Подготовка к коллоквиуму по теории меры

ФИВТ, 2 курс

20 января 2019 г.

Одного счетного пересечения объединения и последний шаг кокаином остался.

Я назначаю кольцо с ее дички то есть я входил всегда везде.

Дети не элемент никакого кольца не плод моего конца.

Когда мы идем считать мы считаем.

VK::ЭРЛРЭ

Содержание

1. Системы множеств.

Задача 1. Доказать, что

$$\overline{\lim_n} A_n = \bigcap_n \Big(\bigcup_{k \geq n} A_k \Big) \qquad \underline{\lim}_n A_n = \bigcup_n \Big(\bigcap_{k \geq n} A_k \Big).$$

Решение.

Верхний предел последовательности множеств A_n состоит из тех и только тех элементов x, каждый из которых принадлежит бесконечному числу множеств последовательности A_n.

Нижний предел последовательности множеств A_n состоит из тех и только тех элементов x, каждый из которых принадлежит всем множествам последовательности A_n, за исключением, быть может, конечного числа.

Верхний предел.

Пусть $x \in \bigcap\limits_n \left(\bigcup\limits_{k \geq n} A_k \right)$, тогда $\forall n \ x \in \bigcup\limits_{k \geq n} A_k$, откуда следует, что $\exists \{n_k\} : \forall k \ x \in a_{n_k}$, значит $x \in \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n$.

Нижний предел.

Пусть $x \in \bigcup\limits_n \left(\bigcap\limits_{k \geq n} A_k \right)$, тогда $\exists N : x \in \bigcap\limits_{k \geq N} A_k$, значит $x \in \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n$.

Получили, что $\bigcup\limits_n \left(\bigcap\limits_{k \geq n} A_k \right) \subseteq \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n$ и $\bigcap\limits_n \left(\bigcup\limits_{k \geq n} A_k \right) \subseteq \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n$.

Обратные включения доказываются тривиально.

Задача 2. Доказать, что если последовательность множеств $\{A_n\}$ монотонна, то

$$\overline{\lim_n} A_n = \underline{\lim}_n A_n.$$

При этом $\lim_n A_n = \bigcup_n A_n$, если A_n возрастают и $\lim_n A_n = \bigcap_n A_n$, если A_n убывают.

Решение. Рассмотрим два варианта:

1. $\{A_n\}$ монотонно возрастает, т.е. $\forall n \hookrightarrow A_n \subset A_{n+1}$.

   $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n = \bigcup\limits_n \left(\bigcap\limits_{k \geq n} A_k \right) = \bigcup\limits_n (A_n) = \bigcup\limits_n A_n$, так как из монотонности следует, что $\forall \ n \bigcap\limits_{k \geq n} A_k = A_n$.

   $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n = \bigcap\limits_n \left(\bigcup\limits_{k \geq n} A_k \right) = \bigcap\limits_n \left(\bigcup\limits_k A_k \right) = \bigcup\limits_n A_n$, так как из монотонности следует, что $\forall n \ \bigcup\limits_{k \geq n} A_k = \bigcup\limits_p A_p$.

2. $\{A_n\}$ монотонно убывает, т.е. $\forall \ n \hookrightarrow A_{n+1} \subset A_n$.

   $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n = \bigcup\limits_n \left(\bigcap\limits_{k \geq n} A_k \right) = \bigcup\limits_n \left(\bigcap\limits_k A_k \right) = \bigcap\limits_n A_n$, так как из монотонности следует, что $\forall n \ \bigcap\limits_{k \geq n} A_k = \bigcap\limits_p A_p$.

   $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n = \bigcap\limits_n \left(\bigcup\limits_{k \geq n} A_k \right) = \bigcap\limits_n (A_n) = \bigcap\limits_n A_n$, так как из монотонности следует, что $\forall n \ \bigcup\limits_{k \geq n} A_k = A_n$.

   Из вышеописанных равенств следует то, что нам надо в задаче.

Задача 3. Привести пример последовательности A_1, A_2, ..., что $\overline{\lim}_n A_n \neq \underline{\lim}_n A_n$. Доказать, что

$$\overline{\overline{\lim_n} A_n} = \underline{\lim}_n \overline{A_n}.$$

Решение. Пример: $A_{2k} = \{1\}$, $A_{2k+1} = \varnothing$.

$$\overline{\overline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n} = \overline{\bigcap_n \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right)} = \bigcup_n \left(\bigcap_{k\geq n} \overline{A}_k \right) = \underline{\lim}_{n\to\infty}\ \overline{A}_n$$

Задача 4. Пусть $f : A \to B$ — отображение множеств, $\mathfrak{A}$ – система подмножетсв множества A, $\mathfrak{B}$ – система подмножеств множества B. Положим

$$f(\mathfrak{A}) = \{f(X) \subset B : X \in \mathfrak{A}\}$$
$$f^{-1}(\mathfrak{B}) = \{f^{-1}(Y) \subset A : Y \in \mathfrak{B}\}.$$

(a) Показать, что $f(\mathfrak{A})$, вообще говоря, не обязано быть кольцом, если $\mathfrak{A}$ – кольцо.

(b) Доказать, что если $\mathfrak{B}$ – кольцо (σ-алгебра), то $f^{-1}(\mathfrak{B})$ – кольцо (σ-алгебра).

Решение.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$ и $\mathfrak{A} = \{\varnothing, \{1, 2\}, \{3, 4\}, A\}$, очевидно $\mathfrak{A}$ – кольцо. Пусть $f(1) = a$, $f(2) = f(3) = b$, $f(4) = c$. Тогда $f(\mathfrak{A}) = \{\varnothing, \{a, b\}, \{b, c\}, B\}$ – не кольцо, потому что $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin f(\mathfrak{A})$.

(b) (не уверен) Пусть $\mathfrak{B}$ – кольцо (σ-алгебра).

1) $\varnothing \in f^{-1}(\mathfrak{B})$, так как $\varnothing = f^{-1}(\varnothing)$, а $\varnothing \in \mathfrak{B}$.

2) $A, B \in f^{-1}(\mathfrak{B}) \Rightarrow \exists \Phi, \Psi : A = f^{-1}(\Phi), B = f^{-1}(\Psi)$.
   - $A \cap B \in f^{-1}(\mathfrak{B})$, так как $f^{-1}(\Phi \cap \Psi) = f^{-1}(\Phi) \cap f^{-1}(\Psi) = A \cap B$, а $\Phi \cap \Psi \in \mathfrak{B}$.
   - $A \Delta B \in f^{-1}(\mathfrak{B})$, так как $f^{-1}(\Phi \Delta \Psi) = f^{-1}(\Phi) \Delta f^{-1}(\Psi) = A \Delta B$, а $\Phi \Delta \Psi \in \mathfrak{B}$.

3) Пусть E – единица в $\mathfrak{B}$. Тогда $\forall X \in \mathfrak{B}\ X \subseteq E$.
   Тогда из того, что $\forall A, B \in \mathfrak{B} : A \subseteq B$ выполнено $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$, следует, что $f^{-1}(E)$ – единица в $f^{-1}(\mathfrak{B})$.

4) Пусть $A_1 \dots A_n \dots \in f^{-1}(\mathfrak{B})$, тогда $\exists\ B_1 \dots B_n \dots\ \in \mathfrak{B} :\ \forall n\ A_n = f^{-1}(B_n)$. Тогда $\bigcup\limits_n A_n \in f^{-1}(\mathfrak{B})$, так как $f^{-1}(\bigcup\limits_n B_n) = \bigcup\limits_n f^{-1}(B_n) = \bigcup\limits_n A_n$, а $\bigcup\limits_n B_n \in \mathfrak{B}$
   Из первых двух равенств следует, что $f^{-1}(\mathfrak{B})$ – кольцо, если $\mathfrak{B}$ – кольцо или σ-алгебра, а из последних двух следует, что $f^{-1}(\mathfrak{B})$ – σ-алгебра, только если $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра.

Задача 5. Являются ли следующие системы полукольцом, кольцом, алгеброй:

(a) Полуинтервалы: $S = \{[\alpha; \beta) |\ \alpha, \beta \in R\}$;

(b) Все конечные подмножетсва натуральных чисел;

(c) Все измеримые по Жордану подмножества отрезка [0, 1];

(d) Все открытые множества на прямой.

Решение. Любая σ-алгебра является алгеброй, любая алгебра является кольцом, любое кольцо является полукольцом.

(a) Докажем что не является кольцом.

Возьмем полуинтервалы $A = [0, 3)$ и $B = [1, 2)$. $A \triangle B = [0, 1) \cap [2, 3) \notin S$. Хотя симметрическая разность должна принадлежать кольцу.

Докажем, что является полукольцом.

- $\varnothing \in S$.
  Возьмем $\alpha = \beta$, $[\alpha, \beta) = \varnothing$, то есть $\varnothing \in S$.
- если $A, B \in S$, то $A \cap B \in S$.
  Пересечение двух полуинтервалов — полуинтервал. Значит пересечение принадлежит полуинтервалу.
- если $A, A_1 \in S$ и $A_1 \subset A$, то существуют конечное число множеств $A_2, A_3, \ldots, A_n \in S$ таких, что $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n$. Очевидно хватит двух $B_1, B_2 \in S$ (возможно пустых), чтобы дополнить A_1 до A.

(b) Докажем что не является алгеброй.

Назовем множество всех конечных подмножеств натуральных чисел — S. Возьмем $A \subset S$. $\overline{A}$ не будет конечным, значит не будет лежать в S. Значит S не образует алгебру.

Очевидно, что является кольцом.

- S непусто;
- если $A, B \in S$, то $A \cap B \in S$;
- если $A, B \in S$ то $A \triangle B \in S$.

(c) Является алгеброй.

- $\varnothing \in S$;
  Пустое множество измеримо по Жордану.
- если $A \in S$, то $\overline{A} \in S$;
  По свойству внешней и внутренней мер.
- если $A, B \in S$, то $A \cup B \in S$;
  Из определения меры.

(d) Не является даже полукольцом.

Назовем множество всех открытых множеств на прямой — S. Возьмем $A \in S$ и $B \in S$ такое, что $B \subsetneq A$ и левые концы A и B совпадают. Тогда $\exists B_1, \ldots, B_n \in S$, такие что $A = B \sqcup \left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i \right)$. Однако $A \setminus B$ – это полуинтервал, а полуинтервал не является открытым множеством, в то время как конечное дизъюнктное объединение открытых множеств открыто, противоречие. Значит S не полукольцо.

Задача 6. Доказать, что набор множеств, замкнутый относительно операций

a) $\cap$ и $\cup$,

b) $\cap$ и $\setminus$ может не быть кольцом.

Решение.

a) $S = \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}\}$ замкнут относительно $\cup$ и $\cap$, но кольцом не является, потому что $\{1,2\}\triangle\{1\} = \{2\} \notin S$.

b) $S = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$ замкнут относительно $\cap$ и $\setminus$, но кольцом не является, потому что $\{1\}\triangle\{2\} = \{1,2\} \notin S$.

Задача 7. Пусть $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ — две σ-алгебры подмножеств пространства Ω. Являются ли σ-алгебрами классы множеств:

1) $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$;

2) $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$;

3) $\mathfrak{B}_1 \setminus \mathfrak{B}_2$;

4) $\mathfrak{B}_1 \triangle \mathfrak{B}_2$.

Решение.

1) $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$ – σ-аглебра:

   a) $\varnothing \in \mathfrak{B}_1,\ \varnothing \in \mathfrak{B}_2 \Rightarrow \varnothing \in \mathfrak{B}$.

   b) $X,\ Y \in \mathfrak{B} \Rightarrow X,\ Y \in \mathfrak{B}_1;\ X,\ Y \in \mathfrak{B}_2 \Rightarrow X \cap Y \in \mathfrak{B};\ X \Delta Y \in \mathfrak{B}$, так как $X \cap Y \in \mathfrak{B}_1,\ X \Delta Y \in \mathfrak{B}_1$ и $X \cap Y \in \mathfrak{B}_2,\ X \Delta Y \in \mathfrak{B}_2$.

   c) $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathfrak{B} \Rightarrow A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathfrak{B}_1; A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathfrak{B}_2 \Rightarrow \bigcap\limits_n A_n \in \mathfrak{B}$, так как $\bigcap\limits_n A_n \in \mathfrak{B}_1$ и $\bigcap\limits_n A_n \in \mathfrak{B}_2$.

   d) $\Omega \in \mathfrak{B} \Rightarrow \Omega \in \mathfrak{B}_1;\ \Omega \in \mathfrak{B}_2 \Rightarrow \Omega$ – единица в $\mathfrak{B}$.

2) $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbb{R}, \varnothing, (-\infty; 1), [1; +\infty)\}$

   $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbb{R}, \varnothing, (-\infty; 2), [2; +\infty)\}$

   $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 = \{\mathbb{R}, \varnothing, (-\infty; 1), [1; +\infty), (-\infty; 2), [2; +\infty)\}$

   Пересечение двух элементов из объединения $(-\infty; 2) \cap [1; +\infty) = [1, 2) \notin \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$, значит объединение не является даже кольцом, поэтому $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ — не σ-алгебра.

3) $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbb{R}, \varnothing, (-\infty; 1), [1; +\infty)\}$

   $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbb{R}, \varnothing, (-\infty; 2), [2; +\infty)\}$

   $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \setminus \mathfrak{B}_2 = \{(-\infty; 1); [1; +\infty)\}$ – не σ-алгебра, так как $\varnothing \notin \mathfrak{B}$.

4) $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbb{R}, \varnothing, (-\infty; 1), [1; +\infty)\}$

   $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbb{R}, \varnothing, (-\infty; 2), [2; +\infty)\}$

   $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \triangle \mathfrak{B}_2 = \{(-\infty; 1), [1; +\infty), (-\infty; 2), [2; +\infty)\}$ – не σ-алгебра, так как $\varnothing \notin \mathfrak{B}$.

Задача 8. Доказать, что всякая конечная σ-алгебра подмножеств пространства Ω пораждается некоторым конечным разбиением Ω. Доказать, что мощность всякой конечной σ-агебры является степенью двойки.

Решение. Пусть A – наша σ-аглебра с единицей Ω. Рассмотрим разбиение единицы: $\Omega = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \Omega_k$, обладающее следующими свойством:

1. Любое множество из разбиения обязано быть только подмножеством каких-то элементов A, то есть нет такого множества $X \in A$ и индекса k, что $X \cap \Omega_k \neq \Omega_k$, при условии, что $X \neq \varnothing$

Такое разбиение существует, так как:

1. В силу того, что A – полукольцо, то существует конечное разбиение Ω.

2. Если текущее разбиение не удовлетворяет условиям, то мы можем каждый элемент разбить еще так, чтобы новое разбиение стало удовлетворять условию (разбивать будем пересекая текущее разбиение и эелементы A).

Заметим, что любой элемент из A – конечное объединение каких-то элементов рашего разбиения. Пусть $Q = \{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n\}$, тогда $A \subseteq \mathcal{P}(Q)$.

С другой стороны $\mathcal{P}(Q) \subseteq A$, так как любой элемент $\mathcal{P}(Q)$ – конечное объедиенение каких-то элементов Q, а значит элемент должен лежать и в A.

Тогда мы имеем, что $A = \mathcal{P}(Q)$. Откуда следует, что A пораждается конечным разбиением Ω и $|A| = 2^{|Q|}$.

Задача 9. Есть поток сигма-алгебр $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$ Является ли σ-алгеброй объединение всех этих систем?

Решение. Пусть F_n – σ-алгебра, порожденная $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}, \{n+1, n+2, \ldots\}\}$.

Пусть X – множество всех нечентых чисел из $\mathbb{N}$.

Пусть $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.

Тогда F – не σ-алгебра, так как $\forall x \in X$ выполнено,что $x \in F$, но $X \notin F$, а значит не выполняется замкнутость относительно счетного объединения ($X \sim \mathbb{N}$).

Задача 10. Существует ли такая счетная система подмножеств R, что $\sigma(R)$ – борелевская σ-алгебра?

Решение. Для начала рассмторим $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Заметим, что $\forall X \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ выполнено:

$$X = \bigsqcup_n \langle a_n, b_n \rangle,$$

где $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ и $a_n \leq b_n$.

Пусть $R = \{(-\infty, a) : \ a \in \mathbb{Q}\} \sqcup \{(-\infty, a] : \ a \in \mathbb{Q}\} \sqcup \{(a, +\infty) : \ a \in \mathbb{Q}\} \sqcup \{[a, +\infty) : \ a \in \mathbb{Q}\}$

Докажем, что $\sigma(R) = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Доказательство:

1. $\sigma(R)$ содержит все промежутки вида $\langle a, b \rangle$, где $a, b \in \mathbb{Q}$.

2. из 1. следует, что $\sigma(R)$ содержит все множества вида $\bigsqcup\limits_n \langle a_n, b_n \rangle$, где $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ и $a_n \leq b_n$.

3. $\sigma(R)$ содержит все промежутки вида $\langle a, b \rangle$, где $a, b \in \mathbb{R}$, так как рассмторим последовательности a_n, b_n из $\mathbb{Q}$ такие, что a_n возрастает, b_n убывает и $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$. Тогда $\langle a, b \rangle = \bigcap\limits_n \langle a_n, b_n \rangle$, откуда следует, что $\langle a, b \rangle$ лежит в $\sigma(R)$

4. из того, что $\langle a, b \rangle$ лежит в $\sigma(R)$ следует, что $\sigma(R)$ содержит все множества вида $\bigsqcup\limits_n \langle a_n, b_n \rangle$, где $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ и $a_n \leq b_n$. Здесь все границы интервалов действительны.

Тогда мы имеем, что $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(R)$.
Из построения R следует, что $\sigma(R) \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.
Тогда имеем, что $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma(R)$. А по построению $R \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

2. Мера.

Задача 1. Построить пример полукольца S и такой функции $\varphi : S \to [0; +\infty)$, что $\forall A, B \in S : A \cap B = \varnothing$ и $C = A \sqcup B \in S$ выполнено равенство $\varphi(C) = \varphi(A) + \varphi(B)$, но φ — не мера на S.

Решение. Рассмотрим систему множеств $S = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,2,3,4\}\}$. Можно показать, что данная система является полукольцом. Определим на S функцию φ следующим образом:

$\varphi(\varnothing) = 0$

$\varphi(\{1\}) = \varphi(\{2\}) = \varphi(\{3\}) = \varphi(\{4\}) = 1$

$\varphi(\{1,2\}) = 2$

$\varphi(\{1,2,3,4\}) = 3$

Тогда для данной функции выполняется равенство $\varphi(\{1,2\}) = \varphi(\{1\}) + \varphi(\{2\})$, однако φ не является мерой на S, т.к. $\varphi(\{1,2,3,4\}) = 3 \neq 4 = \varphi(\{1,2\}) + \varphi(\{3\}) + \varphi(\{4\})$.

Задача 2. Пусть m — мера на полукольце S. Докажите, что

(a) если множества A и B принадлежат S и $B \subseteq A$, то $m(B) \leqslant m(A)$.

(b) $m(\varnothing) = 0$

(c) Если $A, B, A \cup B \in S$, то $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$

(d) Если $A, B, A \triangle B \in S$ и $m(A \triangle B) = 0$, то $m(A) = m(B)$

Решение.

(a) Из определения полукольца следует, что $\exists B_1, \ldots, B_n \in S :$

$$A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$$

Тогда из аддитивности меры получим, что

$$m(A) = m(B) + \sum_{i=1}^{n} m(B_i) \tag{1}$$

В силу неотрицательности меры (1) влечет за собой неравентво $m(B) \leqslant m(A)$.

(b) Т.к $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$, то $\varnothing = \varnothing \sqcup \varnothing \to m(\varnothing) = m(\varnothing \sqcup \varnothing) = m(\varnothing) + m(\varnothing) \to m(\varnothing) = 0$.

(c) Т.к $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup B$ и $A \cup B \in S$, то $\exists B_1, \ldots, B_n \in S :$

$$A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$$

Тогда в силу аддитивности меры

$$m(A \cup B) = m(B) + \sum_{i=1}^{n} m(B_i) \tag{2}$$

С другой стороны, $A = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B)$ и $A \cup B \in S$ по определению полукольца, поэтому

$$m(A) = m(A \cap B) + \sum_{i=1}^{n} m(B_i) \tag{3}$$

Вычитая (2) из (3), получим

$$m(A \cup B) - m(A) = m(B) - m(A \cap B) \to m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B),$$

ч.т.д.

(d) Пусть $A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B \setminus A = \bigsqcup_{j=1}^{k} B_j; \qquad A_j, B_j \in S$ (аналогично задачам 1 и 3). Тогда, т.к $A \triangle B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$

$$m(A \triangle B) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) + \sum_{j=1}^{k} m(B_j)$$

Т.к $m(A \triangle B) = 0$ и m неотрицательна,

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) = \sum_{j=1}^{k} m(B_j) = 0. \tag{4}$$

Воспользовавшись тем, что $A = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B)$ и $B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$ и равенством (4), получим, что $m(A) = m(A \cap B) = m(B)$.

Задача 3.

(a) Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо с мерой m, а $\mathcal{S}_1 = \{A \in \mathcal{S} : m(A) = 0\}$. Доказать, что $\mathcal{S}_1$ — полукольцо.

(b) Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо с мерой m, а $\mathcal{R}_1 = \{A \in \mathcal{R} : m(A) = 0\}$. Доказать, что $\mathcal{R}_1$ — кольцо.

(c) Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра с мерой m, а $\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A} : m(A) = 0\}$. Верно ли, что $\mathcal{A}_1$ — алгебра?

Решение.

(a) Проверим выполнение соответствующих определений:

1) $\varnothing \in \mathcal{S}_1$, т.к $m(\varnothing) = 0$.

2) Пусть $A, B \in \mathcal{S}_1$. Тогда $A, B \in \mathcal{S}$, $m(A) = 0$ и $m(A) = 0$. Из этого следует, что $m(A \cap B) = 0$, т.е $A \cap B \in \mathcal{S}_1$.

3) Пусть $A, B \in \mathcal{S}_1, A \subset B$. Тогда $\exists B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{S} : A = B \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n$. Т.к. $A \in \mathcal{S}_1$, то $m(A) = 0$. Но тогда, т.к $B, B_1, \ldots, B_n \subset A$, меры всех множеств $B, B_1, \ldots, B_n$ равны нулю. Следовательно $B, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{S}_1$.

(b) Аналогично предыдущему пункту:

1) $\varnothing \in \mathcal{R}_1$ (т.к $m(\varnothing) = 0$), следовательно, $\mathcal{R}_1$ непусто.

2) Проверка пересечения множеств аналогична пункту ((a)).

(c) Пусть $\mathcal{A}$ — все подмножества отрезка $[0, 1]$, измеримые по Жордану, тогда в $\mathcal{A}_1$ будут все точки отрезка $[0, 1]$, но в $\mathcal{A}_i$ не будет множества, содержащего их все, поэтому в $\mathcal{A}_1$ не будет единицы.

Задача 4. Пусть m – σ-аддитиваня мера на полукольце S, множества $A, A_1, \ldots, A_i, \ldots$ придлежат S, причем $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Доказать, что

$$m(A) = \lim_{i \to \infty} m(A_i).$$

Это свойство меры называется *непрерывностью.*

Решение. Рассмотрим $\{A_n\} \in S$ такую, что $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \ldots$, и $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Обозначим $B_i = A_i \setminus A_{i+1}$, тогда $A_1 \setminus A = \bigsqcup\limits_i B_i = \bigsqcup\limits_i \bigsqcup\limits_j C_{i,j}$, где $C_{i,j} \in S$

$$m(A_1) - m(A) = \sum_i \sum_j m(C_{i,j}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{j_i} m(C_{i,j}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} (m(A_i) - m(A_{i+1})) =$$
$$= m(A_1) - \lim_{i\to\infty} m(A_i)$$

чтд.

Задача 5. Пусть m – мера на кольце R и для любых таких множеств $A, A_1, \ldots, A_i, \ldots$ из R, что $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

выполнено равенство

$$m(A) = \lim_{i\to\infty} m(A_i).$$

Доказать, что m – σ-аддитивная мера. Или иначе: доказать σ-аддитивность непрерывной меры. Показать, что это утверждение может не быть справедливым для меры на полукольце.

Решение.

Задача 6. Построить пример меры на полукольце, которая не является σ-аддитивной.

Решение. Пусть $S = \{(a, b] \cap \mathbb{Q} : \ a, b \in \mathbb{R}, \ a \le b\}$. Пусть $\mu((a, b) \cap \mathbb{Q}) = b - a$.

Понятно, что S – полукольцо, а μ – мера на нём.

Докажем, что μ – не σ-аддитивна:

Рассмторим $E = (0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Так как $E \sim \mathbb{N}$, то занумеруем точки $E : E = \{r_n\}$.

Построим последовательность множеств $\{A_n\}$ по индукции:

1. $A_1 = (max(0, r_1 - \frac{1}{2^3}), r_1] \cap \mathbb{Q}$.
2. Пусть $k_{n+1} = inf\{j \ge 1 : \ r_j \notin \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\}$
3. Положим $A_{n+1} = (r_{n_{k+1}} - x_{n+1}, r_{n_{k+1}}] \cap \mathbb{Q}$, где $x_{n+1} \in (0, 2^{-n-3})$ такое, что $A_{n+1} \bigcap \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \right) = \varnothing$.

Тогда $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Найдем меру E:

1. $\mu(E) = 1 - 0 = 1$
2. $\mu(E) = \mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2+n}} = \frac{1}{4}$

Таким образом, мы получили, что μ – не σ-аддитивная мера на S.

Задача 7. Пусть m — σ-аддитивная мера на полукольце S, множества $A, A_1, \ldots A_i, \ldots$ принадлежат S, причем $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ и

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Доказать, что

$$m(A) = \lim_{i\to\infty} m(A_i).$$

Решение. Определим для каждого $i \geqslant 1$ множество $B_i = A_{i+1} \setminus A_i$. Тогда

$$A \setminus A_1 = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Так как S — полукольцо, то $\forall k\ \exists C_1, \dots, C_{j_k} \in S$, такое что

$$B_k = \bigsqcup_{j=1}^{j_k} C_j.$$

Отсюда получим, что

$$m(A) - m(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{j_i} m(C_j) = \lim_{i \to \infty} \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=1}^{j_k} m(C_j) = \lim_{i \to \infty} (\sum_{k=1}^{i-1} (m(A_{k+1}) - m(A_k))) =$$

$$= \lim_{i \to \infty} (m(A_i) - m(A_1)) = \lim_{i \to \infty} m(A_i) - m(A_1).$$

Из этого следует, что

$$m(A) = \lim_{i \to \infty} m(A_i).$$

Задача 8. Пусть m — мера на кольце R и для любых таких множеств $A, A_1, \dots A_i, \dots$ из R, что $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

выполняется

$$m(A) = \lim_{i \to \infty} m(A_i). \tag{5}$$

Докажите, что m — σ-аддитивная мера. Показать, что это утверждение может не быть справедливым для меры на полукольце.

Решение. Пусть $B, B_1, \dots B_i, \dots$ принадлежат R и

$$B = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Определим множества

$$C_l = \bigsqcup_{i=1}^{l} B_i = B \setminus \left(\bigsqcup_{i=l+1}^{\infty} B_i \right), l = 1, 2, \dots .$$

Тогда $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$ и

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} C_l = B.$$

Тогда множества $C_1, C_2, \dots$ удовлетворяют условию (5), следовательно

$$m(B) = \lim_{l \to \infty} m(C_l).$$

Если нашлось такое n, что $m(B_n) = +\infty$, то очевидным образом

$$m(B) = +\infty = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i).$$

Иначе

$$m(B) = \lim_{l\to\infty} m(C_l) = \lim_{l\to\infty} m\left(\bigsqcup_{i=1}^{l} B_i\right) = \lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l} m(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим полукольцо $S = \{\langle a,b\rangle \cap \mathbb{Q} : 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1\} \cup \{\varnothing\}$ и меру $m(\langle a,b\rangle) = b-a$ (аналогично задаче 5). Покажем, что m непрерывна, но не σ-аддитивна.

Пусть $\mathbb{Q}\cap[0,1] = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Заметим, что для любого n $m(\langle r_n, r_n\rangle) = 0$. Поэтому

$$1 = m(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = m\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} m(\langle r_n, r_n\rangle)\right) \neq \sum_{i=1}^{\infty} m(\langle r_n, r_n\rangle) = 0,$$

т.е m не σ-аддитивна.

Пусть теперь $A, A_1, \dots \in S : A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ и

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Если $A = \langle a,b\rangle$, $A_i = \langle a_i, b_i\rangle$, то $a_i \to a$, $b_i \to b$. Следовательно,

$$\lim_{i\to\infty} m(A_i) = \lim_{i\to\infty}(b_i - a_i) = b - a = m(A),$$

т.е мера m непрерывна.

Задача 9. Показать, что в случае σ-конечной меры понятия непрерывности и σ-аддитивности не равносильны.

Решение. Пусть m — классическая мера Лебега на $\mathbb{R}$. Пусть $A_i = [i, +\infty)$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} = \varnothing.$$

Однако

$$\lim_{i\to\infty} m(A_i) = +\infty \neq 0 = m(\varnothing).$$

3. Внешняя мера. Мера Лебега.

Задача 1. Доказать, что если вопреки определению верхней меры, мера m не σ-аддитивна, то найдется такое множество $A \in S$, для которого $\mu^*(A) < m(A)$.

Решение. По условию, $\exists A \in S$ и $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$ такие, что

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ и } m(A) \neq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n). \qquad (6)$$

По свойству m, получаем:

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < m(A). \qquad (7)$$

Задача 2. Пусть $A \in X$ и $B \in X$. Показать, что $\mu^*(A\cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Решение. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Тогда для A и B можно найти такие $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \{B_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$, что:

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) - \frac{\varepsilon}{2};$$
$$B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \mu^*(B) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$A \cup B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n). \tag{8}$$

откуда следует:

$$\mu^* (A \cup B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B) + \varepsilon. \tag{9}$$

В силу произвольности ε получаем требуемое неравенстов:

$$\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B). \tag{10}$$

Задача 3. Пусть $A \subseteq X$ и $B \subseteq X$. Докажите, что

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Решение.

Задача 4. Докажите, что если $E \subseteq \mathbb{R}$ измеримо, то для любого $A \subseteq \mathbb{R}$ выполено

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \setminus E) + \mu^*(A \cap E)$$

Решение.

1. Пусть $A \cap E \subseteq \bigcup B_i$, $A \setminus E \subseteq \bigcup C_j$, тогда $A \subseteq (\bigcup B_i) \cup (\bigcup C_j)$.
   Тогда: $\mu^*(A) \leq \sum m(B_i) + \sum m(C_j) \to \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cup E) + \mu^*(A \setminus E)$ (По предельному переходу).
2. Пусть $E \subseteq \bigcup E_i^\delta$, причем $\mu^*(E \Delta \bigcup E_i^\delta) < \delta$; $A \subseteq \bigcup A_j$.
   Тогда: $A \setminus \bigcup E_i^\delta \subseteq (\bigcup A_j) \setminus \left(\bigcup E_i^\delta\right)$
   и $\mu^*(A \setminus \bigcup E_i^\delta) \leq m((\bigcup A_j) \setminus (\bigcup E_i^\delta)) = m(\bigcup A_j) - m((\bigcup A_j) \cap (E_i^\delta))$.
   $\mu^*(A \cap (\bigcup E_i^\delta)) \leq m((\bigcup A_j) \cap (\bigcup E_i^\delta))$.
   Тогда: $\mu^*(A \cap \bigcup E_i^\delta) + \mu^*(A \setminus \bigcup E_i^\delta) \leq m(\bigcup A_i) \to \mu^*(A \cap \bigcup E_i^\delta) + \mu^*(A \setminus \bigcup E_i^\delta) \leq \mu^*(A)$ тогда используя предельный переход по δ имеем: $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \leq \mu^*(A)$

Таким обоазом, $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$.

Задача 5. Доказать, что в случае классической меры Жордана система множеств $\mathfrak{M}_J$ не является σ-алгеброй. Привести пример меры m, когда она является σ-алгеброй.

Решение. Пусть $\mathbb{Q}_{[0,1]} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество рациональных чисел отрезка $[0, 1]$. Тогда $\forall n : \{r_n\} \in \mathfrak{M}_J$, $\mu_J(\{r_n\}) = 0$, но $\mathbb{Q}_{[0,1]} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\} \notin \mathfrak{M}_J$ (не измеримо по Жордану).

Если вместо классической меры взять в качестве m взять тождественный ноль на σ-алгебре $2^{\mathbb{R}}$, то μ_J^* на всех подмножествах $\mathbb{R}$ будет равняться 0, откуда будет следовать, что $\mathfrak{M}_J = 2^{\mathbb{R}}$. (???)

Задача 6. Пусть множество $E \subseteq \mathbb{R}$ имеет положительную меру Лебега. Докажите, что множество $E - E = \{x - y : x, y \in E\}$ содержит интервал с центром в 0.

Решение. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим такие множества K - компакт, O - октрытое множество, что:

$$K \subseteq E \subseteq O, \mu(K) + \varepsilon > \mu(E) > \mu(O) - \varepsilon. \tag{11}$$

Пусть также $2\mu(K) > \mu(O)$.

Возьмем такую δ, что $\forall k \in K \Rightarrow U_\delta(k) \subseteq O$. Тогда $U_{\delta/2}(k) \subseteq U_\delta(k) \subseteq O$. Рассмотрим следующее множество $\{U_{\delta/2}(k) : k \in K\}$ – открытое покрытие компакта. Тогда в нем можно выбрать конечное покрытие $\{U_{\delta/2}(k_1), \dots, U_{\delta/2}(k_n)\}$.

Тогда ('+' - сумма Минковского):

$$K + (-\delta/2; \delta/2) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\delta/2}(k_i) + (-\delta/2; \delta/2) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_\delta(k_i) \subset O. \tag{12}$$

Покажем, что $\forall v \in (-\delta/2; \delta/2) \Rightarrow (K + v) \cap K \neq \emptyset$. Пусть это не так:

$$\begin{aligned}
&\forall v \in (-\delta/2; \delta/2) \Rightarrow (K + v) \cup K \subset K + (-\delta/2; \delta/2) \subset O \\
&\mu(K + v) + \mu(K) < \mu(O) \\
&\exists v \in (-\delta/2; \delta/2) : (K + v) \cap K = \emptyset \Rightarrow A = (K + v) \sqcup K \\
&\mu(A) = \mu(K + v) + \mu(K) = 2\mu(K) < \mu(O).
\end{aligned}$$

Что противоречит выбору K и O.

В итоге получаем:

$$\forall v \in (-\delta/2; \delta/2) \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in K \subseteq E : v + k1 = k2. \implies (-\delta/2; \delta/2) \subset E - E. \tag{13}$$

Задача 7. Построить такие неизмеримые относительно классической меры Лебега на $[0; 1]$ множества A_1, A_2, что $A_1 \cup A_2$ измеримо.

Решение. Возьмем в качестве A_1 – множество Витали на $[0; 1]$, A_2 - его дополнение. Множество Витали не измеримо. Пусть его дополнение измеримо. Но тогда множество Витали было бы измеримым. Следовательно, A_2 неизмеримо. $A_1 \cup A_2 = E = [0; 1]$, то есть их объединение измеримо.

Определение 1. Множество Витали - неизмеримое по Лебегу множество. Его построение:

Рассмотрим такое отношение эквивалентности $\sim$: $x \sim y$, если $x - y \in \mathbb{Q}$. Это отношение разбивает $[0; 1]$ на классы эквивалентности. Выберем по представителю в каждом классе. Полученное множество A будет неизмеримым.

***Утверждение* 1.** *Множество Витали неизмеримо.*

Доказательство. Занумеруем все рациональные числа на $[-1; 1]$. Получим следующую последовательность $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $A_n = A + r_n$. Докажем, что полученные множества не пересекаются. Пусть это не так. Тогда

$$\exists x = a_n + r_n = a_m + r_m, n \neq m. \tag{14}$$

Но тогда $a_m - a_n \in \mathbb{Q}$, а значит a_n и a_m лежат в одном множестве. Противоречие.

Пусть в A_n находится измеримое множество C_n с мерой $d > 0$. Тогда

$$\forall m \exists C_m \subseteq A_m : \mu(C_m) = d. \tag{15}$$

Но

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq [-1;2], \tag{16}$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} d \leq 3. \tag{17}$$

Противоречие.
С другой стороны,

$$[0;1] \subseteq \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{18}$$

Если мера A_n равна нулю, то и сумма тоже будет равна нулю. Но $\mu([0;1]) = 1$. Противоречие.
Следовательно, множество Витали неизмеримо.

$\square$

Задача 8. Пусть $A \in \mathfrak{M}$, $\mu(A) = 0$ и $B \subset A$. Докажите, что $B \in \mathfrak{M}$ и $\mu(B) = 0$.

Решение. Так как $B \subset A$, то $\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) = \mu(A) = 0$. Докажем, что если $\mu^*(B) = 0$, то $B \in \mathfrak{M}$, т.е $\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon : \mu^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$. Взяв в определении $A_\varepsilon = \varnothing$ для всех $\varepsilon > 0$, получим, что $B \in \mathfrak{M}$ и $\mu(B) = \mu^*(B) = 0$

Задача 9. Пусть μ — классическая мера Лебега на $[0,1]$. Построить такую последовательность $\{A_i\}$ множеств из $\mathfrak{M}$, что

$$\mu(\liminf_{i\to\infty} A_i) < \varliminf_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

Решение. Пусть $A_{2n-1} = \left(0, \dfrac{1}{2}\right), A_{2n} = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right), n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mu(A_n) = \dfrac{1}{2}$ при каждом n. Но т.к $A_{2n-1} \cap A_{2n} = \varnothing$,

$$\mu(\liminf_{i\to\infty} A_i) = \mu(\varnothing) = 0.$$

4. Измеримые функции.

Задача 1. Доказать (не опираясь на критерий измеримости), что если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы, то и множество $\{x : f(x) < g(x)\}$ измеримо. Получить отсюда, что $f(x) + g(x)$ - измеримая функция.

Решение. $\{x : f(x) < g(x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{x : f(x) < r_n\} \cap \{x : r_n < g(x)\})$, где r_n - последовательность рационых чисел. Так как справа все множества измеримы, то и исходное тоже измеримо.

$(f+g)(x) : \{x \in X \mid f(x) + g(x) > C\} = \{x \in X \mid f(x) > C - g(x)\}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – измеримы, значит $f+g$ измеримая.

Задача 2. Пусть (X, M, μ) – измеримое пространство, $A \subseteq X$ и $f(x) = \mathbb{I}_A(x)$. Доказать, что $f(x)$ измерима на X тогда и только тогда, когда $A \in M$.

Решение.

$\forall c < 0 \Rightarrow f^{-1}((c, +\infty)) = X \in M$.
$\forall c > 1 \Rightarrow f^{-1}((c; +\infty)) = \emptyset \in M$
$\forall c \in [0,1] \Rightarrow f^{-1}((c; +\infty)) = A$. Следовательно, функция измерима тогда и только тогда, когда $A \in M$.

Задача 3. Пусть μ – классическая мера Лебега на $[0;1]$. Построить такую неизмеримую функцию $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, что для любого $c\in\mathbb{R}$ множество $f^{-1}(\{c\})$ измеримо.

Решение. Пусть E - неизмеримое множество. Тогда:

$$f(x)=\begin{cases}x, \text{если } x\in E\\ -x, \text{если } x\notin E\end{cases}. \tag{19}$$

$f(x)$ - неизмеримо. Действительно, $f^{-1}((0,+\infty))$ не измеримо. Но $\forall c\in\mathbb{R}\Rightarrow f^{-1}(\{c\})$ – точка $\Rightarrow f^{-1}(\{c\})$ – измеримо.

Задача 4. Пусть (X,M,μ) — измеримое пространство, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — всюду плотное множество в $\mathbb{R}$, а функция $f:X\to\mathbb{R}$ такова, что

$$\forall n f^{-1}((a_n,+\infty))\in M.$$

Доказать, что $f(x)$ измерима на X.

Решение. Возьмем произвольное $c\in\mathbb{R}$. Т.к $\{a_n\}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$, то найдется подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, такая что $a_{n_k}\downarrow c$ при $k\to\infty$. Тогда

$$f^{-1}((c,+\infty))=\bigcup_{k=1}^{\infty}f^{-1}((a_{n_k},+\infty))\in M.$$

Задача 5. Построить функцию $f(x)$ на $[0,1]$, измеримую на $[0,1]$ относительно классической меры Лебега на $[0,1]$, но разрывную в каждой точке.

Решение. Функция Дирихле на $[0,1]$

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{если } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0, \text{если } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

измерима, т. к $f^{-1}(\{1\})=[0,1]\cap\mathbb{Q}$, $f^{-1}(\{0\})=[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ — измеримые множества. При этом f разрывна в каждой точке.

Задача 6. Пусть (X,M,μ) — полное измеримое пространство (т.е мера μ полна), а $f(x)$ — измеримая функция на A. Пусть $g(x)$ — функция, эквивалентная $f(x)$. Доказать, что $g(x)$ — измеримая на A функция.

Решение. Пусть $A_0=\{x\in A: f(x)\neq g(x)\}$. Т.к мера μ полна, то любое множество $B\subseteq A_0$ измеримо. Для каждого $c\in\mathbb{R}$ определим множества $B_1=\{x: f(x)\leqslant c, g(x)>c$ и $B_2=\{x: g(x)\leqslant c, f(x)>c\}$. Множества $B_1,B_2\subseteq A_0$ и для каждого $c\in\mathbb{R}$ выполнено равенство

$$g^{-1}((c,+\infty])=(f^{-1}((c,+\infty])\cup B_1)\setminus B_2.$$

Отсюда $g(x)$ измерима на A.

Задача 7. Пусть $[a,b]\subset\mathbb{R}$ и функция f монотонна на $[a,b]$. Доказать, что f измерима относительно классической меры Лебега на $[a,b]$.

Решение. Пусть для определенности $f(x)$ — невозрастающая на $[a,b]$ функция. Тогда для всех $c\in\mathbb{R}$ множество $f^{-1}((c,+\infty])$ является либо полуинтервалом $[a,d)$, $d\in(a,b]$, либо отрезком $[a,d]$, $d\in[a,b]$, либо пустым. Следовательно, оно измеримо, а значит $f(x)$ измерима.

Задача 8. Построить такую функцию $f(x)\in C([0,1])$, что для некоторого множества $A\subset[0,1]$ меры нуль множество $f(A)$ измеримо и $\mu(f(A))>0$, где μ — классическая мера Лебега.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{2}(x + \varphi(x))$, где $\varphi(x)$ — канторова лестница. Функция $f(x)$ непрерывна и монотонна, $f([0,1]) = [0,1]$. Пусть также P_0 — канторово множество, $\mu(P_0) = 0$. Тогда

$$G = [0,1] \setminus P_0 = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

Для каждого интервала $\mu(f((a_n, b_n))) = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$, и т.к $\mu(G) = 1$, мера множества $f(G)$ равна $\frac{1}{2}$. Тогда $\mu(f(P_0)) = \mu(f([0,1])) - \mu(f(G)) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Задача 8. Построить такую строго монотонную функцию $f(x) \in C([0,1])$, что для некоторого множества $A \subset [0,1]$ меры нуль множество $f(A)$ измеримо и $\mu(f(A)) > 0$, где μ — классическая мера Лебега.

Решение. См. предыдущую задачу.

Задача 10. Построить функцию $f(x) \in C([0,1])$ и измеримое множество $A \subset \mathbb{R}$, для которых множество $f^{-1}(A)$ неизмеримо относительно классической меры Лебега.

Решение. Рассмотрим функцию $\psi(x) = \frac{1}{2}(x + \varphi(x))$, где $\varphi(x)$ — канторова лестница. Функция $\psi(x)$ непрерывна и монотонна, следовательно, существует непрерывная функция $f(y) = \psi^{-1}(y) : [0,1] \to [0,1]$. Пусть также P_0 — канторово множество. В $\psi(P_0)$ существует неизмеримое подмножество, обозначим его B. Пусть теперь $A = f(B) = \psi^{-1}(B)$. Тогда $A \subset P_0$, следовательно $A \in \mathfrak{M}$ и $\mu(A) = 0$ в силу полноты меры Лебега, но $f^{-1}(A) = B \notin \mathfrak{M}$.

Задача 11. Построить такую функцию $g(x) \in C([0,1])$, что для некоторого измеримого множество $A \subset [0,1]$ с $\mu(A) = 0$, для которых множество $g(A)$ неизмеримо относительно классической меры Лебега.

Решение. Пусть A — множество, построенное в предыдущей задаче. Возьмем $g(x) = \psi(x)$. Тогда $g(A) = B \notin \mathfrak{M}$.

Задача 12. Построить множество $A \subset [0,1]$, которое измеримо относительно классической меры Лебега, но не является борелевским.

Решение. Пусть A — множество, построенное в двух предыдущих задачах. Предположим, что A борелевское. Тогда, т.к f измерима, то измеримо множество $f^{-1}(A)$. Однако $f^{-1}(A) = B \notin \mathfrak{M}$. Следовательно, A не является борелевским множеством.

5. Сходимость.

Задача 1. Определим функцию $f(x)$ на отрезке $[0;1]$ следующим образом. Если $\overline{x = 0, n_1 n_2 n_3 \ldots}$ – десятичная запись числа x, то $f(x) = \max_i n_i$. Доказать, что $f(x)$ измерима и почти всюду постоянна.

Решение. Найдем меру множества $A = \{x \mid f(x) = 9\}$.

$$\mu(A) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} + \ldots = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{9}{10})^n = \frac{1}{10} \cdot (\frac{1}{1 - 9/10}) = 1$$

Отсюда получаем, что она постоянна почти всюду. Покажем, что такая функция измерима:

$$f^{-1}((c; +\infty]) = \begin{cases} \mu((x \notin A) \sqcup A) = 0 + 1 = 1, \text{ если } 0 \leq c < 9 \\ \mu(A) = 1, \text{ если } c = 9 \\ \varnothing, \text{ если } c > 9 \end{cases}$$

Задача 2. Показать, что вообще говоря из сходимости п.в. не следует сходимость по мере в случае, когда мера σ-конечна.

Решение. Рассмотрим $f_n(x) = \mathbf{I}_{[-n;n]}$ на $\mathbb{R}$. Тогда при $n \to \infty \hookrightarrow \mu(\{x \mid f_n(x) \nrightarrow 1\}) = \{\varnothing\} = 0$ (так как $\forall x\ \exists n = \lceil x \rceil \hookrightarrow f(x) = 1)$. Но при этом $\mu(\{x \mid |f_n(x) - 1| > \frac{1}{2}\}) = \mu((-\infty; n) \cap (n; +\infty)) \neq 0$.

Задача 3. Пусть последовательность неотрицательных функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере к $f(x)$ на A. Доказать, что $f(x) \geq 0$ п.в. на A.

Решение. Т.к f_n сходится по мере к f, существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, т.ч. $f_{n_k} \to f$ почти всюду. Т.к $\forall x\ f_{n_k}(x) \geq 0$, применяя теорему о предельном переходе в неравенствах, получим, что $f(x) \geq 0$ п.в. на A.

Задача 4. Пусть $\mathbb{Q}_{[0,1]} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$,Доказать, что последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = r_n \\ \frac{1}{\sqrt{n}(x - r_n}, \text{ если } x \in [0,1] \setminus \{r_n\} \end{cases}$$

сходится по классической мере Лебега на $[0, 1]$.

Решение. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Тогда

$$E_n = \{x \in [0,1] : f_n(x) > \varepsilon\} = \left(\left(r_n - \frac{1}{\sqrt{n}\varepsilon}, r_n - \frac{1}{\sqrt{n}\varepsilon} \right) \setminus r_n \right) \cap [0,1]$$

для $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\mu(E_n) \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}\varepsilon} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Следовательно, f_n сходится по классической мере Лебега на $[0, 1]$.

Задача 5. Пусть $\mathbb{Q}[0, 1] = \{r_n = \frac{p_n}{q_n}\}_{n=1}^{\infty}$, где p_n, q_n — взаимно простые натуральные числа, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где $f_n(x) = e^{(-p_n - q_n x)^2}$ сходится по классической мере Лебега на $[0, 1]$, но не сходится ни в одной точке.

Решение. Пусть $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Если $x \in [0,1] \setminus (r_n - \delta, r_n + \delta)$, то $f_n(x) \leq e^{-q_n^2 \delta^2} \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при $n > N$ справедлива оценка:

$$\mu(\{x \in [0,1] : f_n(x) > \varepsilon\}) \leq \mu(r_n - \delta, r_n + \delta) = 2\delta$$

, т.е $\{f_n\}$ сходится по мере к 0 на $[0, 1]$.

Покажем, что $f_n(x)$ не сходится ни в одной точке. Из того, что любое действительное число можно со сколь угодно большой точностью приблизить рациональным, следует, что для любого простого q существует $r_m = \dfrac{p_m}{q} : 0 < |r_m - x_0| \leq \dfrac{1}{q}$. Тогда $f_m(x_0) = e^{-q^2(r_m - x_0)^2} \geq e^{-1}$. Таким образом, существует подпоследовательность, не сходящаяся к нулю, следовательно $f_n(x)$ не сходится к 0 поточечно. С другой стороны $f_n(x)$ не может сходиться к $f(x)$, отличной от нуля, т.к это противоречит сходимости к нулю по мере.

Задача 6. Показать, что утверждение теоремы Егорова не выполняется для классической меры Лебега.

Решение. Теорема Егорова: Пусть $\mu(A) < \infty$, $f_n(x) \to f(x)$ п.в на A. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует такое измеримое множество $E_\varepsilon \subseteq A$, что $\mu(A \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ и последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на E.

Пусть $f_n(x) = \mathbb{I}_{[-n,n]}(x)$. В силу задачи 2 $f(x) \to 1$, однако $\mu(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 1| < \frac{1}{2}\}) = \infty$ при всех n. Следовательно, условие теоремы Егорова не выполняется.

6. Интеграл Лебега.

Задача 1. Поймите, что функция $f(x) = \mathbb{I}(x \in \mathbb{Q})$ интегрируема на $\mathbb{R}$, найдите величину интеграла.
Решение. 0

Задача 2. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x}$ и μ — классическая мера Лебега на $(0; 1)$. Доказать, что

$$\int\limits_0^1 f(x)d\mu = \infty,$$

используя только определение интеграла Лебега.
Решение.

Задача 3. Верно ли, что функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ интегрируема по Лебегу на прямой?
Решение.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\int\limits_{\pi(n-1)}^{\pi n} \frac{|\sin x|}{x}dx \geqslant \frac{1}{\pi n}\int\limits_{\pi(n-1)}^{\pi n} |\sin x|dx = \frac{2}{\pi n}.$$

$$\int\limits_0^{\pi N} \frac{|\sin x|}{x}dx \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \text{ – ряд расходится, значит}$$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx = +\infty \text{ т.е. не интегрируема по лебегу}$$

Задача 4. Пусть $f(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве A (т.е. $\int_A |f(x)|d\mu < \infty$, будем писать $f \in L_1(A)$). Доказать, что $\mu(\{x \in A : f(x) = \pm\infty\}) = 0$.
Решение. Можно считать, что $f(x) \geqslant 0$ на A. Пусть $A_1 = \{x \in A : f(x) = +\infty\} \in M$. Предположим, что $\mu(A_1) > 0$. Положим $A_2 = A_1$, если $\mu(A_1) < \infty$, иначе выберем множество $A_2 \subset A_1$, $A_2 \in M$ с $0 < \mu(A_2) < \infty$. Определим простые функции $h_n(x) = n\chi_{A_2}(x)$ для $n \in (N)$. Ясно, что $0 \leqslant h_n(x) \leqslant f(x)$ при $n \in \mathbb{N}$ и $x \in E$, т.е. $h_n(x) \in Q_f$. Тогда по определению интеграла Лебега получаем, что

$$\int_A f(x)d\mu \geqslant \sup_n \int_A h_n(x)d\mu = \sup_n n\mu(A_2) = \infty,$$

а это противоречит условию интегрируемости f.

Задача 5. Построить такую последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных функций из $L_1([0; 1])$, таких что $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого $x \in [0; 1]$, но

$$\int\limits_0^1 f_n(x)d\mu \nrightarrow 0, n \to \infty.$$

Решение. Пусть $f_n(x) = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x)$ при $x \in [0, 1]$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ для каждого $x \in [0, 1]$, но

$$\int\limits_{[0,1]} f_n(x)d\mu = 1$$

при всех n.