Правила проведения экзамена

1. По ТВ семинарист выставляет каждому студенту 0, 1, 2 или 3 балла (2 балла за КР, 1 балл за работу в семестре). На экзамене студент получает задачи по ТВ к количестве 2-(балл за семестр по ТВ). Если студент получил 3 балла за ТВ, то у него появляется бонусный балл, который прибавляется к итоговой оценке.

2. По ТМ студент должен отчитаться по задачам из обязательного списка (см.ниже) в устной форме (формат коллоквиума: вытягивается по одной задаче из каждого списка 6 шт., устно рассказывается преподавателю). Коллоквиум считается сданным, если решено >=4 задач.

3. Сдать коллоквиум можно досрочно на зачетной неделе или в январе (доступные даты 16, 17, 18, 19, 20 для ПМИ и ПМФ, 23, 24, 25 для ПМФ). Для досрочной сдачи только одна попытка. В этом случае при сдаче 5 задач будут зачтены 6, при сдаче 4 будут зачтены 5. Если досрочная попытка провалена или не использована, коллоквиум сдается в начале экзамена в качестве входного контроля (решение <4 задач (заранее объявленых задач) означает "неуд"на экзамене).

   Важно: задачи коллоквиума это либо контр-примеры к теоремам, либо упражнения на определения. Поэтому вариант с январем мне казался наиболее удобным, параллельно с разбором теории разобраться в упражнениях и контр-примерах, и просто вечером придти отчитаться, что разобрались.

4. В случае удачной сдачи коллоквиума(>=4 задач) на экзамене выдается билет, состоящий из двух вопросов по программе курса (см. ниже), ответ на который оценивается по 10-балльной шкале.

5. Оценка выставляется по формуле: (ответ на экзамене)-(число нерешнных задач по Теории вероятностей (ТВ) и теории меры (ТМ))+бонус за семестр.

Программа курса

1. Вероятностное пространство как математическая модель случайного эксперимента. Статистическая устойчивость.

2. Дискретное вероятностное пространство. Классическая вероятность. Построение простейших вероятностных пространств. Элементы комбинаторики. Вероятность суммы событий.

3. Геометрические вероятности. Задача “о встрече”.

4. Условная вероятность. Формулы полной вероятности, умножения и Байеса.

5. Независимость событий, виды и взаимосвязь.

6. Случайные величины. Независимость случайных величин. Распределение. Примеры. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация, корреляция. Свойства.

7. Схема испытаний Бернулли. Математическая модель, предельные теоремы: Пуассона и Муавра-Лапласа (б/д).

8. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, сигма-алгебры). Примеры. Минимальное кольцо, содержащее полукольцо. Понятие наименьшего кольца, алгебры, сигма-алгебры, содержащей систему множеств.

9. Меры на полукольцах. Классическая мера Лебега на полукольце промежутков и ее сигма-аддитивность.

10. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Наследование сигма-аддитивности при продолжении меры. Внешние меры Лебега и Жордана. Мера Лебега. Свойства. Сигма-алгебра измеримых множеств. Сигма-аддитивность меры Лебега на сигма-алгебре измеримых множеств.

11. Полнота и непрерывность мер. Теоремы о связи непрерывности и сигма-аддитивности.

12. Мера Бореля. Меры Лебега-Стилтьеса на прямой и их сигма-аддитивность.

13. Сигма-конечные меры.

14. Неизмеримые множества.

15. Измеримые функции. Их свойства. Измеримые функции и предельный переход.

16. Множество Кантора и кривая Кантора. Теорема о существовании композиции измеримой от непрерывной, не являющейся измеримой функцией.

17. Сходимость по мере и почти всюду. Их свойства (критерий Коши сходимости по мере, арифметические, связь сходимостей, Теорема Рисса).

18. Теорема Егорова.

19. Интеграл Лебега для конечно-простых функций и его свойства. Определение интеграла Лебега в общем случае. Основные свойства интеграла Лебега.

20. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега (теорема Б.Леви, лемма Фату, теорема Лебега).

21. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Критерий интегрируемости по Лебегу на множестве конечной меры. Неравенство Чебышева.

Список литературы.

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1981, 1989.

2. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Наука,1979.

3. **Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М., Факториал, 1998, 2002.**

4. **Ширяев А.Н. Вероятность. М., Наука, 1989, 2-е изд.**

5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. М., Мир, 1967.

Задачи коллоквиума

Системы множеств

Верхним пределом последовательности множеств $A_1,\ A_2,\ldots$ называется множество всех элементов, которые принадлежат бесконечному набору множеств A_n, а нижним пределом – множество всех элементов, которые принадлежат всем множествам A_n, начиная с некторого номера (своего для кадого элемента). Верних предел обоначают $\overline{\lim}_n A_n$, нижний предел обозначают $\underline{\lim}_n A_n$. Если $\overline{\lim}_n A_n = \underline{\lim}_n A_n$, то это множество называют пределом последовательности $A_1,\ A_2,\ldots$ и обозначают $\lim_n A_n$

Последовательность множеств $A_1,\ A_2,\ldots$ называется возрастающей, если $A_n \subset A_{n+1}$ для всех n, и убывающей если $A_{n+1} \subset A_n$ для всех n.

1. Доказать, что
$$\overline{\lim}_n A_n = \bigcap_n \left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k \right) \qquad \underline{\lim}_n A_n = \bigcup_n \left(\bigcap_{k \geqslant n} A_k \right)$$

2. Доказать, что если последовательсть множеств $\{A_n\}$ монотонна, то
$$\overline{\lim}_n A_n = \underline{\lim}_n A_n.$$
При этом $\lim_n A_n = \bigcup_n A_n$, если A_n возрастают, и $\lim_n A_n = \bigcap_n A_n$, если A_n убывают.

3. Привести пример последовательности $A_1,\ A_2,\ldots$, что $\overline{\lim}_n A_n \neq \underline{\lim}_n A_n$

   Доказать, что
$$\overline{\overline{\lim}_n A_n} = \underline{\lim}_n \overline{A}_n.$$

4. Пусть $f:\ A \to B$ — отображение множеств, $\mathfrak{A}$ – система подможеств множества A, $\mathfrak{B}$ –система подмножеств множества B. Положим
$$f(\mathfrak{A}) = \{f(X) \subset B : X \in \mathfrak{A}\}$$
$$f^{-1}(\mathfrak{B}) = \left\{f^{-1}(Y) \subset A : Y \in \mathfrak{B}\right\}.$$
   (a) Показать, что $f(\mathfrak{A})$, вообще говоря, не обязано быть кольцом, если $\mathfrak{A}$ — кольцо.
   (b) Доказать, что если $\mathfrak{B}$ - кольцо (σ-алгебра), то $f^{-1}(\mathfrak{B})$ — кольцо (σ-алгебра).

5. Являются ли следующие системы полукольцом, кольцом, алгеброй:
   (a) Полуинтервалы: $S = \{[\alpha;\beta) |\ \alpha,\beta \in R\}$;
   (b) Все конечные подмножества натуральных чисел;
   (c) Все измеримые по Жордану подмножества отрезка [0, 1];
   (d) Все открытые множества на прямой.

6. Доказать, что набор множеств, замкнутый относительно операций

   a) $\cap$ и $\cup$; b) $\cap$ и $\setminus$ может не быть кольцом.

7. Пусть $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ — две σ-алгебры подмножеств пространства Ω. Являются ли σ-алгебрами классы множеств: 1) $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$; 2) $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$; 3) $\mathfrak{B}_1 \setminus \mathfrak{B}_2$; 4) $\mathfrak{B}_1 \triangle \mathfrak{B}_2$.

8. Доказать, что всякая конечная σ-алгебра подмножеств пространства Ω порождается некоторым конечным разбиением Ω. Доказать, что мощность всякой конечной сигма-алгебры является степенью двойки.

9. Есть поток сигма-алгебр $F_1 \subset F_2 \subset ...$ Является ли σ-алгеброй объединение всех этих систем?

10. Существует, ли такая счетная система подмножеств R, что $\sigma(R)$ - борелевская сигма-алгебра.

Мера

1. Построить пример полукольца S и такой функции $\varphi : S \to [0; +\infty)$, что для любых $A, B \in S$ с $A \cap B = \varnothing$ и $C = A \sqcup B \in S$ выполнено равенство $\varphi(C) = \varphi(A) + \varphi(B)$, но φ — не мера на S.

2. Пусть m — мера на полукольце S. Докажите, что

   (a) если множества A и B принадлежат S и $B \subseteq A$, то $m(B) \leqslant m(A)$.

   (b) $m(\varnothing) = 0$.

   (c) если множества $A,\ B$ и $A \cup B$ принадлежат S, то $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$. Вывести аналог формулы включения-исключения.

   (d) если множества $A,\ B$ и $A \triangle B$ принадлежат S и $m(A \triangle B) = 0$. Доказать, что $m(A) = m(B)$.

3. (a) Пусть S — полукольцо с мерой m, а $S_1 = \{A \in S : \ m(A) = 0\}$. Доказать, что S_1 — полукольцо.

   (b) Пусть R — кольцо с мерой m, а $R_1 = \{A \in S : \ m(A) = 0\}$. Доказать, что R_1 — кольцо.

   (c) Пусть A — алгебра с мерой m, а $A_1 = \{A \in S : \ m(A) = 0\}$. Верно ли, что A_1 — алгебра.

4. Пусть m — σ-аддитивная мера на полукольце S , множества $A, A_1, \ldots, A_i, \ldots$ принадлежат S, причем $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ и
$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$
   Доказать, что
$$m(A) = \lim_{i \to \infty} m(A_i).$$
   Это свойство меры называется *непрерывностью.*

5. Пусть m — мера на кольце R и для любых таких множеств $A, A_1, \ldots, A_i, \ldots$ из R, что $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ и
$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$
   выполнено развенство
$$m(A) = \lim_{i \to \infty} m(A_i).$$
   Доказать, что m — σ-аддитивная мера.

   Показать, что это утверждение может не быть справедливым для меры на полукольце.

6. Построить пример меры на полукольце, которая не является σ-аддитивной.

7. Пусть m — σ-аддитивная мера на полукольце S , множества $A, A_1, \dots, A_i, \dots$ принадлежат S, причем $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ и
$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$
Доказать, что
$$m(A) = \lim_{i\to\infty} m(A_i).$$

8. Пусть m — мера на кольце R и для любых таких множеств $A, A_1, \dots, A_i, \dots$ из R, что $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ и
$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$
выполнено развенство
$$m(A) = \lim_{i\to\infty} m(A_i).$$
Доказать, что m — σ-аддитивная мера.

   Показать, что это утверждение может не быть справедливым для меры на полукольце.

9. Показать, что в случае σ-конечной меры понятия непрерывности и σ-аддитивности не равносильны.

Внешняя мера. Мера Лебега.

Обозначения. Пусть S — полукольцо с единицей X, а m — конечная σ-аддитивная мера на S. Пусть ν — продолжение меры m на минимальное кольцо $R(S)$. Для произвольного $A \subseteq X$ определим *верхнюю меру Жордана, порожденную мерой m*, формулой
$$\mu_J^* = \inf_{A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} \sum_{i=1}^{n} m(A_i),$$
и *верхную меру Лебега, порожденную мерой m*, формулой
$$\mu^* = \inf_{A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Скажем, что множество $A \subseteq X$ *измеримо по Лебегу (по Жордану),* если для любого $\varepsilon > 0$ найдется токе множество A_ε, что $\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$ (соответсвенно $\mu_J^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$). Обозначим $\mathfrak{M}$ - множество измеримых по Лебегу множеств на X. $\mathfrak{M}_J$ - множество измеримых по Жордану множеств на X.

Для множества $A \in \mathfrak{M}$ его *мерой Лебега* называется $\mu(A) = \mu^*(A)$. Для меры Жордана аналогично.

В случае, когда S — полукольцо промежутков из замкнутого параллелепипеда $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$, а мера m — классическая (объем), мы будем и соотвествующие меры и верхние меры называть *классическими.*

1. Доказать, что если вопреки определению верхней меры, мера m не σ-аддитивна, то найдется множество $A \in S$, для которого $\mu^*(A) < m(A)$.

2. Пусть $A \subseteq X$ и $B \subseteq X$. Доказать, что $\mu^*(A \cup B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

3. Пусть $A \subseteq X$ и $B \subseteq X$. Докажите, что
$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

4. Докажите, что если множество $E \subseteq \mathbb{R}$ измеримо, то для любого $A \subseteq \mathbb{R}$ выполнено
$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

5. Доказать, что в случае классической меры Жордана система $\mathfrak{M}_J$ не является σ-алгеброй. Привести пример меры m, когда она является σ-алгеброй.

6. Пусть множество $E \subseteq \mathbb{R}$ имеет положительную меру Лебега. Докажите, что множество $E - E = \{x - y : x, y \in E\}$ содержит интервал с центром в 0.

7. Построить такие неизмеримые относительно классической меры Лебега на [0;1] множества A_1 и A_2, что $A_1 \cup A_2$ измеримо.

8. Пусть $A \in \mathfrak{M}$, $\mu(A) = 0$ и $B \subset A$. Доказать, что $B \in \mathfrak{M}$ и $\mu(B) = 0$. (Т.е. докажите полноту меры Лебега).

9. Пусть μ — классическая мера Лебега на [0,1]. Построить такую последовательность $\{A_i\}$ множеств из $\mathfrak{M}$, что
$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) < \varliminf_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

Измеримые функции

Обозначения.
$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A; \\ 0, & \text{если } x \notin A; \end{cases}$$

1. Доказать (не опирасясь на критерий измеримости), что если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы, то и множество $\{x : f(x) < g(x)\}$ измеримо. Получить отсюда, что $f(x) + g(x)$ - измеримая функция.

2. Пусть (X, M, μ) — измеримое пространство, $A \subseteq X$ и $f(x) = \mathbb{I}_A(x)$. Доказать, что $f(x)$ измерима на X тогда и только тогда, когда $A \in M$.

3. Пусть μ — классическая мера Лебега на [0;1]. Построить такую неизмеримую функцию $f:\ [0;1] \to \mathbb{R}$, что для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(\{c\})$ измеримо.

4. Пусть (X, M, μ) — измеримое пространство, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторое всюду плотное множество в $\mathbb{R}$, а функция $f : X \to \mathbb{R}$ такова, что для каждого n множество
$$f^{-1}((a_n, +\infty)) \in M.$$
Доказать, что $f(x)$ измерима на X.

5. Построить функцию $f(x)$ на [0;1], измеримую на [0;1] относительно классической меры Лебега, но разрывную в каждой точке.

6. Пусть (X, M, μ) — полное измеримое пространство (т.е. мера μ полна), а $f(x)$ — измеримая функция на A. Пусть $g(x)$ — функция, эквивалентная $f(x)$. Доказать. что $g(x)$ — измеримая фукнция.

7. Пусть $[a; b] \subset \mathbb{R}$ и функция $f(x)$ монотонна на $[a; b]$. Доказать, что $f(x)$ измерима относительно классической меры Лебега на [a;b].

8. Построить такую функцию $f(x) \in C[0; 1]$, что для некоторого измеримого $A \subset [0; 1]$ меры нуль множество $f(A)$ — измеримо и $\mu(f(A)) > 0$, где μ — классическая мера Лебега.

9. Построить такую строго возратсающую функцию $f(x) \in C([0; 1])$, что для некоторого измеримого множества $A \subset [0; 1]$ меры нуль множество $f(A)$ измеримо и $\mu(f(A)) > 0$, где μ — классическая мера Лебега.

10. Построить функцию $f(x) \in C([0; 1])$ и измеримое множество $A \subset \mathbb{R}$, для которых множество $f^{-1}(A)$ неизмеримо относительно классической меры Лебега.

11. Построить такую $g(x) \in C([0; 1])$, что для некоторого измеримого $A \subset [0; 1]$с $\mu(A) = 0$ множество $g(A)$ неизмеримо относительно классической меры Лебега.

12. Построить множество $A \subset [0; 1]$, которое измеримо относительно классической меры Лебега, но не является борелевским.

Сходимость

1. Определим функцию $f(x)$ на отрезке $[0; 1]$ следующим образом. Если $x = \overline{0, n_1 n_2 n_3 \ldots}$ — десятичная запись числа x, то $f(x) = \max_i n_i$. Доказать, что $f(x)$ измерима и почти всюду постоянна.

2. Показать, что вообще говоря из сходимости п.в. не следует сходимость по мере в случае, когда мера σ-конечна.

3. Пусть последовательность неотрицательных функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере к $f(x)$ на A. Доказать, что $f(x) \geqslant 0$ п.в. на A.

4. Пусть $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Доказать, что последовательность
$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = r_n \\ \frac{1}{\sqrt{n}(x - r_n)}, & \text{если } x \in [0; 1] \setminus \{r_n\} \end{cases}$$
где $n \in \mathbb{N}$, сходится по классической мере Лебега на [0;1].

5. Пусть $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \left\{ r_n = \frac{p_n}{q_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$, где p_n и q_n — взаимно простые натуральные числа, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где $f_n(x) = e^{-(p_n - q_n x)^2}$, сходится по классической мере Лебега на [0,1], но не сходится ни в одной точке.

6. Показать, что утрвеждение теоремы Егорова не выполняется для классической меры Лебега на $\mathbb{R}$.

Интеграл Лебега

1. Поймите, что функция $f(x) = \mathbb{I}(x \in \mathbb{Q})$ интегрируема на $\mathbb{R}$, найдите величину интеграла.

2. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$ и μ — классическая мера Лебега на $(0;1)$. Доказать, что
$$\int_0^1 f(x) d\mu = \infty,$$
используя только определение интеграла Лебега.

3. Верно ли, что функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ интегрируема по Лебегу на прямой?

4. Пусть $f(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве A (т.е. $\int_A |f(x)| d\mu < \infty$, будем писать $f \in L_1(A)$). Доказать, что $\mu\left(\{x \in A : \ f(x) = \pm\infty\}\right) = 0$.

5. Построить такую последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных функций из $L_1([0;1])$, таких что $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для кадого $x \in [0;1]$, но
$$\int_0^1 f_n(x) d\mu \nrightarrow 0, \to \infty.$$