机器人理论笔记

引言

此笔记可谓有生之年系列，在生物医学工程专业中承受巨量苦难后，笔者有幸参与到机械臂相关项目的开发，之前所学的李理论也算是有了用武之地了。

同时为了便于队友的机器人控制理论学习，特记录此笔记，作为个人对相关理论的总结。

为保证通俗易懂，本笔记尽量避开抽象的数学概念以及定理证明，主要针对在机器人控制中可能出现的数学公式以及引理进行论述，同时配合图片说明，以保证直观性。不过需要说明的是，本笔记默认读者有较好的线性代数基础，因此不会重复叙述线性代数基本概念，若部分内容令读者感到生分，还望能自行查找资料查漏补缺。

笔者以李理论和螺旋运动作为笔记开篇，叙述在描述空间旋转运动时的常规方法的局限性，进而引出李理论，并基于李理论搭建螺旋理论的框架。螺旋理论是描述机器人运动的基础，同时也为后续机器人运动学提供了统一的数学理论。

目录

1. 李理论与螺旋运动

1.1. 刚体运动

对于刚体运动，我们知道，可以将其运动拆解为平移运动与旋转运动两种，纯粹的平移运动是最为简单的，但是实际上的刚体运动是平移运动与旋转运动混合的结果，所以我们需要一种理论框架来描述这种混合运动。

我们首先讨论最简单的一种旋转，二维平面上绕原点的逆时针旋转。

假设一个二维平面中的三角形，绕原点进行旋转，假设其旋转矩阵为 A，二维平面的正交基为 $e_1 = [1, 0]^T, e_2 = [0, 1]^T$，显然有，旋转操作不改变三角形的面积，则对于旋转后的基 e_1', e_2' 有，

$$A[e_1, e_2] = [e_1', e_2']$$

满足正交关系，

$$e_1' \cdot e_2' = 0$$

其中 $\cdot$ 表示内积。且矩阵 A 满足，

$$\det(A) = 1$$

因此我们可以发现，二维平面上的旋转矩阵满足正交关系(正交基转完还是正交基)以及其行列式必须为 1。那么我们就得到了旋转矩阵的定义。

Definition: 旋转矩阵

在 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 上的旋转矩阵定义为，

$$M \in \left\{M \in \mathbb{R}^{n\times n} | MM^T = I, \det(M) = 1\right\}$$

那么我们知道在二维平面上的旋转矩阵可以写为，

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

或者将二维平面转为复平面，那么根据欧拉公式，旋转矩阵转为一维复数形式，即

$$M = e^{i\theta}$$

对于平移运动，设空间中点 $x \in \mathbb{R}^n$，其进行平移运动，平移量为 $t \in \mathbb{R}^n$，那么我们可以知道，平移后的点为，$y = x + t$，然而，平移并非线性变换，我们更加希望能够使用矩阵语言对平移进行描述，因此提出了齐次坐标的概念。

Definition: 齐次坐标

对 n 维空间中点的坐标 $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$，有齐次坐标为，

$$x' = (x_1, x_2, ..., x_n, 1)^T$$

那么 n 维空间中的平移变换 t 便可转为 $n+1$ 维空间中的线性变换，写作矩阵为，

$$M = \begin{bmatrix} I & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 I 为 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的单位矩阵。

以三维空间中的平移为例。

Example:

设点 $x = (1, 2, 3)^T$，平移量为 $t = (2, 2, 2)^T$，那么齐次坐标矩阵为，

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

带入可得，

$$Mx' = \begin{bmatrix} I & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.2. 基础李理论

2. 机器人运动学

2.1. Forward Kinematics

2.2. Inverse Kinematics

3. 控制理论

4. 轨迹生成

5. 姿态估计