

研究生笔记

科研日志

作者： 杨高乐

组织： Shandong University at Weihai

时间： October 14, 2019

版本： 1.00



Victory won't come to us unless we go to it. — M. Moore

目 录

1 科研日志	1
1.1 2019.08.09	1
1.2 2019.08.18	1
1.3 2019.08.19	2
1.4 2019.08.21	2
1.5 2019.08.22	3
1.6 2019.08.23	3
1.7 2019.08.26	5
1.8 2019.08.27	5
1.9 2019.08.28	6
1.10 2019.08.29	7
1.11 2019.08.30	7
1.12 2019.08.31	7
1.13 2019.09.01	7
1.14 2019.09.02	7
1.15 2019.09.03	8
1.16 2019.09.04	9
1.17 2019.09.05	10
1.18 2019.09.06	10
1.19 2019.09.07	11
1.20 2019.09.09	11
1.21 2019.09.10	11
1.22 2019.09.11	12
1.23 2019.09.16	12
1.24 2019.09.17	12
1.25 2019.09.18	12
1.26 2019.09.19	12
1.27 2019.09.20	12
1.28 2019.09.21	13
1.29 2019.09.22	13
1.30 2019.09.23	13
1.31 2019.09.24	14
1.32 2019.09.25	14
1.33 2019.09.26	14
1.34 2019.09.27	14
1.35 2019.09.28	14
1.36 2019.09.29	14
1.37 2019.09.30	14

1.38	2019.10.01	14
1.39	2019.10.02	15
1.40	2019.10.09	15
1.41	2019.10.10	15
1.42	2019.10.11	15
1.43	2019.10.12	15
1.44	2019.10.13	15
2	基于质量表的核子相互作用	16
2.1	引言	16
2.2	mass-date-based相互作用	16
2.2.1	V_{1p-1n} 相互作用	16
2.2.2	V_{ip-jn} 相互作用	17
2.2.3	同类核子间的相互作用	18
2.3	mass-date-based相互作用的统计规律	21



第1章 科研日志

1.1 2019.08.09

今天的主要工作是寻找一个合适的 TeX 模板，由于以前使用的 latex 模板在处理包含大量图片的文件时不仅非常慢，而且有许多图片存在显示不全的问题，所以准备了一个可以使用 pdflatex 或 xelatex 编译的模板，但是目前这个模板也存在一些问题，正在修改，并且准备利用两天的时间将以前的笔记重新整理到这个模板下。另外，还给出了前几天完成的WS4模型给出的比结合能，已经对 V_{1p1n} 相互作用的描述。

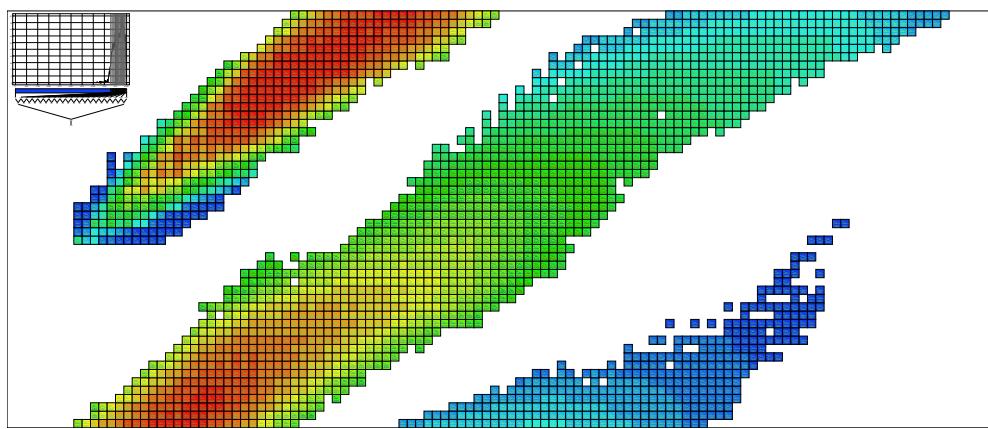


图 1.1: WS4 模型给出的比结合能在核素图中的分布.

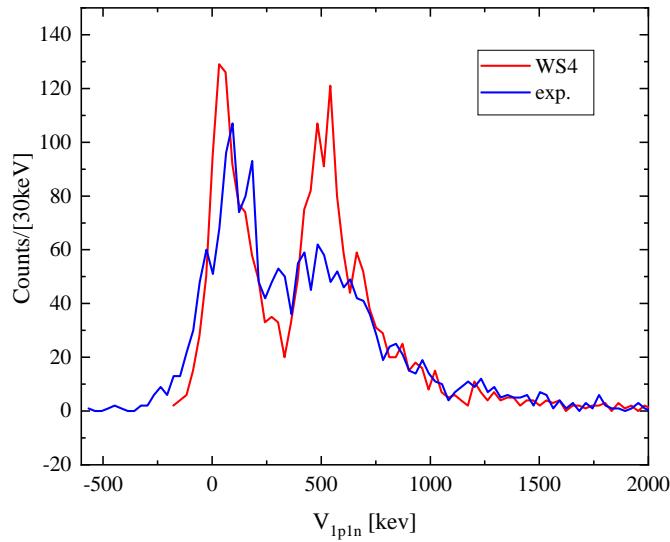


图 1.2: WS4 模型给出的 V_{1p-1n} 相互作用的统计分布.

1.2 2019.08.18

今天的工作主要是重新将基于质量表的核子相互作用部分整理为了 TeX 的笔记，还有部分没有完成。

1.3 2019.08.19

今天的主要工作是对AME2016和FRDM模型的奇A核和偶A核的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行了高斯拟合见图1.3和图1.4。

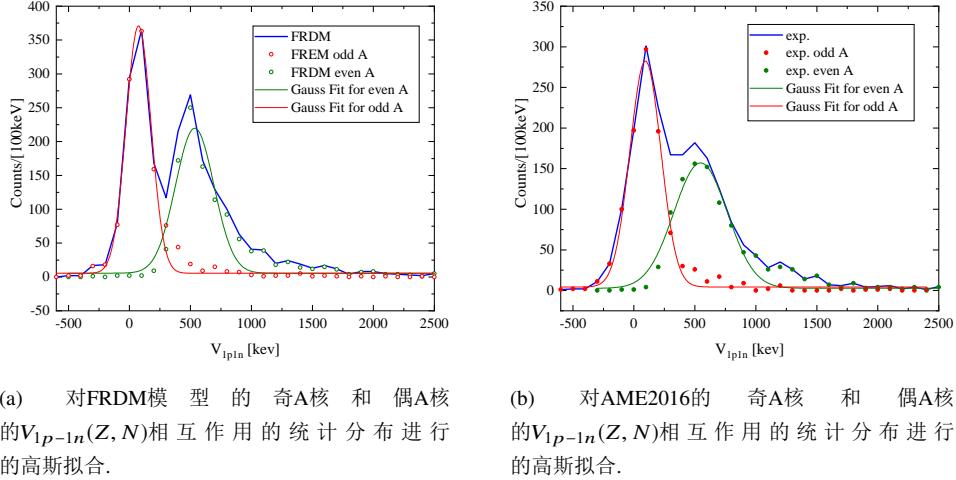


图 1.3: 对AME2016和FRDM模型的奇A核和偶A核的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行的高斯拟合.

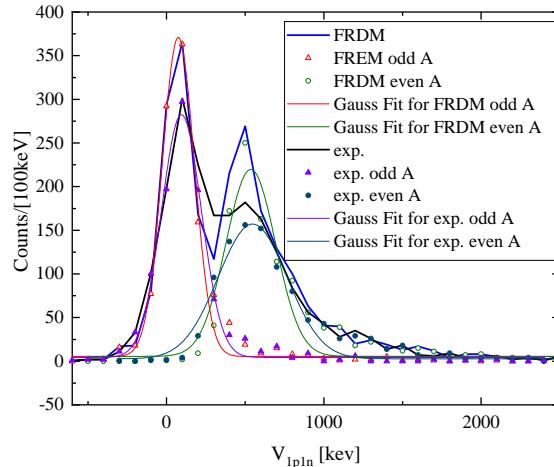


图 1.4: 分别对AME2016和FRDM模型的奇A核和偶A核的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行的高斯拟合.

1.4 2019.08.21

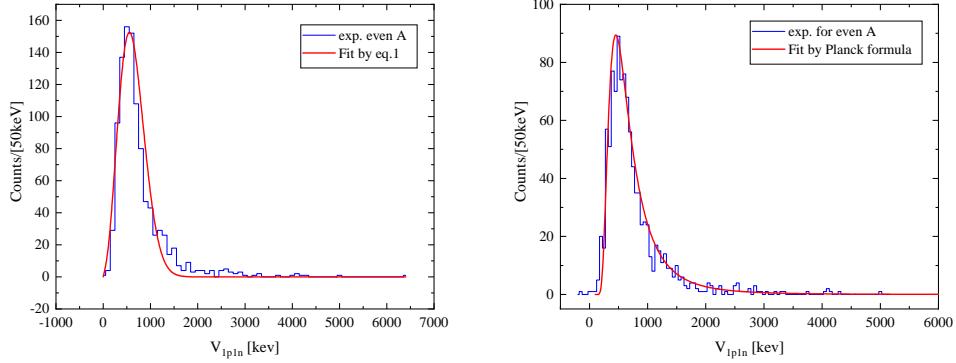
今天的主要工作是想要寻找一个合适的拟合公式来拟合 $V_{1p-1n}(N, Z)$ 相互作用的统计分布，主要尝试了两类公式：

$$V = a(x - c)^2 e^{-b(x-c)^2} \quad (1.1)$$

以及类似于 Planck 提出的黑体辐射公式：

$$V = \frac{a}{(x - c)^5} \frac{1}{e^{\frac{b}{x-c}} - 1} \quad (1.2)$$

其中 a, b, c 均为拟合参数，由于这两个函数都不能通过 origin 的最小二乘法拟合，所以利用 python 程序对公式1.2进行了拟合，结果如图1.5



(a) 利用公式1.1对AME2016的偶A核的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

(b) 利用公式1.2对AME2016的偶A核的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

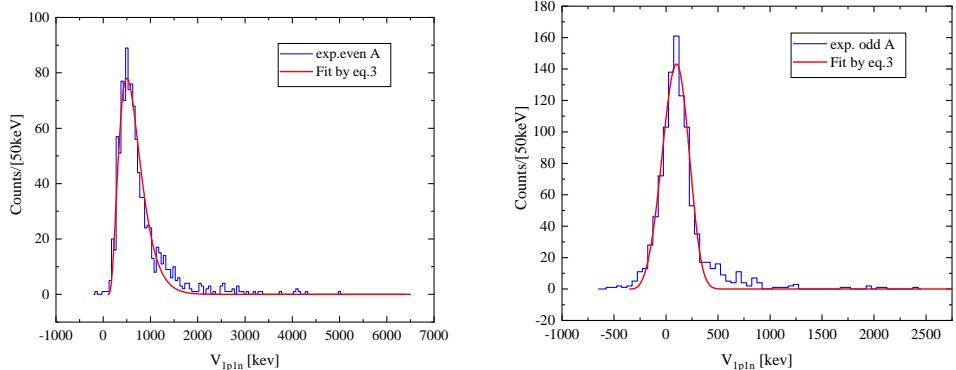
图 1.5: 对AME2016偶A核的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行的拟合.

1.5 2019.08.22

今天的主要工作是发现Planck 提出的黑体辐射公式1.2虽然可以比较好的描述AME2016的偶A核的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布，但是却不能很好的符合奇A核的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布，所以今天又在公式、1.1的基础上做了改进：

$$V = a(x - c)^d e^{-b(x-c)^e} \quad (1.3)$$

其中 a, b, c, d, e 均为拟合参数，其拟合结果如图：



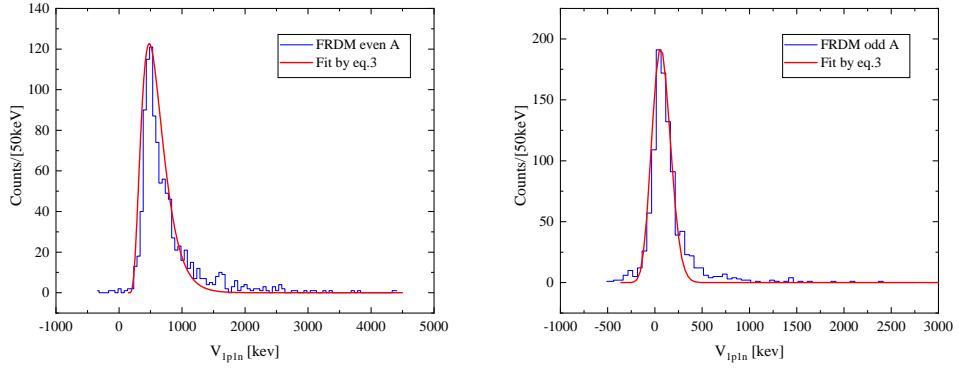
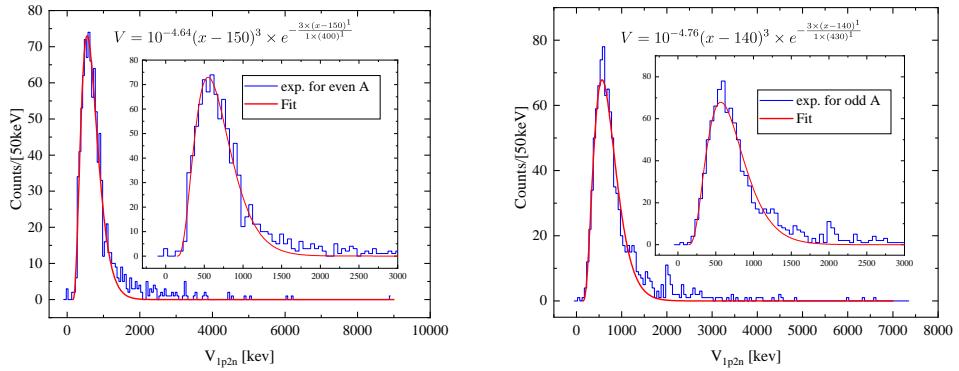
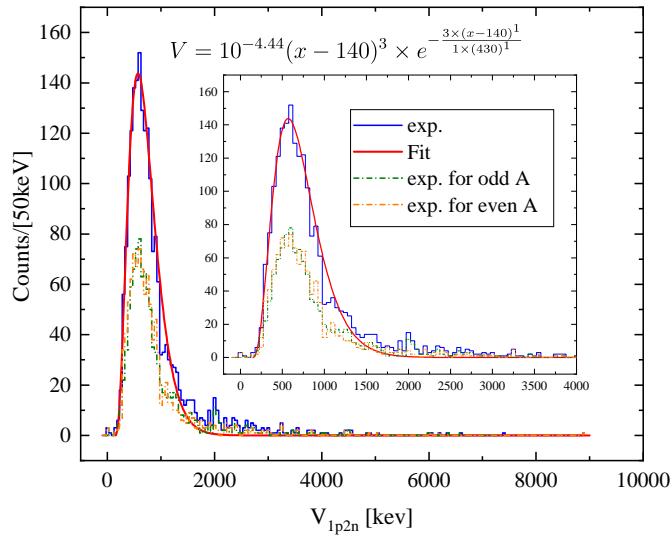
(a) 利用公式1.3对AME2016的偶A核的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

(b) 利用公式1.3对AME2016的奇A核的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

图 1.6: 利用公式1.3对AME2016的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行的拟合.

1.6 2019.08.23

今天的主要工作是继续对 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行的拟合，包括对FRDM模型 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布结果的拟合，图1.7；以及对AME2016 的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布结果的拟合，图2.10及图2.10。

(a) 利用公式1.3对FRDM模型的偶A核的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.(b) 利用公式1.3对FRDM模型的奇A核的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.图 1.7: 利用公式1.3对FRDM模型的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行的拟合.(a) 利用公式1.3对AME2016的偶A核的 $V_{1p-2n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.(b) 利用公式1.3对AME2016的奇A核的 $V_{1p-2n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.图 1.8: 利用公式1.3对AME2016的 $V_{1p-2n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行的拟合.图 1.9: 利用公式1.3对AME2016的 $V_{1p-2n}(Z, N)$ 相互作用整体的统计分布进行的拟合.

1.7 2019.08.26

今天的主要工作是继续对AME2016的pn相互作用的统计分布进行拟合，结果如下：

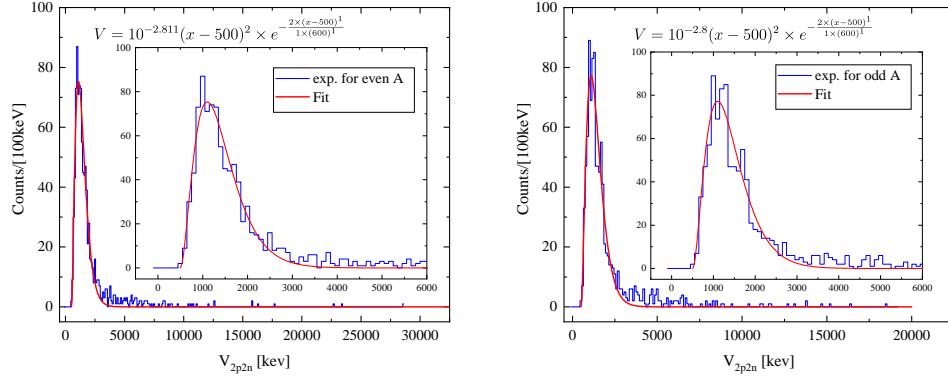


图 1.10: 利用公式1.3对AME2016的 $V_{2p-2n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行的拟合.

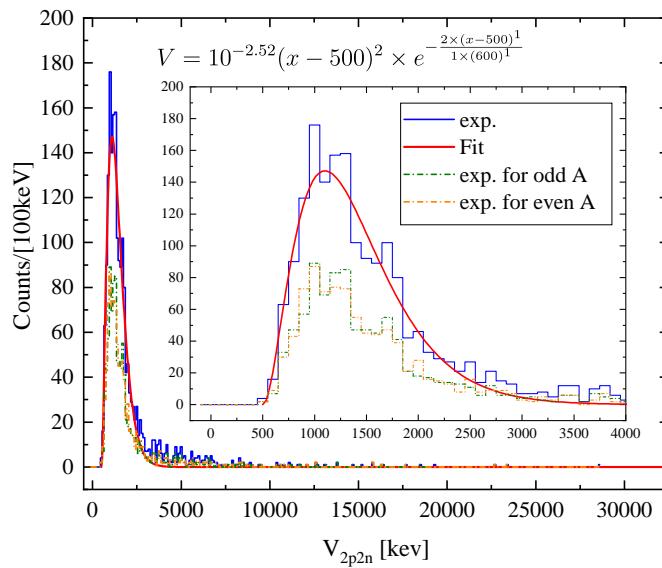
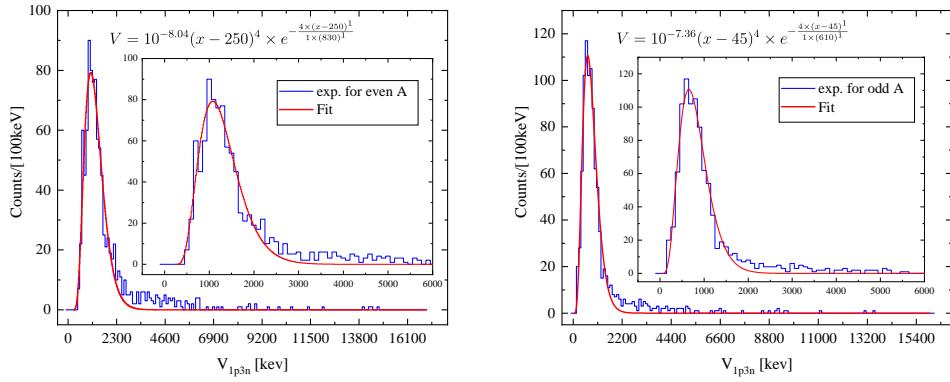


图 1.11: 利用公式1.3对AME2016的 $V_{2p-2n}(Z, N)$ 相互作用整体的的统计分布进行的拟合.

1.8 2019.08.27

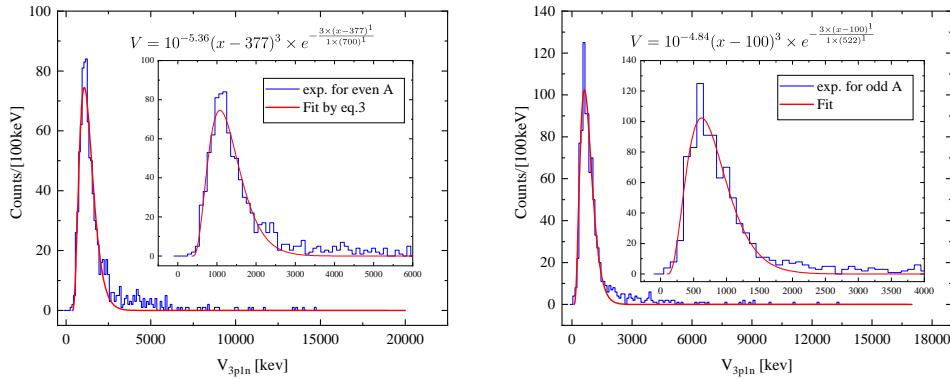
今天的主要工作是继续对AME2016的pn相互作用的统计分布进行拟合，结果如下：



(a) 利用公式1.3对AME2016的偶A核的 $V_{1p-3n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

(b) 利用公式1.3对AME2016的奇A核的 $V_{1p-3n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

图 1.12: 利用公式1.3对AME2016的 $V_{1p-3n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行的拟合.



(a) 利用公式1.3对AME2016的偶A核的 $V_{3p-1n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

(b) 利用公式1.3对AME2016的奇A核的 $V_{3p-1n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

图 1.13: 利用公式1.3对AME2016的 $V_{3p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行的拟合.

1.9 2019.08.28

今天的主要工作是继续对AME2016的最外层质子对和中子对相互作用 $V_{Pp}(Z, N)$ 、 $V_{Pn}(Z, N)$ 的统计分布进行拟合，结果如下：

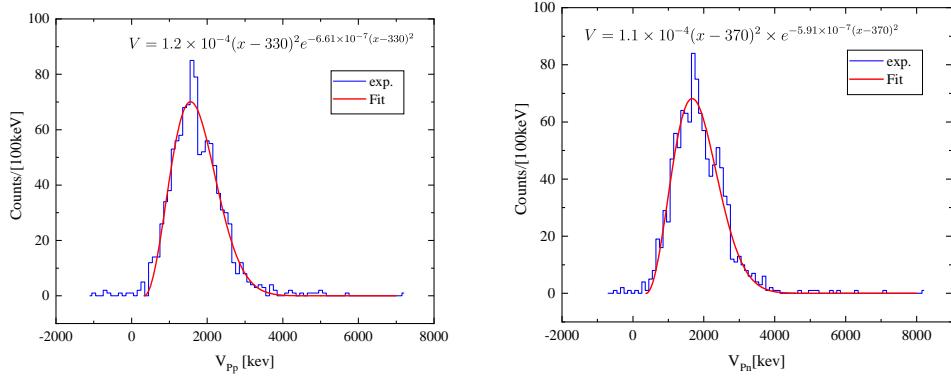


图 1.14: 利用公式1.3对AME2016的 $V_{3p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行的拟合.

1.10 2019.08.29

今天的主要工作是完成上学期原子核结构和核天体物理两门课程的试卷。

1.11 2019.08.30

今天的主要工作是完成昨天没有写完的原子核结构试卷和实验数据分析的课的试卷。

1.12 2019.08.31

今天的主要工作是准备原子核结构和核天体物理两门课程的报告的ppt。

1.13 2019.09.01

今天准备重复一篇Phys. Rev. Lett. 文章[Estimating Parameter Uncertainty in Binding-Energy Models by the Frequency-Domain Bootstrap](#)的内容。这篇文章主要介绍了三种的得到模型参数的不确定性的方法包括 χ^2 方法、bootstrap方法和frequency-domain bootstrap (FDB)。

1.14 2019.09.02

今天为了重复参考文献[1]，寻找并阅读了相关的文献[2-3]，此外还找到了在文献[1]中需要使用的AME2003的数据(如图1.15所示)，并与AME2016做了对比，蓝色的代表AME2016中新增的通过实验测得了质量的核素，

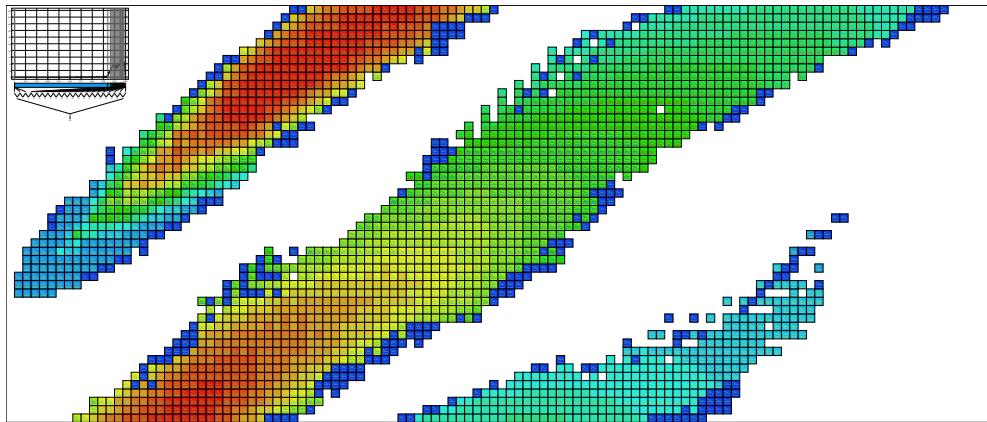


图 1.15: AME2003质量表中所有实验已知的核素的比结合能(蓝色的代表AME2016中新增的通过实验测得了质量的核素).

1.15 2019.09.03

今天重复了文献[1]中的 χ^2 方法，在文献[1]中液滴模型使用的参数是 $a_v = 15.58\text{MeV}$ 、 $a_{sym} = 22.18\text{MeV}$ 但是文章中并没有给出其他的参数，也没有给出其引用的相应的参考文献，所以我们在这里所使用的液滴模型是在卢希庭的书中给出的：

$$\begin{aligned} B(Z, A) &= B_v + B_s + B_c + B_{sym} + B_p \\ &= a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - a_{sym} \left(\frac{A}{2} - Z \right)^2 A^{-1} + a_p \delta A^{-1/2} \end{aligned}$$

其中 B_p 项为：

$$B_p = \begin{cases} a_p A^{-1/2} & \text{偶偶核} \\ 0 & \text{奇A核} \\ -a_p A^{-1/2} & \text{奇奇核} \end{cases}$$

其参量可以取值为：其中参量可以取值为：

$$a_v = 15.835\text{MeV}$$

$$a_s = 18.33\text{MeV}$$

$$a_c = 0.714\text{MeV}$$

$$a_{sym} = 92.80\text{MeV}$$

$$a_p = 11.2\text{MeV}$$

利用其与AME2003质量表中的2000多个实验已知的核素的质量相减的残差分布如图1.16。

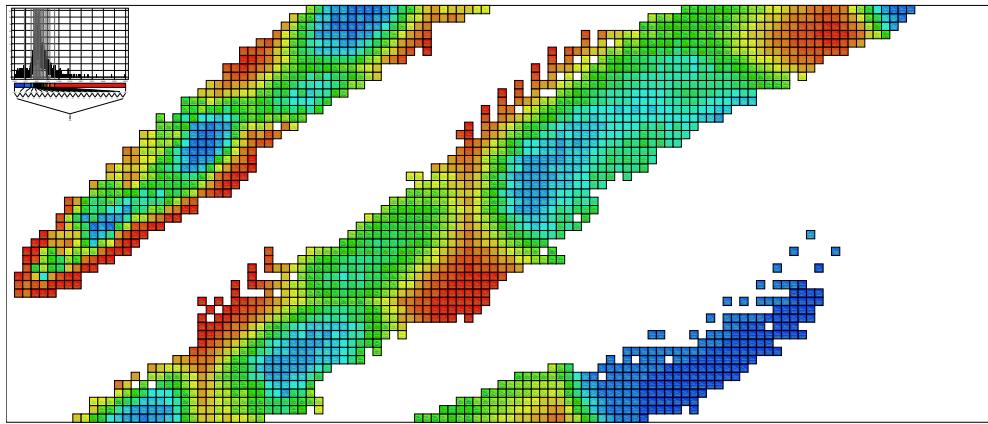


图 1.16: 液滴模型与AME2003质量表中的2000多个实验已知的核素的质量相减的残差分布.

可以看到其与文献[1]中FIG. 1给出的残差分布基本一致。再利用文献[1]中的 χ^2 方法的公式：

$$L(p) = \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{S/2}} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^S [y_{\text{expt}}(x_i) - M(x_i, p)]^2 / 2\sigma_0^2 \right\} \quad (1.4)$$

我们得到的结果如图1.17与文献[1]中的 χ^2 方法的结果 $a_v = 15.58 \text{ MeV}$ 、 $\sigma_{a_v} = 0.03$ 基本一致。

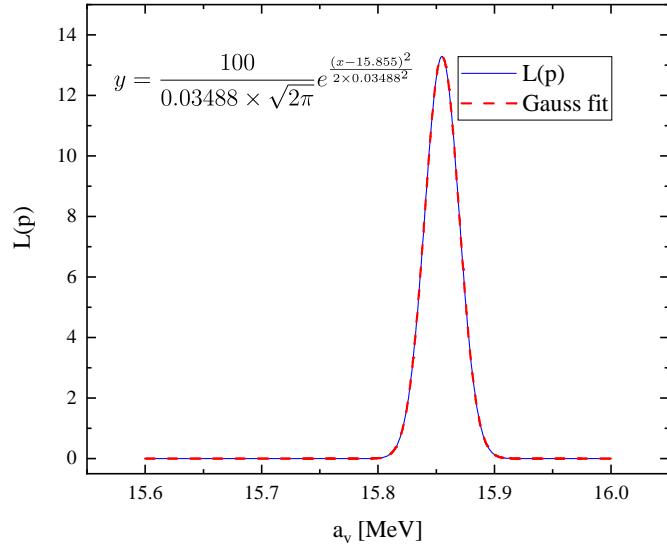


图 1.17: 利用 χ^2 方法得到的 $L(a_v)$ 的分布, 其中心值为15.855MeV, 不确定度 $\sigma = 0.035$.

1.16 2019.09.04

今天在重复文献[1]中的uncorrelated bootstrap(UCB)方法时, 计算得到的结果如图1.18, a_v 的不确定度为0.00312 MeV, 与文章中给出的0.03 MeV存在数量级的差异, 目前正在查阅文章对应的参考文献[3]。

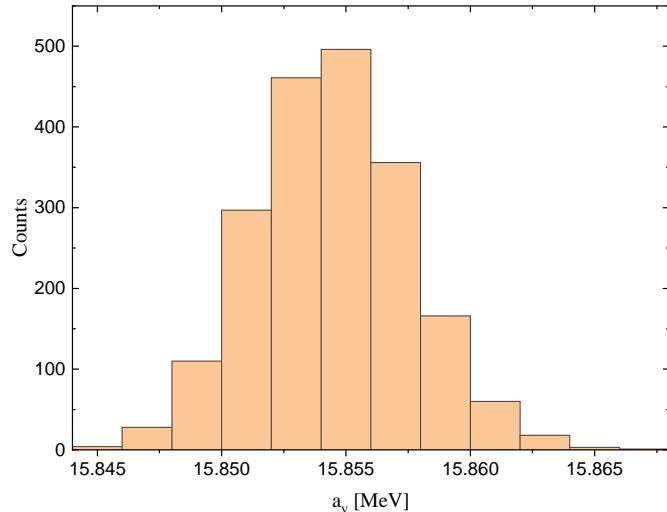


图 1.18: 利用uncorrelated bootstrap(UCB)方法得到的 $L(a_v)$ 的分布, 其不确定度为0.00312 MeV.

1.17 2019.09.05

今天在还是在重复文献[1], 昨天重复uncorrelated bootstrap(UCB)方法的结果与文献中的结果不一致的原因还没有找到, 今天重复了一点frequency-domain bootstrap (FDB)的结果, 如图1.19, 发现我们的结果与文献[1]中的FIG. 2基本一致但是还是存在一定的差异, 可能的原因应该是我们取的液滴模型的参数与文献[1]中用的不一致。

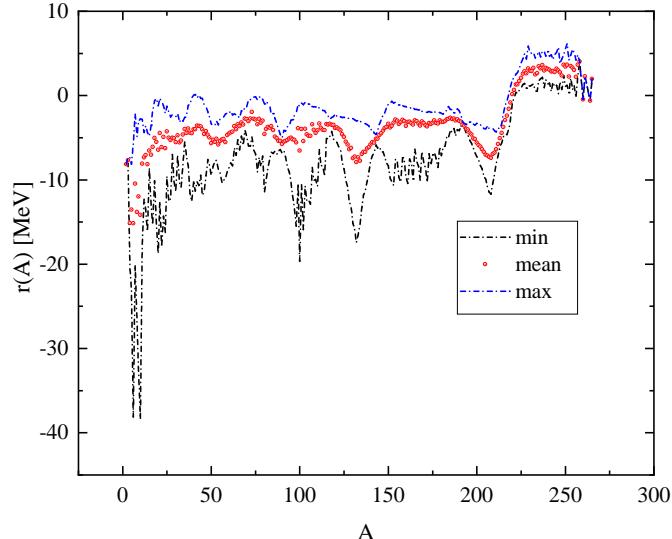


图 1.19: 液滴模型计算的结合能与AME2003质量表中给出的结合能的残差 $r(A)$.

1.18 2019.09.06

今天的主要工作是给出了重复了文献[1]中的FIG. 3, 重复的结果如图1.20所示, 两个结果基本一致但是还是存在一定的差异, 可能的原因仍然应该是我们取的液滴模型的参数与文献[1]中用的不一致。此外文献[1]中对FDM方法的描述还有不太理解的地方。

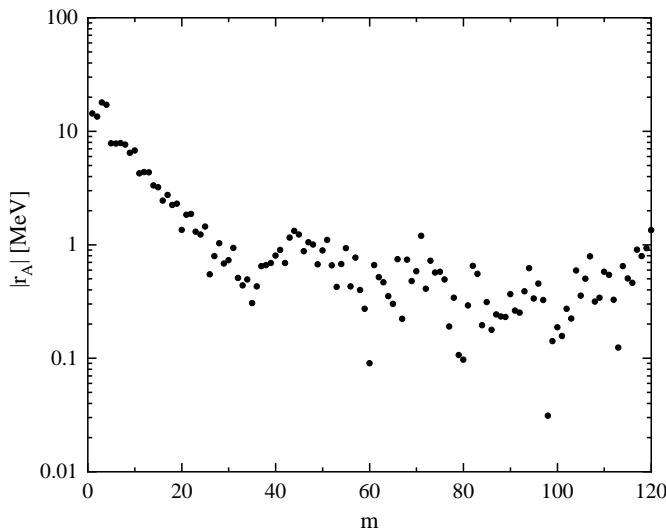


图 1.20: 液滴模型计算的结合能与AME2003质量表的残差 $r(A)$ 通过傅里叶变换得到的结果.

1.19 2019.09.07

今天的主要工作仍然是重复文献[1]中结果，但是我们重复的文献[1]中的FIG. 4的结果时，发现与我们得到的傅里叶反变换的结果(图1.21)存在极大的差异。

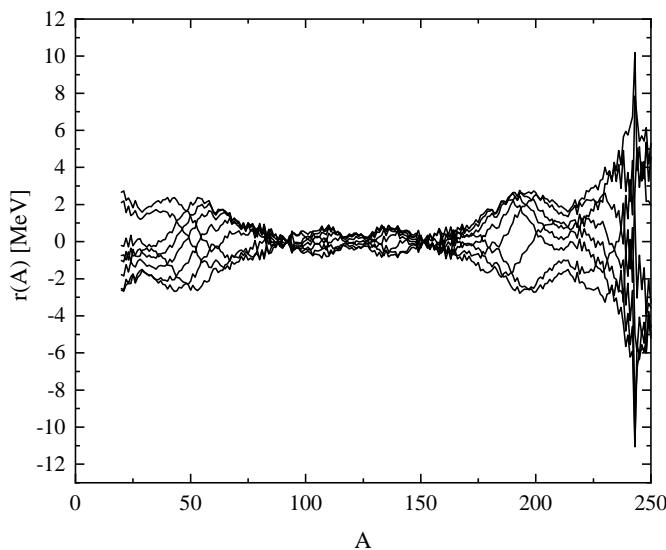


图 1.21: 重复的文献[1]中的FIG. 4的傅里叶反变换得到的结果.

1.20 2019.09.09

今天的主要工作是整理mass-date-based interaction部分的笔记，对这一部分的工作做一个截断。

1.21 2019.09.10

今天的主要工作仍然是整理mass-date-based interaction部分的笔记。



1.22 2019.09.11

今天的主要工作仍然是整理mass-date-based interaction部分的笔记。

1.23 2019.09.16

今天的主要工作仍然是整理mass-date-based interaction部分的笔记。

1.24 2019.09.17

今天的主要工作仍然是整理mass-date-based interaction部分的笔记，并且重新拟合并给出了新的图。

1.25 2019.09.18

今天的工作主要是为明天的行程做准备，以及重新对以前的计算结果进行了重新拟合。

1.26 2019.09.19

今天的工作主要是出发赶往郑州，参加2019年中国物理学会秋季会议。

1.27 2019.09.20

今天的工作主要参加2019年中国物理学会秋季会议，主要听了四个大会报告：《中国散裂中子源》陈和声、《Piezotronics and Piezo-phototronics of the Third Generation Semiconductors》王中林、《Laser ARPES on High Temperature Superconductors》周兴江、《超高品质因子微腔光学》肖云峰。



图 1.22: 2019年中国物理学会(CPS)秋季会议开幕式.

1.28 2019.09.21

今天的工作主要参加2019年中国物理学会秋季会议的核物理与加速器物理分会场的报告，其中着重听了《原子核的手征对称性》赵鹏巍、《原子核的热激发形状相变》张炜两个报告，并copy了今天所有报告的PPT。



图 1.23: 2019-CPS-核物理与加速器物理分会场.

1.29 2019.09.22

今天的工作主要参加2019年中国物理学会秋季会议的核物理与加速器物理分会场的报告，其中着重听了《原子核的对称性及其破缺》刘玉鑫、《伽马光核物理一些研究进展》罗文两个报告。



图 1.24: 2019-CPS-核物理与加速器物理分会场9.22.

1.30 2019.09.23

今天从郑州出发回到学校。

1.31 2019.09.24

今天基本把拟合结果整理完了。

1.32 2019.09.25

今天把所有的拟合结果进行了汇总并进行了分析。

1.33 2019.09.26

今天寻找了原子核半径的实验数据，并利用这些数据计算了原子核的密度[keV/fm³]分布：

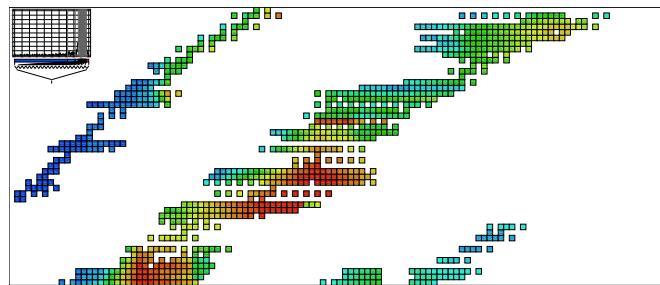


图 1.25: 原子核的密度[keV/fm³]分布.

1.34 2019.09.27

今天的主要工作是总结参加的CPS2019秋季会议，并且准备周天用ppt讲一下。

1.35 2019.09.28

今天的主要工作是准备周天讲的ppt。

1.36 2019.09.29

今天的主要工作是将前面整理的质量相关的笔记整理为文章的格式。

1.37 2019.09.30

今天的主要工作是将前面整理的质量相关的笔记整理为文章的格式。

1.38 2019.10.01

今天的主要工作是将前面整理的质量相关的文章，此外还学习了一些分析力学的基础的知识。

1.39 2019.10.02

今天的主要工作是将前面整理的质量相关的文章，此外还学习了一些分析力学的基础的知识。

1.40 2019.10.09

今天的主要工作是阅读相关的文献将前面整理的质量相关的文章。

1.41 2019.10.10

今天的主要工作是阅读相关的文献将前面整理的质量相关的文章。

1.42 2019.10.11

今天的主要工作是阅读相关的文献将前面整理的质量相关的文章，以及剪辑李广生老师在威海讲课的视频。

1.43 2019.10.12

今天的主要工作是剪辑李广生老师在威海讲课的视频。

1.44 2019.10.13

今天的主要工作是阅读相关的文献将前面整理的质量相关的文章，剪辑李广生老师在威海讲课的视频。

第2章 基于质量表的核子相互作用

2.1 引言

目前，对原子核是的理论和实验研究主要集中在原子核的两个自由度上，即同位旋自由度和自旋自由度(高自旋态)。基于质量表的核子相互作用的研究，对于我们研究原子核在同位旋自由度上的特征非常重要，由于目前用于描述原子核在同位旋自由度下的性质的理论模型，大都是唯象模型或半经验的公式(从第一性原理出发，目前只能描述轻核)，所以我们对原子核在同位旋自由度下的特征的认识，很大程度上就决定了这些模型对原子核同位旋自由度特征描述的好坏。而基于质量表提取的核子相互作用可以很大程度上反映原子核在同位旋自由度下的特征，包括同类核子间的配对相互作用、壳结构、以及外层核子间的质子中子相互作用，有助于我们对现有的模型做出恰当的评价，从而构建一个更合理的模型。

2.2 mass-date-based相互作用

2.2.1 V_{1p-1n} 相互作用

首先，我们考虑最简单的一种基于质量表的pn相互作用 $V_{1p-1n}(Z, N)$ ，其表达式是：

$$\begin{aligned} V_{1p-1n}(Z, N) = & B(Z, N) - B(Z - 1, N) \\ & - B(Z, N - 1) + B(Z - 1, N - 1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

其基本图像如图2.1所示， n , p 分别表示 (Z, N) 这个原子核的最外层的中子和质子， $V_{1p-1n}(Z, N)$ 表示图中的最外层的质子和中子之间的pn相互作用，即图中的相互作用2。

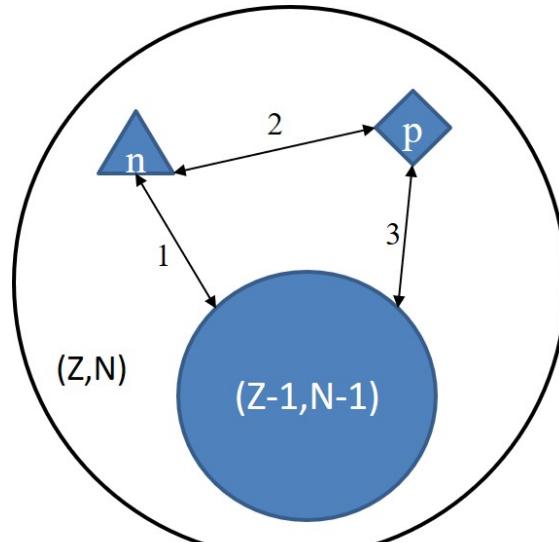


图 2.1: $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用的基本图像.

这个公式是文献中提出的，为了理解这个公式，我们通过分离能 $S_p(Z, N)$ 、 $S_n(Z, N)$ 、 $S_{1p-1n}(Z, N)$ (其中分离能 $S_{1p-1n}(Z, N)$ 在教科书中没有直接给出，只是我们对分离能的公式做了一个简单的推

广(不知道这样的推广是否合理))所构成的3个一阶线性方程组:

$$\begin{cases} S_p(Z, N) = B(Z, N) - B(Z - 1, N) \rightarrow 1 + 2 \\ S_n(Z, N) = B(Z, N) - B(Z - 1, N) \rightarrow 2 + 3 \\ S_{1p1n}(Z, N) = B(Z, N) - B(Z - 1, N - 1) \rightarrow 1 + 2 + 3 \end{cases}$$

求解这个线性方程组就可以得到公式2.1。

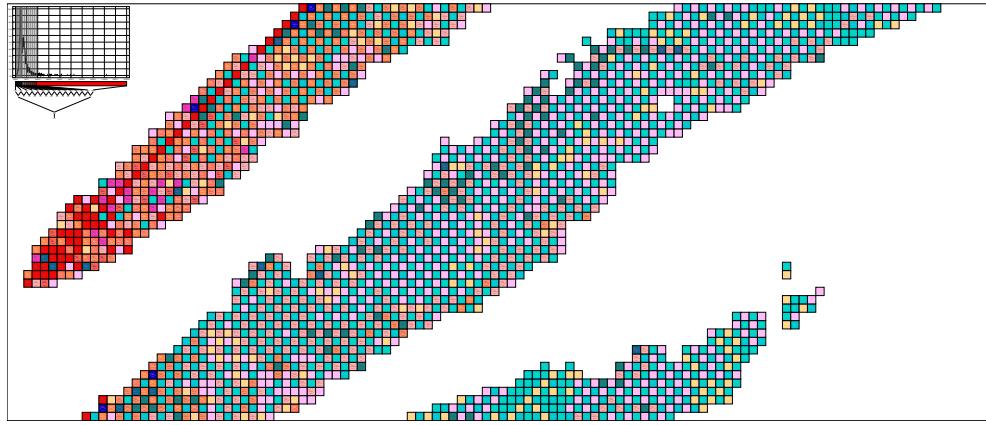


图 2.2: mass-date-based $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用在核素图中的分布.

从图2.2中我们可以直接观察到的特征有:

1. 偶A核的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用几乎都大于奇A核;
2. $N=Z$ 的核子的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用都较大;
3. $N=Z$ 附近的镜像核的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用具有很好的对称性。

2.2.2 V_{ip-jn} 相互作用

在文献中我们也看到了描述原子核最外层的质子中子之间相互作用的更一般的公式:

$$\begin{aligned} V_{ip-jn}(Z, N) &= B(Z, N) - B(Z - i, N) \\ &\quad - B(Z, N - j) + B(Z - i, N - j) \end{aligned} \quad (2.2)$$

我们可以证明 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 与 V_{ip-jn} 存在着如下的关系:

$$\begin{aligned} V_{ip-jn}(Z, N) &= V_{1p-jn}(Z, N) + V_{1p-jn}(Z - 1, N) + \cdots + V_{1p-jn}(Z - i + 1, N) \\ &= V_{1p-1n}(Z, N) + V_{1p-1n}(Z, N - 1) + \cdots + V_{1p-1n}(Z, N - j + 1) \\ &\quad + V_{1p-1n}(Z - 1, N) + V_{1p-1n}(Z - 1, N - 1) + \cdots + V_{1p-1n}(Z - 1, N - j + 1) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + V_{1p-1n}(Z - i + 1, N) + V_{1p-1n}(Z - i + 1, N - 1) \\ &\quad + \cdots + V_{1p-1n}(Z - i + 1, N - j + 1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

由此可以直接得到两个结论:

1. 所有由 $V_{ip-jn}(Z, N)$ (i or $j > 1$) 所得到的规律都可以归结为 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 的规律. (可以将其他人所提出的 $V_{ip-jn}(Z, N)$ (i or $j > 1$) 规律都总结为 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 的规律)
2. 由于这样提取的 $n - p$ 相互作用完全无法考虑外层核子对内层核子的影响, 所有这只是对真实 $n - p$ 相互作用的一个极大的近似.

2.2.3 同类核子间的相互作用

同类核子间的相互作用包括配对核子间的对关联效应，以及未配对核子间的相互作用，其中同类核子间的对关联效应已经得到了广泛的研究，其mass-date-based $P_p(Z, N)$ 、 $P_n(Z, N)$ 相互作用的公式[4]：

$$\begin{aligned} V_p(Z, N) &= S_p(Z, N) - S_p(Z - 1, N) \\ &= [B(Z, N) - B(Z - 1, N)] - [B(Z - 1, N) - B(Z - 2, N)] \quad \text{for even } Z \end{aligned} \quad (2.4)$$

以及

$$\begin{aligned} V_n(Z, N) &= S_n(Z, N) - S_n(Z, N - 1) \\ &= [B(Z, N) - B(Z, N - 1)] - [B(Z, N - 1) - B(Z, N - 2)] \quad \text{for even } N \end{aligned} \quad (2.5)$$

以 $P_n(Z, N)$ 相互作用为例，其基本物理图像可以看作：

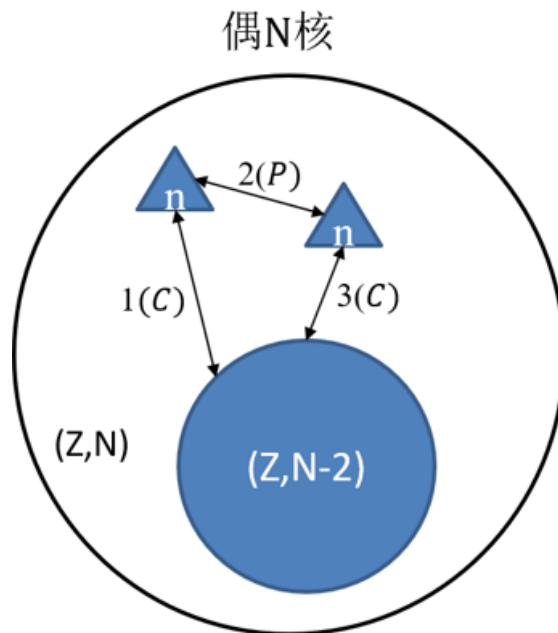


图 2.3：偶N核的mass-date-based $P_n(Z, N)$ 相互作用的基本图像。

其中 P 表示偶N核最外层配对的中子之间的对关联作用， C 表示外层的中子与内层的核心之间的相互作用，那么公式2.5就对应着：

$$\begin{aligned} V_n(Z, N) &= S_n(Z, N) - S_n(Z, N - 1) \\ &\rightarrow 1(C) + 2(P) - 3(C) \\ &\rightarrow P \quad \text{for even } N \end{aligned} \quad (2.6)$$

这从基本的图像上说明了为什么这个公式可以计算得到对关联相互作用。图2.5给出了其在核素图中的分布：

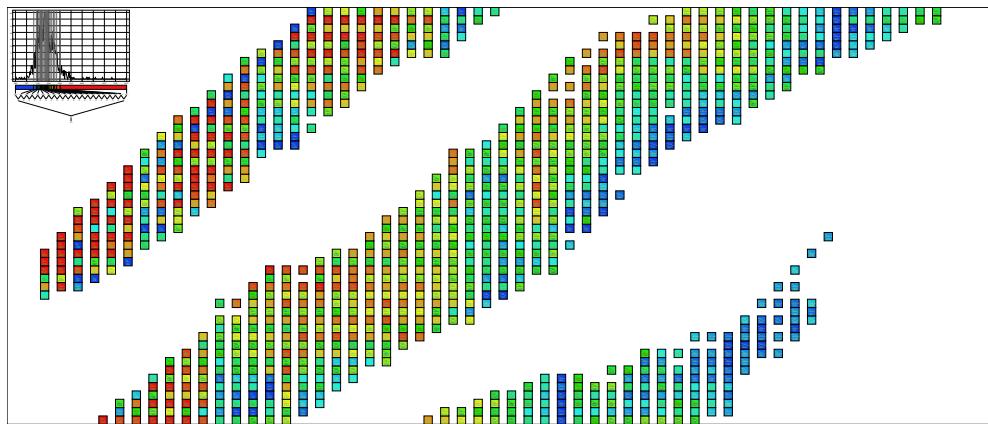


图 2.4: 偶N核的最外层配对核子之间的相互作用在核素图中的分布.

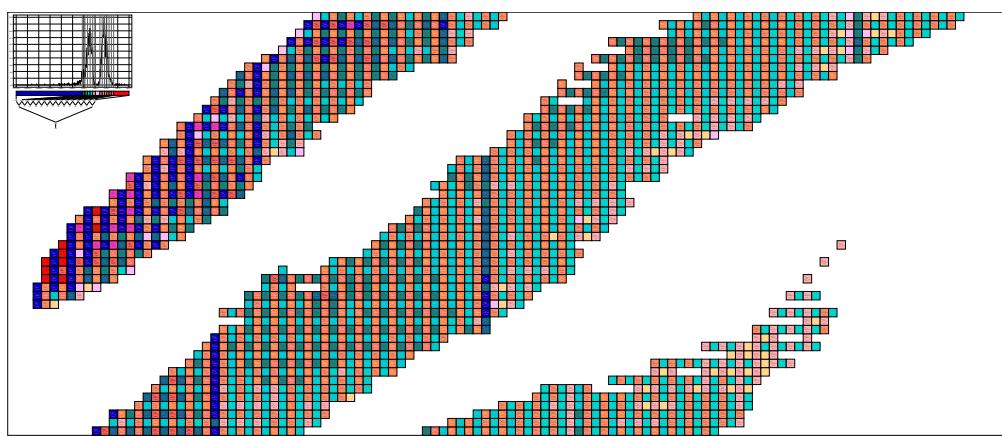


图 2.5: 利用公式2.5对所有核子计算的结果在核素图中的分布.

在这个图中我们不仅给出了偶N核通过公式2.5计算得到的中子配对相互作用的分布，我们还给出了奇N核通过同样的公式计算给出的结果，从图中我们可以观察到：

1. 偶N核的统计分布呈现一个不对称的峰型分布；
2. 奇N核与偶N核的计算结果的统计分布基本关于零对称，但是奇N核略微向左偏离。
3. 在 $N > 20$ 的质量区奇N核的计算结果在壳层附近(一般比幻数大1的地方)的数值明显比其他地方大，而偶N核却没有观察到这样的现象。
4. 在 $N > 20$ 的质量区奇N核的计算结果在数值上明显比偶N核的大，呈现明显的奇偶效应。

为了解释奇N核的这样的性质，我们对奇N核进行了分析，其基本图像见图2.6：

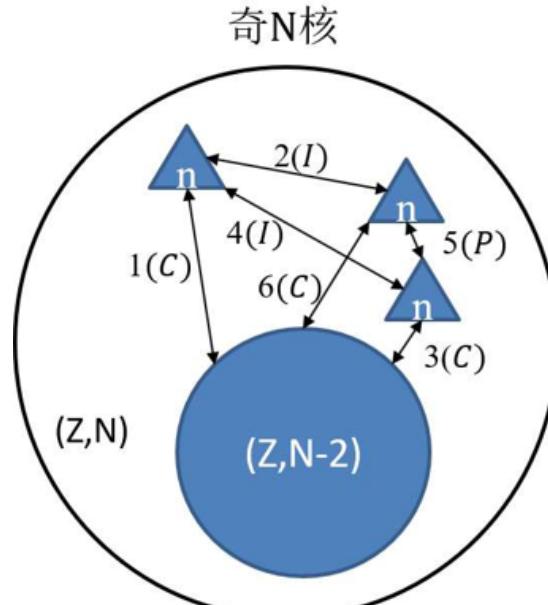


图 2.6: 奇N核的基本图像.

其中 I 表示奇N核的最外层的未配对核子与最外层的配对核子之间的相互作用，那么对比于前面的讨论，公式 2.5 在这里的含义是：

$$\begin{aligned}
 V_n(Z, N) &= S_n(Z, N) - S_n(Z, N-1) \quad \text{for odd } N \\
 &\rightarrow 1(C) + 2(I) + 4(I) - [5(P) + 6(C)] \\
 &\rightarrow 2(I) + 4(I) - 5(P)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

如果我们认为最外层配对的中子之间的对关联作用(P)是要远大于奇N核的最外层的未配对核子与最外层的配对核子之间的相互作用(I)的，那么这就可以很好的解释奇N核与偶N核的计算结果的统计分布基本关于零对称，并且奇N核略微向左偏离的性质了。那么，我们也很容易通过这个公式得到最外层的未配对核子与最外层的配对核子之间的相互作用 I 的表达式：

$$\begin{aligned}
 I_n(Z, N) &= V_n(Z, N) + V_n(Z, N-1) \quad \text{for odd } N \\
 &= [S_n(Z, N) - S_n(Z, N-1)] + [S_n(Z, N-1) - S_n(Z, N-2)] \\
 &= S_n(Z, N) - S_n(Z, N-2) \\
 &= [B(Z, N) - B(Z, N-1)] - [B(Z, N-2) - B(Z, N-3)] \\
 &\rightarrow 2(I) + 4(I)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

图 2.7 给出了奇N核最外层的未配对核子与最外层的配对核子之间的相互作用在核素图中的分布：

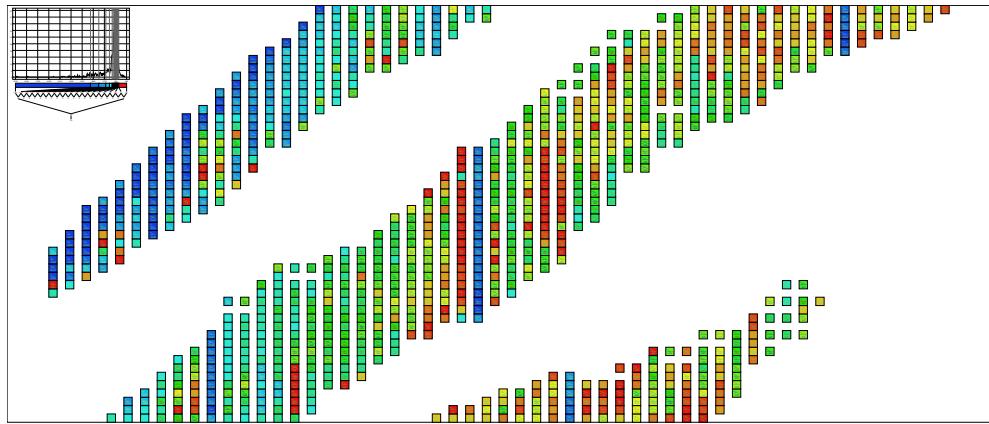


图 2.7: 奇N核最外层的未配对核子与最外层的配对核子之间的相互作用在核素图中的分布.

从这个图中我们可以明显的观察到中子数比幻数大1的奇N核的结果要比其它位置的相互作用要小得多, 对比于图2.4我们似乎可以认为原子核的壳效应与核子的对关联之间没有直接的联系, 壳效应是核子对之间的一种效应。

2.3 mass-date-based相互作用的统计规律

我们利用[The 2016 Atomic Mass Evaluation](#)的数据计算mass-date-based interaction, 并的到了他们随能量的统计分布, 尝试了利用高斯分布以及类似于Yukawa势的表达式2.9来拟合这样的统计分布。

$$V = \begin{cases} 10^{-a}(x - c)^d \exp\left[-\frac{d(x-c)^f}{f(b-c)^f}\right] & x > c \\ 0 & x \leq c \end{cases} \quad (2.9)$$

其中 a, b, c, d, f 都是拟合参数。

首先得到的是 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 的统计分布, 我们分析其可以很好的分解为奇A核和偶A核两种情况, 并分别对其进行拟合分析:

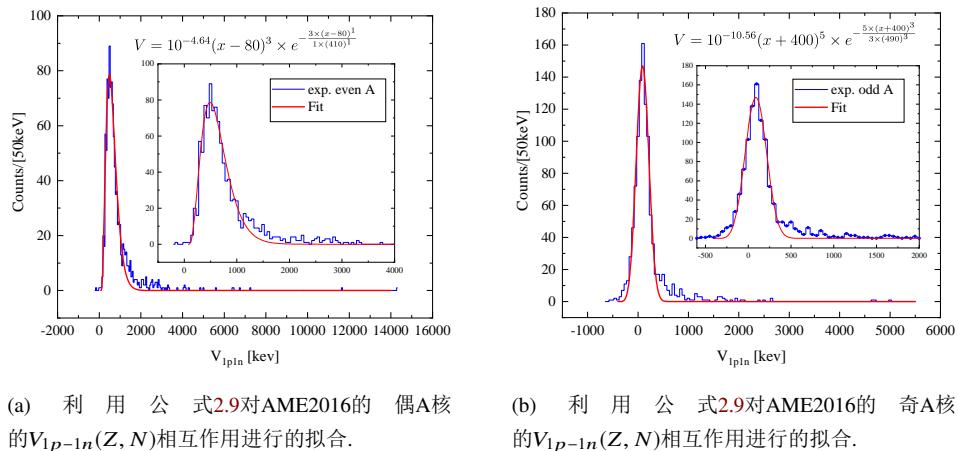


图 2.8: 利用公式2.9对AME2016的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行的拟合.

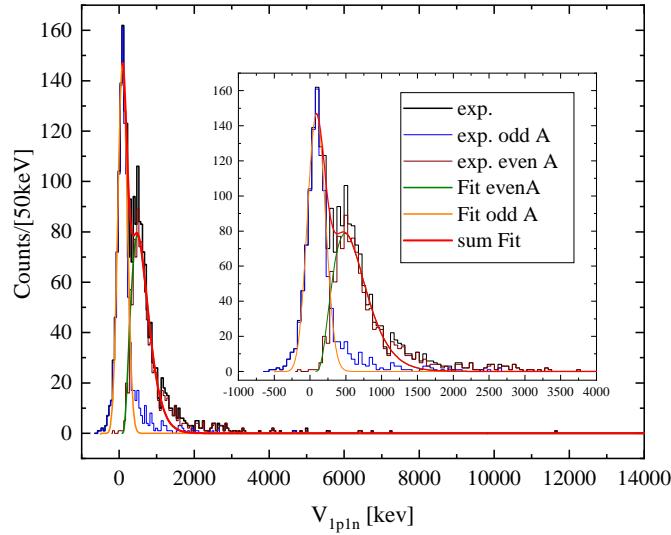
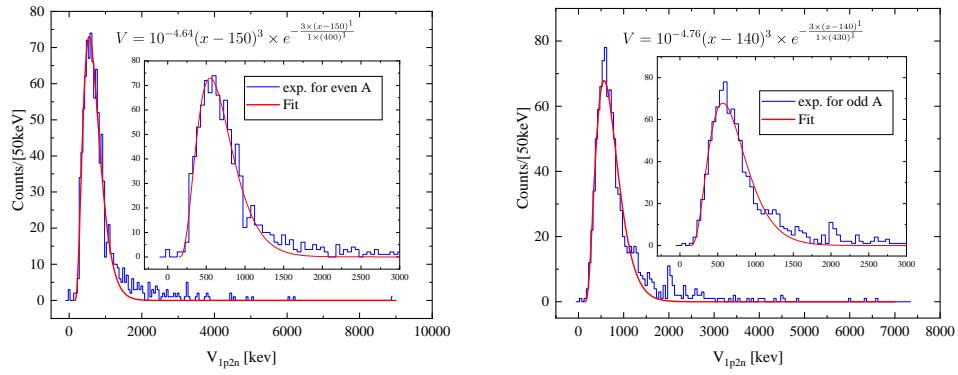


图 2.9: AME2016 的奇 A 核的 $V_{1p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布, 以及拟合的结果.



(a) 利用公式 2.9 对 AME2016 的偶 A 核的 $V_{1p-2n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

(b) 利用公式 2.9 对 AME2016 的奇 A 核的 $V_{1p-2n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

图 2.10: 利用公式 2.9 对 AME2016 的 $V_{1p-2n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行的拟合.

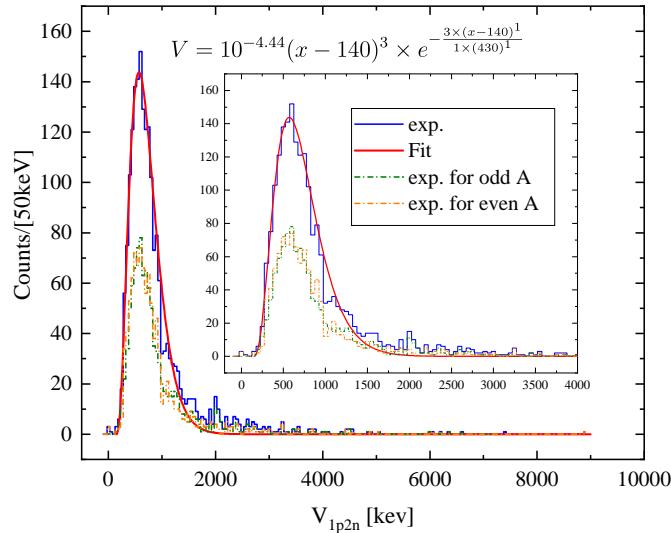
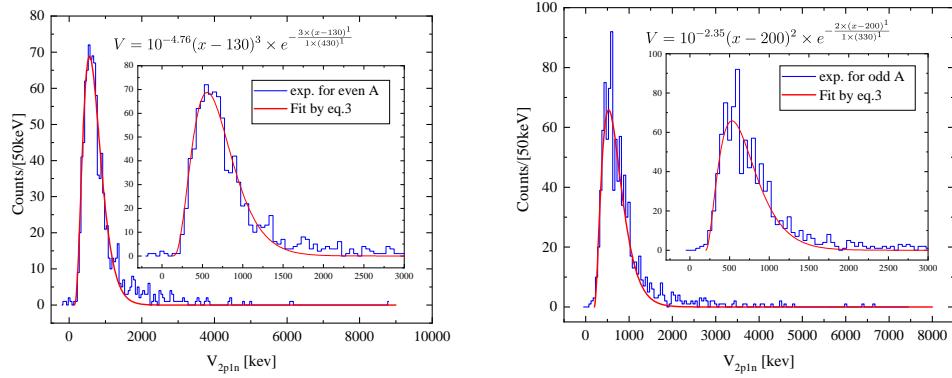


图 2.11: AME2016 的奇 A 核的 $V_{1p-2n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布, 以及拟合的结果.



(a) 利用公式2.9对AME2016的偶A核的 $V_{2p-1n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

(b) 利用公式2.9对AME2016的奇A核的 $V_{2p-1n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

图 2.12: 利用公式2.9对AME2016的 $V_{2p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行的拟合.

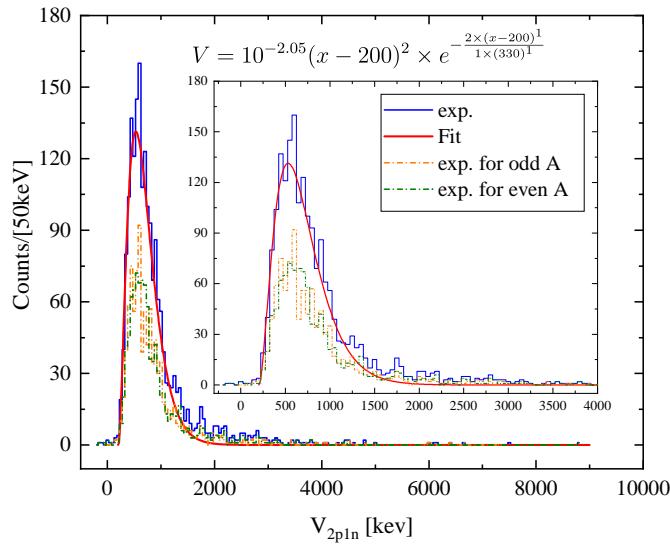
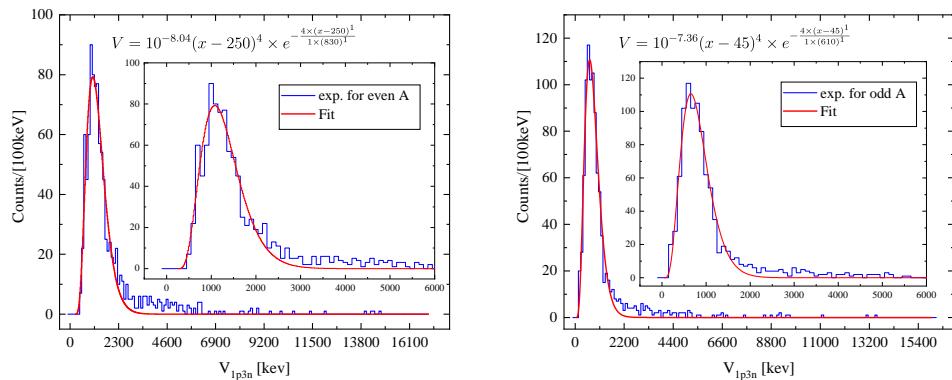


图 2.13: AME2016的奇A核的 $V_{2p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布, 以及拟合的结果.



(a) 利用公式2.9对AME2016的偶A核的 $V_{1p-3n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

(b) 利用公式2.9对AME2016的奇A核的 $V_{1p-3n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

图 2.14: 利用公式2.9对AME2016的 $V_{1p-3n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行的拟合.

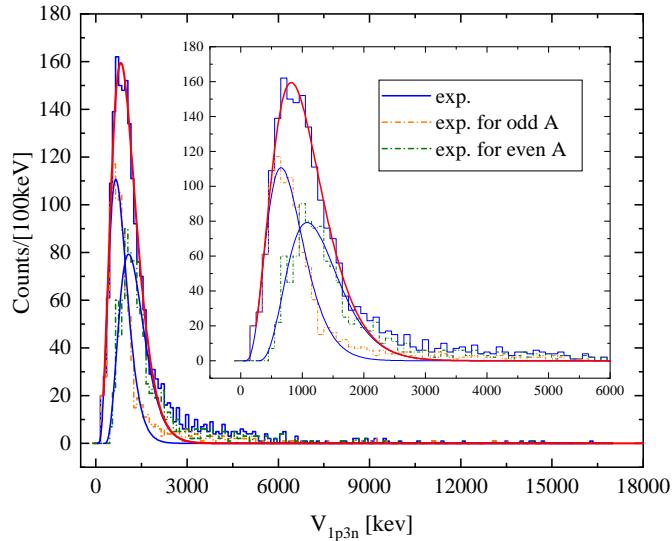
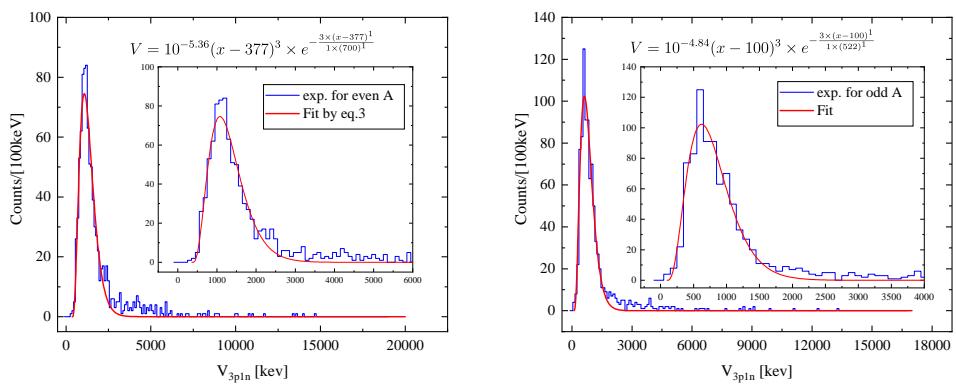


图 2.15: AME2016 的奇 A 核的 $V_{1p-3n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布, 以及拟合的结果.



(a) 利用公式 2.9 对 AME2016 的偶 A 核的 $V_{3p-1n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

(b) 利用公式 2.9 对 AME2016 的奇 A 核的 $V_{3p-1n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

图 2.16: 利用公式 2.9 对 AME2016 的 $V_{3p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行的拟合.

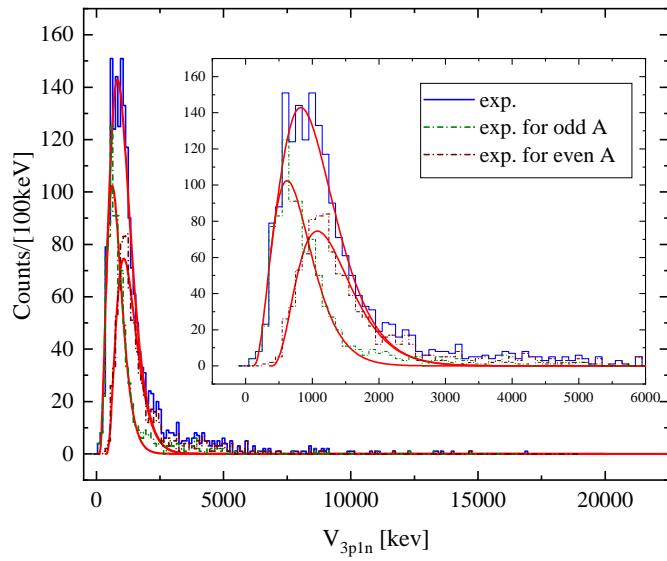
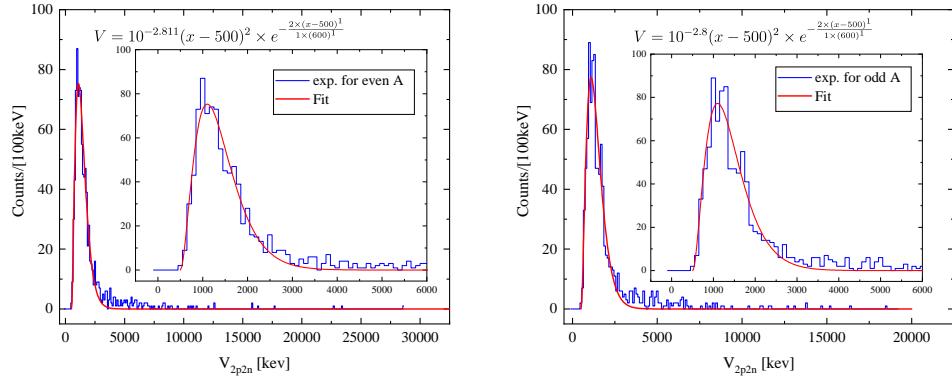


图 2.17: AME2016 的奇 A 核的 $V_{3p-1n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布, 以及拟合的结果.



(a) 利用公式2.9对AME2016的偶A核的 $V_{2p-2n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

(b) 利用公式2.9对AME2016的奇A核的 $V_{2p-2n}(Z, N)$ 相互作用进行的拟合.

图 2.18: 利用公式2.9对AME2016的 $V_{2p-2n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布进行的拟合.

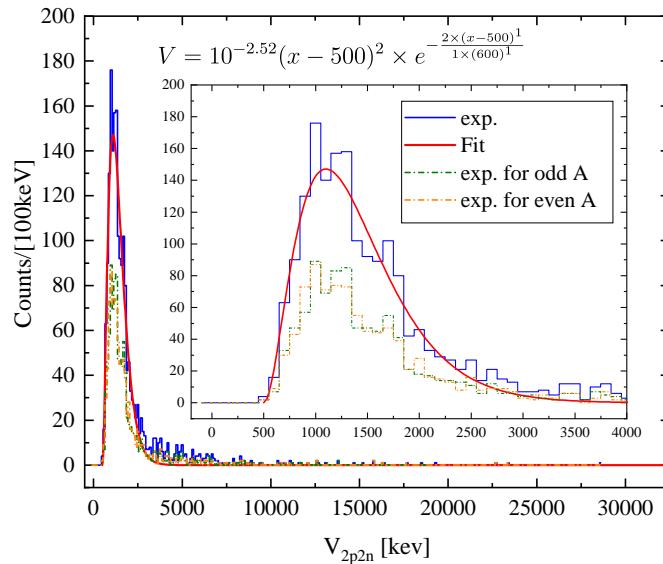


图 2.19: AME2016的奇A核的 $V_{2p-2n}(Z, N)$ 相互作用的统计分布, 以及拟合的结果.

下面的表格给出了mass-date-based p-n相互作用的统计分布的所有拟合参数 a, b, c, d, f :

表 2.1: mass-date-based p-n相互作用的统计分布的公式2.9拟合参数

Interaction	Range	a	b	c	d	f
$V_{1p-1n}(Z, N)$	for even A	4.64	490	80	3	1
	for odd A	10.56	90	-400	5	3
	for all nuclides	--	--	--	--	--
$V_{1p-2n}(Z, N)$	for even A	4.64	550	150	3	1
	for odd A	4.76	570	140	3	1
	for all nuclides	4.44	570	140	3	1
$V_{2p-1n}(Z, N)$	for even A	4.76	560	130	3	1
	for odd A	2.35	530	200	2	1
	for all nuclides	2.05	530	200	2	1
$V_{1p-3n}(Z, N)$	for even A	8.04	1080	250	4	1
	for odd A	7.36	655	45	4	1
	for all nuclides	--	--	--	--	--
$V_{3p-1n}(Z, N)$	for even A	5.36	1077	377	3	1
	for odd A	4.84	622	100	3	1
	for all nuclides	--	--	--	--	--
$V_{2p-2n}(Z, N)$	for even A	2.811	1100	500	2	1
	for odd A	2.8	1100	500	2	1
	for all nuclides	2.52	1100	500	2	1

从这个表格我们可以看出mass-date-based p-n相互作用的统计分布的一些特征:

1. $V_{ip-jn}(Z, N)(i, j \neq 0)$ 的统计分布与 $V_{jp-in}(Z, N)$ 的统计分布非常相似;
2. 对于 $V_{ip-jn}(Z, N)(i, j \neq 0)$, 当 $\text{mod}(i \times j, 2) = 0$ 时, 偶A核与奇A核的统计分布基本相同; 而当 $\text{mod}(i \times j, 2) \neq 0$ 时, i 偶A核与奇A核的统计分布存在奇偶差异, 且偶A核的平均相互作用能更大, 另外 $i \times j$ 的值越小, 奇偶差异越明显;

参考文献

- [1] BERTSCH G F, BINGHAM D. Estimating parameter uncertainty in binding-energy models by the frequency-domain bootstrap [J/OL]. *Phys Rev Lett*, 2017, 119(25): 252501. <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/29303311>. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.252501.
- [2] KREISS J P, LAHIRI S N. 1 - bootstrap methods for time series: volume 30[M/OL]. Elsevier, 2012: 3–26. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780444538581000016>. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53858-1.00001-6>.
- [3] EFRON B. 1977 rietz lecture - bootstrap methods - another look at the jackknife[J/OL]. *Annals of Statistics*, 1979, 7(1): 1–26. <GotoISI>://WOS:A1979GL00300001. DOI: DOI 10.1214/aos/1176344552.
- [4] MOUZE G, ROCABOY A. Does a neutron-proton pairing energy exist?[J]. *Il Nuovo Cimento A*, 1996, 109(5): 527–540. DOI: 10.1007/bf02731135.