1 Вероятностное пространство как математическая модель случайного эксперимента. Статистическая уствойчивость.

Определение. Элементарные события $\omega_1, \omega_2, \ldots$ — *все мыслимые исходы некотрого эксперимента. Совокупность исходов* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ — пространство элементарных событий (или пространство исходов). *Множество* Ω *не обязано быть ни конеченым, ни счетным.*

Определение. *Подмножества* $A \subseteq \Omega$*, для которых по условиям эксперимента возможен ответ одного из двух типов* $\omega \in A$ *или* $\omega \notin A$ *называются* событиями. *Для событий действуют понятия, применимые к множествам (объединение, пересечение, разность,* $\overline{A} = \Omega \setminus A$ *и т.п.). Событие* $\varnothing$ — невозможное событие, Ω — достоверное событие. *Событие* $A \cup B, A \not\cap B \Leftrightarrow A + B$ *— сумма событий.*

Пусть $\mathcal{F}$ — сигма-алгебра над Ω.

Определение. *Функция* P *из* $\mathcal{F}$ *в* $[0, 1]$ *называется* вероятностной мерой (вероятностью)*, если выполнены следующие свойства:*

1. $P(\Omega) = 1$;
2. *для любого набора событий* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}, A_i \in \mathcal{F}, A_i \cap A_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$ *выполнено*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Свойства вероятности:

1. $P(A) \leqslant 1$;
2. $P(A) = 1 - P((\overline{A}))$;
3. $P(\varnothing) = 0$;
4. если $A \subseteq B$, то $P(A) \leqslant P(B)$;
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ и другие проявления формулы включений-исключений (специально для Васи, формула включений исключений выглядит так:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N}\right) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{N-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_N)); \quad (1)$$

6. для любых событий $A_1, A_2, \ldots$, таких что $A_{i+1} \subseteq A_i, \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$, $\lim\limits_{i \to \infty} P(A_i) = 0$.

Определение. *Тройка* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *называется* вероятностным пространством.

Определение. Статистическая устойчивость — *частота выпадения событий не меняется со временем. Для того, чтобы модель вероятностого пространства работала, события должны обладать вероятностной устойчивостью.*

2 Дискретное вероятностное пространство. Классическая вероятность. Построение простейших вероятностных пространств. Элементы комбинаторики. Вероятность суммы событий.

Определение. *Пусть пространство элементарных исходов из предыдущего пункта является конечным, т.е.* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$*. В качестве сигма-алгебры* $\mathcal{F}$ *зададим множество всех подмножеств* Ω (2^{Ω})*. Будем считать, что вероятности элементарных исходов равны, т.е.* $\forall i \in 1, \ldots, N P(\omega_i) = \frac{1}{N}$*. Такая модель называется классической вероятностной моделью. Вероятность в классической модели* $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Пример. *Игральная кость:* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathcal{F} = 2^{\Omega}, P(\{i\}) = \frac{1}{6}$.

Пример. *Выбор шаров из урны [Родионов, 7], [Ширяев, 15]. Здесь простейшие пространства и элементы комбинаторики.*

Про вероятность суммы событий в предыдущем пункте (формула включений-исключений (1)).

3 Геометрические вероятности. Задача “о встрече”.

Пусть Ω — область евклидова n-мерного пространства с конечным n-мерным объемом. Событиями назовем подмножества Ω, для которых можно определить объем. За множество событий можно принять борелевскую сигма-алгебру $\mathcal{B}$ над Ω. Зв вероятность события примем $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, где $|V|$ — объем множества V. Таким образом, мы определили пространство $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Это пространство служит моделью задач, в которых частица случайно бросается в область Ω, причем она может попасть в любую точку с равной вероятностью (вероятность пропорциональна объему).

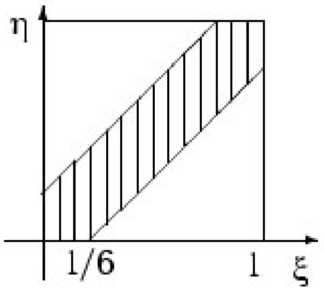

Рис. 1: К задаче о встрече

Задача о встрече. Два лица условились встретиться в определённом месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 10 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи этих лиц, если каждый из них может прийти в любое время в течение указанного часа независимо от другого?

Будем считать интервал с 14 до 15 часов отрезком $[0, 1]$ длиной в час. Пусти ξ и η — моменты прихода первого и второго лица — точки отрезка $[0, 1]$. Все возможные результаты эксперимента — точки квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$. Можно считать, что благоприятными исходами являются точки множества $A = \{(\xi, \eta) : |\xi - \eta| \leqslant 1/6\}$ (рисунок 1). Попадание точки в множество A означает, что лица встретятся, тогда

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}{1} = \frac{11}{36}.$$

4 Условная вероятность. Формулы полной вероятности, умножения и Байеса.

Рассматриваем конеченое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и некоторые события $A, B \in \mathcal{A}$.

Определение. Условной вероятностью *A при условии B (если $P(B) > 0$) называется* $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

Пример. *Брошено три кости. Найти вероятность того, что на всех костях выпала «шестерка», если на первой кости выпала «шестерка».*

Обозначим за $A = \{$на первой кости выпала «шестерка»$\}$, $B = \{$на всех костях выпала «шестерка»$\}$. Очевидно, $P(A) = \frac{1}{6}$. $B \subset A$, поэтому $P(A \cap B) = P(B) = \frac{1}{6^3}$. Тогда $P(B|A) = \frac{1/6^3}{1/6} = \frac{1}{36}$.

Определение. Разбиением *называется такая система событий $\{A_1, \ldots, A_n\}$, такая, что $\forall i, j$ выполнено $A_i \cap A_j = \varnothing$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.*

Формула умножения вероятностей. $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1})$

Формула полной вероятности. Пусть имеется разбиение $\{A_1, \ldots, A_n\}$ (может быть, счетное) с $P(A_i) > 0$, где $i = 1, \ldots, n$. Тогда для любого события B верна следующая формула:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i).$$

Рассмотрим событие B. Ясно что $B = BA_1 + \ldots + BA_n$, значит, $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(BA_i)$, но $P(BA_i) = P(B|A_i)P(A_i)$, что доказывает формулу полной вероятности.

Теорема Байеса. Пусть $\{A_1, \dots, A_n\}$ — разбиение (может быть, счетное) с $P(A_i) > 0$, где $i = 1, \dots, n$. Тогда для любого события B с $P(B) > 0$ верна следующая формула:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}.$$

Для вероятности $P(AB)$ справедливо следующее:

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A),$$

тогда

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Мы получили *формулу Байеса.* С помощью формулы полной вероятности из нее можно получить теорему Байеса.

Событие A_i называется гипотезой. Вероятность A_i — *априорная*, вероятность $P(A_i|B)$ — *апостериорная.*

5 Независимость событий, виды и взаимосвязь.

Будем говорить, что событие B не зависит от события A, если условная вероятность события B при условии A равна вероятности события B: $P(B|A) = P(B)$. Расписав условную вероятность по определению получаем, что $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Отсюда следует, что если A не зависит от B, то B не зависит от A.

Определение. *По определению события A и B* независимы*, если выполнено равенство $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*

Определение. *События $A_1, \dots, A_n$ называются* попарно независимыми*, если для любых различных $i, j \in 1, \dots, n$ выполнено $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$.*

Определение. *События $A_1, \dots, A_n$ называются* независимыми в совокупности*, если для любого набора индексов $i_1, \dots, i_k$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_k \leqslant n$ выполнено*

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}).$$

Из независимости в совокупности следует попарная независимость, обратное неверно, следующтий пример это доказывает.

Пример Бернштейна. Рассмотрим тетраэдр $ACDE$. Вершину A покрасим в красный цвет, вершину C — в зеленый, D — в синий, а E — сразу в три цвета. Будем с равной вероятностью выбирать вершину тетраэдра. Введем события $R = \{$ выбранная вершина покрашена в красный цвет $\}$, $G = \{$ выбранная вершина покрашена в зеленый цвет $\}$, $B = \{$ выбранная вершина покрашена в синий цвет $\}$. Тогда $P(R) = P(G) = P(R) = \frac{1}{2}$, а вероятности пересечений $P(R \cap G) = P(R \cap B) = P(G \cap B) = \frac{1}{4}$, т.е. события попарно независимы. Но $P(R \cap G \cap B) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(R)P(G)P(B)$, т.е. события не независимы в совокупности.

6 Случайные величины. Независимость случайных величин. Распределение. Примеры. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация, корреляция. Свойства.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностная модель некоторого эксперимента с конечным числом исходов $N(\Omega)$ и алгеброй $\mathcal{A}$ всех подмножеств Ω.

Определение. *Всякая числовая функция $\xi = \xi(\omega)$ определяется на (конечном) пространстве элементарных событий Ω, будет называться (простой)* случайной величиной.

Пример. *Число выпавших "гербов"при бросании двух монет.*

Определение. *Для некоторого множества* $A \in \mathcal{A} \quad \xi = I_A(w)$, *где*

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{cases},$$

называется характеристической функцией *или* индикатором.

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, где различными числами $x_1, \dots, x_m$ изчерпываются все значения ξ. $\mathcal{X}$ — совокупность всех подмножетв X и пусть $B \in \mathcal{X}$. Рассмотрим на $(X, \mathcal{X})$ вероятность, индуцированную случайной величиной ξ по формуле $P_\xi(B) = P(\omega : \xi(\omega) \in B)$.

$$P_\xi(x_i) = P(\omega : \xi(\omega) = x_i), \quad x_i \in X.$$

Определение. *Набор чисел* $\{P_\xi(x_1), \dots, P_\xi(x_m)\}$ *называется* распределением случайной величины ξ.

Определение. *Случайные величины* $\xi_1, \dots, \xi_r$ *называются* независимыми *(в совокупности), если для любых* $x_1, \dots, x_r \in X$

$$P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_r = x_r) = P(\xi_1 = x_1) \cdot \ldots \cdot P(\xi_r = x_r)$$

или, что эквивалентно, $\forall B_1, \dots, B_r \in \mathcal{X}$

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_r \in B_r) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot P(\xi_r \in B_r).$$

Пример. ξ — *дискретная случайная величина, если принимает значения* $x_1, x_2, \dots$ *(их не более, чем счетно).*

Примеры:

- биномиальное $Bin(p, n) \quad P(\xi = k \in 1 \dots n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$;
- геометрическое $Geom(p) \quad P(\xi = n) = (1-p)^n p$;
- пуассоновское $Pois(k) \quad P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k \geqslant 0$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — (конечное) вероятностное пространство и $\xi = \xi(\omega)$ — некоторая случайная величина, принимающая значения во множестве $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Если положить $A_i = \{\omega : \xi = x_i\}, i = 1, \dots, k$, то $\xi(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i I(A_i)$.

Определение. Математическим ожиданием *или* средним значением *случайной величины* $\xi = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i I(A_i)$ *называется число* $E\xi = M\xi = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i P(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i P_\xi(x_i)$.

Свойства:

1. Если $\xi \geqslant 0$, то $E\xi \geqslant 0$;
2. $E(a\xi + b\eta) = aE\xi + bE\eta, \quad a, b = const$:
   Пусть $\xi = \sum\limits_i x_i I(A_i)$ и $\eta = \sum\limits_j y_j I(B_j)$

$$a\xi + b\eta = a\sum_{i,j} x_i I(A_i \cap B_j) + b\sum_{i,j} y_j I(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j}(ax_i + by_j) I(A_i \cap B_j),$$

$$E(a\xi + b\eta) = \sum_{i,j}(ax_i + by_j) P(A_i \cap B_j) = \sum_i ax_i P(A_i) + \sum_j by_j P(B_j) = aE\xi + bE\eta;$$

3. Если $\xi \geqslant \eta$, то $E\xi \geqslant E\eta$:
   Из свойства 2) $E(\xi - \eta) = E\xi - E\eta$
   Из свойства 1) $E(\underbrace{\xi - \eta}_{\geqslant 0}) \geqslant 0 \Rightarrow E\xi \geqslant E\eta$;

4. $|E\xi| \leqslant E|\xi|$:

$$|E\xi| = \left|\sum_i x_i P(A_i)\right| \leqslant \sum_i |x_i| P(A_i) = E|\xi|;$$

5. Если ξ и η независимы, то $E\xi\eta = E\xi E\eta$:

$$E\xi\eta = \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)\eta(\omega)P(\omega) = \sum_{i,j} a_i b_j \sum_{\substack{\omega:\xi(\omega)=a_i \\ \eta(\omega)=b_j}} P(\omega) = \sum_{i,j} P\{\xi = a_i, \eta = b_j\} =$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j P\{\xi = a_i\} P\{\eta = b_j\} = \left(\sum_i a_i P\{\xi = a_i\}\right)\left(\sum_j b_j P\{\eta = b_j\}\right) = E\xi E\eta.$$

Определение. Дисперсией *величины* ξ *называется величина* $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$.

Определение. Средним кваратичным отклонением ξ *от* $E\xi$ *называется* $\sqrt{D\xi}$.

Свойства:

1. (формула подсчета) $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$:

$$E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - E(2\xi E\xi) + E((E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi E\xi + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2;$$

2. $D\xi \geqslant 0$:

$$(\xi - E\xi)^2 \geqslant 0 \Rightarrow \text{ по свойству 1) для мат. ожидания } 0 \leqslant E(\xi - E\xi)^2 = D\xi = D\xi;$$

3. $D(a + c\xi) = c^2 D\xi$:

$$D(a+c\xi) = E(a+c\xi)^2 - (E(a+c\xi))^2 = a^2 + 2acE\xi + c^2E\xi^2 - a^2 - 2acE\xi - c^2(E\xi)^2 = c^2(E\xi^2 - (E\xi)^2) = c^2D\xi.$$

Определение. Ковариацией *случайной величины* ξ *и* η *называется* $cov(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))$. *Если* $cov(\xi, \eta) = 0$, ξ *и* η *наызваются некоррелируемыми.*

Определение. Корреляцией *случайных величин* ξ *и* η *называется* $corr(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$

Свойства:

1. (формула для подсчета) $cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$:

$$cov(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta)) = E(\xi\eta - \xi E\eta - \eta E\xi + E\xi E\eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta - E\eta E\xi + E\xi E\eta = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$$

2. Если $\xi \perp \eta$[1], то $cov(\xi, \eta) = 0$:

$$cov(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta)) = 0 \cdot 0 = 0;$$

3. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2cov(\xi, \eta)$:

$$E((\xi + \eta) - E(\xi + \eta))^2 = E((\xi - E\xi) + (\eta - E\eta)) =$$

$$= E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 + 2E((\xi - E\xi) \cdot (\eta - E\eta)) + E\eta^2 - 2(E\eta)^2 + (E\eta)^2 = D\xi + 2cov(\xi, \eta) + D\eta$$

Если $\xi \perp \eta$, то $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.

[1] Этот символ пишется с двумя вертикальными палками, но я не нашел такой

7 Схема испытаний Бернулли. Математическая модель, предельные теоремы: Пуассона и Муавра-Лапласа (б).

Рассмотрим серию идентичных, независимых в совокупности экспериментов, которые дают два исхода. Один из исходов назовем успехом и обозначим $\{1\}$, а другой неудачей ($\{0\}$). Известно, что вероятность успеха в одном эксперименте равна $P(\{1\}) = p$, а неудачи $P(\{0\}) = 1 - p =: q$. Тогда пространство элементарных исходов — все двоичные последовательности длины n:

$$\Omega = \{\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_1, \dots \varepsilon_n \in \{0, 1\}\},$$

а вероятность каждого исхода равна

$$P(\omega) = p^{\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i} q^{n - \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i}.$$

Сумма вероятностей всех исходов в таком случае равна 1. Вероятность того, что в схеме из n испытаний Бернулли произошло k успехов $C_n^k p^k q^{n-k}$ ($p^k q^{n-k}$ — k успехов и $n-k$ неудач, C_n^k потому что нужно выбрать k удачных экспериментов).

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Пусть $0 < p < 1$,

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, P_n(a, b] = \sum_{a < x \leqslant b} P_n(np + x\sqrt{npq}).$$

Тогда

$$\sup_{-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty} \left| P_n(a, b] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \to 0, \quad n \to \infty$$

или

$$\sup_{-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty} \left| P_n\{a < \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant b\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \to 0, \quad n \to \infty$$

Теорема Пуассона. Пусть $P(n) \to 0, n \to \infty$, причем так, что $np(n) \to \lambda$, где $\lambda > 0$. Тогда $\forall k = 0, 1, \dots$

$$P_n(k) \to \pi_k, n \to \infty, \text{ где } \pi_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

8 Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, сигма-алгебры) Примеры. Минимальное кольцо, содержащее полукольцо. Понятие наименьшего кольца, алгебры, сигма-алгебры, содержащей систему множеств.

Определение. *Система множеств S называется* полукольцом*, если:*

1. $\varnothing \in S$,
2. *если $A, B \in S$, то $A \cap B \in S$,*
3. *если $A, A_1 \in S$ и $A_1 \subset A$, то существует конечное число таких множеств $A_2, \dots, A_n \in S$, что $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n = A$.*

Если при этом существует такое $E \in S$, что для любого $A \in S$ множество $A \subseteq E$, то E называется единицей полукольца, а S — полукольцом с единицей.

Определение. *Непустая система множеств R называется* кольцом*, если из того, что $A, B \in R$ вытекает, что $A \triangle B \in R$ и $A \cap B \in R$. Кольцо с единицей называется* алгеброй.

Определение. *Система множеств R называется σ-алгеброй, если R — алгебра и из того, что $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq R$ вытекает, что $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in R$.*

Утверждение. *Если R — кольцо то R — полукольцо, кроме того, если $A, B \in R$, то $A \cup B \in R$*

Доказательство. $\varnothing = A \triangle A \in R$. Второе требование из определения полукольца очевидно выполняется. Далее, $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$, откуда вытекает, что если $A, A_1 \in R$ и $A_1 \subset A$, то $A = A_1 \sqcup A_2$, где $A_2 = A \setminus A_1 \in R$. Наконец, если $A, B \in R$, то $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B) \in R$. ■

Утверждение. *Пересечение любого семейства колец является кольцом. Очевидно.*

Утверждение. *Пересечение любого семейства (σ-)алгебр с одной и той же единицей является (σ-)алгеброй*

Пример. *Множество полуинтервалов $\{[\alpha, \beta) \subseteq [a, b)\}$, включая пустой, образуют полукольцо с единицей $[a, b)$.*

Пример. *Множество промежутков $\{\{\alpha, \beta\} \subseteq [a, b]\}$, включая пустой, образуют полукольцо с единицей $[a, b]$.*

Пример. *Все подмножества множества — тривиальная сигма-алгебра.*

Пример. *Борелевская сигма-алгебра — минимальная, содержащая все открытые множества топологического пространства.*

Утверждение. *Пусть S — полукольцо. Тогда минимальное кольцо, содержащее S — это $R(S) = K(S) = \{\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i : A_i \in S, i = 1, \ldots, n\}$, т.е. $R(S)$ является совокупностью всех конечных дизъюнктных объединений множеств из S.*

Доказательство. Очевидно, что любое кольцо содержащее S содержит и $K(S)$. Докажем, что $K(S)$ — кольцо. Пусть $A, B \in K(S)$. Тогда $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ и $B = \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} B_j$, где все $A_i, B_j \in S$. Положим $C_{i,j} = A_i \cap B_j$ при $i = 1, \ldots, n$ и $j = i, \ldots, k$. Тогда $C_{i,j}$ попарно не пересекаются и

$$A \cap B = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{k} C_{i,j} \in K(S).$$

По свойствам полукольца мы можем сделать так:

$$A_i = \left(\bigsqcup_{j=1}^{k} C_{i,j} \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{s=1}^{s_i} D_{i,s} \right)$$

и

$$B_j = \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} C_{i,j} \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{l=1}^{l_j} E_{j,l} \right),$$

где $D_{i,s}, E_{j,l} \in S$ при всех i, j, k, l. Тогда

$$A \triangle B = \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} \left(\bigsqcup_{s=1}^{s_i} D_{i,s} \right) \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{k} \left(\bigsqcup_{l=1}^{l_j} E_{j,l} \right) \right) \in K(S),$$

раунд. ■

Утверждение. *Пусть X — некоторая система множеств. Тогда существует такое кольцо $R(X)$, что $X \subseteq R(X)$, и если некоторое кольцо $R_1 \supseteq X$, то $R \subseteq R_1$. Это кольцо называется минимальным кольцом, содержащим данную систему множеств. Если система X обладает единицей, то $R(X)$ является алгеброй (аналогично для σ-алгебр).*

Доказательство. Пусть $X = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$. Положим $B = \bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} A_\alpha$, и пусть $M(X)$ — множество всех подмножеств B. Отметим, что если X имело единицу E, то $B = E$. Тогда $M(X)$ — кольцо и $X \subseteq M(X)$. Пусть $P = \{P_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ — совокупность всех колец, содержащих X и содержащихся в $M(X)$. Положим $R(X) = \bigcap\limits_{\beta \in \Gamma} P_\beta$. Пересечение колец $R(X)$ — кольцо. Далее, очевидно, что $X \subseteq R(X)$. Пусть теперь R_1 — кольцо и $X \subseteq R_1$. Тогда $R_2 = R_1 \cap M(X)$ также кольцо. Но $R_2 \in P$ и, следовательно, $R(X) \subseteq R_2 \subseteq R_1$. Ч.т.д. ■

9 Меры на полукольцах. Классическая мера Лебега на полукольце промежутков и ее сигма-аддитивность.

Меры на полукольцах

Определение. Система множеств S называется **полукольцом**, если:

1. $\varnothing \in S$,

2. если $A, B \in S$, то $A \cap B \in S$,

3. если $A, A_1 \in S$ и $A_1 \subset A$, то существует конечное число таких множеств $A_2, \dots, A_n \in S$, что $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n = A$.

Определение. Пусть S – полукольцо множеств, и задано отображение $m : S \to [0, +\infty)$. Тогда m называется **мерой**, если из того, что $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} A_i$, где $A, A_1, \dots, A_k \in S$, вытекает, что $m(A) = \sum\limits_{i=1}^{k} m(A_i)$. Если же, вдобавок, для любых такие $A, A_1, \dots, A_k, \dots \in S$, что $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то m называется **σ-аддитивной мерой**.

Установим две вспомогательных леммы:

Лемма 1. *Если m – мера на полукольце S, множества $A, A_1, \dots, A_n \in S$ и $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, то $m(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$*

Доказательство. Из свойств полукольца(Лемма 1.2, Дьяченко, стр 11) следует, что найдутся такие попарно не пересекающиеся множества $B_1, \dots, B_s \in S$, что каждое из множеств $A_1, \dots, A_n, A$ может быть представлено в виде объединения некоторых B_j. При этом любое B_i, используемое в разложении A, входит в разложение хотя бы одного из A_i, где $1 \leqslant\leqslant n$. Кроме того, можно считать, что любое из множеств B_i входит в некоторое разложение. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) \geqslant \sum_{j=1}^{s} m(B_j) \geqslant m(A),$$

что и требовалось доказать. ■

Лемма 2. *Если m – мера на полукольце S, множества $A, A_1, \dots, A_n \in S$, а множества $A_i \subset A$ при $i = 1, \dots, n$ и A_i попарно не пересекаются, то $m(A) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$.*

Доказательство. Очевидно(по Лемме 1.1, Дьяченко, стр. 10), что найдутся такие множества $A_{n+1}, \dots, A_k \in S$, что $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} A_i$. Тогда

$$m(A) = \sum_{i=1}^{k} m(A_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i),$$

что требовалось установить. ■

Следствие 1. *Если m – мера на полукольце S, $A, A_1, \dots, A_n, \dots, \in S$ и $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset A$, то $m(A) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.*

Доказательство. Так как для любого n имеем $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset A$, по предыдущей лемме получаем:

$$m(A) \geqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i).$$

Совершая предельный переход, устанавливаем искомое. ■

Классическая мера Лебега на полукольце промежутков и ее сигма-аддитивность. Пусть S – полукольцо мромежутков

$$\{a, b\} = \{a_1, b_1\} \times \ldots \times \{a_n, b_n\} \subset [A_1, B_1] \times \ldots \times [A_n, B_n] = [A, B].$$

Положим

$$m(\{a, b\}) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

Неотрицательность m очевидна. Докажем аддитивность по индукции по размерности пространства. При $n = 1$ очевидно. Пусть $n > 1$ и аддитивность введенной функции уже установлена для размерности $n - 1$. Тогда, если

$$\{a, b\} = \{a(1), b(1)\} \sqcup \ldots \sqcup \{a(k), b(k)\} \subset [A, B],$$

то рассмотрим точки $a_n(1), b_n(1), a_n(2), b_n(2), \ldots, a_n(k), b_n(k) \in [a_n, b_n]$. Упорядочив их в порядке возрастания, получим разбиене отрезка $[a_n, b_n] : a_n = c(0) < c(1) < \ldots < c(l) = b_n$. Теперь положим

$$\begin{aligned}
&A(1) = \{a_1, b_1\} \times \ldots \times \{a_{n-1}, b_{n-1}\} \times (a_n, c(1)),\\
&A(1) = \{a_1, b_1\} \times \ldots \times \{a_{n-1}, b_{n-1}\} \times (c(1), c(2)),\\
&\ldots\\
&A(1) = \{a_1, b_1\} \times \ldots \times \{a_{n-1}, b_{n-1}\} \times (c(l-1), b_n)
\end{aligned}$$

и $E(j, s) = \{a(j), b(j)\} \cap A(s)$ при $j = 1, \ldots, k$ и $s = 1, \ldots, l$. Тогда, обозначая через F_n проекцию множества F на $n-1$-мерное подпространство, натянутое на первые $n - 1$ базисных векторов, имеем

$$E(j, s)_n = \begin{cases} \{a(j)_1, b(j)_1\} \times \ldots \times \{a(j)_{n-1}, b(j)_{n-1}\}, \text{ если } (c_{s-1}, c_s) \subset \{a(j)_n, b(j)_n\},\\ \varnothing \text{ в ином случае.}\end{cases}$$

Тогда при любом s имеем

$$A(s)_n = \bigsqcup_{j=1}^{k} E(j, s)_n.$$

Используя предположение индукции, имеем:

$$\begin{aligned}
m(\{a, b\}) &= \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \sum_{s=1}^{l}\prod_{i=1}^{n-1}(b_i - a_i)(c(s) - c(s-1)) =\\
&= \sum_{s=1}^{l} m_{n-1}(A(s)_n)(c(s) - c(s-1)) =\\
&= \sum_{s-1}^{l}\sum_{j=1}^{k} m_{n-1}(E(j, s)_n)(c(s) - c(s-1)) =\\
&= \sum_{s=1}^{l}\ \sum_{j:\{a(j)_n\}, b(j)_n\}\supset(c_{s-1}, c_s)}\ \prod_{i=1}^{n-1}(b_i(j) - a_i(j))(c(s) - c(s-1)) =\\
&= \sum_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{n-1}(b_i(j) - a_i(j)) \sum_{a:(c_{s-1}, c_s)\subset\{a(j)_n, b(j)_n\}}(c(s) - c(s-1)) =\\
&= \sum_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{n-1}(b_i(j) - a_i(j))(b_n(j) - a_n(j)) = \sum_{j=1}^{k} m(\{a(j), b(j)\}),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Введённая в предыдущем примере мера σ - аддитивна.*

Доказательство. Пусть

$$\{a, b\} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty}\{a(i), b(i)\}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем n -мерынй отрезок $[\alpha, \beta] \subset \{a, b\}$ так, чтобы выполнялось неравенство $m([\alpha, \beta]) > m(\{a, b\}) - \varepsilon/2$, и n - мерные интервалы $(\alpha(i), \beta(i)) \supset \{a(i), b(i)\}$ так, чтобы выполнялись неравенства $m((\alpha(i), \beta(i))) < m(\{a(i), b(i)\}) + \varepsilon/2^{i+1}$ при $i = 1, 2, \ldots$. Тогда, так как, очевидно, что

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, \beta_i),$$

по лемме Гейге–Бореля можно выбрать конечное число интервалов, покрывающих $[\alpha, \beta] : (\alpha(i_j), \beta(i_j))$, где $j = 1, \ldots, k$. По Лемме 1:

$$m(\{a, b\}) < m([\alpha, \beta]) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{k} m((\alpha(i_j), \beta(i_j))) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} m((\alpha(i), \beta(i))) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(m(\{a(i), b(i)\}) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \right) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} m(\{a(i), b(i)\}).$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольное, получаем, что

$$m(\{a, b\}) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(\{a(i), b(i)\}).$$

Обратное неравенство составляет утверждение следствия 1 и, таким образом, теорема установлена. ■

10 Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Наследование сигма- аддитивности при продолжении меры. Внешние меры Лебега и Жордана. Мера Лебега. Свойства. Сигма-алгебра измеримых множеств. Сигма-аддитивность меры Лебега на сигма-алгебре измеримых множеств.

Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо

Определение. Непустая система множеств R называется **кольцом**, если из того, что $A, B \in R$, вытекает, что $A \triangle B \in R$ и $A \cap B \in R$.

Теорема 1. *Пусть m– мера на полукольце S и $R(S)$ – наименьшее кольцо, содержащее S. Тогда функция ν, задаваемая на элементе кольца $A = \bigsqcup_{i=1}^{k} A_i$, где $A_1, \ldots, A_k \in S$, формулой*

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{k} m(A_i),$$

является мерой на $R(S)$. При этом, очевидно, что $\nu(A) = m(A)$ для $A \in S$.

Доказательство. Вначале проверим корректность определения функции ν. Если имеется другое представление $A = \bigsqcup_{r=1}^{s} B_r$, где $B_1, \ldots, B_s \in S$, то, полагая $D_{i,r} = A_i \cap B_r \in S$, получим, что

$$A_i = \bigsqcup_{r=1}^{s} D_{i,r} \text{ и } B_r = \bigsqcup_{i=1}^{k} D_{i,r}$$

для всех i и r, а потому,

$$m(A_i) = \sum_{r=1}^{s} m(D_{i,r}) \text{ и } m(B_r) \sum_{i=1}^{k} m(D_{i,r}).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} m(A_i) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{s} m(D_{i,r}) = \sum_{r=1}^{s}\sum_{i=1}^{k} m(D_{i,r}) = \sum_{r=1}^{s} m(B_r),$$

откуда и вытекает корректность определения функции ν. Её неотрицательность очевидна. Далее, пусть $A, A_1, \ldots, A_n \in R(S)$ и $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$. Тогда для любого i имеем $A_i = \bigsqcup_{j=1}^{j_i} A_{j,i}$, где все $A_{j,i} \in S$. Отсюда

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{n}\bigsqcup_{j=1}^{j_i} A_{j,i} \in R(S),$$

а потому

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{j_i} m(A_{j,i}) = \sum_{i=1}^{n} \nu(A_i),$$

и теорема установлена. ■

Наследование сигма- аддитивности при продолжении меры.

Теорема 2. *Если m – σ-аддитивная мера на полукольце S, то мера $\nu\sigma$-аддитивна на кольце $R(S)$.*

Доказательство. Пусть $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A, A_1, A_2, \ldots \in R(S)$. Тогда $A = \bigsqcup_{j=1}^{k} B_j$ и $A_i = \bigsqcup_{l=1}^{l_i} B_{i,l}$ при $i = 1, 2, \ldots$, где все $B_j, B_{i,l} \in S$. Полагая $C_{j,i,l} = B_j \cap B_{i,l}$ при всех j, i и l, получим

$$B_j = \bigsqcup_{i=1}^{\infty}\bigsqcup_{l=1}^{l_i} C_{j,i,l} \text{ и } B_{i,l} = \bigsqcup_{j=1}^{k} C_{j,i,l}$$

при $j = 1, \ldots, k, i = 1, 2, \ldots$ и $l = 1, \ldots, l_i$. Отсюда в силу σ-аддитивности меры m имеем

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{k} m(B_j) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_i} m(C_{j,i,l}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k} m(C_{j,i,l})\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_i} m(B_{i,l}) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i),$$

а это и нужно было установить. ■

Внешние меры Лебега и Жордана Пусть на полукольце S с единицей E задана σ-аддитивная мера m. Мы будем считать, что ν – это продолжение меры m на кольцо $R(S)$.

Определение. Если множество $A \subset E$, то его **внешняя мера Жордана**

$$\mu_J^*(A) = \inf_{\substack{A_1,\ldots,A_n \in S:\\ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i}} \sum_{i=1}^{n} m(A_i).$$

Определение. Если множество $A \subset E$, то его **внешняя мера Лебега**

$$\mu^*(A) = \inf_{\substack{A_1,A_2,\ldots \in S:\\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Несмотря на кажущееся несущетвенное различие, разница велика. Так, при стандартном определении меры на полукольце промежутков на отрезке $[0, 1]$ внешняя мера Лебега множества всех рациональных чисел равна нулю, а внешняя мера Жордана этого множества равна единице.

Свойства. Основное свойство внешней меры Лебега:

Теорема 3. *Если множества* $B, B_1, B_2, \ldots \subset E$ *и* $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, *то*

$$\mu^*(B) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i).$$

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда по определению внешней меры Лебега для любого i найдутся такие множества $A_{i,1}, A_{i,2}, \ldots \in S$, что $B_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$ и

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(A_{i,j}) < \mu^*(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Но тогда $B \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_{i,j}$ и, следовательно,

$$\mu^*(B) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} m(A_{i,j}) < \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) + \varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и вытекает утверждение теоремы. ■

Замечание. Аналогичное утверждение справедливо и для внежней меры Жордана, но только для случая конечных объединений множеств. Доказательство проводится так же.

Следствие 1. *Для любых* $A, B \subset E$ *имеет место оценка*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B).$$

То же верно и для внешней меры жордана.

Доказательство. Пусть для определённости $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(B)$. Используя факт, что $A \subset B \cup (A \triangle B)$, по Теореме выше имеем $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B)$, а это и нужно было установить. ■

Сигма-алгебра измеримых множеств.

Определение. Скажем, что множество $A \subset E$ **измеримо по Лебегу(по Жордану)**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множества $A_\varepsilon \in R(S)$, что $\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon (\mu^*_J(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon)$. Обозначим соответственно через M и M_J совокупность всех подмножеств E, измеримых по Лебегу и по Жордану.

Теорема 4. *Множества* M *и* M_j *являются алгебрами.*

Доказательство. Докажем теорму лишь для M, так как для M_J доказательство аналогично. Очевидно, что $E \in M$. Предположим, что множества $A, B \in M$. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in R(S)$ так, чтобы $\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon/2$ и $\mu^*(B \triangle B_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Тогда, так как множества $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon, A_\varepsilon \triangle B_\varepsilon \in R(S)$ и

$$(A \cap B) \triangle (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \subset (A \nabla A_\varepsilon) \cup (B \triangle B_\varepsilon),$$
$$(A \triangle B) \triangle (A_\varepsilon \triangle B_\varepsilon) \subset (A \triangle A_\varepsilon) \cup (B \triangle B_\varepsilon),$$

по теореме 1 имеем

$$\mu^*((A \cap B) \triangle (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon)) < \varepsilon$$

и

$$\mu^*((A \triangle B) \triangle (A_\varepsilon \triangle B_\varepsilon)) < \varepsilon$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда вытекает, что $A \cap B, A \triangle B \in M$, и, таким образом, теорема доказана. ■

Теорема 5. *Множество* M *является* σ*-алгеброй.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \ldots \in M$ и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Полагая $B_1 = A_1, B_i = A_i \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{i-1} A_k \in M$ при $k = 2, 3 \ldots$, видим, тчо $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. При любом фиксированном n, поскольку $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i \subset A$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \mu^*\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i\right) \leqslant \mu^*(A),$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) < \infty.$$

Теперь для заданного $\varepsilon > 0$ выберем N так, чтобы

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \mu(B_i) < \varepsilon.$$

Далее, така как M является алгеброй, найдётся такое множество $C \in R(S)$, что

$$\mu(C \triangle \bigsqcup_{i=1}^{N} B_i) < \varepsilon.$$

Поскольку

$$A \triangle C \subset \left(C \triangle \bigsqcup_{i=1}^{N} B_i\right) \cup \bigsqcup_{i=N+1}^{\infty} B_i,$$

воспользоваашись Теоремой 1, получим

$$\mu^*(A \triangle C) \leqslant \varepsilon + \mu^*\left(\bigsqcup_{i=N+1}^{\infty} B_i\right) \leqslant \varepsilon + \sum_{i=N+1}^{\infty} \mu(B_i) < 2\varepsilon.$$

Тем самым измеримость проверена, и теорема установлена.

■

Мера Лебега.

Определение. Мера $\mu = \mu^*$ на M называется **мерой Лебега**. Соответственно мера $\mu_J = \mu_j^*$ на M_J называется **мерой Жордана**.

Сигма-аддитивность меры Лебега на сигма-алгебре измеримых множеств.

Теорема 6. *На множестве $M(M_J)$ функция $\mu^*(\mu_J^*)$ аддитивна.*

Доказательство. Снова рассмотрим только случай M. Достаточно доказать аддитивность внешней меры для дизъюнктивного объединения двух множеств из M. Итак, пусть $B, C \in M$ и $A = B \sqcup C$. Тогда по Теореме 4 $A \in M$, а по Теореме 1

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(C).$$

Возьмём некоторое $\varepsilon > 0$ и выберем множества $B_\varepsilon, C_\varepsilon \in R(S)$ так, чтобы $\mu^*(B \triangle B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ и $\mu^*(C \triangle C_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. Поскольку

$$A \triangle (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) \subset (B \triangle B_\varepsilon) \cup (C \triangle C_\varepsilon),$$

по теореме 1

$$\mu^*(A \triangle (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon.$$

Далее,

$$B_\varepsilon \cup C_\varepsilon \subset (C_\varepsilon \setminus C) \cup (B_\varepsilon \setminus B).$$

Учитывая, что на $R(S)$ функция μ^* совпадает с аддитивной функцией ν, отсюда получаем, что

$$\mu^*(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) = \mu^*(B_\varepsilon) + \mu^*(C_\varepsilon) - \mu^*(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) \geqslant$$
$$\geqslant \mu^*(B) + \mu^*(C) - 2\varepsilon - \mu^*(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) \geqslant \mu^*(B) + \mu^*(C) - 4\varepsilon.$$

Тогда, используя следствие Теоремы 1 и полученную выше оценку, имеем:

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) - \mu^*(A \triangle (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) \geqslant \mu^*(B) + \mu^*(C) - 6\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(B) + \mu^*(C).$$

Отсюда и из неравенства, записанного вначале, следует справедливость утверждения теоремы. ■

Теорема 7. *Мера Лебега $\mu\sigma$-аддитивна на M.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \ldots \in M$ и $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in M$. Тогда $A \in M$ и по предыдущей теореме при любом n имеем

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n) + \mu\left(\bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n),$$

откуда

$$\mu(A) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Обратное неравенство вытекает из Теоремы 1, и наше утверждение доказано. ■

11 Полнота и непрерывность мер. Теоремы о связи непрерывности и сигма- аддитивности.

Определение. Пусть на кольце R задана конечная мера μ. Пусть также для любой последовательности вложенных множеств $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, где $A_1, A_2, \ldots \in R$ и $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in R$, выполнено равенство

$$\mu(A) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

Тогда мера называется **непрерывной**.

Теорема 1. *Заданная на кольце R мера μ непрерывна тогда и только тогда, когда она σ-аддитивна.*

Доказательство. Пусть μ σ-аддитивна и $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где множества A_i воложены и $A, A_1, A_2, \ldots \in R$. Положим $B_i = A_i \backslash A_{i+1}$ при $i \geqslant 1$. Тогда

$$A_1 \backslash A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

откуда

$$\mu(A_1 \backslash A) = \mu(A_1) - \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \mu(B_k) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} (\mu(A_k) - \mu(A_{k+1}))\right) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

то есть имеет место равенство из условия теоремы.

Теперь пусть мера μ непрерывна и $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A, A_1, A_2, \ldots \in R$. Положим

$$B_n = \bigsqcup_{i=n}^{\infty} A_i = A \backslash \bigsqcup_{i=1}^{n-1} A_i \in R.$$

Тогда $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$. Поэтому

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A \backslash \bigsqcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\mu(A) - \sum_{k=1}^{n-1} \mu(A_k)\right) = \mu(A) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \mu(A_k).$$

Но это и означает, что

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

■

Определение. Заданная на кольце R подмножеств некоторого множества X мера μ называется **полной**, если из того, что $A \in R, \mu(A) = 0$ и $B \subset A$, вытекает, что $B \in R$ и $\mu(B) = 0$.

Мера Лебега и Жордана полны, однако мера Бореля не полна.

12 Мера Бореля. Меры Лебега-Стилтьеса на прямой и их сигма-аддитивность.

Определение. Борелевской σ-алгеброй B в R^n называется наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые множества в R^n.

Предположим, что мера Лебега μ была получена продолжением σ-аддитивной меры с полукольца промежутков n-мерного отрезка $[a, b]$.

Для этого отрезка определим $B_{a,b} = \{A \cap [a, b] : A \in B\}$, где B – борелевская σ-алгебра. Очевидно также, что $B_{a,b}$ также является σ-алгеброй, и что, если M – σ-алгебра множеств, измеримых по Лебегу, то $B_{a,b} \subset M$.

Определение. Мерой Бореля называется мера, заданная на $B_{a,b}$ и совпадающая там с мерой Лебега μ.

Пусть задано полукольцо с единицей

$$S = \{\varnothing\} \sqcup \{[a, b) \subset R : a < b\} \sqcup \{(-\infty, b) \subset R\}$$

(где, возможно, $B = \infty$), а также определена монотонно неубывающая на $R^1 = (-\infty, \infty)$, непрерывная слева в любой точке и ограниченная на R^1 функция $\varphi(x)$.

Определим на S функцию $m : m([a, b)) = \varphi(b) - \varphi(a)$ и $m((-\infty, b)) = \varphi(b) - \varphi(-\infty)$, где $\varphi(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x)$. Ясно, что m – мера на S.

Определение. Лебеговское продолжение описанной меры m называется **Мерой Лебега–Стилтьеса** на прямой.

Теорема 1. *Мера m σ-аддитивна на S.*

Доказательство. Пусть

$$[a, b) = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i),$$

где a и b конечны. Далее, в силу того, что $\varphi(x)$ всюду непрерывна слева, для фиксированного $\varepsilon > 0$ можно выбрать точки $c_1 < a_1, c_2 < a_2, \dots$ и $d < b$ так, чтобы $\varphi(b) - \varphi(d) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\varphi(a_i) - \varphi(c_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ при $i = 1, 2, \dots$. Отметим, что

$$[a, d] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (c_i, b_i).$$

Тогда по лемме Гейге–Бореля найдётся конечное число интервалов из правой части $(c_1, b_1), \dots, (c_n, b_n)$, покрывающих $[a, d]$, и тем более

$$[a, d) \subset \bigcup_{i=1}^{n} [c_i, b_i).$$

По Лемме 1 билета 9 имеем:

$$m([a, b)) - \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(b) - \varphi(a) - \frac{\varepsilon}{2} < \varphi(d) - \varphi(a) =$$

$$= m([a, d)) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m([c_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(b_i)) - \varphi(c_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} (\varphi(b_i) - \varphi(a_i)) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m([a_i, b_i)) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда получаем, что

$$m([a,b)) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m([a_i,b_i)). \tag{2}$$

если

$$(-\infty,b) = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

где b конечно и $A_1,\ldots,A_i,\ldots \in S$, то по доказанному выше

$$m((-\infty,b)) = \lim_{n\to\infty} m([-n,b)) \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i \cap [-n,b)) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Аналогично устанавливается, что оценки (1) и данная выше справедливы и для $b = \infty$.

Обратное неравенство вытекает из следствия Леммы 1 Билета 9. ■

13 Сигма-конечные меры.

Пусть на полукольце S подмножеств некоторого множества X задана σ-аддитивная мера m и $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i \in S$ при $i = 1,2,\ldots$.Продолжим m до σ-аддитивной меры ν на минимальном кольце $R(S)$. Заметим, что $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, где $B_1 = A_1, B_i = A_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} A_j \in R(S)$ при $i > 1$. Для любого i система $R_i = R(S) \cap B_i = \{C \cap B_i : C \in R(S)\}$ – кольцо с единицей B_i, а $\nu - -\sigma$-аддитивная мера на нём. Продолжим ее по Лебегу до σ-аддитивной меры μ_i, заданной на σ-алгебре M_i.

Определение. Множество $A \subset X$ называется **измеримым**, если для любого i множество $A \cap B_i \in M_i$. При этом положим

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A \cap B_i)$$

(в этом равенстве допускаются и бесконечные значения).

Определение. Определённая выше функция μ называется **σ-конечной мерой** на M, где M–совокупность всех измеримых подмножеств X.

Теорема 1. *M является σ-алгеброй.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что $X \in M$. Далее, если $A, C \in M$, то при любом i выполнены условия $A \cap B_i \in M_i$ и $C \cap B_i \in M_i$, откуда $(A \cap C) \cap B_i = (A \cap B_i) \cap (C \cap B_i) \in M_i$ и $A \triangle C) \cap B_i = (A \cap B_i) \triangle (C \cap B_i) \in M_i$. Поэтому $A \cap C = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} (A \cap C) \cap B_i \in M$ и $A \triangle C = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} (A \triangle C) \cap B_i \in M$. Для бесконечного объединения множеств из M доказательство аналогично. ■

Теорема 2. *Функция μ σ-аддитивна на M (и здесь в определении σ-аддитивности допускаются бесконечные значения в обеих частях равенства).*

Доказательство. ПУсть $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, где $A_1, A_2, \ldots \in M$.Тогда в силу σ-аддитивности мер μ_i имеем

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap B_i) \right) =$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_i(A_j \cap B_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A_j \cap B_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

что и требовалось доказать. ■

14 Неизмеримые множества. Теорема о структуре измеримых множеств.

Теорема 1. *Пусть неизмеримое по Лебегу множество $A \subset [0,1]$ и $\mu(A) > 0$. Тогда существует неизмеримое множество $F \subset A$.*

Доказательство. Введём на $[0,1]$ такое отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y \in Q$, где Q – множество рациональных чисел. Рефлексивность, симметричность и транзитивность в данном случае очевидны, а потому по известной алгебраической теореме

$$[0,1] = \bigsqcup_{\alpha \in U} H_\alpha,$$

где H_α – соответствующий класс эквивалентности. В соответствии с аксиомой выбора образуем множество $E = \{x_\alpha\}_{\alpha \in U}$, содержащее ровно по одному представителю x_α из каждого класса H_α.

Теперь занумеруем все рациональные числа отрезка $[-1,1]$. Получим последовательность $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $r_0 = 0$. Положим $E_n = E + r_n$ при $n = 1, 2, \ldots$. Предположим, что при некоторых $n \neq m$ выполнено условие $E_n \cap E_m \neq \varnothing$. Тогда найдётся число a, имеющее два представления: $x_\alpha + r_n = a = x_\beta + r_m$. Но отсюа $x_\alpha - x_\beta \in Q$, а поскольку в E не может быть двух разных представителей одного и того же класса, $x_\alpha = x_\beta$ и $r_n = r_m$, то есть $n = m$. Полученное противоречие доказывает, что $E_m \cap E_n = \varnothing$ при $n \neq m$.

Предположим, что одно из множеств E_n содержит измеримое подмножество C_n положительной меры d. Тогда, в силу инвариантности меры Лебега относительно сдвига при любом $m \geqslant 0$ множества $C_m = C_n - r_n + r_m \subset E_m$ будут измеримы и $\mu(C_m) = d$. Но

$$\bigsqcup_{n=0}^{\infty} C_n \subset \bigsqcup_{n=0}^{\infty} E_n \subset [-1,2],$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(C_n) = \sum_{n=0}^{\infty} d \leqslant 3,$$

и мы пришли к противоречию.

С другой стороны, для любого $x \in [0,1]$ найдутся такие $\alpha \in U$ и $n \geqslant 0$, что $x = x_\alpha + r_n$, то есть $x \in E_n$. Поэтому

$$[0,1] \subset \bigsqcup_{n=0}^{\infty} E_n.$$

Отсюда

$$A = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} (A \cap E_n) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} F_n.$$

Если все множества F_n измеримы, то хотя бы одно из них должно иметь положительную меру (так как $\mu(A) > 0$), а это, как мы установили ранее, невозмножно. ■

Теорема 2. *Пусть μ – –σ-конечная мера Лебега на σ-алгебре M, полученная продолжением некоторой σ-аддитивной меры с полукольца S, множество $A \in M$ и $\mu(A) < \infty$. Тогда A можно представить в виде*

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \backslash A_0,$$

где множества $A_{i,j} \in R(S)$ при $i, j = 1, 2, \ldots; A_{i,1} \subset A_{i,2} \subset \ldots$ для любого i; если $B_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$ при $i = 1, 2, \ldots$, то $B_1 \supset B_2 \supset \ldots, \mu(B_1) < \infty; A_0 \in M$ и $\mu(A_0) = 0$.

Доказательство. По определению меры Лебега для любого натурального i найдётся такое множество $C_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} D_{i,j} \supset A$, где $D_{i,j} \in S$, что $\mu(C_i \backslash A) < \frac{1}{i}$. Положим $B_i = \bigcap\limits_{r=1}^{i} C_r$ при $i = 1, 2, \ldots$. Тогда $B_i = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} E_{i,l}$, где все $E_{i,l} \in S$.. Кроме того, множества B_i монотонно невозрастают, $\mu(B_1) = \mu(C_1) < \infty$ и $\mu\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i \backslash A\right) = 0$..

Обозначая $A_{i,j} = \bigcup\limits_{l=1}^{j} E_{i,l} \in R(S)$ при $j = 1, 2, \ldots$, установим справедливость теоремы. ■

15 Измеримые функции. Их свойства. Измеримые функции и предельный пере- ход.

Измеримые функции

Определение. Тройка $X, M, \mu)$, где $M - -\sigma$-алгебра с единицей X, а $\mu - -\sigma$ аддитивная мера на M, называется **измеримым пространством.** Если $\mu(X) < \infty$, то будем называеть это пространство **конечным**, а если мера μ $\sigma-$ конечна на M, то σ-конечным.

Определение. Пусть $(X, M, \mu) - -$ измеримое пространство, множество $A \in M$, а функция $f(x) : A \to R^1 \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Тогда $f(x)$ называется **измеримой** в том и только в том случае, когда для любого $c \in R^1$ полный проообраз $f^{-1}((c, +\infty]) = \{x \in X : c < f(x) \leqslant \infty\} \in M$.

Определение. Если $f(x)$ и $g(x)$ – две измеримые на X функции, причём $f(x) = g(x)$ почти всюду (то есть не равна лишь на множестве меры ноль) на X, то они называются **эквивалентными**.

Свойства

Лемма 1. *Пусть функция f измерима на (X, M, μ). Тогда измеримы множества $f^{-1}(-\infty), f^{-1}(+\infty), f^{-1}(R^1$ и $f^{-1}((a, b))$, где a и b могут быть и бесконечными.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что

$$f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((n, +\infty]) \in M$$

и

$$f^{-1}(-\infty) = X \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-n, +\infty]) \in M.$$

Теперь ясно, что и $f^{-1}(R^1) \in M$. Далее, при любом $c \in R^1$ имеем

$$f^{-1}([c, +\infty]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(c - \frac{1}{n}, +\infty\right]\right) \in M.$$

Отсюда

$$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((a, +\infty]) \backslash f^{-1}([b, +\infty]) \in M,$$

и лемма установлена. ■

Теорема 1. *Если функция f измерима на $X, M, \mu)$, а B – борелевское подмножество R^1, то $f^{-1}(B) \in M$.*

Доказательство. Пусть $S = \{A \subset R^1 : f^{-1}(A) \in M\}$. Тогда $R^1 \in S$ и если $A, C \in S$, то

$$f^{-1}(A \cap C) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(C) \text{ и } f^{-1}(A \triangle C) == f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(C),$$

то есть $A \cap C \in M$ и $A \triangle C \in M$. Кроме того, если $A_1, A_2, \ldots \in M$, то

$$f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in M.$$

Отсюда ясно, что $S - -\sigma$-алгебра. Кроме того, из последнего соотношения, предыдущей леммы и теоремы 9.2(Дьяченко), вытекает, что S содержит все открытые подмножества R^1. Тогда по определению борелевской σ-алгебры B как минимальной σ-алгебры, содержащей все открытые множества, $B \subset S$, и теорема доказана. ■

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ измерима и конечна на (X, M, μ), причём $f(X) \subset G \subset R^1$,где G–открытое множество, а функция $g(y)$ непрерывна на G, то композиция $g(f(x))$ измерима на (X, M, μ).*

Доказательство. Отметим, что функция $g(f(x))$ принимает только конечные значения. Поэтому для любого $c \in R^1$ имеем

$$F_c = (g(f))^{-1}((c,+\infty]) = (g(f))^{-1}((c,+\infty)) =$$
$$= \{x \in X : f(x) \in g^{-1}((c,+\infty))\}.$$

Согласно свойствам непрерывной функции, множество $E_c = g^{-1}((c,+\infty))$ открытое, а значит, тем более борелевское. Поэтому по теореме 1 $F_c = f^{-1}(E_c) \in M$, и утверждение доказано. ■

Теорема 3. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы и конечны на (X, M, μ), а a и b – некоторые числа, то функции $af(x) + bg(x)$ и $f(x)g(x)$ также измеримы на этом пространстве. Кроме того, если $g(x)$ не обращается в ноль ни в одной точке, то измеримой будет и функция $\frac{f(x)}{g(x)}$. Конечность функций здесь требуется лишь затем, чтобы не надо было специально определять результаты операций сложения, умножения и деления.*

Доказательство. Поскольку линейная функция непрерывна на R^1, мы имеем, что если функция $f(x)$ измерима и конечна, то по теореме 2 при любом $a \in R^1$ измеримы функции $af(x)$ и $f(x) + a$.

Пусть теперь функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы и конечны. Рассмотрим множество

$$A = \{x \in X : f(x) > g(x)\} =$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{x \in X : f(x) > r_n\} \cap \{x \in X : g(x) < r_n\}) \in M,$$

где $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$–это все рациональные числа, каким-либо образом занумерованные. Поэтому при любом $c \in R^1$ множество

$$A_c = \{x \in X : f(x) + g(x) > c\} = \{x \in X : f(x) > c - g(x)\} \in M,$$

и первая часть теоремы установлена.

Теперь отметим, что если функция $f(x)$ измерима и конечна, то по теореме 2 измерима и функция $f^2(x)$. Но тогда измеримо и произведение измеримых функций $f(x)g(x) = \frac{1}{4}((f(x) + g(x))^2 = (f(x) - g(x))^2)$.

Наконец, если функция $g(x)$ измерима, конечна и не обращается в нуль на X, то, тк как функция $\frac{1}{y}$ непрерывна на открытом множестве $R^1 \backslash \{0\}$, из теоремы 2 следует, что функция $\frac{1}{g(x)}$ также измерима. С учётом уже установленной измеримости произведения, это завершает доказательство теоремы. ■

Теорема 4. *Если $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых функций на пространстве (X, M, μ), то функции $\varphi(x) = \sup_n f_n(x)$ и $\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_n f_n(x)$ также измеримы на этом пространстве. Разумеется, измеримыми также бедут нижняя грань и нижний предел последовательности измеримых функций.*

Доказательство. Для любого $c \in R^1$ имеем

$$\{x \in X : \varphi(x) \in (c,+\infty]\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X : f_n(x) \in (c,+\infty]\} \in M,$$

и измеримость $\varphi(x)$ доказана. Отсюда при любом $k = 1, 2, \ldots$ измерима функция $\varphi_k(x) = \sup_{n\geqslant} f_n(x)$. Но тогда для любого c имеем

$$\{x \in X : \psi(x) \in (c,+\infty]\} = \bigcup_{r=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}\{x \in X : \varphi_k(x) \in (c + \frac{1}{r},+\infty]\} \in M,$$

и теорема доказана. ■

Следствие 1. *В условиях предыдущей теоремы функция $F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ измерима на множестве $E \subset X$, на котором она существует(предел может быть и бесконечным).*

Доказательство. Множество E – это множество, на котором совпадают верхний и нижний пределы последовательности функций. По предыдущей теореме эти пределы измеримы, следовательно, измеримо и E. Но на множестве E функции $F(x)$ совпадает с измеримой функцией $\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_n f_n(x)$, и следствие установлено. ■

16 Множество Кантора и кривая Кантора. Теорема о существовании компози- ции измеримой от непрерывной, не являющейся измеримой функцией.

Построим множество Кантора на отрезке $[0,1]$. Проведём его построение индуктивно. Пусть $J_1^0 = [0,1]$. На первом шаге выделим из середины отрезка $J_1^0 = [0,1]$ интервал I_1^1 длины $\mu(I_1^1) = \frac{1}{3}\mu(I_1^0)$, то есть $I_1^1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. После этого остались невыделенными два отрезка J_1^1 и J_2^1, причём мера каждого из них равна $\frac{1}{3}$. Теперь предположим, что на $(n-1)$ шаге $n > 1$ мы выделили 2^{n-2} интервалов $I_1^{n-1}, \dots, I_{2^{n-2}}^{n-1}$, мера каждого из которых равна $\frac{1}{3^{n-1}}$, и после этого остались невыделенными 2^{n-1} отрезков $J_1^{n-1}, \dots, J_{2^{n-1}}^{n-1}$ той же длины. Тогда на n-м шаге из середины любого отрезка J_k^{n-1}, где $1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}$, выделим интервал I_k^n длины $\frac{1}{3}\mu(J_k^{n-1})$. При этом $\mu(I_k^n) = \frac{1}{3^n}$ и в результате невыделенными останутся 2^n отрезков $J_1^n, \dots, J_{2^n}^n$, каждый длины $\frac{1}{3^n}$.

Теперь определим множества

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^n$$

и

$$P = [0,1] \backslash G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} J_k^n.$$

Множество P называют **канторовским множеством**, а множество G – **открытым канторовским множеством**.

Свойства P:

1. P замкнуто;

2. P нигде не плотно, то есть в любом интервале найдётся подинтервал, свободный от точек множества P;

3. мощность множества P есть континуум;

4. классическая мера Лебега $\mu(P) = 0$.

Первые два свойства очевидны, четвёртое вытекает из представления P и непрерывности мерв Лебега, третье – следствие того, что множество P с точностью до счётного множества концов интервалов, составляющих G, есть множество точек отрезка $[0,1]$, троичное разложение которых содержит лишь цифры 0 и 2.

Построим **кривую Кантора**. Вначале индуктивно построим вспомогательную функцию $\overline{\varphi}(x)$, которая будет опредена на множестве T, состоящем из концов всех отрезков J_k^n, где $n = 0, 1, \dots$ и $1 \leqslant k \leqslant 2^n$ или, что то же самое, в концах всех смежных интервалов множества G, а также в точках 0 и 1. На нулевом шаге определим функцию $\overline{\varphi}(x)$ в концах отрезка $J_1^0 = [0,1]$ так: $\overline{\varphi}(0) = 0$ и $\overline{\varphi}(1) = 1$. Далее, пусть после $n-1$ шага, где $n \geqslant 1$, функция $\overline{\varphi}(x)$ определена в концах отрезков $J_1^{n-1}, \dots, J_{2^{n-1}}^{n-1}$. Тогда на n-м шаге определим $\overline{\varphi}(x)$ в тех концах отрезков $J_1^n, \dots, J_{2^n}^n$, где она еще не определена.

Именно, если $J_k^{n-1} = [a,b]$, то $J_{2k-1}^n = [a,c]$ и $J_{2k}^n = [d,b]$, где $a < c < d < b$. Тогда положим

$$\overline{\varphi}(c) = \overline{\varphi}(d) = \frac{1}{2}(\overline{\varphi}(a) + \overline{\varphi}(b)).$$

Таким образом, функция $\overline{\varphi}(x)$ определена. Из построения очевидно, что $\overline{\varphi}(x)$ принимает на T все значения вида $\frac{k}{2^n}$, где $n = 0, 1, \dots$ и $1 \leqslant k \leqslant 2^n$.

Определим функцию

$$\varphi(x) = \sup_{y \in E : y \leqslant x} \overline{\varphi}(y).$$

Тогда по своему определению функция $\varphi(x)$ монотонно неубывает на $[0,1]$. Кроме того, в силу монотонности функции $\overline{\varphi}(x)$ на множестве T, при $x \in T$ выполнено равенство $\varphi(x) = \overline{\varphi}(x)$. Отсюда ясно, что множество значений функции $\varphi(x)$ всюду плотно на отрезке $[0,1]$, а следовательно, она непрерывна. Наконечц, функция $\varphi(x)$ постоянна на интервалах, образующих множество G.

Определение. Введенная функция $\varphi(x)$ называется **кривой Кантора**

Свойства кривой Кантора:

1. Функция $\varphi(x)$ монотонно неубывает на отрезке $[0, 1]$.

2. Непрерывна на $[0, 1]$.

3. Производная $\varphi'(x) = 0$ при $x \in G$, то есть почти всюду на $[0, 1]$.

4. Не является тождественно постоянно на $[0, 1]$.

Теорема 1. *Существуют такая непрерывная функция $f(x)$, взаимно однозначно отображающая отрезок $[0, 1]$ на себя, и такая измеримая на этом отрезке относительно классической меры Лебега функция $g(x)$, что*

1. *композиция $g(f(x))$ неизмерима на $[0, 1]$;*

2. *для некоторого измеримого по Лебегу множества E прообраз $f^{-1}(E)$ неизмерим.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ – кривая Кантора. Тогда функция $\psi(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + x)$ монотонна, строго возрастает на $[0, 1]$ и переводит $[0, 1]$ в $[0, 1]$. По известной теореме(!!) математического анализа обратная функция $f(x) = \psi^{-1}(x)$ существует и обладает теми же свойствами. Далее, функция $\psi(x)$ переводит люой из интервалов, составляющих множество G, в интервал в два раза меньшей длины. Отсюа ясно, что $\mu(\psi(G)) = \frac{1}{2}$ и, следовательно, $\mu(\psi(P)) = \frac{1}{2}$. По теореме о существовании неизмеримого подмножества в измеримом множестве в множестве $\psi(P)$ найдётся неизмеримое подмножество Q.

Теперь положим $E = \psi^{-1}(Q)$. Поскольку $E \subset P, \mu(P) = 0$ и мера Лебега полна, множество E измеримо по Лебегу. В то же время множество $Q = f^{-1}(E)$ неизмеримо, и свойство 2 установлено. Для получения свойства 1 достаточно взять функцию $g(x) = X_E(x)$, то есть $g(x) = 1$ при $x \in E$ и $g(x) = 0$ при $x \notin E$. Тогда функция $g(f(x)) = X_Q(x)$ неизмерима. ■

17 Сходимость по мере и почти всюду. Их свойства (критерий Коши сходимости по мере, арифметические, связь сходимостей, Теорема Рисса).

Сходимость по мере Предположим, что $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $f(x)$ – измеримые и конечные на измеримом пространстве (X, M, μ) функции.

Определение. Говорят, что последовательность $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X при $n \to \infty$(**сходится по мере** на X), если для любого $\varepsilon > 0$ предел

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Теорема 1. *Предел последовательности функций, сходящихся по мере, единственен с точностью до эквивалентности.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ и $f_n(x) \rightrightarrows g(x)$ при $n \to \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для любого n имеем

$$\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\} \subset$$
$$\subset \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x \in X : |f_n(x) - g(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\},$$

откуда ясно, что $\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| > 0\}) = 0$, то есть $f(x) = g(x)$ почти всюду. ■

Теорема 2. *Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ и $g_n(x) \rightrightarrows g(x)$ при $n \to \infty$. Тогда $f_n(x) + g_n(x) \rightrightarrows f(x) + g(x)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Утверждение теоремы сразу вытекает из верного для любого $\varepsilon > 0$ и для любого n включения

$$\{x \in X : |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| > \varepsilon\} \subset$$
$$\subset \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x \in X : |g_n(x) - g(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

■

Теорема 3. *Если $\mu(X) < \infty$, открытое множество $G \subset R^1$, функция $g(x)$ непрерывна на множестве G, а последовательность $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ при $n \to \infty$, причём все функции $f_n(x)$ и функция $f(x)$ отображают множество X в G, то $g(f_n)(x) \rightrightarrows g(f)(x)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Пусть заданы $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$. Из теоремы 9.2 вытекает, что справедливо представление

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n n,$$

где все множества K_n компактны в R^1, то есть замкнуты и ограничены, и $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ Рассмотрим прообразы $E_n = f^{-1}(K_n)$ при $n = 1, 2, \ldots$ При этом $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ и

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

По теореме о непрерывности меры можно подобрать r так, чтобы

$$\mu(A) \equiv \mu\left(X \backslash \bigcup_{n=1}^{r} E_n\right) < \frac{\gamma}{2}.$$

Пусть $\rho > 0$ – расстояние от компакта $K = \bigcup\limits_{n=1}^{r} K_n$ до замкнутого множества $F = R^1 \backslash G$. Определим компакт

$$K' = \{y \in R^1 : \min_{x \in K} |x - y| \leqslant \frac{\rho}{2} \subset G\}.$$

Тогда функция $g(x)$ равномерно непрерывна на K', и, следовательно, существует такое $\delta > 0$, что при $x, y \in K_0$ и $|x - y| < \delta$ имеем $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Выберем N таким образом, чтобы при $n > N$ выполнялось неравенство

$$\mu(B_n) \equiv \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \min\left(\frac{\rho}{2}, \delta\right)\right\}\right) \in G.$$

Теперь $\mu(A \cup B_n) < \gamma$, а если $x \in X \backslash (A \cup B_n)$, то $f(x) \in K \subset K'$, $f_n(x) \in K'$ и $|f_n(x) - f(x)| < \delta$, откуда $|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$.. Теорема доказана. ■

Следствие 1. *Если $\mu(X) < \infty$ и последовательность $f_n(x)$ сходится по мере к $f(x)$ при $n \to \infty$, то $f_n^2(x) \rightrightarrows f^2(x)$ при $n \to \infty$. Если же, вдобавок, функции $f(x)$ и $f_n(x) \neq 0$ при $n = 1, 2, \ldots$ не обращаются в нуль на X, то $\frac{1}{f_n(x)} \rightrightarrows \frac{1}{f(x)}$ при $n \to \infty$.*

Следствие 2. *Если $\mu(X) < \infty$, последовательность $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ при $n \to \infty$ и $g_n(x) \rightrightarrows g(x)$ при $n \to \infty$, то $f_n(x)g_n(x) \rightrightarrows f(x)g(x)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Утверждение сразу вытекает из теоремы 2 и следствия 1 и следующих равенств:

$$(f_n(x) + g_n(x))^2 = f_n^2(x) + 2f_n(x)g_n(x) + g_n^2(x),$$
$$(f(x) + g(x))^2 = f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x).$$

■

Следствие 3. *Если $\mu(X) < \infty$, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ и $g_n(x) \rightrightarrows g(x)$ при $n \to \infty$, причём функции $g(x)$ и $g_n(x)$ при $n = 1, 2, \ldots$ не обращаются в нуль на X, то $\frac{f_n(x)}{g_n(x)} \rightrightarrows \frac{f(x)}{g(x)}$ при $n \to \infty$.*

Критерий Коши:

Теорема 4. *Для того чтобы последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходилась по мере к конечной измеримой функции на X, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $\gamma > 0$ нашлось такое число N, что при $n, m \geqslant N$ выполняется неравенство*

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) < \gamma.$$

Доказательство. Вначале докажем необходимость. Если $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ при $n \to \infty$, то при любых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$ найдётся такое число N, что при $n \geqslant N$ выполняетя неравенство

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\gamma}{2}.$$

Но тогда при $n, m \geqslant N$ имеем

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) < \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \\ + \mu\left(\left\{x \in X : |f_m(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \gamma.$$

Теперь установим достаточность. Ясно, что можно выбрать возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ так, чтобы для множеств

$$A_i = \{x \in X : |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| > 2^{-i}\}$$

выполнялась оценка $\mu(A_i) < 2^{-i}$. Пусть

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=m}^{\infty} A_i.$$

Тогда, очевидно, $\mu(A) = 0$. Если же $x \in X \backslash A$, то числовая последовательность $\{f_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ фундаментальна, и, стало быть, существует конечный предел

$$\lim_{i \Rightarrow \infty} f_{n_i}(x) = f(x).$$

Согласно следствию 10.1 функция $f(x)$ измерима на $X \backslash A$, и, доопределив её нулём на множестве A, получим, что $f(x)$ измерима на X.

Докажем, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X при $n \to \infty$. Прежде всего для любого натурального m, если

$$x \notin \bigcup_{i=m+1}^{\infty} A_i,$$

то при $i, j \geqslant m + 1$ имеем

$$|f_{n_j}(x) = f_{n_i}(x)| \leqslant \sum_{r=m+1}^{\infty} 2^{-r} = 2^{-m},$$

откуда и $|f(x) - f_{n_i}(x)| \leqslant 2^{-m}$. Поэтому при $i \geqslant m + 1$ имеем

$$\mu(\{x \in X : |f_{n_i}(x) - f(x)| > 2^{-m}\}) \leqslant \sum_{r=m+1}^{\infty} \mu(A_r) < 2^{-m}.$$

Теперь, для фиксированных $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$ подберем такое N, что при $n, r \geqslant N$ выполняется неравенство

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f_r(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\gamma}{2}.$$

После этого возьмём m таким, что $2^{-m} < \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)$, и зафиксируем $n_i > N$ с $i \geqslant m + 1$.Тогда при $n \geqslant N$ имеем

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f_{n_i}(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \\ + \mu\left(\left\{x \in X : |f_{n_i}(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \gamma,$$

что и требовалось доказать. ■

Сходимость почти всюду

Определение. Говорят, что последовательность $f_n(x)$ **сходится к** $f(x)$ **почти всюду** на X при $n \to \infty$, если найдётся такое множество $E \in M$, что $\mu(X \backslash E) = 0$ и $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для любого $x \in E$.

18 Теоремы Егорова и Лузина.

Теорема 1. *(теорема Егорова) Если $\mu(X) < \infty$ и последовательность функций $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду на X, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое измеримое множество $E_\varepsilon \subset X$, что $\mu(X \backslash E_\varepsilon) < \varepsilon$ и последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно на E_ε.*

Доказательство. Из теоремы 13.1(Дьяченко) следует, что для каждого m найдётся такое n_m, что

$$\mu\left(\bigcup_{k=n_m}^{\infty} \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\}\right) \equiv \mu(G_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Положим

$$E_\varepsilon = X \backslash \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m.$$

Тогда

$$\mu(X \backslash E_\varepsilon) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu(G_m) < \varepsilon.$$

Если теперь задано некоторое $\gamma > 0$, то, выбирая натуральное m так, чтобы $\frac{1}{m} < \gamma$, получим, что при $k > n_m$

$$|f_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{m} < \gamma$$

для любого $x \in E_\varepsilon$, а это и требовалось установить. ■

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве $A \subset R^n$. Тогда она называется **непрерывной** на этом множестве, если для любого $x \in A$ выполнено равенство

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y) = f(x).$$

Теорема 2. *(Лузина) Пусть $f(x)$ – конечная и измеримая относительно классической меры Лебега на n-мерном отрезке $[a, b]$функцияю Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная на $[a, b]$ функция $g(x) = g_\varepsilon(x)$, что*

$$\mu(\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

19 Интеграл Лебега для конечно-простых функций и его свойства. Определение интеграла Лебега в общем случае. Основные свойства интеграла Лебега.

Определение. *Пусть конечная действительнозначная функция $f(x)$ измерима на σ-конечном измеримом пространстве (X, M, μ) и принимает лишь конечное число значений, причем любое ненулеое значение принимается на множестве конечной меры. Тогда фугкция $f(x)$ называется* простой *на X. Иными словами, функция $f(x)$ простая, если*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k X_{E_k}(x),$$

где $E_k \in M$, $E_k \cap E_j = \varnothing$ при $k \neq j$ и $\mu(E_k) < \infty$, если $c_k \neq 0$. Но лучше не иными словами.

Определение. *Пусть действительнозначная функция $f(x)$ является простой на X и*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k X_{E_k}(x), \tag{3}$$

где $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k = X$*, причем не обязательно* $c_i \neq c_j$*. В этом случае определим* интеграл Лебега

$$L\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k)$$

(считаем, что $0 \cdot \infty = 0$*).*

Лемма. *Величина интеграла Лебега от простой функции $f(x)$ на зависит от способа ее представления в виде* (3)*.*

Доказательство. Пусть имеются два представления:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k X_{E_k}(x) = \sum_{j=1}^{m} d_j X_{D_j}(x),$$

где $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} = X$ и $c_1 < \ldots < c_n$ (можно так считать без ограничения общности). Тогда каждое из d_j равно одному из c_k. Определим при $k = 1, \ldots, n$ множества $\Gamma_k = \{j : d_j = c_k\}$. Тогда, очевидно, $E_k = \bigsqcup\limits_{j \in \Gamma_k} D_j$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j \in \Gamma_k} \mu(D_j) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in \Gamma_k} d_j \mu(D_j) = \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(D_j),$$

ч.т.д. ∎

Теорема (Линейность по функции)**.** *Если $f(x)$ И $g(x)$ — простые функции на X, а $a, b \in R$, то функция $af(x) = bg(x)$ также является простой на X и*

$$\int\limits_X (af(x) + bg(x))d\mu = a\int\limits_X f(x)d\mu + b\int\limits_X g(x)d\mu.$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k X_{E_k}(x) \text{ и } g(x) = \sum_{j=1}^{m} d_j X_{F_j}(x),$$

где $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} F_j = X$. Тогда

$$af(x) + bg(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (ac_k + bd_j) X_{E_k \cap F_j}(x),$$

т.е. функция $af(x) + bg(x)$ действительно является простой. Далее, принимая во внимание лемму получим

$$\int\limits_X (af(x) + bg(x))d\mu = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (ac_k + bd_j)\mu(E_k \cap F_j) =$$

$$a\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{m} \mu(E_k \cap F_j) + b\sum_{j=1}^{m} d_j \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k \cap F_j) =$$

$$= a\sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k) + b\sum_{j=1}^{m} d_j \mu(F_j) = a\int\limits_X f(x)d\mu + b\int\limits_X g(x)d\mu,$$

что и требовалось. ∎

Сформулируем еще несколько очевидных утверждений.

Утверждение. *Если простая функция* $f(x) \geqslant 0$ *на* X, *то*

$$\int\limits_X f(x)d\mu \geqslant 0.$$

Следствие. *Если* $f(x)$ *и* $g(x)$ *— простые функции и* $f(x) \geqslant g(x)$ *на* X, *то*

$$\int\limits_X f(x)d\mu \geqslant \int\limits_X g(x)d\mu.$$

Утверждение. *Если* $f(x)$ *— простая функция, то*

$$\left|\int\limits_X f(x)d\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f(x)|d\mu.$$

Утверждение (Линейность по множетсву)**.** *Если* $f(x)$ *— простая функция и* $X = A \sqcup B$, *где* $A, B \in M$, *то*

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_A f(x)d\mu + \int\limits_B d\mu.$$

Обозначим

$$Q_f = \{\text{неотрицательные простые функции } h(x) \text{ на } E\text{: } h(x) \leqslant f(x) \text{ при всех } x \in E\}.$$

Определение. *Пусть* $f(x)$ *— неотрицательная измеримая функция на* E. *Тогда назовем* интегралом Лебега *этой функции следующее число:*

$$\int\limits_E f(x)d\mu = \sup_{h(x)\in Q_f} \int\limits_E h(x)d\mu$$

(здесь допускается и бесконечное значение). Если данный интеграл конечен, то будем говорить, что $f(x) \in L(E)$ *(функция* $f(x)$ *интегрируема по Лебегу на множестве* E*).*

Для произвольной измеримой функции $f(x)$ на $E \in M$ определим две функции

$$f_+(x) = max(f(x), 0) \text{ и } f_-(x) = max(-f(x), 0) = -(f(x) - f_+(x)).$$

Определение. *Если функция* $f(x)$ *измерима на множестве* E, *то будем говорить, что* $f(x) \in L(E)$, *в том и только в том случае, когда одновременно* $f_+(x) \in L(E)$ *и* $f_-(x) \in L(E)$. *Если последние условия выполняются, то положим*

$$\int\limits_E f(x)d\mu = \int\limits_E f_+(x)d\mu - \int\limits_E f_-(x)d\mu.$$

Утверждение. *Для простых функций значение интеграла по двум определениями совпадают.*

Утверждение 1. *Если* $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *— неубывающая последовательность простых неотрицательных функций на* E *и* $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E g_n(x)d\mu = \int\limits_E g(x)d\mu.$$

Доказательство. Существование и измеримость функции $g(x)$ очевидна. Их определения интеграла ясно, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E g_n(x)d\mu \leqslant \int\limits_E g(x)d\mu.$$

Обратно, если неотрицательная простая функция $h(x) \leqslant g(x)$ на E, то $\lim\limits_{n\to\infty} g_n \geqslant h(x)$, откуда имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E g_n(x)d\mu \geqslant \int\limits_E h(x)d\mu.$$

Переходя к верхней грани устанавливаем справедливость утверждения. ∎

Лемма 1. *Пусть $f(x)$ — неотрицательная измеримая функция на E. Тогда существует неубывающая на E последовательность неотрицательных простых функций $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$, сходящихся к $f(x)$ в каждой точке $x \in E$.*

Доказательство. Представим множество E в виде

$$E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

где $\mu(E_n) < \infty$ при $b = 1, 2, \ldots$ (если $\mu(E) < \infty$, то берем $E_2 = E_3 = \ldots = \varnothing$). Положим

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^m}, \text{ если } \frac{k-1}{2^m} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^m}, \text{ и } x \in \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} E_k, \text{ где } k = 1, 2, \ldots, 2^{2m}; \\ 2^m, \text{ если } f(x) \geqslant 2^m \text{ и } x \in \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} E_k; \\ 0, \text{ если } x \notin \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} E_k. \end{cases}$$

Докажем, что эта последовательность монотонно неубывает на множестве E. Пусть m — натуральное число и точка $x \in E$. Если $f_m(x) = 0$, то $f_{m+1}(x) \geqslant 0 = f_m(x)$. Если $f_m(x) = 2^m$, то $x \in \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} E_k$ и $f(x) \geqslant 2^m$, а следовательно, $f_{m+1} \geqslant 2^m$. Если же $f(x) = \frac{k}{2^m}$, где $1 \leqslant k < 2^m$, то $x \in \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} E_k$ и

$$f(x) \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right) = \left[\frac{2k}{2^{m+1}}, \frac{2(k+1)}{2^{m+1}}\right).$$

Поэтому либо $f_{m+1}(x) = \frac{2k}{2^{m+1}}$, либо $f_{m+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{m+1}}$, но в обоих случаях $f_{m+1}(x) \geqslant f_m(x)$.

Теперь докажем, что при $x \in E$ функции $f_m(x) \to f(x)$. Действительно, если $x \in E$ и $f(x) < \infty$, то для некоторого m_0 должны выполняться условия $x \in \bigsqcup\limits_{k=1}^{m_0} E_k$ и $f(x) \leqslant 2^{m_0}$. Поэтому при $n \geqslant m_0$ имеем $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2^{-n}$. Если же $f(x) = \infty$, то для достаточно больших m получим $f_m(x) = 2^m$. Тем самым лемма установлена. ■

Теорема 1. *Если $f(x)$ и $g(x)$ — неотрицательные измеримые функции на E, то*

$$\int\limits_E (f(x) + g(x)) d\mu = \int\limits_E f(x) d\mu + \int\limits_E g(x) d\mu.$$

Далее, если $E = A \sqcup B$, где $A, B \in M$, то

$$\int\limits_E f(x) d\mu = \int\limits_A f(x) d\mu + \int\limits_B f(x) d\mu.$$

Доказательство. По лемме 1 построим последовательности простых функций $f_n(x) \uparrow f(x)$ и $g_n(x) \uparrow g(x)$ при $n \to \infty$. Тогда $(f_n(x) + g_n(x)) \uparrow (f(x) = g(x))$ и, используя свойства интеграла простых функций и утверждение 1 получим:

$$\int\limits_E (f(x) + g(x)) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E (f_n(x) + g_n(x)) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x) d\mu + \lim_{n\to\infty} \int\limits_E g_n(x) d\mu = \int\limits_E f(x) d\mu + \int\limits_E g(x) d\mu$$

Аналогично поступаем с линейностью по множествам. ■

Утверждение 2. *Интеграл по множеству с нулевой мерой равен нулю.*

Доказательство. Очевидно из определения. ■

Теорема 2. *Пусть (X, M, μ) — σ-конечное измеримое пространство, и пусть множество $E \in M$. Если мера μ полна, функция $f(x) \in L(E)$ и $g(x) = f(x)$ почти всюду на E, то $g(x) \in L(E)$ и*

$$\int\limits_E g(x) d\mu = \int\limits_E f(x) d\mu.$$

Если потребовать измеримости $g(x)$, то можно отказаться от условия полноты меры μ.

Доказательство. Достаточно доказать равенство интегралов для неотрицательных $f(x)$ и $g(x)$. Функция $g(x)$ измерима (только в этом месте мы пользуемся полнотой меры μ). Пусть $E_1 = \{x \in E : f(x) = g(x)\} \in M$. По условию теоремы $\mu(E \setminus E_1) = 0$. Тогда по теореме 1 и утверждению 2 получаем

$$\int\limits_E g(x)d\mu = \int\limits_{E_1} g(x)d\mu + \int\limits_{E\setminus E_1} g(x)d\mu = \int\limits_{E_1} g(x)d\mu =$$

$$= \int\limits_{E_1} f(x)d\mu = \int\limits_{E_1} f(x)d\mu + \int\limits_{E\setminus E_1} f(x)d\mu = \int\limits_E f(x)d\mu.$$

■

Утверждение 3. *Если функция $f(x) \in L(E)$, то*

$$\mu(\{x \in E : f(x) = \pm\infty\}) = 0$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $f(x) \geqslant 0$ на E. Обозначим $E_1 = \{x \in E : f(x) = +\infty\} \in M$. Предположим, что $\mu(E_1) > 0$. Тогда, полагая $E_2 = E_1$, если $\mu(E_1) < \infty$, и $E_2 \subset E_1, E_2 \in M, 0 < \mu(E_2) < \infty$, в противном случае, определим простые функции $h_n(x) = nX_{E_2}(x)$ при $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку $h_n(x) \leqslant f(x)$ при $n = 1, 2, \ldots$ и $x \in E$, по определению интеграла Лебега имеем

$$\infty > \int\limits_E f(x)d\mu \leqslant \sup_N \int\limits_E h_n(x)d\mu = \sup_n n\mu(E_2) = \infty,$$

противоречие, теорема доказана. ■

Утверждение 4. *Если функция $f(x) \in L(E)$, то для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f(x) \in L(E)$ и*

$$\int\limits_E \alpha f(x)d\mu = \alpha \int\limits_E f(x)d\mu.$$

Доказательство. Функция $\alpha f(x)$ измерима на E. Если $\alpha = 0$, то функция $\alpha f(x) = 0$ на E, а тогда

$$\int\limits_E \alpha f(x)d\mu = 0.$$

Пусть теперь $\alpha > 0$. Тогда $\alpha f(x) = (\alpha f(x))_+ - (\alpha f(x))_- = \alpha f_+(x) - \alpha f_-(x)$. Отметим, что если неотрицательная простая функция $h(x) \leqslant f_+(x)$ при $x \in E$, то неотрицательная простая функция $\alpha h(x) \leqslant \alpha f_+(x)$. Поэтому

$$\int\limits_E f(x)_+ d\mu = \sup_{h(x)\leqslant f_+(x)} \int\limits_E h(x)d\mu = \frac{1}{\alpha} \sup_{\alpha h(x)\leqslant \alpha f_+(x)} \int\limits_E h(x)d\mu = \frac{1}{\alpha}\int\limits_E \alpha f_+(x)d\mu.$$

Для $f_-(x)$ дело обстоит аналогично, откуда и получаем требуемое утверждение. Аналогично для $\alpha < 0$. ■

Теорема (Важнейшая). *Если функции $f(x), g(x) \in L(E)$, то функция $f(x) + g(x) \in L(E)$ и*

$$\int\limits_E (f(x) + g(x))d\mu = \int\limits_E f(x)d\mu + \int\limits_E g(x)d\mu.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \leqslant 0$ при $x \in E$. Положим $E_1 = \{x \in E : f(x) + g(x) \geqslant 0\}$ и $E_2 = \{x \in E : f(x) + g(x) < 0\}$. Тогда по теореме 1 и утверждению 4 имеем

$$\int\limits_{E_1} f(x)d\mu = \int\limits_{E_1} (f(x) + g(x))d\mu + \int\limits_{E_1} (-g(x))d\mu = \int\limits_{E_1} (f(x) + g(x))d\mu - \int\limits_{E_1} g(x)d\mu.$$

Аналогично,

$$-\int\limits_{E_2} g(x)d\mu = \int\limits_{E_2} (-f(x) - g(x))d\mu + \int\limits_{E_2} f(x)d\mu = -\int\limits_{E_2} (f(x) + g(x))d\mu + \int\limits_{E_2} f(x)d\mu.$$

Из этих формул следует, что $f(x)+g(x)\in L(E)$ и (по теореме 1)

$$\int\limits_E (f(x)+g(x))d\mu = \int\limits_E (f(x)+g(x))_+ d\mu - \int\limits_E (f(x)+g(x))_- d\mu = \int\limits_{E_1} (f(x)+g(x))d\mu + \int\limits_{E_2} (f(x)+g(x))d\mu =$$

$$= \int\limits_{E_1} f(x)d\mu + \int\limits_{E_1} g(x)d\mu + \int\limits_{E_2} f(x)d\mu + \int\limits_{E_2} g(x)d\mu = \int\limits_E f(x)d\mu + \int\limits_E g(x)d\mu$$

Для произвольных функций теорема вытекает из доказанного равенства. ■

Следствие. *Если функция $f(x), g(x)\in L(E)$, а числа $a, b\in R$, то функция $af(x)+bg(x)\in L(E)$ и*

$$\int\limits_E (af(x)+bg(x))d\mu = a\int\limits_E f(x)d\mu + b\int\limits_E g(x)d\mu.$$

20 Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега (теорема Б.Леви, лемма Фату, теорема Лебега).

Теорема (Беппо Леви)**.** *Пусть функции $f_1(x),\ldots,f_n(x),\ldots$ измеримы на E, причем $0\leqslant f_1(x)\leqslant\ldots\leqslant f_n(x)\leqslant\leqslant$ для любого $x\in E$. Тогда если $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, то*

$$\int\limits_E f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)d\mu.$$

Доказательство. Положим $g_1(x)=f_1(x), g_2(x)=f_2(x)-f_1(x),\ldots,g_n(x)=f_n(x)-f_n(x)-f_{n-1}(x),\ldots$. Все эти функции, очевидно, неотрицательны и измеримы на E. Построим для любого фиксированного n последовательнoть неотрицательных простых функций $\psi_{m,n}(x)\uparrow g_n(x)$ при $n\to\infty$ на множестве E. Определим при $m=1,2,\ldots$ функции

$$F_m = \sum_{n=1}^m \psi_{m,n}(x).$$

Тогда при $m\geqslant 1$ и $x\in E$ будем иметь

$$F_{m+1}(x)-F_m(x) = \sum_{n=1}^m (\psi_{m+1,n}(x)-\psi_{m,n}(x)) + \psi_{m+1,m+1}(x)\geqslant 0.$$

Кроме того, для всех m выполняются неравенства

$$F_m(x)\leqslant \sum_{n=1}^m g_n(x) = f_m(x)\leqslant f(x)$$

и для любого фиксированного N

$$\lim_{m\to\infty} F_m(x)\geqslant \sum_{n=1}^N \lim_{m\to\infty}\psi_{m,n}(x) = \sum_{n=1}^N g_n(x) = f_N(x),$$

откуда

$$\lim_{m\to\infty} F_m(x) = f(x)$$

Получаем, что

$$\int\limits_E f(x)d\mu = \lim_{m\to\infty}\int\limits_E F_m(x)d\mu.$$

В то же время, поскольку для всех m и $x\in E$ выполняется неравенство $0\leqslant F_m(x)\leqslant f_m(x)\leqslant f(x)$, для любого m имеем

$$\int\limits_E F_m(x)d\mu \leqslant \int f_m(x)d\mu \leqslant \int\limits_E f(x)d\mu.$$

Из двух формул выше вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_E f_m(x)d\mu = \int\limits_E f(x)d\mu.$$

Ч.т.д. ■

Лемма (Фату). *Пусть мера μ полна, а $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых на E неотрицательных функций и $f_n(x)\to f(x)$ при $n\to\infty$ почти всюда на множестве E. Тогда*

$$\int\limits_E f(x)d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty}\inf\int\limits_E f_n(x)d\mu.$$

Доказательство. Положим $\varphi_n(x)=\inf\limits_{k\geqslant n} f_k(x)$ для $n=1,2,\dots$ и $x\in E$. Тогда $0\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{n+1}(x)$ для всех n и x и

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\inf f_n(x)=f(x)$$

для $x\in E_1$, где $\mu(E\setminus E_1)=0$. Применяя теорему Беппо Леви, получим

$$\int\limits_E f(x)d\mu=\int\limits_{E_1} f(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{E_1}\varphi_n(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}\inf\int\limits_E\varphi_n(x)d\mu.$$

Так как при всех n имеем

$$\int\limits_E\varphi(x)d\mu\leqslant\int\limits_E f_n(x)d\mu,$$

отсюда вытекает требуемое утверждение. ■

Теорема (Лебега). *Пусть мера μ полна, а $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых на E функций, что существует функция $F(x)\in L(E)$, для которой $|f_n(x)|\leqslant F(x)$ при всех n и $x\in E$, и $f_n(x)\to f(x)$ при $n\to\infty$ почти всюду на множестве E. Тогда функция $f(x)\in L(E)$ и*

$$\int\limits_E f(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)d\mu.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что $f_n(x)\in L(E)$ при $n=1,2,\dots$, т.к. они ограничены сверху $F(x)\in L(E)$. Теперь рассмотрим при $n=1,2,\dots$ функции $\varphi_n(x)=F(x)+f_n(x)$ и $\psi_n(x)=F(x)-f_n(x)$. Тогда эти функции неотрицательны на E, интегрируемы на этом множестве и почти всюду на E имеем

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=F(x)+f(x) \text{ и } \lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=F(x)-f(x).$$

По лемме Фату

$$\int\limits_E F(x)d\mu+\int\limits_E f(x)d\mu=\int\limits_E(F(x)+f(x))d\mu\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf\int\limits_E(F(x)+f_n(x))d\mu=\int\limits_E F(x)d\mu+\lim_{n\to\infty}\inf\int\limits_E f_n(x)d\mu$$

и

$$\int\limits_E F(x)d\mu-\int\limits_E f(x)d\mu=\int\limits_E(F(x)-f(x))d\mu\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf\int\limits_E(F(x)-f_n(x))d\mu=\int\limits_E F(x)d\mu-\lim_{n\to\infty}\sup\int\limits_E f_n(x)d\mu$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\sup\int\limits_E f_n(x)d\mu\leqslant\int\limits_E f(x)\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf\int\limits_E f_n(x)d\mu,$$

т.е. существует

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)d\mu=\int\limits_E f(x)d\mu,$$

теорема доказана. ■

21 Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Критерий интегрируемости по Лебегу на множестве конечной меры. Неравенство Чебышева.

Теорема (об абсолютной непрерывности интеграла Лебега)**.** *Пусть функция $f(x) \in L(E)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если множество $A \in M$, $A \subset E$ и $\mu(A) < \delta$, то*

$$\int\limits_A |f(x)| d\mu < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $f(x)$ неотрицательна. Выберем простую неотрицательную функцию $h(x) \leqslant f(x)$ так, чтобы

$$0 \leqslant \int\limits_E f(x) d\mu - \int\limits_E h(x) d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k X_{E_k}(x),$$

где множества E_k попарно не пересекаются. Тогда возьмем

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} +1)}.$$

Теперь если $A \in M, A \subset E$ и $\mu(A) < \delta$, то

$$\int\limits_A f(x) d\mu = \int\limits_A f(x) d\mu - \int\limits_A h(x) d\mu + \int\limits_A h(x) d\mu \leqslant \int\limits_E f(x) d\mu - \int\limits_E h(x) d\mu + \int\limits_E \sum_{k=1}^{n} a_k X_{E_k \cap A}(x) d\mu <$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k \cap A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \max_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k \cap A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \max_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k \mu(A) \leqslant \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. ■

Лемма.

$$|f(x)| \leqslant |g(x)| \Rightarrow \int\limits_E |f(x)| d\mu \leqslant \int\limits_E |g(x)| d\mu.$$

Теорема (неравенство Чебышева)**.** *Пусть неотрицательная функция $f(x) \in L(E)$. Тогда если определить для $\lambda > 0$ множество*

$$E_\lambda = \{x \in E : f(x) > \lambda\},$$

то справедливо неравенство

$$\mu(E_\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda} \int\limits_E f(x) d\mu.$$

Доказательство. Используя лемму:

$$\int\limits_E f(x) d\mu = \int\limits_{E_\lambda} f(x) d\mu + \int\limits_{E \setminus E\lambda} f(x) d\mu \geqslant \int\limits_{E_\lambda} f(x) d\mu \geqslant \int\limits_{E_\lambda} \lambda d\mu = \lambda d\mu(E_\lambda),$$

что эквивалентно доказываемому утверждению. ■

Следствие (из теоремы Беппо Леви)**.** *Пусть функции $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ измеримы и неотрицательны на E и функция*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Тогда

$$\int\limits_E f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_E f_n(x) d\mu.$$

Доказательство. Введем функции

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда эта последовательность удовлетворяет условиям теоремы Беппо Леви, поэтому

$$\int_E f(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_E f_n(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(X) d\mu,$$

что и требовалось доказать. ■

Введем обозначение. Пусть $f(x)$ измериа на множестве E. Введем множества

$$F_k(f) = \{x \in E : |f(x)| \geqslant k\}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Теорема (критерий интегрируемости по Лебегу на множествах конечной меры)**.** *Пусть $\mu(E) < \infty$ и функция $f(x)$ ихмерима на E. Тогда $f(x) \in L(E)$ в том и только в том случае, когда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k(f)) < \infty.$$

В частности, любая ограниченная измеримая функция на множестве конечной меры интегрируема по Лебегу.

Доказательство. Прежде всего заметим, что поскольку интегрируемость измеримой функции эквивалентна интегрируемости ее одуля, теорему достаточно доказать для неотрицательных $f(x)$. Определим функцию

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_{F_k(f)}(x).$$

Поскольку, очевидно, $h(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) + 1$ для любого $x \in E$ и $\mu(E) < \infty$, функция $f(x) \in L(E)$ в том и только в том случает, когда $h(x) \in L(E)$ согласно следствию из теоремы Беппо Леви

$$\int_E h(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} X_{F_k(f)}(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k(f)).$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы. ■

22 Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке.

Теорема. *Пусть μ — классическая мера Лебега на n-мерном отрезке $[a, b]$, функция $f(x)$ интегрируема по Риману на этом отрезке и*

$$R \int_{[a,b]} f(x) dx = I.$$

Тогда $f(x) \in L((a, b))$ и

$$L \int_{(a,b)} f(x) d\mu = I.$$

Доказательство. Пусть $[a, b] = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Для каждого $r \geqslant 1$ и $s = 1, \ldots, n$ определим точки $x_s(k) = a_s + \frac{k}{2^r}(b_s - a_s)$, где $k = 0, 1, \ldots, 2^r$. Пусть также $\Delta_s(k = [x_s(k-1), x_s(k))$ при $k = 1, 2, \ldots 2^r - 1$ и $\Delta_s(2^r) = [x_s(2^r - 1), x_s(2^r)]$. Далее, при всех $r \geqslant 1$ и $k = (k_1, \ldots, k_n)$, где $k_s = 1, 2, \ldots, 2^r$, при $s = 1, 2, \ldots, n$, положим $E_k = \Delta_1(k_1) \times \ldots \times \Delta_n(k_n)$ и определим величины

$$m_{r,k} = \inf_{x\in E_k} f(x)$$

и

$$M_{r,k} = \sup_{x \in E_k} f(x).$$

Теперь введем функции

$$\overline{f}_r(x) = \sum_{k_1=1}^{2^r} \ldots \sum_{k_n=1}^{2^r} M_{r,k} X_{E_k}(x) \text{ и } \underline{f}_r(x) = \sum_{k_1=1}^{2^r} \ldots \sum_{k_n=1}^{2^r} m_{r,k} X_{E_k}(x)$$

при $r = 1, 2, \ldots$.

Заметим, что при любом r функции $\overline{f}_r(x)$ и $\underline{f}_r(x)$ — простые, а по определению интеграла Римана

$$\lim_{r\to\infty} L \int\limits_{(a,b)} \overline{f}(x) d\mu = \lim_{r\to\infty} \sum_{k_1=1}^{2^r} \ldots \sum_{k_n=1}^{2^r} M_{r,k} \prod_{s=1}^{n} \frac{b_s - a_s}{2^r} = I =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \sum_{k_1=1}^{2^r} \ldots \sum_{k_n=1}^{2^r} m_{r,k} \prod_{s=1}^{n} \frac{b_s - a_s}{2^r} = \lim_{r\to\infty} L \int\limits_{(a,b)} \underline{f}(x) d\mu.$$

Кроме того, для любого $x \in [a, b]$ имеем $\overline{f}_r(x) \geqslant f(x) \geqslant \underline{f}_r(x)$, последовательность $\overline{f}_r(x)_{r=1}^{\infty}$ не возрастает, а последовательность $\underline{f}_r(x)_{r=1}^{\infty}$ — не убывает на отрезке $[a, b]$, тогда при $x \in [a, b]$ существуют пределы

$$\lim_{r\to\infty} \overline{f}_r(x) = \overline{f}(x) \geqslant f(x) \geqslant \underline{f}(x) = \lim_{r\to\infty} \underline{f}_r(x)$$

При этом

$$L \int\limits_{(a,b)} \overline{f}(x) d\mu = I = L \int\limits_{(a,b)} \underline{f}(x) d\mu.$$

Отсюда

$$\int\limits_{(a,b)} |\overline{f}(x) - \underline{f}(x)| d\mu = \int\limits_{(a,b)} (\overline{f}(x) - \underline{f}(x)) d\mu = 0,$$

получим, что $\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$ почти всюду на (a, b) и

$$L \int\limits_{(a,b)} f(x) d\mu = I.$$

Ч.т.д. ∎