Правила проведения экзамена

1. По ТВ семинарист выставляет каждому студенту 0, 1, 2 или 3 балла (2 балла за КР, 1 балл за работу в семестре). На экзамене студент получает задачи по ТВ к количестве 2-(балл за семестр по ТВ). Если студент получил 3 балла за ТВ, то у него появляется бонусный балл, который прибавляется к итоговой оценке.

2. По ТМ студент должен отчитаться по задачам из обязательного списка (см.ниже) в устной форме (формат коллоквиума: вытягивается по одной задаче из каждого списка 6 шт., устно рассказывается преподавателю). Коллоквиум считается сданным, если решено >=4 задач.

3. Сдать коллоквиум можно досрочно на зачетной неделе или в январе (доступные даты 16, 17, 18, 19, 20 для ПМИ и ПМФ, 23, 24, 25 для ПМФ). Для досрочной сдачи только одна попытка. В этом случае при сдаче 5 задач будут зачтены 6, при сдаче 4 будут зачтены 5. Если досрочная попытка провалена или не использована, коллоквиум сдается в начале экзамена в качестве входного контроля (решение <4 задач (заранее объявленых задач) означает "неуд"на экзамене).

   Важно: задачи коллоквиума это либо контр-примеры к теоремам, либо упражнения на определения. Поэтому вариант с январем мне казался наиболее удобным, параллельно с разбором теории разобраться в упражнениях и контр-примерах, и просто вечером придти отчитаться, что разобрались.

4. В случае удачной сдачи коллоквиума(>=4 задач) на экзамене выдается билет, состоящий из двух вопросов по программе курса (см. ниже), ответ на который оценивается по 10-балльной шкале.

5. Оценка выставляется по формуле: (ответ на экзамене)-(число нерешнных задач по Теории вероятностей (ТВ) и теории меры (ТМ))+бонус за семестр.

Программа курса

1. Вероятностное пространство как математическая модель случайного эксперимента. Статистическая устойчивость.

2. Дискретное вероятностное пространство. Классическая вероятность. Построение простейших вероятностных пространств. Элементы комбинаторики. Вероятность суммы событий.

3. Геометрические вероятности. Задача “о встрече”.

4. Условная вероятность. Формулы полной вероятности, умножения и Байеса.

5. Независимость событий, виды и взаимосвязь.

6. Случайные величины. Независимость случайных величин. Распределение. Примеры. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация, корреляция. Свойства.

7. Схема испытаний Бернулли. Математическая модель, предельные теоремы: Пуассона и Муавра-Лапласа (б/д).

8. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, сигма-алгебры). Примеры. Минимальное кольцо, содержащее полукольцо. Понятие наименьшего кольца, алгебры, сигма-алгебры, содержащей систему множеств.

9. Меры на полукольцах. Классическая мера Лебега на полукольце промежутков и ее сигма-аддитивность.

10. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Наследование сигма-аддитивности при продолжении меры. Внешние меры Лебега и Жордана. Мера Лебега. Свойства. Сигма-алгебра измеримых множеств. Сигма-аддитивность меры Лебега на сигма-алгебре измеримых множеств.

11. Полнота и непрерывность мер. Теоремы о связи непрерывности и сигма-аддитивности.

12. Мера Бореля. Меры Лебега-Стилтьеса на прямой и их сигма-аддитивность.

13. Сигма-конечные меры.

14. Неизмеримые множества.

15. Измеримые функции. Их свойства. Измеримые функции и предельный переход.

16. Множество Кантора и кривая Кантора. Теорема о существовании композиции измеримой от непрерывной, не являющейся измеримой функцией.

17. Сходимость по мере и почти всюду. Их свойства (критерий Коши сходимости по мере, арифметические, связь сходимостей, Теорема Рисса).

18. Теорема Егорова.

19. Интеграл Лебега для конечно-простых функций и его свойства. Определение интеграла Лебега в общем случае. Основные свойства интеграла Лебега.

20. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега (теорема Б.Леви, лемма Фату, теорема Лебега).

21. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Критерий интегрируемости по Лебегу на множестве конечной меры. Неравенство Чебышева.

Список литературы.

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1981, 1989.

2. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Наука,1979.

3. **Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М., Факториал, 1998, 2002.**

4. **Ширяев А.Н. Вероятность. М., Наука, 1989, 2-е изд.**

5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. М., Мир, 1967.

Задачи коллоквиума

Системы множеств

Верхним пределом последовательности множеств $A_1,\ A_2,\dots$ называется множество всех элементов, которые принадлежат бесконечному набору множеств A_n, а нижним пределом – множество всех элементов, которые принадлежат всем множествам A_n, начиная с некторого номера (своего для кадого элемента). Верних предел обоначают $\overline{\lim}_n A_n$, нижний предел обозначают $\underline{\lim}_n A_n$. Если $\overline{\lim}_n A_n$=$\underline{\lim}_n A_n$, то это множество называют пределом последовательности $A_1,\ A_2,\dots$ и обозначают $\lim_n A_n$

Последовательность множеств $A_1,\ A_2,\dots$ называется возрастающей, если $A_n \subset A_{n+1}$ для всех n, и убывающей если $A_{n+1} \subset A_n$ для всех n.

1. Доказать, что

$$\overline{\lim}_n A_n = \bigcap_n \left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k \right) \qquad \underline{\lim}_n A_n = \bigcup_n \left(\bigcap_{k\geqslant n} A_k \right)$$

2. Доказать, что если последовательсть множеств $\{A_n\}$ монотонна, то

$$\overline{\lim}_n A_n = \underline{\lim}_n A_n.$$

   При этом $\lim_n A_n = \bigcup_n A_n$, если A_n возрастают, и $\lim_n A_n = \bigcap_n A_n$, если A_n убывают.

3. Привести пример последовательности $A_1,\ A_2,\dots$, что $\overline{\lim}_n A_n \neq \underline{\lim}_n A_n$

   Доказать, что

$$\overline{\overline{\lim}_n A_n} = \underline{\lim}_n \overline{A}_n.$$

4. Пусть $f:\ A \to B$ — отображение множеств, $\mathfrak{A}$ – система подможеств множества A, $\mathfrak{B}$ –система подмножеств множества B. Положим

$$f(\mathfrak{A}) = \{f(X) \subset B : X \in \mathfrak{A}\}$$

$$f^{-1}(\mathfrak{B}) = \left\{f^{-1}(Y) \subset A : Y \in \mathfrak{B}\right\}.$$

   (a) Показать, что $f(\mathfrak{A})$, вообще говоря, не обязано быть кольцом, если $\mathfrak{A}$ — кольцо.

   (b) Доказать, что если $\mathfrak{B}$ - кольцо (σ-алгебра), то $f^{-1}(\mathfrak{B})$ — кольцо (σ-алгебра).

5. Являются ли следующие системы полукольцом, кольцом, алгеброй:

   (a) Полуинтервалы: $S = \{[\alpha;\beta)|\ \alpha,\beta \in R\}$;

   (b) Все конечные подмножества натуральных чисел;

   (c) Все измеримые по Жордану подмножества отрезка [0, 1];

   (d) Все открытые множества на прямой.

6. Доказать, что набор множеств, замкнутый относительно операций

   a) $\cap$ и $\cup$; b) $\cap$ и $\setminus$ может не быть кольцом.

7. Пусть $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ — две σ-алгебры подмножеств пространства Ω. Являются ли σ-алгебрами классы множеств: 1) $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$; 2) $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$; 3) $\mathfrak{B}_1 \setminus \mathfrak{B}_2$; 4) $\mathfrak{B}_1 \triangle \mathfrak{B}_2$.

8. Доказать, что всякая конечная σ-алгебра подмножеств пространства Ω порождается некоторым конечным разбиением Ω. Доказать, что мощность всякой конечной сигма-алгебры является степенью двойки.

9. Есть поток сигма-алгебр $F_1 \subset F_2 \subset ...$ Является ли σ-алгеброй объединение всех этих систем?

10. Существует, ли такая счетная система подмножеств R, что $\sigma(R)$ - борелевская сигма-алгебра.

Мера

1. Построить пример полукольца S и такой функции $\varphi : S \to [0; +\infty)$, что для любых $A, B \in S$ с $A \cap B = \oslash$ и $C = A \sqcup B \in S$ выполнено равенство $\varphi(C) = \varphi(A) + \varphi(B)$, но φ — не мера на S.

2. Пусть m — мера на полукольце S. Докажите, что

   (a) если множества A и B принадлежат S и $B \subseteq A$, то $m(B) \leqslant m(A)$.

   (b) $m(\oslash) = 0$.

   (c) если множества $A,\ B$ и $A \cup B$ принадлежат S, то $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$. Вывести аналог формулы включения-исключения.

   (d) если множества $A,\ B$ и $A \triangle B$ принадлежат S и $m(A \triangle B) = 0$. Доказать, что $m(A) = m(B)$.

3. (a) Пусть S — полукольцо с мерой m, а $S_1 = \{A \in S :\ m(A) = 0\}$. Доказать, что S_1 — полукольцо.

   (b) Пусть R — кольцо с мерой m, а $R_1 = \{A \in S :\ m(A) = 0\}$. Доказать, что R_1 — кольцо.

   (c) Пусть A — алгебра с мерой m, а $A_1 = \{A \in S :\ m(A) = 0\}$. Верно ли, что A_1 — алгебра.

4. Пусть m — σ-аддитивная мера на полукольце S , множества $A, A_1, \ldots, A_i, \ldots$ принадлежат S, причем $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ и
$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$
   Доказать, что
$$m(A) = \lim_{i \to \infty} m(A_i).$$
   Это свойство меры называется *непрерывностью.*

5. Пусть m — мера на кольце R и для любых таких множеств $A, A_1, \ldots, A_i, \ldots$ из R, что $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ и
$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$
   выполнено развенство
$$m(A) = \lim_{i \to \infty} m(A_i).$$
   Доказать, что m — σ-аддитивная мера.

   Показать, что это утверждение может не быть справедливым для меры на полукольце.

6. Построить пример меры на полукольце, которая не является σ-аддитивной.

7. Пусть m — σ-аддитивная мера на полукольце S , множества $A, A_1, \ldots, A_i, \ldots$ принадлежат S, причем $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ и
$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$
Доказать, что
$$m(A) = \lim_{i \to \infty} m(A_i).$$

8. Пусть m — мера на кольце R и для любых таких множеств $A, A_1, \ldots, A_i, \ldots$ из R, что $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ и
$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$
выполнено развенство
$$m(A) = \lim_{i \to \infty} m(A_i).$$
Доказать, что m — σ-аддитивная мера.

Показать, что это утверждение может не быть справедливым для меры на полукольце.

9. Показать, что в случае σ-конечной меры понятия непрерывности и σ-аддитивности не равносильны.

Внешняя мера. Мера Лебега.

Обозначения. Пусть S — полукольцо с единицей X, а m — конечная σ-аддитивная мера на S. Пусть ν — продолжение меры m на минимальное кольцо $R(S)$. Для произвольного $A \subseteq X$ определим *верхнюю меру Жордана, порожденную мерой m*, формулой
$$\mu_J^* = \inf_{A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} \sum_{i=1}^{n} m(A_i),$$
и *верхнюю меру Лебега, порожденную мерой m*, формулой
$$\mu^* = \inf_{A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Скажем, что множество $A \subseteq X$ *измеримо по Лебегу (по Жордану),* если для любого $\varepsilon > 0$ найдется токе множество A_ε, что $\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$ (соответсвенно $\mu_J^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$). Обозначим $\mathfrak{M}$ - множество измеримых по Лебегу множеств на X. $\mathfrak{M}_J$ - множество измеримых по Жордану множеств на X.

Для множества $A \in \mathfrak{M}$ его *мерой Лебега* называется $\mu(A) = \mu^*(A)$. Для меры Жордана аналогично.

В случае, когда S — полукольцо промежутков из замкнутого параллелепипеда $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$, а мера m — классическая (объем), мы будем и соотвествующие меры и верхние меры называть *классическими.*

1. Доказать, что если вопреки определению верхней меры, мера m не σ-аддитивна, то найдется множество $A \in S$, для которого $\mu^*(A) < m(A)$.

2. Пусть $A \subseteq X$ и $B \subseteq X$. Доказать, что $\mu^*(A \cup B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

3. Пусть $A \subseteq X$ и $B \subseteq X$. Докажите, что

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

4. Докажите, что если множество $E \subseteq \mathbb{R}$ измеримо, то для любого $A \subseteq \mathbb{R}$ выполнено

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

5. Доказать, что в случае классической меры Жордана система $\mathfrak{M}_J$ не является σ-алгеброй. Привести пример меры m, когда она является σ-алгеброй.

6. Пусть множество $E \subseteq \mathbb{R}$ имеет положительную меру Лебега. Докажите, что множество $E - E = \{x - y : x, y \in E\}$ содержит интервал с центром в 0.

7. Построить такие неизмеримые относительно классической меры Лебега на [0;1] множества A_1 и A_2, что $A_1 \cup A_2$ измеримо.

8. Пусть $A \in \mathfrak{M}$, $\mu(A) = 0$ и $B \subset A$. Доказать, что $B \in \mathfrak{M}$ и $\mu(B) = 0$. (Т.е. докажите полноту меры Лебега).

9. Пусть μ — классическая мера Лебега на [0,1]. Построить такую последовательность $\{A_i\}$ множеств из $\mathfrak{M}$, что

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) < \varliminf_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

Измеримые функции

Обозначения.

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A; \\ 0, & \text{если } x \notin A; \end{cases}$$

1. Доказать (не опирасясь на критерий измеримости), что если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы, то и множество $\{x : f(x) < g(x)\}$ измеримо. Получить отсюда, что $f(x) + g(x)$ - измеримая функция.

2. Пусть (X, M, μ) — измеримое пространство, $A \subseteq X$ и $f(x) = \mathbb{I}_A(x)$. Доказать, что $f(x)$ измерима на X тогда и только тогда, когда $A \in M$.

3. Пусть μ — классическая мера Лебега на [0;1]. Построить такую неизмеримую функцию $f :\ [0; 1] \to \mathbb{R}$, что для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(\{c\})$ измеримо.

4. Пусть (X, M, μ) — измеримое пространство, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторое всюду плотное множество в $\mathbb{R}$, а функция $f : X \to \mathbb{R}$ такова, что для каждого n множество

$$f^{-1}((a_n, +\infty)) \in M.$$

   Доказать, что $f(x)$ измерима на X.

5. Построить функцию $f(x)$ на [0;1], измеримую на [0;1] относительно классической меры Лебега, но разрывную в каждой точке.

6. Пусть (X, M, μ) — полное измеримое пространство (т.е. мера μ полна), а $f(x)$ — измеримая функция на A. Пусть $g(x)$ — функция, эквивалентная $f(x)$. Доказать. что $g(x)$ — измеримая фукнция.

7. Пусть $[a; b] \subset \mathbb{R}$ и функция $f(x)$ монотонна на $[a; b]$. Доказать, что $f(x)$ измерима относительно классической меры Лебега на [a;b].

8. Построить такую функцию $f(x) \in C[0; 1]$, что для некоторого измеримого $A \subset [0; 1]$ меры нуль множество $f(A)$ — измеримо и $\mu(f(A)) > 0$, где μ — классическая мера Лебега.

9. Построить такую строго возратсающую функцию $f(x) \in C([0; 1])$, что для некоторого измеримого множества $A \subset [0; 1]$ меры нуль множество $f(A)$ измеримо и $\mu(f(A)) > 0$, где μ — классическая мера Лебега.

10. Построить функцию $f(x) \in C([0; 1])$ и измеримое множество $A \subset \mathbb{R}$, для которых множество $f^{-1}(A)$ неизмеримо относительно классической меры Лебега.

11. Построить такую $g(x) \in C([0; 1])$, что для некоторого измеримого $A \subset [0; 1]$с $\mu(A) = 0$ множество $g(A)$ неизмеримо относительно классической меры Лебега.

12. Построить множество $A \subset [0; 1]$, которое измеримо относительно классической меры Лебега, но не является борелевским.

Сходимость

1. Определим функцию $f(x)$ на отрезке $[0; 1]$ следующим образом. Если $x = \overline{0, n_1 n_2 n_3 \ldots}$ — десятичная запись числа x, то $f(x) = \max_i n_i$. Доказать, что $f(x)$ измерима и почти всюду постоянна.

2. Показать, что вообще говоря из сходимости п.в. не следует сходимость по мере в случае, когда мера σ-конечна.

3. Пусть последовательность неотрицательных функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере к $f(x)$ на A. Доказать, что $f(x) \geqslant 0$ п.в. на A.

4. Пусть $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Доказать, что последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = r_n \\ \frac{1}{\sqrt{n}(x - r_n)}, & \text{если } x \in [0; 1] \setminus \{r_n\} \end{cases}$$

   где $n \in \mathbb{N}$, сходится по классической мере Лебега на [0;1].

5. Пусть $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \left\{ r_n = \frac{p_n}{q_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$, где p_n и q_n — взаимно простые натуральные числа, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где $f_n(x) = e^{-(p_n - q_n x)^2}$, сходится по классической мере Лебега на [0,1], но не сходится ни в одной точке.

6. Показать, что утрвеждение теоремы Егорова не выполняется для классической меры Лебега на $\mathbb{R}$.

Интеграл Лебега

1. Поймите, что функция $f(x) = \mathbb{I}(x \in \mathbb{Q})$ интегрируема на $\mathbb{R}$, найдите величину интеграла.

2. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$ и μ — классическая мера Лебега на $(0;1)$. Доказать, что

$$\int_0^1 f(x) d\mu = \infty,$$

используя только определение интеграла Лебега.

3. Верно ли, что функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ интегрируема по Лебегу на прямой?

4. Пусть $f(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве A (т.е. $\int_A |f(x)| d\mu < \infty$, будем писать $f \in L_1(A)$). Доказать, что $\mu\left(\{x \in A : \ f(x) = \pm\infty\}\right) = 0$.

5. Построить такую последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных функций из $L_1([0;1])$, таких что $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для кадого $x \in [0;1]$, но

$$\int_0^1 f_n(x) d\mu \nrightarrow 0, \to \infty.$$

1. Системы множеств.

Задача 1. Доказать, что

$$\overline{\lim_n} A_n = \bigcap_n \Big(\bigcup_{k \geq n} A_k \Big) \qquad \underline{\lim}_n A_n = \bigcup_n \Big(\bigcap_{k \geq n} A_k \Big).$$

Решение.

Верхний предел последовательности множеств A_n состоит из тех и только тех элементов x, каждый из которых принадлежит бесконечному числу множеств последовательности A_n.

Нижний предел последовательности множеств A_n состоит из тех и только тех элементов x, каждый из которых принадлежит всем множествам последовательности A_n, за исключением, быть может, конечного числа.

Верхний предел.

Пусть $x \in \bigcap\limits_n \left(\bigcup\limits_{k \geq n} A_k \right)$, тогда $\forall n \; x \in \bigcup\limits_{k \geq n} A_k$, откуда следует, что $\exists \{n_k\} : \forall k \; x \in a_{n_k}$, значит $x \in \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n$.

Нижний предел.

Пусть $x \in \bigcup\limits_n \left(\bigcap\limits_{k \geq n} A_k \right)$, тогда $\exists N : x \in \bigcap\limits_{k \geq N} A_k$, значит $x \in \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n$.

Получили, что $\bigcup\limits_n \left(\bigcap\limits_{k \geq n} A_k \right) \subseteq \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n$ и $\bigcap\limits_n \left(\bigcup\limits_{k \geq n} A_k \right) \subseteq \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n$.

Обратные включения доказываются тривиально.

Задача 2. Доказать, что если последовательность множеств $\{A_n\}$ монотонна, то

$$\overline{\lim_n} A_n = \underline{\lim}_n A_n.$$

При этом $\lim_n A_n = \bigcup_n A_n$, если A_n возрастают и $\lim_n A_n = \bigcap_n A_n$, если A_n убывают.

Решение. Рассмотрим два варианта:

1. $\{A_n\}$ монотонно возрастает, т.е. $\forall n \hookrightarrow A_n \subset A_{n+1}$.

   $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n = \bigcup\limits_n \left(\bigcap\limits_{k \geq n} A_k \right) = \bigcup\limits_n (A_n) = \bigcup\limits_n A_n$, так как из монотонности следует, что $\forall \; n \bigcap\limits_{k \geq n} A_k = A_n$.

   $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n = \bigcap\limits_n \left(\bigcup\limits_{k \geq n} A_k \right) = \bigcap\limits_n \left(\bigcup\limits_k A_k \right) = \bigcup\limits_n A_n$, так как из монотонности следует, что $\forall n \bigcup\limits_{k \geq n} A_k = \bigcup\limits_p A_p$.

2. $\{A_n\}$ монотонно убывает, т.е. $\forall \; n \hookrightarrow A_{n+1} \subset A_n$.

   $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n = \bigcup\limits_n \left(\bigcap\limits_{k \geq n} A_k \right) = \bigcup\limits_n \left(\bigcap\limits_k A_k \right) = \bigcap\limits_n A_n$, так как из монотонности следует, что $\forall n \bigcap\limits_{k \geq n} A_k = \bigcap\limits_p A_p$.

   $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n = \bigcap\limits_n \left(\bigcup\limits_{k \geq n} A_k \right) = \bigcap\limits_n (A_n) = \bigcap\limits_n A_n$, так как из монотонности следует, что $\forall n \bigcup\limits_{k \geq n} A_k = A_n$.

   Из вышеописанных равенств следует то, что нам надо в задаче.

Задача 3. Привести пример последовательности A_1, A_2, ..., что $\overline{\lim}_n A_n \neq \underline{\lim}_n A_n$. Доказать, что

$$\overline{\overline{\lim_n} A_n} = \underline{\lim}_n \overline{A_n}.$$

Решение. Пример: $A_{2k} = \{1\}$, $A_{2k+1} = \varnothing$.

$$\overline{\overline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n} = \overline{\bigcap_n \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right)} = \bigcup_n \left(\bigcap_{k\geq n} \overline{A}_k \right) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{A}_n$$

Задача 4. Пусть $f : A \to B$ — отображение множеств, $\mathfrak{A}$ – система подмножетсв множества A, $\mathfrak{B}$ – система подмножеств множества B. Положим

$$f(\mathfrak{A}) = \{f(X) \subset B : X \in \mathfrak{A}\}$$
$$f^{-1}(\mathfrak{B}) = \{f^{-1}(Y) \subset A : Y \in \mathfrak{B}\}.$$

(a) Показать, что $f(\mathfrak{A})$, вообще говоря, не обязано быть кольцом, если $\mathfrak{A}$ – кольцо.

(b) Доказать, что если $\mathfrak{B}$ – кольцо (σ-алгебра), то $f^{-1}(\mathfrak{B})$ – кольцо (σ-алгебра).

Решение.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$ и $\mathfrak{A} = \{\varnothing, \{1, 2\}, \{3, 4\}, A\}$, очевидно $\mathfrak{A}$ – кольцо. Пусть $f(1) = a$, $f(2) = f(3) = b$, $f(4) = c$. Тогда $f(\mathfrak{A}) = \{\varnothing, \{a, b\}, \{b, c\}, B\}$ – не кольцо, потому что $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin f(\mathfrak{A})$.

(b) (не уверен) Пусть $\mathfrak{B}$ – кольцо (σ-алгебра).

1) $\varnothing \in f^{-1}(\mathfrak{B})$, так как $\varnothing = f^{-1}(\varnothing)$, а $\varnothing \in \mathfrak{B}$.
2) $A, B \in f^{-1}(\mathfrak{B}) \Rightarrow \exists \Phi, \Psi : A = f^{-1}(\Phi), B = f^{-1}(\Psi)$.
   - $A \cap B \in f^{-1}(\mathfrak{B})$, так как $f^{-1}(\Phi \cap \Psi) = f^{-1}(\Phi) \cap f^{-1}(\Psi) = A \cap B$, а $\Phi \cap \Psi \in \mathfrak{B}$.
   - $A\Delta B \in f^{-1}(\mathfrak{B})$, так как $f^{-1}(\Phi\Delta\Psi) = f^{-1}(\Phi)\Delta f^{-1}(\Psi) = A\Delta B$, а $\Phi\Delta\Psi \in \mathfrak{B}$.
3) Пусть E – единица в $\mathfrak{B}$. Тогда $\forall X \in \mathfrak{B}\ X \subseteq E$.
   Тогда из того, что $\forall A, B \in \mathfrak{B} : A \subseteq B$ выполнено $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$, следует, что $f^{-1}(E)$ – единица в $f^{-1}(\mathfrak{B})$.
4) Пусть $A_1 \dots A_n \dots \in f^{-1}(\mathfrak{B})$, тогда $\exists\ B_1 \dots B_n \dots\ \in \mathfrak{B} :\ \forall n\ A_n = f^{-1}(B_n)$. Тогда $\bigcup\limits_n A_n \in f^{-1}(\mathfrak{B})$, так как $f^{-1}(\bigcup\limits_n B_n) = \bigcup\limits_n f^{-1}(B_n) = \bigcup\limits_n A_n$, а $\bigcup\limits_n B_n \in \mathfrak{B}$
   Из первых двух равенств следует, что $f^{-1}(\mathfrak{B})$ – кольцо, если $\mathfrak{B}$ – кольцо или σ-алгебра, а из последних двух следует, что $f^{-1}(\mathfrak{B})$ – σ-алгебра, только если $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра.

Задача 5. Являются ли следующие системы полукольцом, кольцом, алгеброй:

(a) Полуинтервалы: $S = \{[\alpha; \beta)|\ \alpha, \beta \in R\}$;

(b) Все конечные подмножетсва натуральных чисел;

(c) Все измеримые по Жордану подмножества отрезка [0, 1];

(d) Все открытые множества на прямой.

Решение. Любая σ-алгебра является алгеброй, любая алгебра является кольцом, любое кольцо является полукольцом.

(a) Докажем что не является кольцом.

Возьмем полуинтервалы $A = [0, 3)$ и $B = [1, 2)$. $A \triangle B = [0, 1) \cap [2, 3) \notin S$. Хотя симметрическая разность должна принадлежать кольцу.

Докажем, что является полукольцом.

- $\varnothing \in S$.
  Возьмем $\alpha = \beta$, $[\alpha, \beta) = \varnothing$, то есть $\varnothing \in S$.
- если $A, B \in S$, то $A \cap B \in S$.
  Пересечение двух полуинтервалов — полуинтервал. Значит пересечение принадлежит полуинтервалу.
- если $A, A_1 \in S$ и $A_1 \subset A$, то существуют конечное число множеств $A_2, A_3, \ldots, A_n \in S$ таких, что $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n$. Очевидно хватит двух $B_1, B_2 \in S$ (возможно пустых), чтобы дополнить A_1 до A.

(b) Докажем что не является алгеброй.

Назовем множество всех конечных подмножеств натуральных чисел — S. Возьмем $A \subset S$. $\overline{A}$ не будет конечным, значит не будет лежать в S. Значит S не образует алгебру.

Очевидно, что является кольцом.

- S непусто;
- если $A, B \in S$, то $A \cap B \in S$;
- если $A, B \in S$ то $A \triangle B \in S$.

(c) Является алгеброй.

- $\varnothing \in S$;
  Пустое множество измеримо по Жордану.
- если $A \in S$, то $\overline{A} \in S$;
  По свойству внешней и внутренней мер.
- если $A, B \in S$, то $A \cup B \in S$;
  Из определения меры.

(d) Не является даже полукольцом.

Назовем множество всех открытых множеств на прямой — S. Возьмем $A \in S$ и $B \in S$ такое, что $B \subsetneq A$ и левые концы A и B совпадают. Тогда $A \cap B$ – это полуинтервал, а полуинтервал не является открытым множеством. Значит S не полукольцо.

Задача 6. Доказать, что набор множеств, замкнутый относительно операций

a) $\cap$ и $\cup$,

b) $\cap$ и $\setminus$ может не быть кольцом.

Решение.

a) $S = \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}\}$ замкнут относительно $\cup$ и $\cap$, но кольцом не является, потому что $\{1, 2\} \triangle \{1\} = \{2\} \notin S$.

b) $S = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$ замкнут относительно $\cap$ и $\setminus$, но кольцом не является, потому что $\{1\}\triangle\{2\} = \{1, 2\} \notin S$.

Задача 7. Пусть $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ — две σ-алгебры подмножеств пространства Ω. Являются ли σ-алгебрами классы множеств:

1) $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$;

2) $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$;

3) $\mathfrak{B}_1 \setminus \mathfrak{B}_2$;

4) $\mathfrak{B}_1 \triangle \mathfrak{B}_2$.

Решение.

1) $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$ – σ-аглебра:

   a) $\varnothing \in \mathfrak{B}_1,\ \varnothing \in \mathfrak{B}_2 \Rightarrow \varnothing \in \mathfrak{B}$.

   b) $X,\ Y \in \mathfrak{B} \Rightarrow X,\ Y \in \mathfrak{B}_1;\ X,\ Y \in \mathfrak{B}_2 \Rightarrow X \cap Y \in \mathfrak{B};\ X\Delta Y \in \mathfrak{B}$, так как $X \cap Y \in \mathfrak{B}_1,\ X\Delta Y \in \mathfrak{B}_1$ и $X \cap Y \in \mathfrak{B}_2,\ X\Delta Y \in \mathfrak{B}_2$.

   c) $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathfrak{B} \Rightarrow A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathfrak{B}_1; A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathfrak{B}_2 \Rightarrow \bigcap\limits_n A_n \in \mathfrak{B}$, так как $\bigcap\limits_n A_n \in \mathfrak{B}_1$ и $\bigcap\limits_n A_n \in \mathfrak{B}_2$.

   d) $\Omega \in \mathfrak{B} \Rightarrow \Omega \in \mathfrak{B}_1;\ \Omega \in \mathfrak{B}_2 \Rightarrow \Omega$ – единица в $\mathfrak{B}$.

2) $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbb{R}, \varnothing, (-\infty; 1), [1; +\infty)\}$
   $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbb{R}, \varnothing, (-\infty; 2), [2; +\infty)\}$
   $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 = \{\mathbb{R}, \varnothing, (-\infty; 1), [1; +\infty), (-\infty; 2), [2; +\infty)\}$
   Пересечение двух элементов из объединения $(-\infty; 2) \cap [1; +\infty) = [1, 2) \notin \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$, значит объединение не является даже кольцом, поэтому $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ — не σ-алгебра.

3) $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbb{R}, \varnothing, (-\infty; 1), [1; +\infty)\}$
   $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbb{R}, \varnothing, (-\infty; 2), [2; +\infty)\}$
   $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \setminus \mathfrak{B}_2 = \{(-\infty; 1); [1; +\infty)\}$ – не σ-алгебра, так как $\varnothing \notin \mathfrak{B}$.

4) $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbb{R}, \varnothing, (-\infty; 1), [1; +\infty)\}$
   $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbb{R}, \varnothing, (-\infty; 2), [2; +\infty)\}$
   $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \triangle \mathfrak{B}_2 = \{(-\infty; 1), [1; +\infty), (-\infty; 2), [2; +\infty)\}$ – не σ-алгебра, так как $\varnothing \notin \mathfrak{B}$.

Задача 8. Доказать, что всякая конечная σ-алгебра подмножеств пространства Ω пораждается некоторым конечным разбиением Ω. Доказать, что мощность всякой конечной σ-агебры является степенью двойки.

Решение. Пусть A – наша σ-аглебра с единицей Ω. Рассмотрим разбиение единицы: $\Omega = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \Omega_k$, обладающее следующими свойством:

1. Любое множество из разбиения обязано быть только подмножеством каких-то элементов A, то есть нет такого множества $X \in A$ и индекса k, что $X \cap \Omega_k \neq \Omega_k$, при условии, что $X \neq \varnothing$

Такое разбиение существует, так как:

1. В силу того, что A – полукольцо, то существует конечное разбиение Ω.

2. Если текущее разбиение не удовлетворяет условиям, то мы можем каждый элемент разбить еще так, чтобы новое разбиение стало удовлетворять условию (разбивать будем пересекая текущее разбиение и эелементы A).

Заметим, что любой элемент из A – конечное объединение каких-то элементов рашего разбиения. Пусть $Q = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n\}$, тогда $A \subseteq \mathcal{P}(Q)$.

С другой стороны $\mathcal{P}(Q) \subseteq A$, так как любой элемент $\mathcal{P}(Q)$ – конечное объедиенение каких-то элементов Q, а значит элемент должен лежать и в A.

Тогда мы имеем, что $A = \mathcal{P}(Q)$. Откуда следует, что A пораждается конечным разбиением Ω и $|A| = 2^{|Q|}$.

Задача 9. Есть поток сигма-алгебр $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ Является ли σ-алгеброй объединение всех этих систем?

Решение. Пусть F_n – σ-алгебра, порожденная $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}, \{n+1, n+2, \dots\}\}$.

Пусть X – множество всех нечентых чисел из $\mathbb{N}$.

Пусть $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.

Тогда F – не σ-алгебра, так как $\forall x \in X$ выполено,что $x \in F$, но $X \notin F$, а значит не выполняется замкнутость относительно счетного объединения ($X \sim \mathbb{N}$).

Задача 10. Существует ли такая счетная система подмножеств R, что $\sigma(R)$ – борелевская σ-алгебра?

Решение. Для начала рассмторим $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Заметим, что $\forall X \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ выполено:

$$X = \bigsqcup_n \langle a_n, b_n \rangle,$$

где $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ и $a_n \leq b_n$.

Пусть $R = \{(-\infty, a): \ a \in \mathbb{Q}\} \sqcup \{(-\infty, a]: \ a \in \mathbb{Q}\} \sqcup \{(a, +\infty): \ a \in \mathbb{Q}\} \sqcup \{[a, +\infty): \ a \in \mathbb{Q}\}$

Докажем, что $\sigma(R) = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Доказательство:

1. $\sigma(R)$ содержит все промежутки вида $\langle a, b \rangle$, где $a, b \in \mathbb{Q}$.

2. из 1. следует, что $\sigma(R)$ содержит все множества вида $\bigsqcup\limits_n \langle a_n, b_n \rangle$, где $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ и $a_n \leq b_n$.

3. $\sigma(R)$ содержит все промежутки вида $\langle a, b \rangle$, где $a, b \in \mathbb{R}$, так как рассмторим последовательности a_n, b_n из $\mathbb{Q}$ такие, что a_n возрастает, b_n убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда $\langle a, b \rangle = \bigcap\limits_n \langle a_n, b_n \rangle$, откуда следует, что $\langle a, b \rangle$ лежит в $\sigma(R)$

4. из того, что $\langle a, b \rangle$ лежит в $\sigma(R)$ следует, что $\sigma(R)$ содержит все множества вида $\bigsqcup\limits_n \langle a_n, b_n \rangle$, где $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ и $a_n \leq b_n$. Здесь все границы интервалов действительны.

Тогда мы имеем, что $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(R)$.

Из построения R следует, что $\sigma(R) \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Тогда имеем, что $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma(R)$. А по построению $R \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

2. Мера.

Задача 1. Построить пример полукольца S и такой функции $\varphi : S \to [0; +\infty)$, что $\forall A, B \in S : A \cap B = \varnothing$ и $C = A \sqcup B \in S$ выполнено равенство $\varphi(C) = \varphi(A) + \varphi(B)$, но φ — не мера на S.

Решение. Рассмотрим систему множеств $S = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Можно показать, что данная система является полукольцом. Определим на S функцию φ следующим образом:

$\varphi(\varnothing) = 0$

$\varphi(\{1\}) = \varphi(\{2\}) = \varphi(\{3\}) = \varphi(\{4\}) = 1$
$\varphi(\{1,2\}) = 2$
$\varphi(\{1,2,3,4\}) = 3$

Тогда для данной функции выполняется равенство $\varphi(\{1,2\}) = \varphi(\{1\}) + \varphi(\{2\})$, однако φ не является мерой на S, т.к. $\varphi(\{1,2,3,4\}) = 3 \neq 4 = \varphi(\{1,2\}) + \varphi(\{3\}) + \varphi(\{4\})$.

Задача 2. Пусть m — мера на полукольце S. Докажите, что

(a) если множества A и B принадлежат S и $B \subseteq A$, то $m(B) \leqslant m(A)$.

(b) $m(\varnothing) = 0$

(c) Если $A, B, A \cup B \in S$, то $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$

(d) Если $A, B, A \triangle B \in S$ и $m(A \triangle B) = 0$, то $m(A) = m(B)$

Решение.

(a) Из определения полукольца следует, что $\exists B_1, \ldots, B_n \in S :$

$$A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$$

Тогда из аддитивности меры получим, что

$$m(A) = m(B) + \sum_{i=1}^{n} m(B_i) \tag{1}$$

В силу неотрицательности меры (1) влечет за собой неравентво $m(B) \leqslant m(A)$.

(b) Т.к $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$, то $\varnothing = \varnothing \sqcup \varnothing \to m(\varnothing) = m(\varnothing \sqcup \varnothing) = m(\varnothing) + m(\varnothing) \to m(\varnothing) = 0$.

(c) Т.к $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup B$ и $A \cup B \in S$, то $\exists B_1, \ldots, B_n \in S :$

$$A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$$

Тогда в силу аддитивности меры

$$m(A \cup B) = m(B) + \sum_{i=1}^{n} m(B_i) \tag{2}$$

С другой стороны, $A = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B)$ и $A \cup B \in S$ по определению полукольца, поэтому

$$m(A) = m(A \cap B) + \sum_{i=1}^{n} m(B_i) \tag{3}$$

Вычитая (2) из (3), получим

$$m(A \cup B) - m(A) = m(B) - m(A \cap B) \to m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B),$$

ч.т.д.

(d) Пусть $A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B \setminus A = \bigsqcup_{j=1}^{k} B_j; \qquad A_j, B_j \in S$ (аналогично задачам 1 и 3). Тогда, т.к $A \triangle B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$

$$m(A \triangle B) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) + \sum_{j=1}^{k} m(B_j)$$

Т.к $m(A \triangle B) = 0$ и m неотрицательна,

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) = \sum_{j=1}^{k} m(B_j) = 0. \tag{4}$$

Воспользовавшись тем, что $A = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B)$ и $B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$ и равенством (4), получим, что $m(A) = m(A \cap B) = m(B)$.

Задача 3.

(a) Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо с мерой m, а $\mathcal{S}_1 = \{A \in \mathcal{S} : m(A) = 0\}$. Доказать, что $\mathcal{S}_1$ — полукольцо.

(b) Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо с мерой m, а $\mathcal{R}_1 = \{A \in \mathcal{R} : m(A) = 0\}$. Доказать, что $\mathcal{R}_1$ — кольцо.

(c) Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра с мерой m, а $\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A} : m(A) = 0\}$. Верно ли, что $\mathcal{A}_1$ — алгебра?

Решение.

(a) Проверим выполнение соответствующих определений:

1) $\varnothing \in \mathcal{S}_1$, т.к $m(\varnothing) = 0$.
2) Пусть $A, B \in \mathcal{S}_1$. Тогда $A, B \in \mathcal{S}$, $m(A) = 0$ и $m(A) = 0$. Из этого следует, что $m(A \cap B) = 0$, т.е $A \cap B \in \mathcal{S}_1$.
3) Пусть $A, B \in \mathcal{S}_1, A \subset B$. Тогда $\exists B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{S} : A = B \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n$. Т.к. $A \in \mathcal{S}_1$, то $m(A) = 0$. Но тогда, т.к $B, B_1, \ldots, B_n \subset A$, меры всех множеств $B, B_1, \ldots, B_n$ равны нулю. Следовательно $B, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{S}_1$.

(b) Аналогично предыдущему пункту:

1) $\varnothing \in \mathcal{R}_1$ (т.к $m(\varnothing) = 0$), следовательно, $\mathcal{R}_1$ непусто.
2) Проверка пересечения множеств аналогична пункту ((a)).

(c) Пусть $\mathcal{A}$ — все подмножества отрезка $[0, 1]$, измеримые по Жордану, тогда в $\mathcal{A}_1$ будут все точки отрезка $[0, 1]$, но в $\mathcal{A}_i$ не будет множества, содержащего их все, поэтому в $\mathcal{A}_1$ не будет единицы.

Задача 4. Пусть m – σ-аддитиваня мера на полукольце S, множества $A, A_1, \ldots, A_i, \ldots$ придлежат S, причем $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Доказать, что

$$m(A) = \lim_{i \to \infty} m(A_i).$$

Это свойство меры называется *непрерывностью.*

Решение. Рассмотрим $\{A_n\} \in S$ такую, что $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \ldots$, и $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Обозначим $B_i = A_i \setminus A_{i+1}$, тогда $A_1 \setminus A = \bigsqcup\limits_{i} B_i = \bigsqcup\limits_{i} \bigsqcup\limits_{j} C_{i,j}$, где $C_{i,j} \in S$

$$m(A_1) - m(A) = \sum_i \sum_j m(C_{i,j}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{j_i} m(C_{i,j}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} (m(A_i) - m(A_{i+1})) =$$
$$= m(A_1) - \lim_{i\to\infty} m(A_i)$$

чтд.

Задача 5. Пусть m – мера на кольце R и для любых таких множеств $A, A_1, \ldots, A_i, \ldots$ из R, что $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

выполнено равенство

$$m(A) = \lim_{i\to\infty} m(A_i).$$

Доказать, что m – σ-аддитивная мера. Или иначе: доказать σ-аддитивность непрерывной меры. Показать, что это утверждение может не быть справедливым для меры на полукольце.

Решение.

Задача 6. Построить пример меры на полукольце, которая не является σ-аддитивной.

Решение. Пусть $S = \{(a, b] \cap \mathbb{Q} : \ a, b \in \mathbb{R}, \ a \leq b\}$. Пусть $\mu((a, b) \cap \mathbb{Q}) = b - a$.

Понятно, что S – полукольцо, а μ – мера на нём.

Докажем, что μ – не σ-аддитивна:

Рассмторим $E = (0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Так как $E \sim \mathbb{N}$, то занумеруем точки $E : E = \{r_n\}$.

Построим последовательность множеств $\{A_n\}$ по индукции:

1. $A_1 = (max(0, r_1 - \frac{1}{2^3}), r_1] \cap \mathbb{Q}$.
2. Пусть $k_{n+1} = inf\{j \geq 1 : \ r_j \notin \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\}$
3. Положим $A_{n+1} = (r_{n_{k+1}} - x_{n+1}, r_{n_{k+1}}] \cap \mathbb{Q}$, где $x_{n+1} \in (0, 2^{-n-3})$ такое, что $A_{n+1} \bigcap \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \varnothing$.

Тогда $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Найдем меру E:

1. $\mu(E) = 1 - 0 = 1$
2. $\mu(E) = \mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2+n}} = \frac{1}{4}$

Таким образом, мы получили, что μ – не σ-аддитивная мера на S.

Задача 7. Пусть m — σ-аддитивная мера на полукольце S, множества $A, A_1, \ldots A_i, \ldots$ принадлежат S, причем $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ и

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Доказать, что

$$m(A) = \lim_{i\to\infty} m(A_i).$$

Решение. Определим для каждого $i \geqslant 1$ множество $B_i = A_{i+1} \setminus A_i$. Тогда

$$A \setminus A_1 = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Так как S — полукольцо, то $\forall k\ \exists C_1, \ldots, C_{j_k} \in S$, такое что

$$B_k = \bigsqcup_{j=1}^{j_k} C_j.$$

Отсюда получим, что

$$m(A) - m(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{j_i} m(C_j) = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=1}^{j_k} m(C_j) = \lim_{i\to\infty} (\sum_{k=1}^{i-1} (m(A_{k+1}) - m(A_k))) =$$

$$= \lim_{i\to\infty} (m(A_i) - m(A_1)) = \lim_{i\to\infty} m(A_i) - m(A_1).$$

Из этого следует, что

$$m(A) = \lim_{i\to\infty} m(A_i).$$

Задача 8. Пусть m — мера на кольце R и для любых таких множеств $A, A_1, \ldots A_i, \ldots$ из R, что $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

выполняется

$$m(A) = \lim_{i\to\infty} m(A_i). \tag{5}$$

Докажите, что m — σ-аддитивная мера. Показать, что это утверждение может не быть справедливым для меры на полукольце.

Решение. Пусть $B, B_1, \ldots B_i, \ldots$ принадлежат R и

$$B = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Определим множества

$$C_l = \bigsqcup_{i=1}^{l} B_i = B \setminus \left(\bigsqcup_{i=l+1}^{\infty} B_i \right), l = 1, 2, \ldots.$$

Тогда $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$ и

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} C_l = B.$$

Тогда множества $C_1, C_2, \ldots$ удовлетворяют условию (5), следовательно

$$m(B) = \lim_{l\to\infty} m(C_l).$$

Если нашлось такое n, что $m(B_n) = +\infty$, то очевидным образом

$$m(B) = +\infty = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i).$$

Иначе
$$m(B) = \lim_{l\to\infty} m(C_l) = \lim_{l\to\infty} m\left(\bigsqcup_{i=1}^{l} B_i\right) = \lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l} m(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i),$$
что и требовалось доказать.

Рассмотрим полукольцо $S = \{\langle a,b\rangle \cap \mathbb{Q} : 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1\} \cup \{\varnothing\}$ и меру $m(\langle a,b\rangle) = b-a$ (аналогично задаче 5). Покажем, что m непрерывна, но не σ-аддитивна.

Пусть $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Заметим, что для любого n $m(\langle r_n, r_n\rangle) = 0$. Поэтому
$$1 = m(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = m\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} m(\langle r_n, r_n\rangle)\right) \neq \sum_{i=1}^{\infty} m(\langle r_n, r_n\rangle) = 0,$$
т.е m не σ-аддитивна.

Пусть теперь $A, A_1, \dots \in S : A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ и
$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$
Если $A = \langle a,b\rangle, A_i = \langle a_i, b_i\rangle$, то $a_i \to a, b_i \to b$. Следовательно,
$$\lim_{i\to\infty} m(A_i) = \lim_{i\to\infty}(b_i - a_i) = b - a = m(A),$$
т.е мера m непрерывна.

Задача 9. Показать, что в случае σ-конечной меры понятия непрерывности и σ-аддитивности не равносильны.

Решение. Пусть m — классическая мера Лебега на $\mathbb{R}$. Пусть $A_i = [i, +\infty)$. Тогда
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} = \varnothing.$$
Однако
$$\lim_{i\to\infty} m(A_i) = +\infty \neq 0 = m(\varnothing).$$

3. Внешняя мера. Мера Лебега.

Задача 1. Доказать, что если вопреки определению верхней меры, мера m не σ-аддитивна, то найдется такое множество $A \in S$, для которого $\mu^*(A) < m(A)$.

Решение. По условию, $\exists A \in S$ и $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$ такие, что
$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ и } m(A) \neq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n). \tag{6}$$

По свойству m, получаем:
$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < m(A). \tag{7}$$

Задача 2. Пусть $A \in X$ и $B \in X$. Показать, что $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Решение. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Тогда для A и B можно найти такие $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \{B_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$, что:

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) - \frac{\varepsilon}{2};$$
$$B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \mu^*(B) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$A \cup B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n). \tag{8}$$

откуда следует:

$$\mu^*\left(A \cup B\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B) + \varepsilon. \tag{9}$$

В силу произвольности ε получаем требуемое неравенстов:

$$\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B). \tag{10}$$

Задача 3. Пусть $A \subseteq X$ и $B \subseteq X$. Докажите, что

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Решение.

Задача 4. Докажите, что если $E \subseteq \mathbb{R}$ измеримо, то для любого $A \subseteq \mathbb{R}$ выполено

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \setminus E) + \mu^*(A \cap E)$$

Решение.

1. Пусть $A \cap E \subseteq \bigcup B_i$, $A \setminus E \subseteq \bigcup C_j$, тогда $A \subseteq (\bigcup B_i) \cup (\bigcup C_j)$.
   Тогда: $\mu^*(A) \leq \sum m(B_i) + \sum m(C_j) \to \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cup E) + \mu^*(A \setminus E)$ (По предельному переходу).
2. Пусть $E \subseteq \bigcup E_i^\delta$, причем $\mu^*(E \Delta \bigcup E_i^\delta) < \delta$; $A \subseteq \bigcup A_j$.
   Тогда: $A \setminus \bigcup E_i^\delta \subseteq (\bigcup A_j) \setminus \left(\bigcup E_i^\delta\right)$
   и $\mu^*(A \setminus \bigcup E_i^\delta) \leq m((\bigcup A_j) \setminus (\bigcup E_i^\delta)) = m(\bigcup A_j) - m((\bigcup A_j) \cap (E_i^\delta))$.
   $\mu^*(A \cap (\bigcup E_i^\delta)) \leq m((\bigcup A_j) \cap (\bigcup E_i^\delta))$.
   Тогда: $\mu^*(A \cap \bigcup E_i^\delta) + \mu^*(A \setminus \bigcup E_i^\delta) \leq m(\bigcup A_i) \to \mu^*(A \cap \bigcup E_i^\delta) + \mu^*(A \setminus \bigcup E_i^\delta) \leq \mu^*(A)$ тогда используя предельный переход по δ имеем: $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \leq \mu^*(A)$

Таким обоазом, $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$.

Задача 5. Доказать, что в случае классической меры Жордана система множеств $\mathfrak{M}_J$ не является σ-алгеброй. Привести пример меры m, когда она является σ-алгеброй.

Решение. Пусть $\mathbb{Q}_{[0,1]} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество рациональных чисел отрезка $[0, 1]$. Тогда $\forall n : \{r_n\} \in \mathfrak{M}_J, \mu_J(\{r_n\}) = 0$, но $\mathbb{Q}_{[0,1]} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\} \notin \mathfrak{M}_J$ (не измеримо по Жордану).

Если вместо классической меры взять в качестве m взять тождественный ноль на σ-алгебре $2^{\mathbb{R}}$, то μ_J^* на всех подмножествах $\mathbb{R}$ будет равняться 0, откуда будет следовать, что $\mathfrak{M}_J = 2^{\mathbb{R}}$. (???)

Задача 6. Пусть множество $E \subseteq \mathbb{R}$ имеет положительную меру Лебега. Докажите, что множество $E - E = \{x - y : x, y \in E\}$ содержит интервал с центром в 0.

Решение. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим такие множества K - компакт, O - октрытое множество, что:

$$K \subseteq E \subseteq O, \mu(K) + \varepsilon > \mu(E) > \mu(O) - \varepsilon. \tag{11}$$

Пусть также $2\mu(K) > \mu(O)$.

Возьмем такую δ, что $\forall k \in K \Rightarrow U_\delta(k) \subseteq O$. Тогда $U_{\delta/2}(k) \subseteq U_\delta(k) \subseteq O$. Рассмотрим следующее множество $\{U_{\delta/2}(k) : k \in K\}$ – открытое покрытие компакта. Тогда в нем можно выбрать конечное покрытие $\{U_{\delta/2}(k_1), \ldots, U_{\delta/2}(k_n)\}$.

Тогда ('+' - сумма Минковского):

$$K + (-\delta/2; \delta/2) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\delta/2}(k_i) + (-\delta/2; \delta/2) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_\delta(k_i) \subset O. \tag{12}$$

Покажем, что $\forall v \in (-\delta/2; \delta/2) \Rightarrow (K + v) \cap K \neq \emptyset$. Пусть это не так:

$$\begin{aligned}
&\forall v \in (-\delta/2; \delta/2) \Rightarrow (K + v) \cup K \subset K + (-\delta/2; \delta/2) \subset O \\
&\mu(K + v) + \mu(K) < \mu(O) \\
&\exists v \in (-\delta/2; \delta/2) : (K + v) \cap K = \emptyset \Rightarrow A = (K + v) \sqcup K \\
&\mu(A) = \mu(K + v) + \mu(K) = 2\mu(K) < \mu(O).
\end{aligned}$$

Что противоречит выбору K и O.

В итоге получаем:

$$\forall v \in (-\delta/2; \delta/2) \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in K \subseteq E : v + k1 = k2. \implies (-\delta/2; \delta/2) \subset E - E. \tag{13}$$

Задача 7. Построить такие неизмеримые относительно классической меры Лебега на $[0; 1]$ множества A_1, A_2, что $A_1 \cup A_2$ измеримо.

Решение. Возьмем в качестве A_1 – множество Витали на $[0; 1]$, A_2 - его дополнение. Множество Витали не измеримо. Пусть его дополнение измеримо. Но тогда множество Витали было бы измеримым. Следовательно, A_2 неизмеримо. $A_1 \cup A_2 = E = [0; 1]$, то есть их объединение измеримо.

Определение 1. Множество Витали - неизмеримое по Лебегу множество. Его построение:

Рассмотрим такое отношение эквивалентности $\sim$: $x \sim y$, если $x - y \in \mathbb{Q}$. Это отношение разбивает $[0; 1]$ на классы эквивалентности. Выберем по представителю в каждом классе. Полученное множество A будет неизмеримым.

***Утверждение* 1.** *Множество Витали неизмеримо.*

Доказательство. Занумеруем все рациональные числа на $[-1; 1]$. Получим следующую последовательность $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $A_n = A + r_n$. Докажем, что полученные множества не пересекаются. Пусть это не так. Тогда

$$\exists x = a_n + r_n = a_m + r_m, n \neq m. \tag{14}$$

Но тогда $a_m - a_n \in \mathbb{Q}$, а значит a_n и a_m лежат в одном множестве. Противоречие.

Пусть в A_n находится измеримое множество C_n с мерой $d > 0$. Тогда

$$\forall m \exists C_m \subseteq A_m : \mu(C_m) = d. \tag{15}$$

Но

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq [-1; 2], \tag{16}$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} d \leq 3. \tag{17}$$

Противоречие.
С другой стороны,

$$[0; 1] \subseteq \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{18}$$

Если мера A_n равна нулю, то и сумма тоже будет равна нулю. Но $\mu([0; 1]) = 1$. Противоречие.
Следовательно, множество Витали неизмеримо.

□

Задача 8. Пусть $A \in \mathfrak{M}$, $\mu(A) = 0$ и $B \subset A$. Докажите, что $B \in \mathfrak{M}$ и $\mu(B) = 0$.

Решение. Так как $B \subset A$, то $\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) = \mu(A) = 0$. Докажем, что если $\mu^*(B) = 0$, то $B \in \mathfrak{M}$, т.е $\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon : \mu^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$. Взяв в определении $A_\varepsilon = \varnothing$ для всех $\varepsilon > 0$, получим, что $B \in \mathfrak{M}$ и $\mu(B) = \mu^*(B) = 0$

Задача 9. Пусть μ — классическая мера Лебега на $[0, 1]$. Построить такую последовательность $\{A_i\}$ множеств из $\mathfrak{M}$, что

$$\mu(\liminf_{i \to \infty} A_i) < \varliminf_{i \to \infty} \mu(A_i)$$

Решение. Пусть $A_{2n-1} = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $A_{2n} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mu(A_n) = \frac{1}{2}$ при каждом n. Но т.к $A_{2n-1} \cap A_{2n} = \varnothing$,

$$\mu(\liminf_{i \to \infty} A_i) = \mu(\varnothing) = 0.$$

4. Измеримые функции.

Задача 1. Доказать (не опираясь на критерий измеримости), что если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы, то и множество $\{x : f(x) < g(x)\}$ измеримо. Получить отсюда, что $f(x) + g(x)$ - измеримая функция.

Решение. $\{x : f(x) < g(x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{x : f(x) < r_n\} \cap \{x : r_n < g(x)\})$, где r_n - последовательность рационых чисел. Так как справа все множества измеримы, то и исходное тоже измеримо.

$(f + g)(x) : \{x \in X \mid f(x) + g(x) > C\} = \{x \in X \mid f(x) > C - g(x)\}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – измеримы, значит $f + g$ измеримая.

Задача 2. Пусть (X, M, μ) – измеримое пространство, $A \subseteq X$ и $f(x) = \mathbb{I}_A(x)$. Доказать, что $f(x)$ измерима на X тогда и только тогда, когда $A \in M$.

Решение.

$\forall c < 0 \Rightarrow f^{-1}((c, +\infty)) = X \in M$.

$\forall c > 1 \Rightarrow f^{-1}((c; +\infty)) = \emptyset \in M$

$\forall c \in [0, 1] \Rightarrow f^{-1}((c; +\infty)) = A$. Следовательно, функция измерима тогда и только тогда, когда $A \in M$.

Задача 3. Пусть μ – классическая мера Лебега на $[0;1]$. Построить такую неизмеримую функцию $f: [0;1] \to \mathbb{R}$, что для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(\{c\})$ измеримо.

Решение. Пусть E - неизмеримое множество. Тогда:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{если } x \in E \\ -x, \text{если } x \notin E \end{cases} . \tag{19}$$

$f(x)$ - неизмеримо. Действительно, $f^{-1}((0,+\infty))$ не измеримо. Но $\forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}(\{c\})$ – точка $\Rightarrow f^{-1}(\{c\})$ – измеримо.

Задача 4. Пусть (X, M, μ) — измеримое пространство, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — всюду плотное множество в $\mathbb{R}$, а функция $f : X \to \mathbb{R}$ такова, что

$$\forall n f^{-1}((a_n, +\infty)) \in M.$$

Доказать, что $f(x)$ измерима на X.

Решение. Возьмем произвольное $c \in \mathbb{R}$. Т.к $\{a_n\}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$, то найдется подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, такая что $a_{n_k} \downarrow c$ при $k \to \infty$. Тогда

$$f^{-1}((c, +\infty)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}((a_{n_k}, +\infty)) \in M.$$

Задача 5. Построить функцию $f(x)$ на $[0,1]$, измеримую на $[0,1]$ относительно классической меры Лебега на $[0,1]$, но разрывную в каждой точке.

Решение. Функция Дирихле на $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, \text{если } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

измерима, т. к $f^{-1}(\{1\}) = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $f^{-1}(\{0\}) = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ — измеримые множества. При этом f разрывна в каждой точке.

Задача 6. Пусть (X, M, μ) — полное измеримое пространство (т.е мера μ полна), а $f(x)$ — измеримая функция на A. Пусть $g(x)$ — функция, эквивалентная $f(x)$. Доказать, что $g(x)$ — измеримая на A функция.

Решение. Пусть $A_0 = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$. Т.к мера μ полна, то любое множество $B \subseteq A_0$ измеримо. Для каждого $c \in \mathbb{R}$ определим множества $B_1 = \{x : f(x) \leqslant c, g(x) > c$ и $B_2 = \{x : g(x) \leqslant c, f(x) > c\}$. Множества $B_1, B_2 \subseteq A_0$ и для каждого $c \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$g^{-1}((c, +\infty]) = (f^{-1}((c, +\infty]) \cup B_1) \setminus B_2.$$

Отсюда $g(x)$ измерима на A.

Задача 7. Пусть $[a,b] \subset \mathbb{R}$ и функция f монотонна на $[a,b]$. Доказать, что f измерима относительно классической меры Лебега на $[a,b]$.

Решение. Пусть для определенности $f(x)$ — невозрастающая на $[a,b]$ функция. Тогда для всех $c \in \mathbb{R}$ множество $f^{-1}((c,+\infty])$ является либо полуинтервалом $[a,d), d \in (a,b]$, либо отрезком $[a,d], d \in [a,b]$, либо пустым. Следовательно, оно измеримо, а значит $f(x)$ измерима.

Задача 8. Построить такую функцию $f(x) \in C([0,1])$, что для некоторого множества $A \subset [0,1]$ меры нуль множество $f(A)$ измеримо и $\mu(f(A)) > 0$, где μ — классическая мера Лебега.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \varphi(x))$, где $\varphi(x)$ — канторова лестница. Функция $f(x)$ непрерывна и монотонна, $f([0,1]) = [0,1]$. Пусть также P_0 — канторово множество, $\mu(P_0) = 0$. Тогда

$$G = [0,1] \setminus P_0 = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

Для каждого интервала $\mu(f((a_n, b_n))) = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$, и т.к $\mu(G) = 1$, мера множества $f(G)$ равна $\dfrac{1}{2}$. Тогда $\mu(f(P_0)) = \mu(f([0,1])) - \mu(f(G)) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Задача 9. Построить такую строго монотонную функцию $f(x) \in C([0,1])$, что для некоторого множества $A \subset [0,1]$ меры нуль множество $f(A)$ измеримо и $\mu(f(A)) > 0$, где μ — классическая мера Лебега.

Решение. См. предыдущую задачу.

Задача 10. Построить функцию $f(x) \in C([0,1])$ и измеримое множество $A \subset \mathbb{R}$, для которых множество $f^{-1}(A)$ неизмеримо относительно классической меры Лебега.

Решение. Рассмотрим функцию $\psi(x) = \frac{1}{2}(x + \varphi(x))$, где $\varphi(x)$ — канторова лестница. Функция $\psi(x)$ непрерывна и монотонна, следовательно, существует непрерывная функция $f(y) = \psi^{-1}(y) : [0,1] \to [0,1]$. Пусть также P_0 — канторово множество. В $\psi(P_0)$ существует неизмеримое подмножество, обозначим его B. Пусть теперь $A = f(B) = \psi^{-1}(B)$. Тогда $A \subset P_0$, следовательно $A \in \mathfrak{M}$ и $\mu(A) = 0$ в силу полноты меры Лебега, но $f^{-1}(A) = B \notin \mathfrak{M}$.

Задача 11. Построить такую функцию $g(x) \in C([0,1])$, что для некоторого измеримого множества $A \subset [0,1]$ с $\mu(A) = 0$, для которых множество $g(A)$ неизмеримо относительно классической меры Лебега.

Решение. Пусть A — множество, построенное в предыдущей задаче. Возьмем $g(x) = \psi(x)$. Тогда $g(A) = B \notin \mathfrak{M}$.

Задача 12. Построить множество $A \subset [0,1]$, которое измеримо относительно классической меры Лебега, но не является борелевским.

Решение. Пусть A — множество, построенное в двух предыдущих задачах. Предположим, что A борелевское. Тогда, т.к f измерима, то измеримо множество $f^{-1}(A)$. Однако $f^{-1}(A) = B \notin \mathfrak{M}$. Следовательно, A не является борелевским множеством.

5. Сходимость.

Задача 2. Показать, что вообще говоря из сходимости п.в. не следует сходимость по мере в случае, когда мера σ-конечна.

Решение. Рассмотрим $f_n(x) = \mathbf{I}_{[-n;n]}$ на $\mathbb{R}$. Тогда при $n \to \infty \hookrightarrow \mu(\{x \mid f_n(x) \nrightarrow 1\}) = \{\varnothing\} = 0$ (так как $\forall x\ \exists n = \lceil x \rceil \hookrightarrow f_n(x) = 1$). Но при этом $\mu(\{x \mid |f_n(x) - 1| > \frac{1}{2}\}) = \mu((-\infty; n) \cap (n; +\infty)) \neq 0$.

Задача 3. Пусть последовательность неотрицательных функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере к $f(x)$ на A. Доказать, что $f(x) \geqslant 0$ п.в. на A.

Решение. Т.к f_n сходится по мере к f, существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, т.ч. $f_{n_k} \to f$ почти всюду. Т.к $\forall x\ f_{n_k}(x) \geqslant 0$, применяя теорему о предельном переходе в неравенствах, получим, что $f(x) \geqslant 0$ п.в. на A.

Задача 4. Пусть $\mathbb{Q}[0,1] = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$,Доказать, что последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = r_n \\ \frac{1}{\sqrt{n}(x-r_n}, \text{ если } x \in [0,1] \setminus \{r_n\} \end{cases}$$

сходится по классической мере Лебега на $[0, 1]$.

Решение. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Тогда

$$E_n = \{x \in [0,1] : f_n(x) > \varepsilon\} = \left(\left(r_n - \frac{1}{\sqrt{n}\varepsilon}, r_n - \frac{1}{\sqrt{n}\varepsilon}\right) \setminus r_n\right) \cap [0,1]$$

для $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\mu(E_n) \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}\varepsilon} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Следовательно, f_n сходится по классической мере Лебега на $[0, 1]$.

Задача 5. Пусть $\mathbb{Q}[0,1] = \{r_n = \frac{p_n}{q_n}\}_{n=1}^{\infty}$, где p_n, q_n — взаимно простые натуральные числа, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где $f_n(x) = e^{(-p_n - q_n x)^2}$ сходится по классической мере Лебега на $[0, 1]$, но не сходится ни в одной точке.

Решение. Пусть $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Если $x \in [0,1] \setminus (r_n - \delta, r_n + \delta)$, то $f_n(x) \leqslant e^{-q_n^2\delta^2} \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при $n > N$ справедлива оценка:

$$\mu(\{x \in [0,1] : f_n(x) > \varepsilon\}) \leqslant \mu(r_n - \delta, r_n + \delta) = 2\delta$$

, т.е $\{f_n\}$ сходится по мере к 0 на $[0, 1]$.

Покажем, что $f_n(x)$ не сходится ни в одной точке. Из того, что любое действительное число можно со сколь угодно большой точностью приблизить рациональным, следует, что для любого простого q существует $r_m = \dfrac{p_m}{q} : 0 < |r_m - x_0| \leqslant \dfrac{1}{q}$. Тогда

$$f_m(x_0) = e^{-q^2(r_m - x_0{}^2} \geqslant e^{-1}.$$

Таким образом, существует подпоследовательность, не сходящаяся к нулю, следовательно $f_n(x)$ не сходится к 0 поточечно. С другой стороны $f_n(x)$ не может сходиться к $f(x)$, отличной от нуля, т.к это противоречит сходимости к нулю по мере.

Задача 6. Показать, что утверждение теоремы Егорова не выполняется для классической меры Лебега.

Решение. Теорема Егорова: Пусть $\mu(A) < \infty$, $f_n(x) \to f(x)$ п.в на A. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует такое измеримое множество $E_\varepsilon \subseteq A$, что $\mu(A \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ и последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на E.

Пусть $f_n(x) = \mathbb{I}_{[-n,n]}(x)$. В силу задачи 2 $f(x) \to 1$, однако $\mu(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 1| < \frac{1}{2}\}) = \infty$ при всех n. Следовательно, условие теоремы Егорова не выполняется.

6. Интеграл Лебега.

Задача 1. Поймите, что функция $f(x) = \mathbb{I}(x \in \mathbb{Q})$ интегрируема на $\mathbb{R}$, найдите величину интеграла.

Решение. 0

Задача 2. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x}$ и μ — классическая мера Лебега на $(0; 1)$. Доказать, что

$$\int_0^1 f(x) d\mu = \infty,$$

используя только определение интеграла Лебега.

Решение.

Задача 3. Верно ли, что функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ интегрируема по Лебегу на прямой?

Решение.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\int\limits_{\pi(n-1)}^{\pi n} \frac{|\sin x|}{x} dx \geqslant \frac{1}{\pi n} \int\limits_{\pi(n-1)}^{\pi n} |\sin x| dx = \frac{2}{\pi n}.$$

$$\int\limits_{0}^{\pi N} \frac{|\sin x|}{x} dx \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \text{ – ряд расходится, значит}$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty \text{ т.е. не интегрируема по лебегу}$$

Задача 4. Пусть $f(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве A (т.е. $\int_A |f(x)| d\mu < \infty$, будем писать $f \in L_1(A)$). Доказать, что $\mu(\{x \in A : f(x) = \pm\infty\}) = 0$.

Решение. Можно считать, что $f(x) \geqslant 0$ на A. Пусть $A_1 = \{x \in A : f(x) = +\infty\} \in M$. Предположим, что $\mu(A_1) > 0$. Положим $A_2 = A_1$, если $\mu(A_1) < \infty$, иначе выберем множество $A_2 \subset A_1$, $A_2 \in M$ с $0 < \mu(A_2) < \infty$. Определим простые функции $h_n(x) = n\chi_{A_2}(x)$ для $n \in (N)$. Ясно, что $0 \leqslant h_n(x) \leqslant f(x)$ при $n \in \mathbb{N}$ и $x \in E$, т.е. $h_n(x) \in Q_f$. Тогда по определению интеграла Лебега получаем, что

$$\int_A f(x) d\mu \geqslant \sup_n \int_A h_n(x) d\mu = \sup_n n\mu(A_2) = \infty,$$

а это противоречит условию интегрируемости f.

Задача 5. Построить такую последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных функций из $L_1([0;1])$, таких что $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого $x \in [0;1]$, но

$$\int\limits_0^1 f_n(x) d\mu \nrightarrow 0, n \to \infty.$$

Решение. Пусть $f_n(x) = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x)$ при $x \in [0,1]$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ для каждого $x \in [0,1]$, но

$$\int\limits_{[0,1]} f_n(x) d\mu = 1$$

при всех n.