

Конспект лекций по курсу «Теория вероятностей»

Лектор: к. ф.-м. н. Родионов Игорь Владимирович

30 сентября 2019 г.

Содержание

1 Глава 1.	2
Функция распределения	3
Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой	4
Вероятностная мера в $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$	6
Многомерная плотность вероятности	7
2 Глава 2.	8
Случайные величины	8
Характеристики случайных величин и векторов	9
Независимость случайных величин	10
3 Глава 3.	10
Интеграл Лебега	10
Свойства математического ожидания (9 штук)	12
Прямое произведение вероятностных пространств и формула свертки	15
Дисперсия и ковариация	17
Свойства ковариации и дисперсии (7 штук)	18
Многомерный случай	19
Неравенства (3 штуки)	19
4 Глава 4.	21
Условные математические ожидания (УМО)	21
Свойства УМО (9 штук)	22

Условные распределения	24
Алгоритм подсчета УМО	26
5 Глава 5.	27
Виды сходимости случайных величин	27
Контрпримеры	29
Сходимость в L_2	38
6 Глава 6.	38
Случайные блуждания и закон повторного логарифма	38
7 Глава 7.	40
Характеристические функции	40
Свойства характеристических функций	41
Проверка того, что φ — характеристическая функция	45
Центральная предельная теорема	46
Когда выполнены условия Линдберга?	47
8 Глава 8.	49
Гауссовские случайные векторы	49
Свойства гауссовских векторов	50
Многомерная ЦПТ	51

1 Глава 1.

Определение. Под (Ω, \mathcal{F}, P) будем понимать вероятностное пространство, где:

1. Ω — пространство элементарных исходов;
2. \mathcal{F} — σ -алгебра на Ω ;
3. $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ — вероятностная мера, причем:

а) $P(\Omega) = 1$;

б) P — σ -аддитивна, то есть $\forall \{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \in \mathcal{F}$, причем $A_n \cap A_m = \emptyset$ при $n \neq m$:

$$P\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

Определение. Последовательность $\{A_n\}$ убывает к A , если $\forall n \hookrightarrow A_n \supseteq A_{n+1}$

и $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$. Последовательность $\{A_n\}$ возрастает к A , если $\forall n \hookrightarrow A_n \subseteq A_{n+1}$

и $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Теорема (О непрерывности вероятностной меры). [б/д] Пусть (Ω, \mathcal{F}) — измеримое пространство и на нем определена функция $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $P(\Omega) = 1$;
2. P — конечно аддитивная.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. P — вероятностная мера;
2. $\forall A_n \downarrow A \hookrightarrow P(A_n) \rightarrow P(A)$ (непрерывность снизу);
3. $\forall A_n \uparrow A \hookrightarrow P(A_n) \rightarrow P(A)$ (непрерывность сверху);
4. $\forall A_n \downarrow \emptyset \hookrightarrow P(A_n) \rightarrow 0$ (непрерывность в нуле).

Теорема (Каратеодори). [б/д] Пусть Ω — некоторое множество, \mathcal{A} — алгебра на Ω и P_σ — вероятностная мера на (Ω, \mathcal{A}) .

Тогда существует единственная вероятностная мера на $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$, являющаяся продолжением P_σ , то есть $\forall A \in \mathcal{A} \hookrightarrow P_\sigma(A) = P(A)$.

Функция распределения

Рассмотрим измеримое пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ и вероятностную меру P на нем.

Определение. Функция $F(x), x \in \mathbb{R}$, заданная по правилу $F(x) = P((-\infty, x])$ — функция распределения вероятностной меры P .

Лемма (свойства функции распределения). Пусть $F(x)$ — функция распределения, тогда

1. $F(x)$ не убывает;
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$;
3. $F(x)$ непрерывна справа.

▲ Пусть $y \geq x$, тогда $F(y) - F(x) = P((-\infty, y]) - P((-\infty, x]) = P((x, y]) \geq 0$, следовательно, $F(x)$ не убывает.

Пусть $x_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, тогда $(-\infty, x_n] \rightarrow \emptyset$, следовательно, $F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ по теореме о непрерывности вероятностной меры.

Пусть $x_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, тогда $(-\infty, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$, следовательно, $F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\mathbb{R}) = 1$.

Пусть $x_n \downarrow x$, тогда $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x]$, отсюда по теореме о непрерывности вероятностной меры вытекает, что $F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P((-\infty, x]) = F(x)$. ■

Свойство 1. Функция распределения имеет предел слева $\forall x \in \mathbb{R}$, при этом число точек разрыва не более, чем счетно.

▲ Пусть $x_n \rightarrow x - 0$ — возрастающая последовательность, тогда $F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P((-\infty, x)) = F(x - 0)$.

Каждая точка разрыва — скачок функции распределения, каждому скачку сопоставим $[F(x - 0), F(x)]$, а этому отрезку в свою очередь сопоставим некую рациональную точку, которая лежит в $(F(x - 0), F(x))$. Следовательно каждому скачку мы сопоставили точку из \mathbb{Q} , а так как \mathbb{Q} счетно, то число разрывов не более, чем счетно. ■

Определение. Функция $F(x)$, удовлетворяющая свойствам 1) – 3) из леммы, называется функцией распределения на \mathbb{R} .

Теорема (о взаимно однозначном соответствии между вероятностной мерой и функцией распределения на \mathbb{R}). Пусть $F(x)$ — функция распределения на \mathbb{R} . Тогда существует единственная вероятностная мера P на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ такая, что $F(x)$ является ее функцией распределения, то есть $F(x) = P((-\infty, x])$.

▲ Рассмотрим полукольцо $S = \{(a, b]\}$ на \mathbb{R} . Определим σ -аддитивную вероятностную меру $P((a, b]) = F(b) - F(a)$, а по теореме Каратеодори P единственным образом продолжается на всю σ -алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. ■

Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой

① Дискретное распределение

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ не более, чем счетно.

Определение. Вероятностная мера P на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, удовлетворяющая свойству $P(\mathbb{R} \setminus \mathcal{X}) = 0$, называется дискретной вероятностной мерой на \mathcal{X} , ее функция распределения также называется дискретной.

Рассмотрим $\mathcal{X} = \{x_k\}$, положим $p_k = P(\{x_k\})$, тогда $P(\mathcal{X}) = 1 = \sum_k P(x_k)$.

Определение. Набор чисел $\{p_k\}$ — распределение вероятностей на \mathcal{X} .

② Абсолютно непрерывное распределение

Определение. Пусть $F(x)$ — функция распределения вероятностной меры P на \mathbb{R} , причем $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$, где $p(t) \geq 0$, а $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = 1$.

Тогда P абсолютно непрерывна, $F(x)$ также называется абсолютно непрерывной, а $p(x)$ — плотность функции распределения $F(x)$. Причем $p(x)$ определена однозначно, кроме множества меры нуль.

Из формулы Ньютона-Лейбница: если $F(x)$ — дифференцируема, то $p(x) = F'(x)$.

Если $p(x)$ — плотность функции распределения $F(x)$, то $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow P(B) = \int_B p(x) dx$.

Примеры:

1. Равномерное распределение $R[a, b]$

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \cdot I(x \in [a, b]).$$

2. Нормальное (гауссовское) распределение $N(a, \sigma^2)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp \left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right].$$

3. Экспоненциальное распределение $\text{Exp}(\alpha)$

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} \cdot I(x > 0).$$

4. Распределение Коши $\text{Cauchy}(\theta)$

$$p(x) = \frac{\theta}{\pi(x^2 + \theta^2)}.$$

5. Гамма распределение $\Gamma(\alpha, \gamma)$

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1} \gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\gamma x} \cdot I(x > 0).$$

Определение. $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, причем $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \Gamma(n) = (n-1)!, \forall \lambda \in \mathbb{R} \hookrightarrow \Gamma(\lambda \pm 1) = \lambda \Gamma(\lambda)$, а $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

③ Сингулярные распределения

Определение. Пусть $F(x)$ — функция распределения на \mathbb{R} . Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется точкой роста $F(x)$, если $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0 - \varepsilon) > 0$.

Определение. Функция распределения называется сингулярной, если она непрерывна и множество ее точек роста имеет Лебегову меру нуль. Например, функция Кантора.

Теорема (Лебега о функции распределения). *[б/д] Пусть $F(x)$ — функция распределения на \mathbb{R} .*

Тогда существуют единственные α_1, α_2 и α_3 , $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ и функции распределения $F_1(x), F_2(x)$ и $F_3(x)$ такие, что $F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$, где $F_1(x)$ — дискретная функция распределения, $F_2(x)$ — абсолютно непрерывная, а $F_3(x)$ — сингулярная.

Вероятностная мера в $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

Определение. Пусть P — вероятностная мера в $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, где $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\{B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i \leq n\}$, тогда функция $F(\vec{x}) = P((-\infty; x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n])$ называется функцией распределения вероятностной меры P в \mathbb{R}^n .

Замечание. Пусть $\vec{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$. Будем писать $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{x}$, если $\forall i, k \hookrightarrow x_i^{(k)} \geq x_i^{(k+1)}$ и $x_i^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x_i$.

Лемма (Свойства многомерной функции распределения). *Пусть $F(\vec{x})$ — функция распределения вероятностной меры в \mathbb{R}^n .*

Тогда для нее верно:

1. Если $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{x}$, то $F(\vec{x}^{(k)}) \rightarrow F(\vec{x}), k \rightarrow +\infty$;
2. $\lim_{\forall i: x_i \rightarrow +\infty} F(\vec{x}) = 1$; $\lim_{\exists i: x_i \rightarrow -\infty} F(\vec{x}) = 0$;
3. $\forall a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, \Delta_{a_1 b_1}^1 \dots \Delta_{a_n b_n}^n F(x) > 0$:, где $\Delta_{a_i b_i}^i F(\vec{x}) = F(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

▲ Первое свойство следует из непрерывности вероятностной меры, так как

$$\bigtimes_{i=1}^n (-\infty, x_i^{(k)}) \downarrow \bigtimes_{i=1}^n (-\infty, x_i].$$

Для доказательства второго пункта рассмотрим

$$B_m = \bigtimes_{i=1}^n (-\infty, \inf_{k \geq m} x_i^{(k)})].$$

Если $\forall i : x_i^k \rightarrow +\infty$, то $B_m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $P(B_m) \rightarrow P(\mathbb{R}^n) = 1$. А если $\exists i : x_i^{(k)} \rightarrow -\infty$, то $B_m \rightarrow \emptyset$, $P(B_m) \rightarrow 0$.

Не трудно понять, что

$$\Delta_{a_1 b_1}^1 \dots \Delta_{a_n b_n}^n F(x) = P((a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]),$$

откуда следует утверждение третьего пункта леммы. Так, например,

$$\Delta_{a_1 b_1}^1 \Delta_{a_2, b_2}^2 F(x) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - (F(b_1, a_2) - F(a_1, a_2)).$$

■

Теорема (О взаимнооднозначном соответствии вероятностной меры и функции распределения в \mathbb{R}^n). [б/д] Если функция $F(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет свойствам из леммы, то существует единственная P на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, для которой $F(\vec{x})$ является функцией распределения.

Замечание. Почему нельзя заменить свойство 3) на монотонность на любом компакте?

▲ Пусть $F(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$ на $[0, 1]^2$, но тогда $-1 = \Delta_{0;1}^1 \Delta_{0;1}^2 F(x_1, x_2) \neq P([0, 1]^2) = 1$. Следовательно, $F(x)$ не функция распределения. ■

Определение. Функция $F(\vec{x})$, удовлетворяющая условиями из леммы называется функцией распределения в \mathbb{R}^n .

Определение. Маргинальной функцией распределения i -й компоненты функции распределения $F(\vec{x})$ называется $F_i(x_i) = F(+\infty, \dots, +\infty, x_i, +\infty, \dots, +\infty)$.

Многомерная плотность вероятности

Определение. Если

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n, \quad p(x_1, \dots, x_n) \geq 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \dots \int p(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n = 1,$$

то $p(x_1, \dots, x_n)$ называется n -мерной плотностью вероятности.

Если дифференцируема $F(x_1, \dots, x_n)$, то

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F(x_1, \dots, x_n).$$

2 Глава 2.

Случайные величины

Определение. Пусть (Ω, \mathcal{F}) и (E, \mathcal{E}) — два измеримых пространства. Отображение $X : \Omega \rightarrow E$, такое что $\forall B \in \mathcal{E} \hookrightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ называется случайным элементом, так же его называются \mathcal{F} -измеримым или $\mathcal{F}|\mathcal{E}$ -измеримым.

Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, то это случайная величина.

Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, то это случайный вектор.

Определение. Функция $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — борелевская, если $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Утверждение. Любая непрерывная и кусочно-непрерывная функция — борелевская.

Теорема (критерий измеримости). [б/д] Пусть $(\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathcal{E})$ — два измеримых пространства, $X : \Omega \rightarrow E$ — случайный элемент тогда, и только тогда, когда существует система событий $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$, такая что $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$ и $\forall B \in \mathcal{M} \hookrightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Лемма. Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — случайный вектор, $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — борелевская функция, тогда $\varphi(\vec{\xi})$ — случайный вектор.

▲ Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Тогда

$$(\varphi(\vec{\xi}))^{-1}(B) = \{\omega : \varphi(\vec{\xi}(\omega)) \in B\} = \{\omega : \vec{\xi}(\omega) \in \varphi^{-1}(B) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\} \in \mathcal{F}.$$

Так как выполняется $\forall B$, то $\varphi(\vec{\xi})$ — случайный вектор. ■

Лемма. $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — случайный вектор тогда, и только тогда, когда $\forall i : \xi_i$ — случайная величина.

▲ *Необходимость.* $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_i$ — непрерывная функция, значит борелевская, следовательно, по предыдущей лемме ξ_i — случайная величина.

Достаточность. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(B_1 \times \dots \times B_n, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, поэтому $\vec{\xi}^{-1}(B_1 \times \dots \times B_n) = \{\omega : \vec{\xi}(\omega) \in B_1 \times \dots \times B_n\} = \{\omega : \xi_1(\omega) \in B_1, \dots, \xi_n(\omega) \in B_n\} = \bigcap_{i=1}^n \{\omega : \xi_i(\omega) \in B_i\} = \bigcap_{i=1}^n \xi_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}$, значит, по критерию измеримости, $\vec{\xi}$ — случайный вектор. ■

Следствие. Пусть ξ, η — случайные величины, $c \in \mathbb{R}$, тогда $\xi + \eta, \xi - \eta, c\xi, \xi \cdot \eta$ и ξ/η , если $\forall \omega \in \Omega : \eta \neq 0$, тоже случайные величины.

Лемма (О пределах случайной величины). Пусть $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ последовательность случайных величин, тогда, если пределы $\lim \xi_n, \liminf \xi_n, \inf \xi_n, \sup \xi_n$ существуют, они являются случайными величинами.

▲ $\{\omega : \sup \xi_n \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{\omega : \xi_n(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$. По критерию измеримости, так как $\sigma(x : (-\infty, x]) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, мы доказали, что $\sup \xi_n$ — случайная величина. Аналогично, $\{\omega : \inf \xi_n \geq x\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{\omega : \xi_n(\omega) \geq x\} \in \mathcal{F}$, так как $\sigma((x, +\infty)) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, по критерию измеримости $\inf \xi_n$ — случайная величина. Отсюда $\overline{\lim} \xi_n = \inf \sup_{m \geq n} \xi_m$ и $\underline{\lim} \xi_n = \sup \inf_{m \geq n} \xi_m$ тоже случайные величины. ■

Следствие. Пусть $\xi = \lim \xi_n$ и предел существует $\forall \omega \in \Omega$, тогда ξ — случайная величина.

▲ $\xi = \lim \xi_n = \overline{\lim} \xi_n = \underline{\lim} \xi_n$. Тогда ξ — случайная величина. ■

Характеристики случайных величин и векторов

① Распределение случайной величины

Определение. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, ξ — случайная величина (вектор) на нем. Распределением случайной величины называется вероятностная мера P_ξ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ($(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$), заданная по правилу $P_\xi(B) = P(\xi \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$).

② Функция распределения случайной величины

Определение. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, ξ — случайная величина (вектор) на нем. Функцией распределения ξ называется $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$ ($F_\xi(\vec{x}) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n)$).

③ Дискретность и непрерывность

Определение. Случайная величина называется дискретной, если ее распределение дискретно.

Определение. Случайная величина называется абсолютно непрерывной, если ее распределение абсолютно непрерывно, то есть $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(y) dy$, $p_\xi(y) \geq 0$ — плотность случайной величины ξ .

Определение. Случайная величина называется сингулярной, если её распределение сингулярно.

④ Сигма-алгебра, порожденная случайной величиной

Определение. Пусть $\xi = \xi(\omega)$ — случайная величина (вектор) на (Ω, \mathcal{F}, P) , тогда σ -алгеброй \mathcal{F}_ξ , порожденной случайной величиной ξ , называется $\mathcal{F}_\xi = \{\xi^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) (\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))\}$.

Определение. Пусть ξ, η — случайные величины. Тогда η является \mathcal{F}_ξ -измеримой, если $\mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi$.

Пример. Пусть f — борелевская, $\eta = f(\xi)$. Тогда η — \mathcal{F}_ξ -измерима.

▲ $\{\eta \in B\} \in \mathcal{F}_\xi$, где $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, значит $\{\eta \in B\} = \{\xi \in f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \in \mathcal{F}_\xi$ ■

Теорема. [б/д] Случайная величина η — \mathcal{F}_ξ -измерима, тогда и только тогда, когда существует борелевская φ , такая что $\forall \omega \in \Omega \hookrightarrow \eta(\omega) = \varphi(\xi(\omega))$ почти наверное, то есть $P(\eta = \varphi(\xi)) = 1$.

Независимость случайных величин

Определение. Системы множеств \mathcal{F} и \mathcal{G} независимы, если $\forall A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G} \hookrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Определение. Пусть ξ и η — случайные величины, тогда ξ и η независимы, если $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = P(\xi \in B_1) \cdot P(\eta \in B_2)$.

Определение. Случайные величины $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ независимы (в совокупности), если для любого конечного набора индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_n \hookrightarrow P(\xi_{\alpha_1} \in B_1, \dots, \xi_{\alpha_n} \in B_n) = \prod_{i=1}^n P(\xi_{\alpha_i} \in B_i)$, $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i = 1, \dots, n$.

Теорема (Критерий независимости в терминах функции распределения). Случайные величины $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ независимы в совокупности тогда, и только тогда, когда $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \hookrightarrow P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i \leq x_i)$.

▲ \Rightarrow . Возьмем в качестве $B_i = (-\infty, x_i]$.

\Leftarrow . Не доказываем. ■

Теорема. Пусть (ξ_1, \dots, ξ_n) — независимые в совокупности случайные векторы, ξ_i имеет размерность n_i . Пусть $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{k_i}$ — борелевские функции. Тогда величины $f_1(\xi_1), \dots, f_n(\xi_n)$ — независимые в совокупности.

▲ Обозначим $\eta_i = f_i(\xi_i) \Rightarrow \eta_i$ — \mathcal{F}_{ξ_i} -измеримая. По условию $\{\mathcal{F}_{\xi_i}\}_{i=1}^n$ — независимые σ -алгебры, следовательно $\{\mathcal{F}_{\eta_i}\}$ независимы, т.к. $\forall i : \mathcal{F}_{\eta_i} \subset \mathcal{F}_{\xi_i}$, значит по определению $\{\eta_i\}$ независимы в совокупности. ■

3 Глава 3.

Интеграл Лебега

Определение. Пусть $A \in \mathcal{F}$. Тогда индикатор множества A :

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \in \bar{A}. \end{cases}$$

Определение. Случайная величина ξ называется простой, если существует разбиение $\Omega = \sum_{i=1}^n A_i$, такое что $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i I_{A_i}(\omega)$.

Определение. Пусть ξ — случайная величина, тогда введем обозначения $\xi_+ = \max(\xi, 0)$, $\xi_- = \max(-\xi, 0)$. $\xi = \xi_+ - \xi_-$.

Лемма. $[b/d] \forall \xi \geq 0$ существует набор простых случайных величин $\xi_n: \xi_n \uparrow \xi$ (ξ_n — простая, если $\xi_n = \sum_{i=1}^k c_i I_{A_i}$).

Определение. Пусть ξ — простая случайная величина, то есть $\xi = \sum_{i=1}^k c_i I_{A_i}$, тогда матожидание $E\xi = \sum_{i=1}^k c_i P(A_i)$, где $\bigsqcup_{i=1}^k A_i = \Omega$.

Определение. Пусть $\xi \geq 0$, тогда матожидание $E\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n$, где $\xi_n \uparrow \xi$, ξ_n — простые неотрицательные случайные величины, также справедливо равенство $E\xi = \sup_{\eta \leq \xi} E\eta$, где η — простые неотрицательные случайные величины.

Определение. Пусть ξ — произвольные случайные величины. Пусть $\xi_+ = \max(\xi, 0)$, $\xi_- = \max(-\xi, 0) \Rightarrow \xi = \xi_+ - \xi_-$, тогда матожидание

$$E\xi = \begin{array}{|c|c|c|} \hline E\xi_- \setminus E\xi_+ & < +\infty & = +\infty \\ \hline < +\infty & E\xi_+ - E\xi_- & +\infty \\ \hline = +\infty & -\infty & \nexists \\ \hline \end{array}$$

Следствие. $E\xi$ — конечно $\Leftrightarrow E|\xi|$ — конечно.

▲ $|\xi| = \xi_+ + \xi_-$. $E|\xi|$ — конечно $\Leftrightarrow E\xi_+, E\xi_-$ — конечны $\Leftrightarrow E\xi$ — конечно. ■

Утверждение. Таким образом, матожидание случайной величины — это интеграл Лебега по мере P , то есть:

$$E\xi = \int_{\Omega} \xi dP = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega).$$

Для множества A :

$$E(\xi \cdot I_A) = \int_A \xi dP.$$

Пример: Для случайной величины $\xi \sim \text{Cauchy}(\theta)$ матожидание $E\xi = +\infty$, то есть матожидание не определено.

Свойства матожидания (9 штук)

Свойство 1. Пусть ξ — случайная величина, $E\xi$ — конечно, тогда $\forall c \in \mathbb{R} \hookrightarrow E(c\xi)$ — конечно и $E(c\xi) = cE\xi$.

▲

1. Для простых случайных величин свойство очевидно — выносим константу c за сумму.
2. Пусть $\xi \geq 0$, $\xi_n \uparrow \xi$ — последовательность простых неотрицательных случайных величин, $c \geq 0$. Тогда $c\xi_n \uparrow c\xi \Rightarrow E(c\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(c\xi_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} E(\xi_n) = cE\xi$.
3. В общем случае $\xi = \xi_+ - \xi_-$, тогда $(c\xi)_+ = c\xi_+$, $(c\xi)_- = c\xi_- \Rightarrow E(c\xi) = E(c\xi)_+ - E(c\xi)_- = cE\xi$. Если $c < 0$, то $(c\xi)_+ = -c\xi_-$ и $(c\xi)_- = -c\xi_+$.

■

Свойство 2. Если $\xi \leq \eta$, $E\xi, E\eta$ — конечны, то $E\xi \leq E\eta$.

▲

1. Для простых случайных величин — очевидно.
2. Для неотрицательных ξ, η $E\xi = \sup_{\mu \leq \xi} E\mu$, где μ — простая случайная величина.

$$\sup_{\mu \leq \xi} E\mu \leq \sup_{\mu \leq \eta} E\mu = E\eta.$$
3. Пусть ξ, η — произвольные, тогда $\xi_+ \leq \eta_+$ и $\xi_- \geq \eta_-$. $E\xi = E\xi_+ - E\xi_- \leq E\eta_+ - E\eta_- = E\eta$.

■

Свойство 3. Если $E\xi$ — конечно, то $|E\xi| \leq E|\xi|$.

▲ $|\xi| = \xi_+ + \xi_- \Rightarrow E|\xi|$ — конечно. $\underbrace{-E\xi_+ - E\xi_-}_{-E|\xi|} \leq \underbrace{E\xi_+ - E\xi_-}_{E\xi} \leq \underbrace{E\xi_+ + E\xi_-}_{E|\xi|}$. ■

Свойство 4 (Аддитивность). Пусть ξ и η — случайные величины, $E\xi$ и $E\eta$ — конечные, тогда $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.

▲

1. Для простых случайных величин — очевидно.
2. Пусть $\xi, \eta \geq 0$, возьмем $\xi_n \uparrow \xi$, $\eta_n \uparrow \eta$ — простые и положительные. Тогда $\xi_n + \eta_n \uparrow \xi + \eta \Rightarrow E(\xi + \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(\xi_n + \eta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n + \lim_{n \rightarrow \infty} E\eta_n = E\xi + E\eta$.

3. Пусть ξ, η — произвольные, тогда $(\xi + \eta)_+ \leq \xi_+ + \eta_+$. Пусть $\delta = (\xi_+ + \eta_+) - (\xi + \eta)_+ \Rightarrow E\delta + E(\xi + \eta)_+ = E\xi_+ + E\eta_+ \Rightarrow E(\xi + \eta)_+ = E\xi_+ + E\eta_+ - E\delta$. Аналогично, $E(\xi + \eta)_- = E\xi_- + E\eta_- - E\delta$. Тогда $E(\xi + \eta) = E(\xi + \eta)_+ - E(\xi + \eta)_- = E\xi_+ + E\eta_+ - E\delta - E\xi_- - E\eta_- + E\delta = E\xi + E\eta$. Рассмотрим $(\xi + \eta)_- = (\xi + \eta)_+ - (\xi + \eta) = \xi_+ + \eta_+ - \delta - (\xi + \eta) = \xi_- + \eta_- - \delta$.

■

Свойство 5. 1. Пусть $|\xi| \leq \eta$, $E\eta$ — конечное, тогда $E\xi$ — конечная.

2. Пусть $\xi \leq \eta$, $E\eta$ — конечное, тогда $E\xi < +\infty$.

Пусть $\xi \geq \eta$, $E\eta$ — конечное, тогда $E\xi > -\infty$.

3. Если $E\xi$ — конечное и $A \in \mathcal{F}$, то $E(\xi \cdot I_A)$ — конечное.

▲

1. $\xi_-, \xi_+ \leq \eta \Rightarrow 0 \leq E\xi_+ = \sup_{0 \leq \mu \leq \xi_+} E\mu \leq E\eta < +\infty \Rightarrow E\xi_+, E\xi_- < +\infty \Rightarrow E\xi$ — конечное.
2. $\xi_+ \leq \eta_+ < +\infty \Rightarrow$ по первому пункту $E\xi_+ < +\infty \Rightarrow E\xi < +\infty$.
3. $(\xi \cdot I_A)_+ = I_A \cdot \xi_+ < \xi_+ \Rightarrow E(\xi \cdot I_A)_+ —$ конечное. Аналогично $E(\xi \cdot I_A)_- —$ конечное $\Rightarrow E(\xi \cdot I_A) —$ конечное.

■

Определение. Событие A происходит почти наверное, если $P(A) = 1$.

Свойство 6. Если $\xi = 0$ почти наверное, то $E\xi = 0$.

▲

1. Пусть ξ — простая случайная величина, то есть $\xi = \sum_{k=1}^n x_k I_{A_k}$, где $\{x_k\}$ различные, $\{A_k\}$ — разбиение Ω , $A_k = \{\xi = x_k\}$. Тогда если $x_k \neq 0$, то $A_k = \{\xi = x_k\} \subseteq \{\xi \neq 0\} \Rightarrow P(A_k) \leq P(\xi \neq 0) = 0 \Rightarrow E\xi = \sum_{k=1}^n x_k P(A_k) = 0$.
2. Если $\xi \geq 0$, то $E\xi = \sup_{\xi \geq \eta} E\eta$, где η — простые $\Rightarrow E\xi \geq 0$. Но $0 \leq \eta \leq \xi = 0$ почти наверное $\Rightarrow E\eta = 0 \Rightarrow E\xi = 0$.
3. Пусть ξ — произвольные $\Rightarrow \xi_+ = 0$ почти наверное, $\xi_- = 0$ почти наверное и $E\xi = E\xi_+ - E\xi_- = 0$.

■

Следствие. (Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.)

$$P(A) = 0, A \in \mathcal{F} \Rightarrow \int_A \xi dP = 0.$$

▲ $\xi \cdot I_A = 0$ п.н. $\Rightarrow 0 = E(\xi \cdot I_A) = \int_A \xi dP$. ■

Свойство 7. Если $\xi = \eta$ почти наверное и $E|\eta| < +\infty$, то $E|\xi| < +\infty$ и $E\xi = E\eta$.

▲ Пусть $A = \{\xi \neq \eta\}$, тогда $I_A = 0$ почти наверное, следовательно $\xi \cdot I_A = 0$ почти наверное и $\eta \cdot I_A = 0$ почти наверное. Так как $\xi = \xi \cdot I_A + \xi \cdot I_{\bar{A}}$, то $\xi = \xi \cdot I_A + \eta \cdot I_{\bar{A}}$, потому что на \bar{A} выполняется $\xi = \eta$. Из свойства 6 имеем $E\xi = E(\xi \cdot I_A) + E(\eta \cdot I_{\bar{A}}) = E(\eta \cdot I_A) + E(\eta \cdot I_{\bar{A}}) = E\eta$. ■

Свойство 8. Пусть $\xi \geq 0$ и $E\xi = 0$, тогда $\xi = 0$ почти наверное.

▲ Рассмотрим события $A = \{\xi > 0\}$ и $A_n = \{\xi > \frac{1}{n}\}$, следовательно, $A_n \uparrow A$. Имеем $P(A_n) = EI_{A_n}$, так как $n\xi > 1$ на A_n , то $EI_{A_n} \leq E(n\xi \cdot I_A) \leq nE\xi = 0$, значит, $P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0$. ■

Свойство 9. Пусть $E\xi$ и $E\eta$ конечны, $\forall A \in \mathcal{F} \hookrightarrow E(\xi \cdot I_A) \leq E(\eta \cdot I_A)$. Тогда $\xi \leq \eta$ почти наверное.

▲ Рассмотрим событие $B = \{\xi > \eta\}$. Из условия и построения B получаем, что $E(\eta \cdot I_B) \leq E(\xi \cdot I_B) \leq E(\eta \cdot I_B)$, следовательно, $E(\xi \cdot I_B) = E(\eta \cdot I_B)$, значит $E((\xi - \eta) \cdot I_B) = 0$. Так как $(\xi - \eta) \cdot I_B \geq 0$, то по свойству 8 $(\xi - \eta) \cdot I_B = 0$ почти наверное, следовательно $I_B = 0$ почти наверное, потому что $\xi - \eta > 0$ на B . ■

Теорема (о математическом ожидании произведения случайных величин). Пусть $\xi \perp \eta$, причем $E\xi$ и $E\eta$ конечны, тогда $E\xi\eta$ конечно и $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$.

▲

1. Пусть ξ и η — простые случайные величины, то есть ξ принимает значения $\{x_1, \dots, x_n\}$, η принимает значения $\{y_1, \dots, y_n\}$. Тогда по линейности

$$\begin{aligned} E\xi\eta &= \sum_{k,j=1}^n x_k y_j P(\xi = x_k, \eta = y_j) = \sum_{k,j=1}^n x_k y_j P(\xi = x_k) \cdot P(\eta = y_j) = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k P(\xi = x_k) \sum_{j=1}^n y_j P(\eta = y_j) = E\xi \cdot E\eta. \end{aligned}$$

2. Рассмотрим $\xi_n \uparrow \xi$,

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{n \cdot 2^n - 1} \frac{k}{2^n} I\left(\frac{k}{2^n} \leq \xi \leq \frac{k+1}{2^n}\right) + nI(\xi > n),$$

следовательно, $\xi_n = \varphi_n(\xi)$, значит, ξ_n — \mathcal{F}_ξ -измеримая.

Пусть $\xi, \eta \geq 0$. Существует последовательность \mathcal{F}_ξ -измеримых (\mathcal{F}_η -измеримых) простых неотрицательных простых функций $\xi_n \uparrow \xi$ ($\eta_n \uparrow \eta$). Так как $\xi \perp \eta$, то $\xi_n = \varphi_n(\xi) \perp \varphi_n(\eta) = \eta_n$. Следовательно, $\xi_n \cdot \eta_n \uparrow \xi \cdot \eta$, а по определению математического ожидания $E\xi\eta = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(\xi_n \eta_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E\xi_n \cdot E\eta_n = E\xi \cdot E\eta$.

3. Пусть теперь ξ и η — произвольные случайные величины. ξ^+ и ξ^- — функции от ξ , η^+ и η^- — функции от η , следовательно, $\xi^+ \perp \eta^+$ и $\xi^- \perp \eta^-$, отсюда $(\xi\eta)^+ = \xi^+\eta^+ + \xi^-\eta^-$ значит, $E(\xi\eta)^+ = E\xi^+\eta^+ + E\xi^-\eta^- = E\xi^+E\eta^+ + E\xi^-E\eta^-$, аналогично $E(\xi\eta)^- = E\xi^+\eta^- + E\xi^-\eta^+ = E\xi^+E\eta^- + E\xi^-E\eta^+$. Осталось заметить, что $E\xi\eta = E(\xi\eta)^+ - E(\xi\eta)^- = E\xi^+E\eta^+ + E\xi^-E\eta^- - E\xi^+E\eta^- - E\xi^-E\eta^+ = (E\xi^+ - E\xi^-)(E\eta^+ - E\eta^-) = E\xi \cdot E\eta$.

■

Пусть $\xi = \sum_{i=1}^n x_i \cdot I(\xi = x_i)$ — простая случайная величина. Тогда $Eg(\xi) = \sum_{i=1}^n g(x_i) \cdot P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta F_\xi(x_i)$, где $\Delta F_\xi(x_i) = F_\xi(x_i) - F_\xi(x_i - 0)$.

Теорема (о замене переменной в интеграле Лебега). [б/д] Пусть

1. (Ω, \mathcal{F}) и (E, \mathcal{E}) — два измеримых пространства;
2. $X : \Omega \rightarrow E$ — \mathcal{F} -измеримая функция, то есть $\forall B \in \mathcal{E} \hookrightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$;
3. P — вероятностная мера на (Ω, \mathcal{F}) ;
4. P_X — вероятностная мера на (E, \mathcal{E}) , заданная по правилу $P_X(A) = P(\omega : X(\omega) \in A)$ для $A \in \mathcal{E}$.

Тогда для любой \mathcal{E} -измеримой функции $g(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$, то есть $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow g^{-1}(B) \in \mathcal{E}$, верно,

$$\int_A g(x) P_X(dx) = \int_{X^{-1}(A)} g(X(\omega)) P(d\omega).$$

Следствие (1). Пусть $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$, в таком случае вероятностная мера P_ξ однозначно восстанавливается по F_ξ , следовательно, по теореме $Eg(\xi) = \int g(\xi) dP = \int g(x) P_\xi(dx) = \int g(x) dF_\xi(x)$.

Следствие (2). Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью $p_\xi(x)$, тогда $dF_\xi(x) = p_\xi(x) dx$, следовательно $Eg(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) p_\xi(x) dx$.

Прямое произведение вероятностных пространств и формула свертки

Определение. Пусть $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ — два вероятностных пространства. Тогда (Ω, \mathcal{F}, P) — их прямое произведение, если

1. $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, то есть $\omega = (\omega_1, \omega_2)$;
2. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, то есть $\mathcal{F} = \sigma\{\{B_1 \times B_2\} | B_1 \in \mathcal{F}_1, B_2 \in \mathcal{F}_2\}$;

3. $P = P_1 \otimes P_2$, то есть P — продолжение вероятностной меры $P_1 \times P_2$, заданное на прямоугольнике $B_1 \times B_2$, $B_1 \in \mathcal{F}_1$, $B_2 \in \mathcal{F}_2$ по правилу $P(B_1 \times B_2) = P_1(B_1) \cdot P_2(B_2)$. Так как $\{B_1 \times B_2\}$ — полукольцо, то P существует и единственна по теореме Каратеодори.

Теорема (Фубини). [б/д] Пусть

1. (Ω, \mathcal{F}, P) — прямое произведение вероятностных пространств $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$.
2. $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\int_{\Omega} |\xi(\omega_1, \omega_2)| dP < +\infty$.

Тогда интегралы

$$\int_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1) \text{ и } \int_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) P_2(d\omega_2)$$

1. определены почти наверное относительно P_2 и P_1 соответственно;
2. являются измеримыми случайными величинами относительно \mathcal{F}_2 и \mathcal{F}_1 .
- 3.

$$\int_{\Omega} \xi(\omega_1, \omega_2) dP = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1) P_2(d\omega_2) = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) P_2(d\omega_2) P_1(d\omega_1).$$

Из всего этого следует, что двойной интеграл равен повторному.

Утверждение. Пусть $\xi \perp \eta$ — случайные величины, тогда $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), P_{(\xi, \eta)}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_{\xi}) \otimes (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_{\eta})$.

▲ Достаточно проверить свойство прямого произведения:

1. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
2. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ по определению борелевской σ -алгебры в \mathbb{R}^2 ;
3. $P_{(\xi, \eta)}(B_1 \times B_2) = P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = P(\xi \in B_1) \cdot P(\eta \in B_2) = P_{\xi}(B_1) \cdot P_{\eta}(B_2)$. ■

Лемма (о свертке). Пусть случайные величины ξ и η независимы с функциями распределения F_{ξ} и F_{η} . Тогда

1. Выполняется равенство:

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} F_{\xi}(z-x) dF_{\eta}(x) = \int_{\mathbb{R}} F_{\eta}(z-x) dF_{\xi}(x).$$

2. Если ξ и η имеют плотности распределения f_ξ и f_η соответственно, то $\xi + \eta$ имеет плотность распределения

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(z-x)f_\eta(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_\eta(z-x)f_\xi(x) dx$$

▲ Заметим, $F_{\xi+\eta}(z) = P(\xi + \eta \leq z) = EI(\xi + \eta \leq z)$, а по теореме о замене переменных в интеграле Лебега это равно $\int_{\mathbb{R}^2} I(x+y \leq z)P_\xi(dx)P_\eta(dy)$, полученный двойной интеграл по Фубини можно записать как повторный:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} I(x+y \leq z)P_\xi(dx) \right) P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{z-y} P_\xi(dx) \right) P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-y) dF_\eta(y).$$

Перейдем ко второму пункту доказательства:

$$\begin{aligned} F_{\xi+\eta}(z) &= \int_{\mathbb{R}^2} I(x+y \leq z)P_\xi(dx)P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x+y \leq z)f_\xi(x)f_\eta(y) dx dy \stackrel{t=x+y}{=} \\ &\stackrel{t=x+y}{=} \int_{\mathbb{R}^2} I(t \leq z)f_\xi(x)f_\eta(t-x) dx dt = \int_{-\infty}^z \left(\int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)f_\eta(t-x) dx \right) dt. \end{aligned}$$

Следовательно, по определению плотности, $f_{\xi+\eta}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)f_\eta(t-x) dx$. ■

Дисперсия и ковариация

Определение. Дисперсией случайной величины ξ называется $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$, если $E\xi < +\infty$. Очевидно, $D\xi \geq 0$.

Определение. Ковариацией двух случайных величин называется $\text{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))$. Легко заметить, что $\text{cov}(\xi, \xi) = D\xi$.

Определение. Если $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, то случайные величины ξ и η называются некоррелированными.

Определение. Величина $\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$ называется коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η при условии, что $D\xi$ и $D\eta$ не равны нулю и конечны.

Свойства ковариации и дисперсии (7 штук)

Свойство 1. $\text{cov}(a\xi + b\zeta, \eta) = a \text{cov}(\xi, \eta) + b \text{cov}(\zeta, \eta)$. Ковариация билинейна.

Свойство 2. $\text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta \Rightarrow D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$.

▲ $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E\xi\eta - E((E\xi) \cdot \eta) - E((E\eta) \cdot \xi) + E\xi \cdot E\eta = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$ ■

Свойство 3. Пусть $c \in \mathbb{R}$, тогда $D(c\xi) = c^2 D\xi$, $D(\xi + c) = D\xi$, $Dc = 0$.

▲ $D(c\xi) = Ec^2\xi^2 - (Ec\xi)^2 = c^2 E\xi^2 - c^2 (E\xi)^2 = c^2 D\xi$;
 $D(c + \xi) = E(c + \xi - E(c + \xi))^2 = E(c + \xi - c - E\xi)^2 = D\xi$;
 $Dc = E(c - Ec)^2 = E(c - c)^2 = 0$. ■

Свойство 4 (Неравенство Коши-Буняковского). $|E\xi\eta|^2 \leq E\xi^2 \cdot E\eta^2$

▲ Рассмотрим для $\lambda \in \mathbb{R}$ функцию $f(\lambda) = E(\xi - \lambda\eta)^2 \geq 0$. Имеем $f(\lambda) = E\xi^2 + 2\lambda E\xi\eta + \lambda^2 E\eta^2 \geq 0$. Для выполнения неравенства дискриминант полученного многочлена должен быть меньше нуля: $D = 4E\xi\eta - 4E\xi^2 E\eta^2 \leq 0$, откуда следует неравенство. ■

Свойство 5. $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$, причем $\rho(\xi, \eta) = \pm 1 \Leftrightarrow \xi = a\eta + b$ почти наверное.

▲

1. Рассмотрим случайные величины $\xi_1 = \xi - E\xi$ и $\eta_1 = \eta - E\eta$, следовательно $\rho(\xi_1, \eta_1) = \frac{E\xi_1\eta_1}{\sqrt{E\xi_1^2 \cdot E\eta_1^2}} \leq 1$ по неравенству Коши-Буняковского.

2. Пусть $\rho(\xi_1, \eta_1) = 1$. Из $\frac{E\xi_1\eta_1}{\sqrt{E\xi_1^2 \cdot E\eta_1^2}} = 1$ получим: $(E\xi_1\eta_1)^2 = E\xi_1^2 \cdot E\eta_1^2$.

Рассмотрим для $\lambda \in \mathbb{R}$ функцию $f(\lambda) = E(\xi_1 - \lambda\eta_1)^2 = E\xi_1^2 + 2\lambda E\xi_1\eta_1 + \lambda^2 E\eta_1^2 \geq 0$, учитывая полученное ранее: $\frac{D}{4} = (E\xi_1\eta_1)^2 - E\xi_1^2 E\eta_1^2 = 0$, следовательно, $\exists! \lambda_0 : f(\lambda_0) = 0$, то есть $E(\xi_1 + \lambda_0\eta_1)^2 = 0$, откуда $(\xi_1 + \lambda_0\eta_1)^2 = 0$ почти наверное, а, значит, и $\xi_1 + \lambda_0\eta_1 = 0$ почти наверное. Теперь можно заключить, что $\xi = E\xi - \lambda_0(\eta - E\eta)$. ■

Свойство 6. Если $\xi \perp \eta$, то $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, обратное неверное.

▲ $\text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$, но так как $\xi \perp \eta$, то $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$, следовательно, $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$. ■

Лемма. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — попарно некоррелированные случайные величины (например, независимые в совокупности), $D\xi_1 + \dots + D\xi_n < +\infty$, тогда $D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + \dots + D\xi_n$.

▲

$$D\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i, \sum_{j=1}^n \xi_j\right) = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j).$$

По условию, если $i \neq j$, то $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$, следовательно

$$D\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n D\xi_i.$$

■

Многомерный случай

Определение. Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — случайный вектор, тогда его математическим ожиданием называется вектор из математических ожиданий его компонент, то есть $E\vec{\xi} = (E\xi_1, \dots, E\xi_n)$.

Определение. Матрицей ковариаций случайного вектора $\vec{\xi}$ называется

$$\text{Var } \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \text{cov}(\xi_1, \xi_1) & \cdots & \text{cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\xi_n, \xi_1) & \cdots & \text{cov}(\xi_n, \xi_n) \end{pmatrix} = \|\text{cov}(\xi_i, \xi_j)\|_{i,j=1}^n.$$

Лемма. Матрица ковариаций случайного вектора — симметрическая и неотрицательно определенная¹.

▲ Матрица $\text{Var } \vec{\xi} = \|\text{cov}(\xi_i, \xi_j)\|_{i,j=1}^n$ — симметрическая, так как $r_{ij} \equiv \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \text{cov}(\xi_j, \xi_i) \equiv r_{ji}$. Пусть $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, тогда

$$\begin{aligned} \vec{x}^T \text{Var } \vec{\xi} \vec{x} &= (\vec{x}, \text{Var } \vec{\xi} \vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(x_i \xi_i, x_j \xi_j) = \\ &= \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i, \sum_{j=1}^n x_j \xi_j\right) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i, \sum_{i=1}^n x_i \xi_i\right) = D\left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i\right) \geq 0. \end{aligned}$$

■

Неравенства (3 штуки)

Лемма (Неравенство Маркова). Пусть $\xi \geq 0$ — случайная величина, $E\xi < +\infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}$.

¹Матрица A неотрицательно определена, если $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$

▲ $P(\xi \geq \varepsilon) = EI(\xi \geq \varepsilon)$. На множестве $\xi \geq \varepsilon$ случайная величина $\frac{\xi}{\varepsilon} \geq 1$, следовательно $EI(\xi \geq \varepsilon) \leq E\left(\frac{\xi}{\varepsilon} \cdot I(\xi \geq \varepsilon)\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot E\xi$. ■

Лемма (Неравенство Чебышёва). Пусть ξ — случайная величина такая, что $D\xi < +\infty$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$.

▲ $P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) = P(|\xi - E\xi|^2 \geq \varepsilon^2)$. Из неравенства Маркова имеем, что $P(|\xi - E\xi|^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$. ■

Лемма (Неравенство Йенсена). Пусть $g(x)$ — борелевская выпуклая вниз (вверх) функция и $E\xi < +\infty$. Тогда $Eg(\xi) \geq g(E\xi)$ ($Eg(\xi) \leq g(E\xi)$).

▲ Так как $g(x)$ выпукла вниз, то $\forall x_0 \in \mathbb{R} : g(x) \geq g(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0)$. Положим $x = \xi$ и $x_0 = E\xi$, тогда $g(\xi) \geq g(E\xi) + \lambda(E\xi)(\xi - E\xi)$, считая математическое ожидание от обеих частей неравенства, получаем $Eg(\xi) \geq g(E\xi) + 0$. ■

Теорема (ЗБЧ в форме Чебышёва). Пусть

1. $\{\xi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ — попарно некоррелированные случайные величины, причем $\forall n \hookrightarrow D\xi_n \leq C$.

2. Обозначим $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

То же самое: $\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0$ при $n \rightarrow +\infty$

▲ По неравенству Чебышёва

$$P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} \leq \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

■

Следствие. Пусть $\{\xi_n\}_{i=1}^{+\infty}$ — независимые случайные величины такие, что:

1. $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow D\xi_n \leq C$,

2. $E\xi_n = a$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

То же самое: $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a$ при $n \rightarrow +\infty$.

4 Глава 4.

Условные математические ожидания (УМО)

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство; $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — случайная величина; $\mathcal{F}_\xi = \{\xi^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ — σ -алгебра, порожденная ξ .

Определение. ξ называется \mathcal{G} -измеримой, если:

1. \mathcal{G} — под σ -алгебра σ -алгебры \mathcal{F} ;
2. $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{G}$.

Определение. Пусть ξ — случайная величина на (Ω, \mathcal{F}, P) , \mathcal{G} — под σ -алгебра \mathcal{F} .

Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно \mathcal{G} называется случайная величина $E(\xi|\mathcal{G})$, обладающая следующими свойствами:

1. $E(\xi|\mathcal{G})$ является \mathcal{G} -измеримой случайной величиной;
2. $\forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow E(\xi \cdot I_A) = E(E(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_A)$ или, что тоже самое, $\int_A \xi dP = \int_A E(\xi|\mathcal{G}) dP$.

Обозначаем $E(\xi|\eta) \equiv E(\xi|\mathcal{F}_\eta)$, если такая η существует.

Определение. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство. Функция множеств $\nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ — заряд (мера со знаком), если ν — σ -аддитивна на \mathcal{F} , то есть $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \nu(A_i)$ для $\{A_i\}_{i=1}^{+\infty} \in \mathcal{F}$, ряд в правой части сходится абсолютно и $\sup_{A \in \mathcal{F}} |\nu(A)| < +\infty$.

Любой заряд можно разложить в разность двух мер.

Определение. Заряд ν называется абсолютно непрерывным относительно меры P (не обязательно вероятностной), если $\forall A \in \mathcal{F} \hookrightarrow (P(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0)$.

Теорема (Радона-Никодима). [б/д] Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, ν — заряд на \mathcal{F} , абсолютно непрерывный относительно меры P .

Тогда существует и единственна почти наверное случайная величина η на (Ω, \mathcal{F}, P) такая, что $E\eta < +\infty$ и $\nu(A) = \int_A \eta dP = E\eta \cdot I_A$.

Утверждение. Вероятностная мера $P(A) = \int_A p(x)dx$, то есть плотность — это производная Радона-Никодима P_ξ по мере Лебега на \mathbb{R} .

Лемма (о существовании УМО). Пусть ξ — случайная величина с $E|\xi| < +\infty$. Тогда $\forall \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ (под σ -алгебра) $\hookrightarrow E(\xi|\mathcal{G})$ существует и единственна почти наверное.

▲ Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, \mathcal{G}, P) . Положим, что $\forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow Q(A) = \int_A \xi dP = E(\xi \cdot I_A)$, следовательно, $Q(A)$ — заряд на (Ω, \mathcal{G}, P) , абсолютно непрерывный относительно меры P . Тогда по теореме Радона-Никодима существует и единственна почти наверное случайная величина η на (Ω, \mathcal{G}, P) с $E\eta < +\infty$ такая, что $Q(A) = \int_A \eta dP$. Значит, η — УМО. Действительно, η \mathcal{G} -измерима и $\forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow \int_A \eta dP = \int_A \xi dP \Rightarrow \eta = E(\xi|\mathcal{G})$. ■

Теорема. Пусть σ -алгебра \mathcal{G} порождена разбиением Ω на $\{D_n\}_{n=1}^{+\infty}$, причем, $P(D_n) > 0$, $E\xi < +\infty$.

$$\text{Тогда } E(\xi|\mathcal{G}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(\xi \cdot I(\omega \in D_n))}{P(D_n)} \cdot I(\omega \in D_n).$$

▲ Пусть η \mathcal{G} -измерима. Покажем, что $\eta = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n I_{D_n}(\omega)$. Пусть $\eta \neq \text{const}$ на D_n , тогда $\exists a \neq b : \{\omega : \eta(\omega) = a\} \cap D_n \neq \emptyset$ и $\{\omega : \eta(\omega) = b\} \cap D_n \neq \emptyset$, следовательно, $\{\omega : \eta(\omega) = a\} \cap D_n = D_n$ и $\{\omega : \eta(\omega) = b\} \cap D_n = D_n$, иначе $\{\omega : \eta(\omega) = a\} \notin \mathcal{G}$, то есть η не \mathcal{G} -измерима. Получили противоречие.

Найдем $c_n : E(\xi|\mathcal{G}) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n I_{D_n}$, так как $E(\xi|\mathcal{G})$ \mathcal{G} -измерима по определению.

$$E(\xi \cdot I_{D_n}) = E(E(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_{D_n}) = E\left(\sum_{m=1}^{+\infty} c_m I_{D_m} I_{D_n}\right) = E(c_n I_{D_n}) = c_n P(D_n).$$

$$\text{Следовательно, } c_n = \frac{E(\xi \cdot I_{D_n})}{P(D_n)}.$$

Утверждение. $E(\xi|\mathcal{G})$ — усреднение ξ по σ -алгебре \mathcal{G} .

Свойства УМО (9 штук)

Все матожидания ниже существуют, то есть $E|\xi| < +\infty, E|\eta| < +\infty$.

Свойство МО : если $\forall A \in \mathcal{F} \hookrightarrow E(\xi \cdot I_A) = E(\eta \cdot I_A)$, то $\xi = \eta$ почти наверное на (Ω, \mathcal{F}, P)

Свойство 1. Если ξ — \mathcal{G} -измерима, то $E(\xi|\mathcal{G}) = \xi$ почти наверное.

▲ ξ удовлетворяет свойствам УМО: первому по условиям, а второму, поскольку $\int_A E(\xi|\mathcal{G}) dP = \int_A \xi dP$. Следовательно, $E(\xi|\mathcal{G}) = \xi$ почти наверное. ■

Свойство 2 (формула полной вероятности). $E(E(\xi|\mathcal{G})) = E\xi$.

▲ Так как $\Omega \in \mathcal{G}$, то по интегральному свойству $E(E(\xi|\mathcal{G})) = E(E(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_\Omega) = E(\xi \cdot I_\Omega) = E\xi$. ■

Свойство 3 (линейность). $E(\alpha\xi + \beta\eta|\mathcal{G}) = \alpha E(\xi|\mathcal{G}) + \beta E(\eta|\mathcal{G})$.

▲ $\alpha E(\xi|\mathcal{G}) + \beta E(\eta|\mathcal{G})$ \mathcal{G} -измерима. Осталось проверить интегральное свойство:

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow \int_A (\alpha E(\xi|\mathcal{G}) + \beta E(\eta|\mathcal{G})) dP &= \alpha \int_A E(\xi|\mathcal{G}) dP + \beta \int_A E(\eta|\mathcal{G}) dP = \\ &= \alpha \int_A \xi dP + \beta \int_A \eta dP = \int_A (\alpha\xi + \beta\eta) dP = \int_A E(\alpha\xi + \beta\eta|\mathcal{G}) dP \end{aligned}$$

Объяснение последнего равенства: для случайной величины $\alpha E(\xi|\mathcal{G}) + \beta E(\eta|\mathcal{G})$ выполняются два свойства УМО, значит поскольку УМО существует и единственно, то нашли образец который подходит: $\alpha E(\xi|\mathcal{G}) + \beta E(\eta|\mathcal{G})$, то есть он является УМО: $E(\alpha\xi + \beta\eta|\mathcal{G}) = \alpha E(\xi|\mathcal{G}) + \beta E(\eta|\mathcal{G})$. ■

Свойство 4. Пусть ξ не зависит от \mathcal{G} , то есть $\mathcal{F}_\xi \perp \mathcal{G}$. Тогда $E(\xi|\mathcal{G}) = E\xi$ почти наверное.

▲ Пусть $\xi \perp \mathcal{G}$, что равносильно $\forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow \xi \perp I_A$. $E\xi$ — константа, следовательно, она измерима относительно \mathcal{G} , так как $\mathcal{F}_{E\xi} = \{\Omega, \emptyset\}$. Интегральное свойство УМО: $E(\xi \cdot I_A) = \boxed{E(E(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_A)} = E\xi \cdot P(A) = \boxed{E(E(\xi) \cdot I_A)}$, следовательно, $E\xi = E(\xi|\mathcal{G})$. ■

Свойство 5. (Свойство монотонности.) Пусть $\xi \leq \eta$ почти наверное, тогда $E(\xi|\mathcal{G}) \leq E(\eta|\mathcal{G})$ почти наверное.

▲ $\xi \leq \eta$ почти наверное, следовательно, $\forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow \int_A \xi dP \leq \int_A \eta dP$, что равносильно $\int_A E(\xi|\mathcal{G}) dP \leq \int_A E(\eta|\mathcal{G}) dP$, а из свойств математического ожидания вытекает, что $E(\xi|\mathcal{G}) \leq E(\eta|\mathcal{G})$ почти наверное. ■

Свойство 6. $|E(\xi|\mathcal{G})| \leq E(|\xi||\mathcal{G})$ п.н.

▲ $-|\xi| \leq \xi \leq |\xi|$ из свойства монотонности. ■

Свойство 7 (телескопическое свойство). Пусть $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$, тогда

1. $E(E(\xi|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(\xi|\mathcal{G}_1)$ почти наверное,
2. $E(E(\xi|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = E(\xi|\mathcal{G}_1)$ почти наверное.

▲ $E(\xi|\mathcal{G}_1)$ \mathcal{G}_2 -измерима, следовательно, по первому свойству

$$E(E(\xi|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(\xi|\mathcal{G}_1).$$

Пусть $A \in \mathcal{G}_1$, следовательно, $A \in \mathcal{G}_2$.

$$E(E(\xi|\mathcal{G}_1) \cdot I_A) = E(\xi \cdot I_A) = E(E(\xi|\mathcal{G}_2) \cdot I_A) = E(E(E(\xi|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) \cdot I_A).$$

По свойству математического ожидания $E(\xi|\mathcal{G}_1) = E(E(\xi|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)$. ■

Свойство 8. [б/д] Пусть $\forall n > 1 \hookrightarrow |\xi_n| \leq \eta$, $E\eta < +\infty$ и $\xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi$. Тогда $\forall \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \hookrightarrow E(\xi_n|\mathcal{G}) \xrightarrow{n.n.} E(\xi|\mathcal{G})$.

Свойство 9. Пусть η — \mathcal{G} -измерима, $E|\xi\eta| < +\infty$, $E|\xi| < +\infty$. Тогда $E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta E(\xi|\mathcal{G})$ почти наверное.

▲ Пусть $\eta = I_B$, где $B \in \mathcal{G}$. Тогда

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow E(E(\xi\eta|\mathcal{G}) \cdot I_A) &= E(\xi\eta \cdot I_A) = E(\xi I_B I_A) = \\ &= E(\xi I_{A \cap B}) = E(E(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_{A \cap B}) = E(\eta E(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_A). \end{aligned}$$

Следовательно, $E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta E(\xi|\mathcal{G})$ почти наверное по свойству математического ожидания.

Так как доказали для индикаторов, то доказали и для любой простой функции. Теперь пусть η — произвольная случайная величина. Возьмем последовательно простых \mathcal{F}_η -измеримых случайных величин $\eta_n : |\eta_n| \leq |\eta|$ и $\eta_n \xrightarrow{n.n.} \eta$. По свойству 8 $E(\xi\eta_n|\mathcal{G}) \xrightarrow{n.n.} E(\xi\eta|\mathcal{G})$, то есть $E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(\xi\eta_n|\mathcal{G})$ п.н. $E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n E(\xi|\mathcal{G})$ п.н. $E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta E(\xi|\mathcal{G})$ почти наверное. ■

Теорема (о наилучшем квадратичном прогнозе). Пусть ξ — случайная величина, \mathcal{G} — под-алгебра \mathcal{F} . Обозначим $\mathcal{A}_\mathcal{G} = \{\eta - \text{сл. вел.} | \eta - \mathcal{G}\text{-измеримая сл. вел.}\}$. Тогда $\inf_{\eta \in \mathcal{A}_\mathcal{G}} E(\xi - \eta)^2 = E(\xi - E(\xi|\mathcal{G}))^2$.

▲ Пусть $\eta \in \mathcal{A}_\mathcal{G}$, тогда

$$\begin{aligned} E(\xi - \eta)^2 &= E(\xi - E(\xi|\mathcal{G}) + E(\xi|\mathcal{G}) - \eta)^2 = \\ &= E(\xi - E(\xi|\mathcal{G}))^2 + E(E(\xi|\mathcal{G}) - \eta)^2 + 2E((\xi - E(\xi|\mathcal{G}))(E(\xi|\mathcal{G}) - \eta)). \end{aligned}$$

Пусть $\varkappa \equiv \xi - E(\xi|\mathcal{G})$, $\psi \equiv E(\xi|\mathcal{G}) - \eta$. Рассмотрим $E(\varkappa\psi)$, по свойству 2 это равно $E(E(\varkappa\psi|\mathcal{G}))$, а по свойству 9, это можно переписать, как $E(\psi E(\varkappa|\mathcal{G}))$. Но $E(\varkappa|\mathcal{G}) = E((\xi - E(\xi|\mathcal{G}))|\mathcal{G}) = 0$, следовательно, $E(\varkappa\psi) = 0$. Значит $E(\xi - \eta)^2 = E(\xi - E(\xi|\mathcal{G}))^2 + E(E(\xi|\mathcal{G}) - \eta)^2 \geq E(\xi - E(\xi|\mathcal{G}))^2$. Равенство достигается, если $E(E(\xi|\mathcal{G}) - \eta)^2 = 0 \Rightarrow E(\xi|\mathcal{G}) = \eta$ п.н. ■

Условные распределения

Определение. Пусть $A \in \mathcal{F}$, тогда по определению $P(A|\mathcal{G}) = E(I_A|\mathcal{G})$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Если ξ, η — случайные величины на (Ω, \mathcal{F}, P) , то $E(\xi|\eta) = E(\xi|\mathcal{F}_\eta)$.

Определение. Величиной $E(\xi|\eta = y)$ называется такая борелевская функция $\varphi(y)$, что $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow E(\xi \cdot I(\eta \in B)) = \int_B \varphi(y) P_\eta(dy)$.

Лемма. Если $E\xi < +\infty$, то $E(\xi|\eta = y)$ существует и единственно почти наверное относительно P_η .

▲ Рассмотрим $\psi(B) = E(\xi \cdot I(\eta \in B))$ — заряд на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_\eta)$, потому что $\psi(B)$ σ -аддитивна по свойству интеграла Лебега и конечна, так как $E(\xi) < +\infty$. ψ абсолютно непрерывна относительно P_η , так как если $P_\eta(B) = 0$, то $I(\eta \in B) = 0$ почти наверное, следовательно, $E(\xi \cdot I(\eta \in B)) = 0$, а, значит, выполнены условия теоремы Радона-Никодима, то есть существует и единственна почти наверное случайная величина φ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_\eta)$ (борелевская функция) такая, что $\psi(B) = \int_B \varphi(y) P_\eta(dy)$. ■

Лемма. $E(\xi|\eta = y) = \varphi(y)$ тогда и только тогда, когда $E(\xi|\eta) = \varphi(\eta)$ почти наверное.

▲ Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, тогда $E(E(\xi|\eta) \cdot I(\eta \in B)) = E(\xi \cdot I(\eta \in B)) = \int_B \varphi(y) P_\eta(dy)$.

По теореме о замене переменных в интеграле Лебега это можно переписать, как $\int_{\{\eta \in B\}} \varphi(\eta) dP = E(\varphi(\eta) \cdot I(\eta \in B))$, что равносильно условию $E(\xi|\eta) = \varphi(\eta)$ почти наверное по Свойству. Обратно аналогично, по тем же равенствам. ■

Следствие. Пусть ξ — \mathcal{F}_η -измеримая случайная величина, тогда существует борелевская функция $\psi(x)$ такая, что $\xi = \psi(\eta)$ почти наверное.

▲ Так как ξ — \mathcal{F}_η -измеримая, то по свойству 1 $\xi = E(\xi|\eta)$ почти наверное. С другой стороны, так как существует единственная $\psi(x) : \psi(x) = E(\xi|\eta = x)$, то $\xi = E(\xi|\eta) = \psi(\eta)$. ■

Определение. Условным распределением случайной величины ξ при условии $\eta = y$ называется вероятностная мера $P(\xi \in B|\eta = y) = E(I(\xi \in B)|\eta = y)$. Является мерой на $\mathcal{B}(R)$.

Определение. Условной плотностью случайной величины ξ относительно η называется плотность условного распределения $P(\xi \in B|\eta = y)$, то есть борелевская функция $f_{\xi|\eta}(x|y)$ такая, что $P(\xi \in B|\eta = y) = \int_B f_{\xi|\eta}(x|y) dx$.

Теорема (о свойстве условной плотности). Пусть существует условная плотность случайной величины ξ относительно случайной величины η — $f_{\xi|\eta}(x|y)$. Тогда для любой борелевской функции $g(x)$ такой, что $E|g(\xi)|$ существует, выполнено $E(g(\xi)|\eta = y) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{\xi|\eta}(x|y) dx$ относительно P_η почти наверное.

▲ Пусть также $g(x) = I_A(x)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_{\xi|\eta}(x|y) dx &= \int_{\mathbb{R}} I_A(x) \cdot f_{\xi|\eta}(x|y) dx = \int_A f_{\xi|\eta}(x|y) dx = \\ &= P(\xi \in A|\eta = y) = E(I(\xi \in A)|\eta = y) = E(g(\xi)|\eta = y). \end{aligned}$$

Так как доказали для индикаторов, то доказали и для всех простых функций $g(x)$. Далее с помощью теоремы Лебега для условных математических ожиданий доказываем для всех $g(x)$. $(E(\xi_n|\eta) \xrightarrow{п.н.} E(\xi|\eta))$, где $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$, ξ_n — простые). ■

Теорема (Достаточное условие существования условной плотности.). Пусть ξ и η — случайные величины такие, что существует их совместная плотность $f_{(\xi,\eta)}(x, y)$. Пусть $f_\eta(y)$ — плотность случайной величины η .

Тогда функция

$$\varphi(x, y) = \frac{f_{(\xi,\eta)}(x, y)}{f_\eta(y)} \cdot I(f_\eta(y) > 0)$$

есть условная плотность $f_{\xi|\eta}(x|y)$.

▲ Для любых $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ выполнено

$$P(\xi \in B, \eta \in A) = \int_{B \times A} f_{(\xi,\eta)}(x, y) dx dy = \int_A \left(\int_B \frac{f_{(\xi,\eta)}(x, y)}{f_\eta(y)} dx \right) f_\eta(y) dy,$$

с другой стороны

$$P(\xi \in B, \eta \in A) = E(I(\xi \in B, \eta \in A)) = \int_{\{\eta \in A\}} I(\xi \in B) dP.$$

Далее по интегральному свойству получаем, что

$$P(\xi \in B, \eta \in A) = \int_{\{\eta \in A\}} E(I(\xi \in B)|\eta) dP,$$

заменяя переменные, окончательно имеем следующее:

$$\begin{aligned} P(\xi \in B, \eta \in A) &= \int_A E(I(\xi \in B|\eta = y)) P_\eta(dy) = \\ &= \int_A P(\xi \in B|\eta = y) P_\eta(dy) = \int_A P(\xi \in B|\eta = y) f_\eta(y) dy. \end{aligned}$$

■

Алгоритм подсчета УМО

1. Найти совместную плотность $f_{(\xi,\eta)}(x, y)$, затем $f_\eta(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(\xi,\eta)}(x, y) dx$, тогда

$$\text{условная плотность } f_{\xi|\eta}(x|y) = \frac{f_{(\xi,\eta)}(x, y)}{f_\eta(y)}.$$

2. Вычислить $\varphi(y) = E(g(\xi)|\eta = y) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{\xi|\eta}(x|y) dx$.

3. Тогда $E(g(x)|\eta) = \varphi(\eta)$.

5 Глава 5.

Виды сходимости случайных величин

Определение. ξ_n и ξ — случайные величины.

1. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, если $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,
2. $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$, если $P(\omega : \xi_n \rightarrow \xi) = 1$,
3. $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$, если $E|\xi_n|^p < +\infty$, $E|\xi|^p < +\infty$ и $E|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ($p > 0$),
4. $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, если для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$ выполнено $Ef(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Ef(\xi)$.

Теорема (Александрова). $[б/д] \xi_n \xrightarrow{d} \xi$ тогда только тогда, когда $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{в основном} F_{\xi}(x)$, то есть $F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_{\xi}(x)$ во всех точках непрерывности функции распределения $F_{\xi}(x)$.

Лемма (критерий сходимости почти наверное). $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(\omega : \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

▲ Пусть $A_k^\varepsilon = \{\omega : |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\}$, $A^\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon = \{\omega : \forall n \exists k \geq n : |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\}$.

Тогда $\{\omega : \xi_n(\omega) \not\rightarrow \xi(\omega)\} = \bigcup_{m=1}^{+\infty} A_m^{\frac{1}{m}} = \{\omega : \exists m \forall n \exists k \geq n : |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \frac{1}{m}\}$.

Следовательно, по непрерывности вермеры:

$$\begin{aligned} P(\omega : \xi_n(\omega) \not\rightarrow \xi(\omega)) = 0 &\Leftrightarrow P\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} A_m^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} \hookrightarrow P\left(A_m^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(A^\varepsilon) = 0, \end{aligned}$$

так как всегда существует m , что $\frac{1}{m} \geq \varepsilon \geq \frac{1}{m+1}$, то есть $A_m^{\frac{1}{m+1}} \supseteq A^\varepsilon \supseteq A_m^{\frac{1}{m}}$. Но $\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon \downarrow A^\varepsilon$, следовательно,

$$\begin{aligned} 0 = P(A^\varepsilon) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon\right) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(\omega : \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

■

Теорема (взаимоотношения различных видов сходимости).

$$\begin{array}{c} n.н. \\ \nearrow \\ L_p \nearrow P \longrightarrow d \end{array}$$

▲ (п.н. \Rightarrow P) $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : P(\omega : \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon) \rightarrow 0$, но

$$\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\} \subset \{\omega : \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\},$$

следовательно, $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq P(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$.

($L_p \Rightarrow$ P) $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^p \geq \varepsilon^p) \leq \frac{E|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^p}{\varepsilon^p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (неравенство Маркова).

(P \Rightarrow d) Пусть $f(x)$ — ограниченная непрерывная функция, тогда $\exists C \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow |f(x)| \leq C$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, возьмем $N \in \mathbb{R} : P(|\xi| > N) \leq \frac{\varepsilon}{4C}$. На отрезке $[-N, N]$ функция $f(x)$ равномерно непрерывна, следовательно,

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in [-N, N] \hookrightarrow (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Рассмотрим разбиение Ω :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\omega : |\xi(\omega)| < N, |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leq \delta\}, \\ A_2 &= \{\omega : |\xi(\omega)| > N, |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leq \delta\}, \\ A_3 &= \{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \delta\}. \end{aligned}$$

Оценим

$$|Ef(\xi_n) - Ef(\xi)| \leq E|f(\xi_n) - f(\xi)| = E[|f(\xi_n) - f(\xi)| \cdot (I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3})] \leq \boxed{\leq}.$$

Пусть $\omega \in A_1$, тогда, так как $|\xi_n - \xi| \leq \delta$, то $|x - y| \leq \delta$, а значит $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, следовательно, $E[|f(\xi_n) - f(\xi)| \cdot I_{A_1}] \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot EI_{A_1} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot P(A_1) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Если же $\omega \in A_2, A_3$, то $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq 2C$ так как f ограничена.

Значит, $\boxed{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + 2C \cdot P(A_2) + 2C \cdot P(A_3) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C \cdot P(|\xi| > N) + 2C \cdot P(|\xi_n - \xi| > \delta) \leq C_1 \varepsilon$, где $P(|\xi| > N) \leq \frac{\varepsilon}{4C}$. Следовательно, в силу произвольности ε , $Ef(\xi_n) \rightarrow Ef(\xi)$, то есть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. 0, т.к. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$

■

Контрпримеры

Пример (п.н. $\nrightarrow L_p$, а значит, $P \nrightarrow L_p$ и $d \nrightarrow L_p$). Рассмотрим $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$, P — мера Лебега на $[0, 1]$. Пусть $\xi_n = e^n \cdot I_{[0, \frac{1}{n}]}$, тогда $\forall \omega \in (0, 1) \exists n : \omega > \frac{1}{n} \Rightarrow \forall k \geq n \xi_k(\omega) = 0$ (значит имеется сходимость п.н.), следовательно $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi = 0$, но $E|\xi_n - \xi|^p = e^{np} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$, значит сходимости в L_p нет.

Пример ($L_p \nrightarrow$ п.н., $P \nrightarrow$ п.н., $d \nrightarrow$ п.н.). Рассмотрим $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$, P — мера Лебега на $[0, 1]$. Возьмем $\xi_{2^n+i} = I\left(\omega \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)\right)$, $i = 0, \dots, 2^n - 1$; $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\xi_k \xrightarrow{L_p} 0$ при $k \rightarrow +\infty$, так как $E|\xi_k - 0|^p = \frac{1}{2^n} \cdot 1^p \rightarrow 0$, где $n = [\log_2 k]$. Но $\forall \omega$ из $[0, 1] \exists$ бесконечно много ξ_i таких, что $\xi_i(\omega) = 1$ и $\xi_i(\omega) = 0$, следовательно, $\forall \omega \hookrightarrow \xi_i(\omega) \nrightarrow 0$, ровно как и к 1, в смысле почти наверное.

Пример ($d \nrightarrow P$). Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $P(\omega_i) = \frac{1}{2}$, $\forall n \hookrightarrow \xi_n(\omega_1) = 0, \xi_n(\omega_2) = 1$. Тогда $\xi_n \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{2}\right)$. $\xi(\omega_1) = 1, \xi(\omega_2) = 0$, значит, $\xi \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{2}\right)$, следовательно, по теореме Александрова $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, но $P(|\xi_n - \xi| > 0.5) = 1$, значит, $\xi_n \not\xrightarrow{P} \xi$.

Определение. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ фундаментальна почти наверное, если $P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| \rightarrow 0) = 1$ при $n, m \rightarrow +\infty$.

Лемма (критерий фундаментальности почти наверное). *[6/д] Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ фундаментальна почти наверное тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(\omega : \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi_n(\omega)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.*

Теорема (критерий Коши сходимость почти наверное). *Последовательно случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится почти наверное тогда и только тогда, когда $\{\xi_n\}$ фундаментальна почти наверное.*

▲ (\Rightarrow) Пусть $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, тогда, если $\omega \in \{\omega : \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)\}$, то по критерию Коши для числовых последовательностей $\omega \in \{\omega : \{\xi_n\} \text{ — фундаментальная}\}$, следовательно, $P(\omega : \{\xi_n(\omega)\} \text{ — фундаментальная}) \geq P(\omega : \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)) = 1$.

(\Leftarrow) Обозначим $A = \{\omega : \{\xi_n\} \text{ — фундаментальная}\}$. Построим такую случайную величину ξ , что $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$. По критерию Коши для любого $\omega \in A$ у последовательности $\{\xi_n(\omega)\}$ существует предел $\xi(\omega)$. Положим по определению $\xi(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n(\omega) \cdot I_A(\omega)$. Тогда $\xi_n \cdot I_A \rightarrow \xi$ во всех точках, то есть ξ — случайная величина, как предел случайных величин, и $P(\omega : \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)) = P(A) = 1$. ■

Определение. Пусть $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность событий, тогда событием $\{A_n \text{ бесконечно часто (б.ч.)}\}$ называется событие $\{\omega : \forall n \exists k \geq n : \omega \in A_k\}$, то есть все такие ω , что ω принадлежит бесконечному числу элементов из $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
 $\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k$.

Лемма (Бореля-Кантелли). 1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < +\infty$, то $P(A_n \text{ б.ч.}) = 0$.

2. Если $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty$ и $\{A_k\}$ независимы в совокупности, то $P(A_n \text{ б.ч.}) = 1$.

▲

1. $P(A_n \text{ б.ч.}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) \equiv$. Известно, что $\bigcup_{k \geq n} A_k \downarrow \{A_n \text{ б.ч.}\}$, следовательно, по непрерывности вероятностной меры имеем $\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq n} P(A_k) = 0$ т.к. ряд сходится.

2. Заметим, что $P(A_n \text{ б.ч.}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) =$ /по непрерывности вермеры/ $= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) =$ /по законам де Моргана/ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - P\left(\bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right)\right)$, (надо доказать, что P в скобках стремится к нулю). Покажем это:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right) &= \text{/непрерывность вермеры/} = \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N P(\overline{A_k}) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N [1 - P(A_k)] \leq 1 - x \leq e^{-x} \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N \exp(-P(A_k)) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp\left(-\sum_{k=n}^N P(A_k)\right) = \exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)\right) = 0. \end{aligned}$$

В последнем равенстве сумма равна бесконечности, так как это сумма хвоста расходящегося ряда.

Значит, продолжая равенство выше, получаем что $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 0) = 1$.

■

Определение. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ фундаментальна по вероятности, если

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(\omega : |\xi_k - \xi_n| > \varepsilon) \xrightarrow{n, k \rightarrow \infty} 0.$$

Теорема (Рисса). Если последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ фундаментальна (или сходится) по вероятности, то из нее можно выделить подпоследовательность $\{\xi_{n_k}\}$ фундаментальную (сходящуюся) почти наверное.

▲ Т.к. фундаментальность п.н. \Leftrightarrow сходимость п.н., то докажем, что можно выделить подпоследовательность $\{\xi_{n_k}\}$, сходящуюся почти наверное. Пусть $n_1 = 1$. По индукции определим n_k , как наименьшее $n > n_{k-1}$ такое, что $\forall s \geq n, t \geq n \hookrightarrow P(|\xi_t - \xi_s| > 2^{-k}) < 2^{-k}$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} P(|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| > 2^{-k}) < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < +\infty$, следовательно, по лемме Бореля-Кантелли $P(|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| > 2^{-k} \text{ б.ч.}) = 0$, значит, почти наверное $\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| < +\infty$. Пусть $\mathcal{N} = \left\{ \omega : \sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_{n_{k+1}}(\omega) - \xi_{n_k}(\omega)| = +\infty \right\}$, тогда $P(\mathcal{N}) = 0$. Положим $\xi(\omega) = \left(\xi_{n_1}(\omega) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\xi_{n_{k+1}}(\omega) - \xi_{n_k}(\omega)) \right) \cdot I(\omega \in \mathcal{N})$, где ряд в скобках сходится на $\omega \in \Omega/\mathcal{N}$. Получаем, $\sum_{j=1}^k (\xi_{n_{j+1}} - \xi_{n_j}) + \xi_{n_1} = \xi_{n_{k+1}} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$.

Пусть теперь $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, тогда

$$P(|\xi_m - \xi_n| \geq \varepsilon) \leq P\left(|\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|\xi_m - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно, из сходимости по вероятности следует фундаментальность по вероятности, а дальше все тоже самое (из фундаментальности следует, что можно выделить сходящуюся подпоследовательность). ■

Теорема (критерий Коши сходимости по вероятности). $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ тогда и только тогда, когда $\{\xi_n\}$ фундаментальна по вероятности.

▲ (\Rightarrow) Следует из теоремы Рисса.

(\Leftarrow) Если $\{\xi_n\}$ фундаментальна по вероятности, то по теореме Рисса существует подпоследовательность $\{\xi_{n_k}\}$ такая, что $\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, то есть из связи между разными видами сходимости: $\xi_{n_k} \xrightarrow{P} \xi$. Тогда $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq P(|\xi_n - \xi_{n_k}| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P(|\xi_{n_k} - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. ■

Теорема (Неравенство Колмогорова). Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные величины такие, что

$$1. E\xi_i = 0, E\xi_i^2 < +\infty.$$

$$2. \text{ Обозначим } S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

$$\text{Тогда } \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{ES_n^2}{\varepsilon^2}.$$

▲ Обозначим $A = \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon \right\}$. Разобьем A на несколько непересекающихся событий, то есть $A_k = \{|S_k| \geq \varepsilon\}$ и $\forall i \leq k-1 \hookrightarrow |S_i| \leq \varepsilon$, следовательно,

$A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n^2 \cdot I_{A_k}) &= \mathbb{E}\left((S_k + \underbrace{\xi_{k+1} + \dots + \xi_n}_{\overline{S_k}})^2 \cdot I_{A_k}\right) = \\ &= \mathbb{E}(S_k^2 \cdot I_{A_k}) + \mathbb{E}(\overline{S_k}^2 \cdot I_{A_k}) + 2\mathbb{E}(S_k \overline{S_k} \cdot I_{A_k}) = (*). \end{aligned}$$

Докажем, что $\mathbb{E}(S_k \overline{S_k} I_{A_k}) = 0$, I_{A_k} зависит от (S_1, \dots, S_k) и не зависит от $(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$. Следовательно, $S_k \cdot I_{A_k} \perp \overline{S_k}$, так как $\{\xi_1, \dots, \xi_k\} \perp \{\xi_{k+1}, \dots, \xi_n\}$, а, значит, $\mathbb{E}(S_k \cdot I_{A_k} \cdot \overline{S_k}) = \mathbb{E}(S_k \cdot I_{A_k}) \cdot \mathbb{E}\overline{S_k} = 0$. Отсюда

$$(*) = \mathbb{E}(S_k^2 \cdot I_{A_k}) + \mathbb{E}(\overline{S_k}^2 \cdot I_{A_k}) \geq \mathbb{E}(S_k^2 \cdot I_{A_k}) \geq \varepsilon^2 \cdot \mathbb{E}I_{A_k} = \varepsilon^2 \cdot \mathbb{P}(A_k).$$

В итоге,

$$\mathbb{E}S_n^2 \geq \mathbb{E}(S_n^2 \cdot I_A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(S_n^2 \cdot I_{A_k}) \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \cdot \varepsilon^2 = \mathbb{P}(A) \cdot \varepsilon^2.$$

■

Теорема (Колмогорова-Хинчина о сходимости ряда). Пусть $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин такая, что $\mathbb{E}\xi_n = 0$ и $\mathbb{E}\xi_n^2 < +\infty$.

Тогда, если $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\xi_n^2 < +\infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится почти наверное.

▲ Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. По критерию Коши $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \text{ сходится п.н.} \right\}$ равносильно тому, что $\{S_n \text{ фундаментально п.н.}\}$, а это в свою по критерию фундаментальности равносильно тому, что

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\sup_{k \geq n} |S_k - S_n| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Докажем это. Очевидно, что

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k \geq n} |S_k - S_n| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} \{|S_k - S_n| \geq \varepsilon\}\right) =$$

а из непрерывности вероятностной меры следует, что

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^N \{|S_k - S_n| \geq \varepsilon\}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\max_{n \leq k \leq N} |S_k - S_n| \geq \varepsilon\right) \leq$$

А по неравенству Колмогорова:

$$\leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(S_N - S_n)^2}{\varepsilon^2} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \left(\sum_{k=n+1}^N \xi_k \right)^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \sum_{k=n+1}^N \xi_k^2 =$$

Второе равенство, поскольку случайные величины независимы и с нулевым математическим ожиданием.

Так как ξ_k независимы, то

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^N \mathbb{E} \xi_k^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k > n} \mathbb{E} \xi_k^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

■

Лемма (Тёплица). Пусть $x_n \rightarrow x$ — числовая последовательность, числа $\{a_n\}_{n \geq 1}$ таковы, что $\forall n \hookrightarrow a_n \geq 0$ и $b_n = \sum_{k=1}^n a_k \uparrow +\infty$.

Тогда $\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n a_i x_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

▲ Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем n_0 так, что $\forall n > n_0 \hookrightarrow |x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Выберем $n_1 > n_0$ такое, что $\frac{1}{b_{n_1}} \sum_{k=1}^{n_0} a_k |x_k - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, тогда

$$\begin{aligned} \forall n > n_1 \hookrightarrow \left| \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k x_k - x \right| &= \left| \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k x_k - \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k x \right| \leq \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k |x_k - x| = \\ &= \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n_0} a_k |x_k - x| + \frac{1}{b_n} \sum_{k=n_0+1}^n a_k |x_k - x| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{b_n} \sum_{k=n_0+1}^n a_k \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Лемма (Кронекера). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, $\{a_n\}_{n \geq 1}$ такова, что $a_n \geq 0$,

$$b_n = \sum_{k=1}^n a_k \uparrow +\infty.$$

Тогда $\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k x_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

▲ Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$, тогда $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Воспользуемся методом суммирования Абеля:

$$\sum_{j=1}^n b_j x_j = \sum_{j=1}^n b_j (S_j - S_{j-1}) = b_n S_n - \sum_{j=1}^n S_{j-1} (b_j - b_{j-1}) = b_n S_n - \sum_{j=1}^n S_{j-1} a_j.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k x_k = S_n - \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n S_{j-1} a_j \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

$\nearrow S \text{ по Тёплицу}$

■

Теорема (УЗБЧ в форме Колмогорова-Хинчина). Пусть

1. случайные величины $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ независимы и $\forall n \hookrightarrow D\xi_n < +\infty$;
2. числа $\{b_n\}_{n \geq 1}$, $b_1 > 0$ и $b_n \uparrow +\infty$, такие что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{b_n^2} < +\infty$;
3. обозначим $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$.

Тогда $\frac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{п.н.}} 0$.

▲ Преобразуем:

$$\frac{S_n - ES_n}{b_n} = \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\xi_i - E\xi_i}{b_i}.$$

Обозначим $\eta_i = \frac{\xi_i - E\xi_i}{b_i}$. Случайные величины η_i независимы и $E\eta_i = 0$. Значит,

$$\sum_{i=1}^{\infty} E\eta_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(\xi_i - E\xi_i)^2}{b_i^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D\xi_i}{b_i^2} < +\infty.$$

Следовательно, по теореме Колмогорова-Хинчина о сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i$ сходится почти наверное. По лемме Кронекера последовательность

$$\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\xi_i - E\xi_i}{b_i}$$

сходится к нулю для всех ω , для которых сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i - E\xi_i}{b_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \text{ — сходится п.н.}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\xi_i - E\xi_i}{b_i} = \frac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0.$$

■

Лемма. Пусть $\xi \geq 0$, $E\xi < +\infty$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) \leq E\xi \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n).$$

▲

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(k \leq \xi \leq k+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k P(k \leq \xi \leq k+1) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(k \leq \xi \leq k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} E(k \cdot I(k \leq \xi \leq k+1)) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E(\lfloor \xi \rfloor \cdot I(k \leq \xi \leq k+1)) \leq \sum_{k=0}^{\infty} E(\xi \cdot I(k \leq \xi \leq k+1)) = \\ &= E\left(\xi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} I(k \leq \xi \leq k+1)\right) = E\xi. \end{aligned}$$

Верхнее неравенство доказывается аналогично. ■

Определение. Случайные величины ξ и η одинаково распределены, если $\forall x \hookrightarrow F_{\xi}(x) = F_{\eta}(x)$. Обозначают $\xi \stackrel{d}{=} \eta$.

Утверждение. Если $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, то $\forall g(x) \hookrightarrow Eg(\xi) = Eg(\eta)$.

$$\blacktriangle \quad Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_{\xi}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_{\eta}(x) = Eg(\eta). \quad \blacksquare$$

Теорема (УЗБЧ в форме Колмогорова). Пусть $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $E|\xi_1| < +\infty$.

Тогда

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.н.} E\xi_1.$$

▲ Поскольку $E|\xi_1| < +\infty$, то по предыдущей лемме $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_1| \geq n) < +\infty$.

Так как $\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi_n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| \geq n) < +\infty$, следовательно, по лемме Бореля-Кантелли $P(\{|\xi_n| \geq n\} \text{ б.ч.}) = 0$. То есть с вероятностью 1 случается конечное число $\{|\xi_n| \geq n\}$. Обозначим $\tilde{\xi}_n \equiv \xi_n \cdot I\{|\xi_n| \leq n\}$. Тогда с вероятностью 1 $\xi_n = \tilde{\xi}_n$ кроме конечного числа ξ_n . Пусть $E\xi_i = 0$, если это не так, то $\eta_i = \xi_i - E\xi_i$. Получаем, что

$$P\left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \rightarrow 0\right) = P\left(\frac{\tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_n}{n} \rightarrow 0\right).$$

Рассмотрим

$$\mathbb{E}\tilde{\xi}_n = \mathbb{E}\left(\xi_n \cdot I(|\xi_n| \leq n)\right) = \mathbb{E}\left(\xi_1 \cdot I(|\xi_1| \leq n)\right) \rightarrow \mathbb{E}\xi_1 = 0$$

по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, поскольку

$$\left|\xi_1 \cdot I(|\xi_1| \leq n)\right| \leq \xi_1 \quad \text{и} \quad \xi_1 \cdot I(|\xi_1| \leq n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \xi_1.$$

По лемме Тёплица

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\tilde{\xi}_i \rightarrow \mathbb{E}\xi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\xi}_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tilde{\xi}_i - \mathbb{E}\tilde{\xi}_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0.$$

Обозначим $\bar{\xi}_n = \tilde{\xi}_n - \mathbb{E}\tilde{\xi}_n$. По лемме Кронекера, если сходится $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\xi}_k}{k}$ на каком-то ω , то $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{\bar{\xi}_k}{k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ на том же ω . Проверим, что $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\xi}_k}{k}$ сходится почти наверное. По теореме Колмогорова-Хинчина достаточно показать, что $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(\bar{\xi}_k)^2}{k^2} < +\infty$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(\bar{\xi}_k)^2}{k^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(\tilde{\xi}_k - \mathbb{E}\tilde{\xi}_k)^2}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(\tilde{\xi}_k)^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \mathbb{E}(\xi_k^2 \cdot I(|\xi_k| \leq k)) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \mathbb{E}(\xi_1^2 \cdot I(|\xi_1| \leq k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \mathbb{E}\left(\xi_1^2 \cdot \sum_{n=1}^k I(n-1 < |\xi_1| \leq n)\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_1^2 \cdot I(n-1 < |\xi_1| \leq n)) \cdot \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\leq 2/n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cdot \mathbb{E}(\xi_1^2 \cdot I(n-1 < |\xi_1| \leq n)) \leq \end{aligned}$$

Так как $|\xi_1| \leq n$, то заменим одну ξ на n :

$$\begin{aligned} &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|\xi_1| \cdot I(n-1 < |\xi_1| \leq n) \stackrel{\text{по т. Бешпо-Леви}}{=} 2\mathbb{E}|\xi_1| \sum_{n=1}^{\infty} I(n-1 < |\xi_1| \leq n) = \\ &= 2\mathbb{E}|\xi_1| < +\infty. \end{aligned}$$

■

Теорема (Бешпо-Леви). Пусть $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ — случайные величины, $\forall n \hookrightarrow \xi_n \geq 0$.

Тогда $\mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\xi_n$.

▲ Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, тогда $S_n \uparrow S = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$. По теореме о монотонной сходимости

$E \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$, следовательно,

$$E \sum_{k=1}^n \xi_k = \sum_{k=1}^n E \xi_k \uparrow E \sum_{k=1}^{\infty} E \xi_k.$$

■

Теорема (о монотонной сходимости). [б/д] Пусть $\{\xi_n\}_{n \geq 1}, \xi, \eta$ — случайные величины, тогда

1. Если $\xi_n \uparrow \xi$ почти наверное и $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \xi_n \geq \eta, E\eta > -\infty$, то $E\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n$.
2. Если $\xi_n \downarrow \xi$ почти наверное и $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \xi_n \leq \eta, E\eta < +\infty$, то $E\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n$.

Лемма (Фату). Пусть $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ и η — случайные величины, $E|\eta| < +\infty$, тогда

1. Если $\forall n \hookrightarrow \xi_n \geq \eta$, то $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \geq E \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$.
2. Если $\forall n \hookrightarrow \xi_n \leq \eta$, то $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq E \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$.
3. Если $\forall n \hookrightarrow |\xi_n| < \eta$, то $E \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq E \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$.

▲ (1) Обозначим $\psi_n = \inf_{k \geq n} \xi_k$. Очевидно, $\psi_n \uparrow \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$. Кроме того $\psi_n \geq \eta$, следовательно, по теореме о монотонной сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} E\psi_n = E \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$. Рассмотрим

$$E \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E\psi_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\psi_n \stackrel{\text{т.к. } \psi_n \leq \xi_n}{\leq} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n.$$

Второе равенство — в силу существования предела существует и нижний предел.

(2) Следует из пункта (1) заменой $\xi'_n = -\xi_n$.

(3) Следует из (1) и (2). ■

Теорема (Лебега о мажорируемой сходимости). Пусть $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi, |\xi| \leq \eta, E\eta < +\infty$.

Тогда $E\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E\xi$ и $E|\xi_n - \xi| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (не требуем независимости!).

▲ Заметим, что $\xi \stackrel{п.н.}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$. По пункту (3) леммы Фату

$$E\xi = E \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq E \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = E\xi \Rightarrow E\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n.$$

Конечность $E\xi$ следует из того, что $|\xi| < \eta$ почти наверное, следовательно, так как $E\eta < +\infty$, то $E|\xi| \leq E|\eta| < +\infty$.

Докажем L_1 -сходимость. Возьмем $\psi_n = |\xi_n - \xi|$. Тогда $|\psi_n| \leq 2\eta$ почти наверное и $\psi_n \xrightarrow{п.н.} 0$, следовательно, $E\psi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ по теореме Лебега. ■

Сходимость в L_2

Введем пространство $L_2 = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{\xi : E\xi^2 < +\infty\}$. Это минимальное пространство, так как $E(a\xi + b\eta)^2 \leq 2a^2E\xi^2 + 2b^2E\eta^2$.

Основное неравенство: $(x + y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$.

Норма $\|\xi\| = \sqrt{E\xi^2}$; скалярное произведение $(\xi, \eta) = E\xi\eta$.

Лемма. Пусть $\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$, $\forall n \hookrightarrow \xi_n \in L_2$. Тогда

1. $\xi \in L_2$,
2. $E\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E\xi$,
3. $E\xi_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E\xi^2$,
4. если $\eta_n \xrightarrow{L_2} \eta$, $\forall n \hookrightarrow \eta_n \in L_2$, то $(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\xi, \eta)$.

▲ Докажем первый пункт леммы:

$$E\xi^2 = E(\xi - \xi_n + \xi_n)^2 \leq \underbrace{2E(\xi - \xi_n)^2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{2E\xi_n^2}_{< +\infty} < +\infty.$$

Перейдем ко второму пункту. Если $E\xi^2 < +\infty$, то $E|\xi| = E|\xi| \cdot 1$, а по неравенству Коши-Буняковского это меньше или равно, чем $\sqrt{E\xi^2 \cdot E1^2} < +\infty$. Осталось заметить, что $|E(\xi_n - \xi)| \leq E|\xi_n - \xi| \leq \sqrt{E(\xi_n - \xi)^2 \cdot E1^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Пункт 3.

$$\begin{aligned} E(\xi_n^2 - \xi^2) &= E(\xi_n + \xi)(\xi_n - \xi) \leq \sqrt{E(\xi_n + \xi)^2 \cdot E(\xi_n - \xi)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\left(\underbrace{2E(\xi_n - \xi)^2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{8E\xi^2}_{=\text{const}} \right) \cdot \underbrace{E(\xi_n^2 - \xi^2)}_{\rightarrow 0}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Остается доказать четвертый пункт леммы:

$$\begin{aligned} E(\xi_n \eta_n - \xi \eta) &= E(\xi_n \eta_n - \xi_n \eta) + E(\xi_n \eta - \xi \eta) \leq \\ &\leq \sqrt{E\xi_n^2 \cdot E(\eta_n - \eta)^2} + \sqrt{E\eta^2 \cdot E(\xi_n - \xi)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

■

6 Глава 6.

Случайные блуждания и закон повторного логарифма

Пусть $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что $E\xi_n = 0$, $E\xi_n^2 = \sigma^2$.

Определение. Случайная величина $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ называется случайным блужданием.

Известно (из Ц.П.Т.), что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty$, а $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty$ (Можно получить с помощью теоремы Муавра-Лапласа). С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E} \xi_n^2}{n \ln^2 n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{n \ln^2 n} < +\infty.$$

Следовательно, по теореме Колмогорова-Хинчина о сходимости ряда почти наверное $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\sqrt{n} \ln n}$ сходится почти наверное, значит, по лемме Кронекера,

$$\frac{1}{\sqrt{n} \ln n} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \ln k \frac{\xi_k}{\sqrt{k} \ln k} = \frac{S_n}{\sqrt{n} \ln n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0.$$

Значит S_n не выходит за $\varepsilon \sqrt{n}$ начиная с некоторого момента п.н.

Теорема. (Теорема Муавра-Лапласа)

Независимые случайные величины $\xi_i \sim \text{Bern}(p)$.

$$\sup_{-\infty \leq a < b \leq +\infty} \left| \mathbb{P} \left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b \right) - \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Определение. Функция $\varphi^* = \varphi^*(n)$, $n > 1$ называется верхней для S_n , если $S_n(\omega) < \varphi^*(n)$ почти наверное для всех n , начиная с некоторого $n_0(\omega)$.

Определение. Функция $\varphi_* = \varphi_*(n)$, $n > 1$ называется нижней для S_n , если $S_n(\omega) > \varphi_*(n)$ почти наверное для бесконечно многих n (бесконечно часто).

То есть $\forall \varepsilon \varphi^*(n) = \varepsilon \sqrt{n} \ln n$ — верхняя для произвольного случайного блуждания, $\varphi_*(n) = \varepsilon \sqrt{n}$ — нижняя. Пусть некая функция $\varphi(n)$ — «точная асимптотика», возьмем $\varphi_\varepsilon^* = (1 + \varepsilon)\varphi$; $\varphi_{*\varepsilon} = (1 - \varepsilon)\varphi$ для $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} \leq 1 \right\} &= \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} \frac{S_m}{\varphi(m)} \leq 1 \right\} = \\ &= \left\{ \forall \varepsilon > 0 \text{ и некоторого } n_\varepsilon \hookrightarrow \sup_{m \geq n_\varepsilon} \frac{S_m}{\varphi(m)} \leq 1 + \varepsilon \right\} = \\ &= \left\{ \forall \varepsilon > 0 \quad \forall m \geq n_\varepsilon \hookrightarrow S_m \leq (1 + \varepsilon)\varphi(m) \right\} \Leftrightarrow (1 + \varepsilon)\varphi(m) \text{ — верхняя.} \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} \geq 1 \right\} &= \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} \frac{S_m}{\varphi(m)} \geq 1 \right\} = \\ &= \left\{ \forall \varepsilon > 0 \text{ и для беск. многих } n_\varepsilon \hookrightarrow S_m \geq (1 - \varepsilon)\varphi(m) \right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - \varepsilon)\varphi(m) \text{ — нижняя.} \end{aligned}$$

Отметим, $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \varphi_\varepsilon^* = (1 + \varepsilon)\varphi$ — верхняя $\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} \leq 1\right) = 1$.
 Аналогично, $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \varphi_\varepsilon^* = (1 + \varepsilon)\varphi$ — нижняя $\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} \geq 1\right) = 1$.

Теорема (закон повторного логарифма (ЗПЛ)). [6/2] Пусть $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, $\mathbb{E}\xi_1^2 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$.

Тогда

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} = 1\right) = 1, \varphi(n) = \sqrt{2\sigma^2 n \ln \ln n}.$$

Замечание. Применяя ЗПЛ к S_n , получаем, что $\mathbb{P}\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} = -1\right) = 1$.

За нижнюю ветку S_n выходит бесконечно часто (см. Рис. 1), а за верхнюю лишь конечное число раз (почти наверное не выходит).

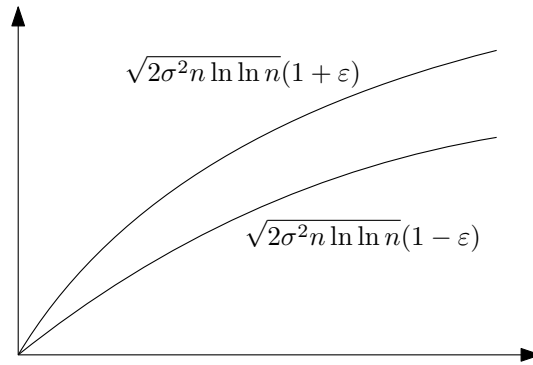


Рис. 1: Поведение верхней и нижней функции случайного блуждания

7 Глава 7.

Характеристические функции

Определение. Характеристической функцией случайной величины ξ называется $\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi}$, $t \in \mathbb{R}$. (Формально это преобразование Фурье случайной величины ξ).

Определение. Пусть $F(x)$ — функция распределения, тогда ее характеристическая функция $\varphi_F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x)$.

Если $F_\xi(x)$ — функция распределения случайной величины ξ , то характеристические функции ξ и F_ξ совпадают.

Чтобы считать интеграл Лебега от комплекснозначной функции, будем пользоваться формулой Эйлера: $\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \mathbb{E}\cos(t\xi) + i\mathbb{E}\sin(t\xi)$.

Определение. Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — случайный вектор. Его характеристической функцией называется $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = \mathbb{E}e^{i(\vec{t}, \vec{\xi})}$, $t \in \mathbb{R}^n$.

Определение. Пусть $F(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ — функция распределения в \mathbb{R}^n , тогда его характеристической функцией называется $\varphi_F(\vec{t}) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(\vec{t}, \vec{x})} dF(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Свойства характеристических функций

Свойство №0. Харфункция существует всегда.

Свойство 1. Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ , тогда $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$.

▲ $|\varphi(t)| = |\mathbb{E}e^{it\xi}| \leq \mathbb{E}|e^{it\xi}| = 1 = \varphi(0)$. ($\cos t\xi + i\sin t\xi$, модуль этого комплексного числа равен единице). ■

Свойство 2. Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ , а $\eta = a\xi + b$, где $a, b \in \mathbb{R}$, тогда $\varphi_\eta(t) = e^{itb} \cdot \varphi_\xi(at)$.

▲ $\varphi_\eta(t) = \mathbb{E}e^{it\eta} = \mathbb{E}e^{it(a\xi+b)} = e^{itb}\mathbb{E}e^{ita\xi} = e^{itb} \cdot \varphi_\xi(at)$ ($e^{itb} = \text{const}$, значит можем вынести за матожидание). ■

Свойство 3. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные величины, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \Rightarrow \varphi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(t)$.

▲ $\varphi_{S_n}(t) = \mathbb{E}e^{it \sum_{k=1}^n \xi_k} = \mathbb{E} \prod_{k=1}^n e^{it\xi_k} =$
 $/e^{it\xi_k}$ — борелевская функция от независимой случайной величины. /
 $= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}e^{it\xi_k} = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t)$. ■

Свойство 4. Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция, тогда $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$

▲ $\varphi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \mathbb{E}\overline{e^{-it\xi}} = \overline{\mathbb{E}e^{-it\xi}} = \overline{\varphi(-t)}$.

Комментарий к (*): матожидание можно записать как предел матожиданий простых функций, простые функции — это конечные суммы, у них можно навесить сопряжение на все выражение. Поэтому в пределе получаем верный переход. ■

Свойство 5. Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ , тогда $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на \mathbb{R} .

▲ Рассмотрим $|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = |Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}| = |Ee^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1)| \leq E(|e^{it\xi}| \cdot |e^{ih\xi} - 1|) = E|e^{ih\xi} - 1|$. При $h \rightarrow 0$ выполнено $e^{ih\xi} - 1 \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ по теореме о наследовании сходимости. $\forall h \hookrightarrow |e^{ih\xi} - 1| \leq |e^{ih\xi}| + 1 = 2$, $E2 < +\infty$. Следовательно, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, $E|e^{ih\xi} - 1| \rightarrow E0 = 0$. Значит, $\varphi(t)$ равномерно непрерывна. ■

Теорема (единственности (д-во позже)). Пусть F и G — функции распределения, такие что $\varphi_{F(x)} = \varphi_{G(x)} \Rightarrow \forall x F(x) = G(x)$.

Свойство 6. Пусть $\varphi_\xi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ . $\varphi_\xi(t)$ принимает действительные значения $\Leftrightarrow \xi$ имеет симметричное распределение ($\xi \stackrel{d}{=} -\xi$).

▲ (\Leftarrow) Пусть распределение ξ — симметрично, тогда $E(\sin(t\xi)) = E(\sin(t(-\xi))) = -E(\sin(t\xi)) = 0$. Значит $\varphi_\xi(t) = E \cos t\xi + iE \sin t\xi = E \cos t\xi \in \mathbb{R}$.

(\Rightarrow) Пусть $\varphi_\xi(t) \in \mathbb{R} \forall t$. Тогда по свойствам 2 и 4 $\varphi_\xi(t) = \overline{\varphi_\xi(-t)} = \varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t) \Rightarrow \xi$ и $-\xi$ имеют одинаковую характеристическую функцию $\Rightarrow \xi \stackrel{d}{=} -\xi$ по теореме единственности. ■

Свойство 7.

Теорема (о производных х.ф.). Пусть $E|\xi|^n < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Тогда $\forall k \leq n \exists \varphi_\xi^{(k)}(t)$, причём

1. $\varphi_\xi^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx} dF(x)$,
2. $E\xi^k = \frac{\varphi_\xi^{(k)}(0)}{i^k}$,
3. $\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t)$, где

$$|\varepsilon_n(t)| \leq 3E|\xi|^n, \quad \varepsilon_n(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0.$$

▲

1. Рассмотрим $\frac{\varphi_\xi(t+h) - \varphi_\xi(t)}{h} = \frac{Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}}{h} = \frac{Ee^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1)}{h}$. при $h \rightarrow 0 \frac{e^{ih\xi} - 1}{h} \xrightarrow{\text{п.н.}} i\xi$, кроме того, $\left| \frac{e^{ih\xi} - 1}{h} \right| \leq |\xi|$ почти наверное, так как хорда меньше дуги. По теореме о мажорируемой сходимости $\lim_{h \rightarrow 0} E \frac{e^{ih\xi} - 1}{h} e^{it\xi} = \varphi'_\xi(t) = E(i\xi \cdot e^{it\xi}) = \int_{\mathbb{R}} ix e^{itx} dF_\xi(x)$. Доказательство формулы для $\varphi^{(k)}$ аналогично.

2. Из пункта 1, $\frac{\varphi_\xi^{(k)}(0)}{i^k} = \frac{1}{i^k} \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{i0x} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} x^k dF_\xi(x) = E\xi^k$.

3. Ряд Тейлора $e^{iy} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iy)^k}{k!} + \frac{(iy)^n}{n!}(\cos \theta_1 y + i \sin \theta_2 y)$, $|\theta_1| \leq 1$, $|\theta_2| \leq 1$, тогда $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = E \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it\xi)^k}{k!} + \frac{(it\xi)^n}{n!}(\cos \theta_1 t\xi + i \sin \theta_2 t\xi) \right] = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t)$, где $\varepsilon_n(t) = E(\xi^n \cdot [\cos \theta_1 t\xi + i \sin(\theta_2 t\xi) - 1]) \Rightarrow \varepsilon_n(t) \leq 3E|\xi|^n$;
 $|\xi^n[\cos(\theta_1 t\xi) + i \sin(\theta_2 t\xi) - 1]| \leq 3|\xi|^n$ и $\xi^n(\cos(\theta_1 t\xi) - 1 + \underbrace{\sin(\theta_2 t\xi)}_{\xrightarrow{0}}) \xrightarrow{п.н.} 0$ при $t \rightarrow 0 \Rightarrow$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, $\varepsilon_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

■

Свойство 8 (б/д). Если существует и конечна $\varphi^{(2n)}(0)$, то $E|\xi|^{2n} < +\infty$.

Теорема (о разложении х.ф. в ряд). Пусть ξ случайная величина, такая что $\forall n \ E|\xi|^n < +\infty$.

Если для некоторого $T > 0 \Leftrightarrow \overline{\lim}_n \left(E \frac{|\xi|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{T}$, то $\forall t : |t| < T$ выполнено $\varphi_\xi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} E\xi^n$.

▲ Пусть t_0 такое, что $|t_0| < T$, тогда $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} E \left(\frac{|\xi|^n \cdot |t_0|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{|t_0|}{T} < 1$, следовательно, по признаку Коши-Адамара сходимости рядов, ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E|\xi|^n \cdot |t_0|^n}{n!}$ сходится.

Рассмотрим $|t| \leq |t_0| : \varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \underbrace{\frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t)}_{R_n(t)} \quad (*)$.

$R_n(t) \leq 3 \cdot \frac{|t|^n}{n!} \cdot E|\xi|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ по условию теоремы. Устремляя $n \rightarrow +\infty$ в $(*)$, получаем $\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k$. В силу произвольности $|t_0| < T$, разложение верно $\forall t \in (-T, T)$.

■

Пример. (Харфунция нормального распределения)

Пусть $\xi \sim N(0; 1) \Rightarrow \varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Мы знаем, что $E\xi^m = \begin{cases} (m-1)!!, & m:2 \\ 0, & m \not:2 \end{cases}$

$E|\xi|^m = \begin{cases} (m-1)!!, & m:2 \\ (m-1)!!\sqrt{\frac{2}{\pi}}, & m \not:2 \end{cases} \Rightarrow$ по предыдущей теореме:

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{(2n)!} (2n-1)!! = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{(2n)!!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{(2n)!!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t^2}{2} \right)^n \frac{1}{n!} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Условие теоремы: $\left(\frac{E|\xi|^m}{m!} \right)^{\frac{1}{m}} \leq \left(\frac{(m-1)!!}{m!} \right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{1}{m!!} \right)^{\frac{1}{m}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\frac{m}{2e} \right)^{\frac{m}{2}} \right)^{\frac{1}{m}} \sim \frac{C}{\sqrt{m}} \rightarrow 0 \Rightarrow T = +\infty$. (В приближении воспользовались формулой Стирлинга.)

Теорема (формула обращения (б/д)). Пусть $\varphi(t)$ характеристическая функция функции распределения F . Тогда

1. Для $\forall a < b$ (точки непрерывности) F выполнено $F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{it} \varphi(t) dt$
2. Если $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < +\infty$, то у функции распределения $F(x)$ существует плотность $f(x)$ и $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt$.

Теорема (единственности). Пусть F и G — функции распределения, такие что $\varphi_F(x) = \varphi_G(x) \Rightarrow \forall x F(x) = G(x)$.

▲ Пусть $a < b \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $f_\varepsilon(x)$ (шапочка). Докажем, что $\forall \varepsilon > 0 \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dG(x)$. Рассмотрим отрезок $[-n, n]$ такой, что $[a, b + \varepsilon] \subset [-n, n]$. По теореме Вейерштрасса-Стоуна (приближение любой функции тригонометрическими полиномами), $f_\varepsilon(x)$ сколь угодно точно приближается тригонометрическими многочленами от $\frac{\pi x}{n}$, так как $f_\varepsilon(x)$ непрерывна и периодична на $[-n, n]$ с периодом $2n$ на \mathbb{R} .

$\Rightarrow \forall n \exists f_\varepsilon^n(x) = \sum_{k \in K} a_k \cdot e^{\frac{ik\pi x}{n}}$, $a_k \in \mathbb{R}$, K — конечное подмножество \mathbb{Z} , такое, что $\forall x \in [-n, n] \hookrightarrow |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)| < \frac{1}{n}$. f_ε^n — периодическая с периодом $2n$ на \mathbb{R} . Поскольку $|f_\varepsilon(x)| < 2$ и $\forall x \in [-n, n] \hookrightarrow |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)| < \frac{1}{n}$, то $|f_\varepsilon^n(x)| \leq 2 \forall x$. По условию, $\forall t \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dG(x) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dG(x)$.

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dF(x) - \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dG(x) \right| \leq \left| \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dF(x) - \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dF(x) \right| + \\
 & + \left| \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dF(x) - \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dG(x) \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dG(x) - \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dG(x) \right| \leq \\
 & \leq \frac{1}{n} \int_{[-n, n]} dF(x) + \frac{1}{n} \int_{[-n, n]} dG(x) + \underbrace{(1 - F(n) + F(-n))}_{\rightarrow 0} + \underbrace{(1 - G(n) + G(-n))}_{\rightarrow 0} \leq \\
 & \leq \frac{2}{n} + o(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dG(x).
 \end{aligned}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ $f_\varepsilon(x) \rightarrow I_{[a, b]}(x)$, при этом $|f_\varepsilon(x)| \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$. По теореме Лебега о мажорированной сходимости (рассматриваем $f_\varepsilon(x)$ как набор случайных величин на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_f) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$). $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dF(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} I_{[a, b]} dF(x) = F(b) - F(a)$.

Аналогично, для функции распределения G $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dG(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} G(b) - G(a) \Rightarrow \forall a < b F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$. Полагая $a = (-\infty)$, получаем требуемое. ■

Теорема (критерий независимости). Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Тогда (ξ_1, \dots, ξ_n) — независимые в совокупности \Leftrightarrow

$$\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(t_i) \quad \forall \vec{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$$\blacktriangle (\Rightarrow) \varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = E e^{i(\vec{t}, \vec{\xi})} = E e^{i \sum_{k=1}^n t_k \xi_k} \stackrel{\text{нез-сть}}{=} \prod_{k=1}^n E e^{i t_k \xi_k} = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k).$$

(\Leftarrow) Пусть $F_k(x)$ — функция распределения случайной величины ξ_k . Пусть $G(x_1, \dots, x_n) = F_1(x) \cdot \dots \cdot F_n(x)$ — это функция распределения. Посчитаем её характеристическую функцию: $\varphi_G(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\vec{t}, \vec{x})} dG(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(\vec{t}, \vec{x})} dF_1(x_1) \cdot \dots \cdot$

$$dF_n(x_n) \stackrel{\text{Фубини}}{=} \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{i t_k x_k} dF_k(x_k) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k) \stackrel{\text{усл}}{=} \varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) \Rightarrow \text{характеристическая}$$

функция G и $\vec{\xi}$ совпадают \Rightarrow по теореме единственности $F_{\vec{\xi}} = G \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = \prod_{k=1}^n F_{\xi_k}(x_k) \Rightarrow \xi_1, \dots, \xi_n$ независимы в совокупности по критерию независимости в терминах функции распределения. \blacksquare

Проверка того, что φ — характеристическая функция

Определение. Функция $\varphi(t)$ является неотрицательно определённой, если $\forall n \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}, \sum_{i,j=1}^n \varphi(t_i - t_j) z_i \bar{z}_j \geq 0$.

Теорема (Бохнера-Хинчина). Пусть $\varphi(t)$ такая, что $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(t)$ непрерывна в нуле.

Тогда $\varphi(t)$ — характеристическая функция $\Leftrightarrow \varphi(t)$ неотрицательно определённая.

$\blacktriangle (\Rightarrow) \varphi(t)$ — характеристическая функция, проверим неотрицательность:

$$\begin{aligned} & \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R} \quad \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \\ & \sum_{j,k=1}^n \varphi(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k = \sum_{j,k=1}^n E e^{i(t_j - t_k)\xi} z_j \bar{z}_k = E \left(\left(\sum_{j=1}^n e^{i t_j \xi} z_j \right) \overline{\left(\sum_{k=1}^n e^{i t_k \xi} z_k \right)} \right) = \\ & = E \sum_{j,k=1}^n e^{i t_j \xi} \cdot z_j \cdot \overline{e^{i t_k \xi} \cdot z_k} = E \left| \sum_{j=1}^n e^{i t_j \xi} z_j \right|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(\Leftarrow) [б/д] \blacksquare

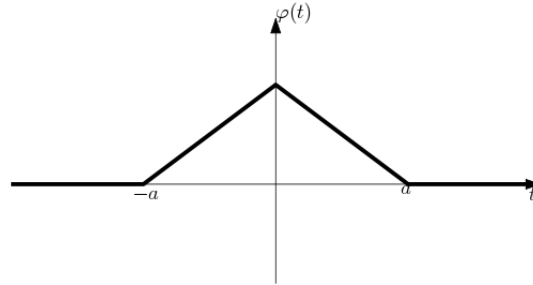
Следствие. Если $\varphi(t) = \psi(t)$ — характеристическая функция, $\alpha \in (0, 1)$, то $\alpha \varphi(t) + (1 - \alpha) \psi(t)$ — характеристическая функция.

\blacktriangle Все три условия из теоремы Бохнера-Хинчина выполнены. \blacksquare

Теорема (Пойа(б/д)). Пусть непрерывная, чётная и выпуклая вниз на $(0; +\infty)$ функция $\varphi(t)$ такова, что $\varphi(t) \geq 0$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Тогда $\varphi(t)$ — характеристическая функция.

Пример. Любая функция вида



является характеристической.

Теорема (Марцинкевича(б/д)). Если характеристическая функция $\varphi(t)$ имеет вид $\exp(P(t))$, где $P(t)$ — полином, то степень этого полинома ≤ 2 ($\deg P(t) \leq 2$).

Пример. e^{-t^n} не является характеристической функцией.

Определение. Последовательность функций $F_n(x)$ слабо сходится к $F(x)$, если $\forall f(x)$ — непрерывна и ограничена, то верно $\int_{\mathbb{R}} f(x) dF_n(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x)$.

Обозначение $F_n \xrightarrow{w} F$. ($\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F$).

Теорема (непрерывности для х.ф.).

1. Пусть $\{F_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность функций распределения на \mathbb{R} , $\varphi_n(t)_{n \in \mathbb{N}}$ — их х.ф.

Тогда $F_n \xrightarrow{w} F \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$, где φ — характеристическая функция F .

2.(б/д) Пусть $\forall t \in \mathbb{R} \exists \varphi(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t)$, причём $\varphi(t)$ непрерывна в нуле.

Тогда $\exists F$ — функция распределения такая, что $F_n \xrightarrow{w} F$ и $\varphi(t)$ — характеристическая функция F .

▲ $F_n \xrightarrow{w} F$, значит $\forall f$ — непрерывной ограниченной функции $\hookrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) dF_n(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x)$. Но функции $\sin tx$ и $\cos tx$ непрерывны и ограничены $\Rightarrow \varphi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} (\cos tx + i \sin tx) dF_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} (\cos tx + i \sin tx) dF(x) = \varphi(t)$. ■

Центральная предельная теорема

Теорема (ЦПТ в форме Леви). Пусть $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ — независимые одинаково распределённые случайные величины, $0 < D\xi < +\infty$. Обозначим $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$.

Тогда $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} N(0, 1)$.

▲ Обозначим $E\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2$. Рассмотрим случайные величины $\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma} \Rightarrow E\eta_i = 0; D\eta_i = 1$. Тогда $T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{\sqrt{n}}$. Рассмотрим характеристическую функцию η_i : по свойствам характеристической функции о разложении в ряд $\varphi(t) \equiv \varphi_{\eta_i}(t) = 1 + \underbrace{it E\eta_j}_{0} + \frac{1}{2} \underbrace{E\eta_j^2}_{1} \cdot (it)^2 + o(t^2) = 1 - \frac{t^2}{2} +$

$o(t^2), t \rightarrow 0$. Отсюда, $\varphi_{T_n}(t) = \varphi_{\sum_{j=1}^n \eta_j} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \stackrel{\text{св-ва х.ф. о независимости}}{=} \left(\varphi \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o \left(\frac{t^2}{n} \right) \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}} \forall t$. Но $e^{-\frac{t^2}{2}}$ — характеристическая функция $N(0, 1) \Rightarrow$ (по т. непрерывности) $T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$. ■

Теорема (Линдберга). [б/д] Пусть

1. случайные величины $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ независимы, и $\forall k E\xi_k^2 < +\infty$.
2. Обозначим $m_k = E\xi_k; \sigma_k^2 = D\xi_k; S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i; D_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$ и $F_k(x)$ — функция распределения ξ_k .
3. Пусть выполнено условие Линдберга:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{\{x: |x-m_k| > \varepsilon D_n\}} (x - m_k)^2 dF_k(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Тогда $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1), n \rightarrow \infty$.

Когда выполнены условия Линдберга?

1. Пусть для некоторого $\delta > 0$ выполнено условие Ляпунова:

$$\frac{1}{D_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n E|\xi_k - m_k|^{2+\delta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

тогда выполнено условие Линдберга.

▲ Пусть фиксировано $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} E|\xi_k - m_k|^{2+\delta} &= \int_{\mathbb{R}} |x - m_k|^{2+\delta} dF_k(x) \geq \\ &\geq \int_{|x-m_k| \geq \varepsilon D_n} |x - m_k|^{2+\delta} dF_k(x) \geq \varepsilon^\delta D_n^\delta \int_{|x-m_k| \geq \varepsilon D_n} |x - m_k|^2 dF_k(x) \\ &\Rightarrow \frac{1}{D_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n E|\xi_k - m_k|^{2+\delta} \geq \frac{\varepsilon^\delta}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{\{x: |x-m_k| > \varepsilon D_n\}} |x - m_k|^2 dF_k(x). \end{aligned}$$

■

2. Из условий теоремы Леви вытекает условие Линдберга.

▲ Пусть $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ — независимые одинаково распределённые случайные величины, $+\infty > D\xi_1 = \sigma^2 > 0$, $E\xi_1 = a \Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{\{x: |x-a| > \varepsilon D_n\}} |x-a|^2 dF_k(x) = \\ & = \frac{1}{n\sigma^2} \sum_{k=1}^n \int_{\{x: |x-a| > \varepsilon D_n\}} |x-a|^2 dF_1(x) = \\ & = \frac{1}{\sigma^2} \int_{|x-a| > \varepsilon \sqrt{n}\sigma} |x-a|^2 dF_1(x) \rightarrow 0, \text{ т.к. } \{x: |x-a| > \varepsilon \sqrt{n}\sigma\} \rightarrow \emptyset; \\ & \int_{\mathbb{R}} |x-a|^2 dF_1(x) < +\infty. \end{aligned}$$

■

3. Пусть $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ — независимые случайные величины, $|\xi_k| \leq K$; $D_n \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{|x-m_k| > \varepsilon D_n} (x-m_k)^2 dF_k(x) = \\ & = E((\xi_k - m_k)^2 \cdot I(|\xi_k - m_k| > \varepsilon D_n)) \leq (2K)^2 EI(|\xi_k - m_k| > \varepsilon D_n) = \\ & = (2K)^2 P(|\xi_k - m_k| > \varepsilon D_n), \end{aligned}$$

то по неравенству Чебышева это не превосходит

$$(2K)^2 \frac{\sigma_k^2}{\varepsilon^2 D_n^2}.$$

Рассмотрим сумму

$$\frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{\{x: |x-m_k| > \varepsilon D_n\}} |x-m_k|^2 dF_k(x) \leq \frac{(2K)^2}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k^2}{\varepsilon^2 D_n^2} = \frac{(2K)^2}{\varepsilon^2 D_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ т.к. } D_n \rightarrow \infty.$$

Замечание (Теорема Феллера.). Условие Линдберга является необходимым и достаточным условием для справедливости ЦПТ при выполнении условия бесконечной малости слагаемых:

$$\max_{1 \leq k \leq n} P\left(\frac{|\xi_k - m_k|}{D_n} \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема (Берри-Эссена(б/д)). Пусть $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ — независимые одинаково распределённые случайные величины, $E|\xi_1|^3 < +\infty$, $E\xi_1 = a$, $D\xi_1 = \sigma^2$, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$; $T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$. Тогда

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leq C \cdot \frac{E|\xi_1 - a|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}, \text{ где } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < C < 0,48,$$

$$\text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

8 Глава 8.

Гауссовские случайные векторы

Определение (1). Случайный вектор $\vec{\xi} \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ — гауссовский, если его характеристическая функция $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = Ee^{i(\vec{t}, \vec{\xi})} = \exp(i(\vec{m}, \vec{t}) - \frac{1}{2}(\Sigma \vec{t}, \vec{t}))$, $\vec{m} \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma \in \text{Mat}_{n \times n}$ — симметричная неотрицательно определённая матрица.

Определение (2). Случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ — гауссовский, если он представляется в следующем виде: $\vec{\xi} = A\vec{\eta} + \vec{B}$, где $\vec{B} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \text{Mat}_{n \times m}$ и $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)^T$ — независимые и $\sim N(0, 1)$.

Определение (3). Случайный вектор $\vec{\xi}$ — гауссовский, если $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ случайная величина $(\vec{\lambda}, \vec{\xi})$ имеет нормальное распределение.

Теорема. Предыдущие 3 определения эквивалентны.

▲

1. Опр 1 \Rightarrow Опр 2. Пусть $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = Ee^{i(\vec{t}, \vec{\xi})} = e^{i(\vec{t}, \vec{m}) - \frac{1}{2}(R\vec{t}, \vec{t})}$. Так как матрица R — симметричная и неотрицательно определённая, то $\exists S$ — ортогональная,

$$\text{такая что } S^T R S = D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & d_k & \\ 0 & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, d_i > 0.$$

$$\text{Определим } \tilde{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{d_k}} & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ в таком случае}$$

$$\tilde{D}^T S^T R S \tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим вектор $(S\tilde{D})^T \vec{\xi}$ и его характеристическую функцию. Докажем что он подходит с точностью до линейного преобразования. Действительно, рассмотрим характеристическую функцию этого вектора: $\varphi_{(S\tilde{D})^T \vec{\xi}}(\vec{t}) = \varphi_{\vec{\xi}}((S\tilde{D})^T \vec{t})$, так как

$$\begin{aligned} \varphi_{(S\tilde{D})^T \vec{\xi}}(\vec{t}) &= E e^{i(\vec{t}, (S\tilde{D})^T \vec{\xi})} = \exp(i((S\tilde{D})^T \vec{t}, \vec{m}) - \frac{1}{2}(R(S\tilde{D})^T \vec{t}, (S\tilde{D})^T \vec{t})) = \\ &= \exp[i(\vec{t}, (S\tilde{D})^T \vec{m}) - \frac{1}{2} \underbrace{(\tilde{D}^T S^T R S \tilde{D} \vec{t}, \vec{t})}_{= \sum_{i=1}^k t_i^2}] = \\ &= \exp[i(\vec{t}, (S\tilde{D})^T \vec{m})] \prod_{i=1}^k \varphi_{\eta_i}(t_i), \end{aligned}$$

$\eta_i \sim N(0; 1)$ и независимы по теореме единственности и теореме независимости в терминах характеристической функции \Rightarrow вектор $\vec{\eta} = (S\tilde{D})^T (\vec{\xi} - \vec{m})$ — искомый, так как $\vec{\xi} = ((S\tilde{D})^T)^{-1} \vec{\eta} + \vec{m}$.

2. Опр 2 \Rightarrow Опр 3. Если $\vec{\xi} = A\vec{\eta} + \vec{b}$, то $(\vec{\lambda}, \vec{\xi}) = (\vec{\lambda}, A\vec{\eta}) + (\vec{\lambda}, \vec{b}) = \underbrace{\lambda^T A \eta}_{\text{сл. вел.}} + \underbrace{\lambda^T b}_{\text{число}}$ —

линейная комбинация независимых нормально распределённых случайных величин. \Rightarrow то есть имеем нормальное распределение.

3. Опр 3 \Rightarrow Опр 1. Пусть $(\xi; \lambda)$ — нормально распределённая случайная величина, тогда её характеристическая функция $E e^{i(\xi, \lambda)t} = e^{iE(\xi, \lambda)t - \frac{D(\xi, \lambda)t^2}{2}}$. Подставим $t = 1 \Rightarrow E e^{i(\xi, \lambda)} = e^{i \sum_{k=1}^n \lambda_k E \xi_k - \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^n \lambda_k \lambda_l \text{cov}(\xi_k, \xi_l)} = \exp(i(\vec{\lambda}, E\vec{\xi}) - \frac{1}{2}(R\vec{t}, \vec{t}))$, $R = \text{Var } \vec{\xi}$.

■

Свойства гауссовских векторов

Свойство 1. Если $\vec{\xi} \sim N(\vec{a}, \Sigma)$, то $\vec{a} = \begin{pmatrix} E\xi_1 \\ \vdots \\ E\xi_n \end{pmatrix}$ — вектор средних, Σ — матрица ковариаций.

▲ Аналогично пункту 3 предыдущей теоремы. ■

Свойство 2. Пусть $\vec{\xi} \sim N(\vec{a}, \Sigma)$, тогда ξ_i независимы $\Leftrightarrow \Sigma$ — диагональна.

▲ Заметим, что характеристическая функция ξ_j равна $\varphi_{\xi_j}(t_j) = e^{it_j a_j - \frac{1}{2} \sigma_{jj}^2 t_j^2}$, нужно подставить $\vec{t} = (0 \dots 0, t, 0 \dots 0)$. Тогда (ξ_1, \dots, ξ_n) независимы в совокупности $\Leftrightarrow \varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(t_i) = e^{i(\vec{a}, \vec{t}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sigma_{jj}^2 t_j^2} \Leftrightarrow \Sigma$ — диагональна. ■

Свойство 3 (Коши). Гауссовские вектора — нормальные случайные величины.

▲ Следует из определения 3 для $\lambda_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (спроецируем гауссовский вектор на одну из компонент). ■

Свойство 4. $\vec{\xi}$ — гауссовский \Rightarrow любое его линейное преобразование — гауссовский вектор.

▲ Пусть $\vec{\chi} = B\vec{\xi} + \vec{c}$. По второму определению гауссовского вектора, $\vec{\chi} = B(A\vec{\eta} + \vec{b}) + \vec{c} = BA\vec{\eta} + B\vec{b} + \vec{c}$, отсюда $\vec{\chi}$ — гауссовский по определению 2. ■

Свойство 5. Пусть $\vec{\xi}$ — гауссовский. Тогда его компоненты независимые \Leftrightarrow они некоррелированы.

▲ (ξ_1, \dots, ξ_n) — попарно некоррелированы $\Leftrightarrow \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0, \forall i \neq j \Leftrightarrow \Sigma$ — диагональна \Leftrightarrow по свойству 2 компоненты $\vec{\xi}$ независимы в совокупности. ■

Свойство 6 (Явный вид плотности многомерного нормального распределения, б/д). $\text{Var } \vec{\xi} = \Sigma, \text{E} \vec{\xi} = \vec{m}$. Если матрица ковариации Σ — невырожденная, то $\vec{\xi}$ имеет плотность в \mathbb{R}^n .

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\Sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{m}), (\vec{x} - \vec{m})) \right), x \in \mathbb{R}^n.$$

Многомерная ЦПТ

Теорема (Многомерная ЦПТ). Пусть $\{\vec{x}_i\}_{i \geq 1}$ — независимые одинаково распределенные случайные вектора, $\text{E} \vec{x}_i = \vec{a}, \text{Var } \vec{x}_i = \Sigma$.

Тогда $\sqrt{n} \left(\frac{\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n}{n} - \vec{a} \right) \xrightarrow{d} N(\vec{0}, \Sigma), n \rightarrow +\infty$.

Замечание. Сходимость векторов по распределению вводится аналогично обычной сходимости случайной величины по распределению, то есть $\forall f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно ограниченных $\text{E} f(\vec{x}_n) \rightarrow \text{E} f(\vec{x})$.