  $y$  arasında sıfır korelasyon vardır.

D.  $x$  ve  $y$  arasında pozitif korelasyon vardır ve korelasyon katsayısı 1'dir.

E.  $x$  ve  $y$  arasında negatif korelasyon vardır ve korelasyon katsayısı -1'dir.

**Soru 3:** [5 Puan]  $X$  herhangi bir sürekli veya ayrık rastgele değişken olsun. Aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A.  $X$ 'in varyansı negatif olabilir.

B.  $X$ 'in ortalaması negatif olabilir.

C.  $-1 < f_X(x) < 0$

D.  $X$ 'in değer uzayı 0'dan büyük olmak zorundadır.

E.  $E(X^2) = \mu_X^2$

**Soru 4:** [5 Puan]  $X$  herhangi bir sürekli veya ayrık rastgele değişken olsun.  $X$ 'in 1. momenti 3, 2. momenti 13, 3. momenti 25 olsun.  $X$ 'in standart sapması kaçtır?

A. 25 B. 13 C. 2 D. 4 E. 12

**Soru 5:** [5 Puan]  $Z$  standart normal dağılımlı bir rastgele değişken,  $f_z(z)$ ,  $Z$ 'nin *olasılık yoğunluk fonksiyonu* ve  $\phi(z)$ ,  $Z$ 'nin *birikimli dağılım fonksiyonu* ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A.  $0.84 < P(Z = 1) < 0.85$

B.  $E(Z) = 1$

C.  $\phi(1.2) = P(Z > 1.2)$

D.  $0.22 < P(Z < -0.75) < 0.23$

E.  $P(Z > -0.67) < 0.5$

**Soru 6:** [5 Puan]  $X$ , parametresi  $\lambda = 2$  olan üstel dağılımlı bir rastgele değişken ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A.  $X$ 'in değer uzayı  $R_X = \mathbb{R}$ 'dir. ( $\mathbb{R}$ : Reel sayılar kümesi)

B.  $f_X(x) = e^{-2x}$ ,  $x > 0$

C.  $F_X(x) = 1 - e^{-2x}, \quad x > 0$

D.  $\sigma_X = \frac{1}{4}$

E.  $\mu_X = \frac{1}{4}$

**Soru 7:** [5 Puan] Gama fonksiyonu için aşağıdaki ilk 4 şıktan hangisi yanlıştır? Eğer yanlış yoksa, E şikkını işaretleyin.

A.  $r$  bir tamsayı ise,  $\Gamma(r) = (r - 1)!$

B.  $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx$

C.  $\Gamma(r) = (r - 1) \Gamma(r - 1)$

D.  $\Gamma(0.5)$  tanımsızdır.

E. Hepsi doğrudur.

**Soru 8:** [5 Puan] Bir yarıletken fabrikası, ürettiği yonga plakalarının üzerindeki hata sayılarını inceliyor, ve içinden 4 elemanlı rastgele bir örnek seçiyor. Hata sayıları sırasıyla 4, 5, 5 ve 6 çıkıyor. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur? (1 veya 2 tanesi doğrudur, doğru olanların önündeki çemberi doldurunuz)

☐ Bu rastgele örneğin "örnek ortalaması" 5'tir.

☐ Bu rastgele örneğin "örnek ortalaması"  $\frac{20}{3}$ 'tür.

☐ Bu rastgele örneğin "örnek varyansı"  $\frac{1}{2}$ 'dir.

☐ Bu rastgele örneğin "örnek varyansı"  $\frac{2}{3}$ 'dir.

**Soru 9:** [5 Puan] Birbirinden bağımsız  $X_1$  ve  $X_2$  rastgele değişkenleri için  $E(X_1) = 1$ ,  $E(X_2) = 2$ ,  $V(X_1) = 2$  ve  $V(X_2) = 5$  verilmiştir. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur? (1 veya 2 tanesi doğrudur, doğru olanların önündeki çemberi doldurunuz)

☐  $E(2X_1 + 3X_2) = 8$

☐  $V(2X_1) = 8$

☐  $V(2X_1) = 4$

☐  $E(X_2^2) = 1$

☐  $E(X_2^2) = 3$

**Soru 10:** [5 Puan]  $X$  sürekli Poisson dağılımlı bir rastgele değişken ve parametresi  $\alpha = 395$ 'tir. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur.

☐  $\alpha > 10$  olduğundan,  $P(X > 400)$ 'in yaklaşık değerini bulmak için normal dağılıma benzetim yolu kullanılmaz.

☐  $P(X > 400)$ 'un yaklaşık değerini Normal Dağılıma benzetim yoluyla çözebiliriz. Süreklilik düzeltmesi de kullanırsak:  $z = \frac{400+0.5-395}{\sqrt{395}}$  'i hesaplayıp  $P(Z > z) = 1 - P(Z < -z)$ 'den faydalanıp  $-z$ 'nin değerini tablodan buluruz, bulduğumuz sonuç yaklaşık değeri verir.

☐ Bize  $P(X > 400)$  soruluyorsa, yaklaşık değeri bulmak için bunu normal dağılıma benzetim yoluyla çözmek için süreklilik düzeltmesini de kullanıp,  $z = \frac{400-0.5-395}{\sqrt{395}}$  'yi hesaplayıp  $P(Z > z) = 1 - P(Z < -z)$ 'den faydalanıp  $-z$ 'nin değerini tablodan buluruz, bulduğumuz sonuç yaklaşık değeri verir.

☐ Bize  $P(X < 400)$  soruluyorsa, yaklaşık değeri bulmak için bunu normal dağılıma benzetim yoluyla çözmek için süreklilik düzeltmesini de kullanıp,  $z = \frac{400-0.5-395}{\sqrt{395}}$ ,  $z$ 'nin değerini tablodan buluruz, bulduğumuz sonuç yaklaşık değeri verir.

☐ Bize  $P(X < 400)$  soruluyorsa, yaklaşık değeri bulmak için bunu normal dağılıma benzetim yoluyla çözmek için süreklilik düzeltmesini de kullanıp,  $z = \frac{400+0.5-395}{\sqrt{395}}$ ,  $z$ 'nin değerini tablodan buluruz, bulduğumuz sonuç yaklaşık değeri verir.

**Soru 11:** [5 Puan]  $X$  bir Poisson dağılımlı rastgele değişken ve parametresi  $\alpha = 0.1$ 'dir. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur? (1 veya 2 tanesi doğrudur, doğru olanların önündeki çemberi doldurunuz)

☐  $P(X = 1) = 0$

☐  $P(X = 2) \approx 0.0045$

☐  $E(X) = 10$

☐  $V(X) = 10$

☐  $E(2X) = 0.1$

**Soru 12:** [5 Puan]  $X$  ve  $Y$  birbirinden bağımsız rastgele değişkenlerdir. Aşağıdakilerden hangileri her zaman doğrudur? (1 veya 2 tanesi doğrudur, doğru olanların önündeki çemberi doldurunuz)

☐  $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$

☐  $E(X + Y) = E(XY)$

☐  $E(XY) = 0$

☐  $V(X) = V(Y)$

☐  $f(x|y) = f_X(x)$ ,  $f_Y(y) \neq 0$  şartı altında.

**Soru 13:** [5 Puan] " $X$  ve  $Y$  rasgtele değişkenleri için  $E(X/Y) = E(X)/E(Y)$  eşitliği her zaman doğrudur" ifadesi doğru mudur yanlış mıdır? (KUTUYA doğru veya yanlış yazınız):

**Soru 14:** [5 Puan] "Geometrik rasgtele değişkenlerde hafızasızlık özelliği yoktur" ifadesi doğru mudur yanlış mıdır? (doğru veya yanlış yazınız):

**Soru 15:** [5 Puan] Bir dijital hatta bi zaman içinde görülen hatalar Poisson sürecini takip ediyor ve ortalamada saatte  $\lambda$  hata görülmektedir. Bu hat gözlemlemeye başlandıktan sonra  $r$  adet hata görülünceye kadar geçen süre  $X$  ise,  $X$  hangi dağılıma sahiptir? (Lütfen KUTUYA dağılımın derste gördüğümüz ismini yazınız):

**Soru 16:**  $X$  ve  $Y$  ayrık rastgele değişkenler ve birleşik olasılık kütle fonksiyonu,  $f_{XY}(x, y)$  aşağıdaki tabloda verilmiştir. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

$y$	$x$		
	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	0.10	0.25	0.10
<b>2</b>	0.05	0.10	0.05
<b>3</b>	0.10	0.10	$\alpha$

- (a) [5 Puan]  $\alpha$ 'nın değerinin 0.15 olduğunu gösteriniz.
- (b) [10 Puan]  $E(XY)$ 'yi bulunuz.
- (c) [15 Puan]  $f(x|y)$ 'yi bulunuz ve tablo olarak gösteriniz. (İpucu: Her  $y$  değeri için ayrı ayrı  $f(x|y)$  hesaplanacağından, yine 3x3'lük bir tablo olacak)

---

**Soru 17:**  $X$  bir sürekli rastgele değişken ve olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir. Ayrıca bu soruda kullanabileceğiniz bazı ipuçları verilmiştir. **ÇOK ÖNEMLİ:** Gereğinden fazla ipucu vardır, hangi ipucundan faydalanacağınız sizin belirlemeniz gerekmektedir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\pi} & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

---

Bazı ipuçları

---

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

---

(a) [5 Puan]  $\alpha = 2$  olması gerektiğini gösteriniz.

(b) [15 Puan]  $X$ 'in bir fonksiyonu,  $g(X) = \sin(x)$  ise  $Y = g(X)$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu nedir ve DEĞER ARALIĞI NEDİR?