Конспект лекций по курсу «Теория вероятностей»

Лектор: к. ф.-м. н. Родионов Игорь Владимирович

29 сентября 2019 г.

Содержание

1 Глава 1.

Определение. Под $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ будем понимать вероятностное пространство, где:

1. Ω — пространство элементарных исходов;
2. $\mathcal{F}$ — σ-алгебра на Ω;
3. $\mathsf{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ — вероятностная мера, причем:
   a) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$;
   b) P — σ-аддитивна, то есть $\forall \{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \in \mathcal{F}$, причем $A_n \cap A_m = \varnothing$ при $n \neq m$: $\mathsf{P}\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}(A_n)$.

Определение. Последовательность $\{A_n\}$ убывает к A, если $\forall n \hookrightarrow A_n \supseteq A_{n+1}$ и $A = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$. Последовательность $\{A_n\}$ возрастает к A, если $\forall n \hookrightarrow A_n \subseteq A_{n+1}$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Теорема (О непрерывности вероятностной меры). *[б/д] Пусть* $(\Omega, \mathcal{F})$ *— измеримое пространство и на нем определена функция* $\mathsf{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$*, удовлетворяющая следующим свойствам:*

1. $\mathsf{P}(\Omega) = 1$*;*
2. P *— конечно аддитивная.*

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. P *— вероятностная мера;*
2. $\forall A_n \downarrow A \hookrightarrow \mathsf{P}(A_n) \to \mathsf{P}(A)$ *(непрерывность снизу);*
3. $\forall A_n \uparrow A \hookrightarrow \mathsf{P}(A_n) \to \mathsf{P}(A)$ *(непрерывность сверху);*
4. $\forall A_n \downarrow \varnothing \hookrightarrow \mathsf{P}(A_n) \to 0$ *(непрерывность в нуле).*

Теорема (Каратеодори). *[б/д] Пусть* Ω *— некое множество,* $\mathcal{A}$ *— алгебра на* Ω *и* P_σ *— вероятностная мера на* $(\Omega, \mathcal{A})$*.*
Тогда существует единственная вероятностная мера на $\big(\Omega, \sigma(\mathcal{A})\big)$*, являющаяся продолжением* P_σ*, то есть* $\forall A \in \mathcal{A} \hookrightarrow \mathsf{P}_\sigma(A) = \mathsf{P}(A)$*.*

Функция распределения

Рассмотрим измеримое пространство $\big(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\big)$ и вероятностную меру P на нем.

Определение. Функция $F(x), x \in \mathbb{R}$, заданная по правилу $F(x) = \mathsf{P}\big((-\infty, x]\big)$ — функция распределения вероятностной меры P.

Лемма (свойства функции распределения). *Пусть* $F(x)$ *— функция распределения, тогда*

1. $F(x)$ *не убывает;*
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$*;* $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$*;*
3. $F(x)$ *непрерывна справа.*

▲ Пусть $y \geqslant x$, тогда $F(y) - F(x) = \mathsf{P}\big((-\infty, y]\big) - \mathsf{P}\big((-\infty, x]\big) = \mathsf{P}\big((x, y]\big) \geqslant 0$, следовательно, $F(x)$ неубывает.

Пусть $x_n \to -\infty$ при $n \to +\infty$, тогда $(-\infty, x_n] \to \varnothing$, следовательно, $F(x_n) = \mathsf{P}\big((-\infty, x_n]\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ по теореме о непрерывности вероятностной меры.

Пусть $x_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, тогда $(-\infty, x_n] \to \mathbb{R}$, следовательно, $F(x_n) = \mathsf{P}\big((-\infty, x_n]\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathsf{P}(\mathbb{R}) = 1$.

Пусть $x_n \downarrow x$, тогда $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x]$, отсюда по теореме о непрерывности вероятностной меры вытекает, что $F(x_n) = \mathsf{P}\big((-\infty, x_n]\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathsf{P}\big((-\infty, x]\big) = F(x)$. ■

Свойство 1. *Функция распределения имеет предел слева* $\forall x \in \mathbb{R}$, *при этом число точек разрыва не более, чем счетно.*

▲ Пусть $x_n \to x-0$ — возрастающая последовательность, тогда $F(x_n) = \mathsf{P}\big((-\infty, x_n]\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathsf{P}\big((-\infty, x)\big) = F(x-0)$.

Каждая точка разрыва — скачок функции распределения, каждому скачку сопоставим $[F(x-0), F(x)]$, а этому отрезку в свою очередь сопоставим некую рациональную точку, которая лежит в $(F(x-0), F(x))$. Следовательно каждому скачку мы сопоставили точку из $\mathbb{Q}$, а так как $\mathbb{Q}$ счетно, то число разрывов не более, чем счетно. ■

Определение. Функция $F(x)$, удовлетворяющая свойствам 1) – 3) из леммы, называется функцией распределения на $\mathbb{R}$.

Теорема (о взаимно однозначном соответствии между вероятностной мерой и функцией распределения на $\mathbb{R}$). *Пусть $F(x)$ — функция распределения на $\mathbb{R}$. Тогда существует единственная вероятностная мера P на $\big(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\big)$ такая, что $F(x)$ является ее функцией распределения, то есть $F(x) = \mathsf{P}\big((-\infty, x]\big)$.*

▲ Рассмотрим полукольцо $S = \big\{(a, b]\big\}$ на $\mathbb{R}$. Определим σ-аддитивную вероятностную меру $\mathsf{P}\big((a, b]\big) = F(b) - F(a)$, а по теореме Каратеодори P единственным образом продолжается на всю σ-алгебру $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. ■

Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой

1 Дискретное распределение

Пусть $\mathscr{X} \subseteq \mathbb{R}$ не более, чем счетно.

Определение. Вероятностная мера P на $\big(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\big)$, удовлетворяющая свойству $\mathsf{P}(\mathbb{R} \backslash \mathscr{X}) = 0$, называется дискретной вероятностной мерой на $\mathscr{X}$, ее функция распределения также называется дискретной.

Рассмотрим $\mathscr{X} = \{x_k\}$, положим $p_k = \mathsf{P}\big(\{x_k\}\big)$, тогда $\mathsf{P}(\mathscr{X}) = 1 = \sum\limits_k \mathsf{P}(x_k)$.

Определение. Набор чисел $\{p_k\}$ — распределение вероятностей на $\mathscr{X}$.

2 Абсолютно непрерывное распределение

Определение. Пусть $F(x)$ — функция распределения вероятностной меры P на $\mathbb{R}$, причем $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$, где $p(t) \geqslant 0$, а $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt = 1$.

Тогда P абсолютно непрерывна, $F(x)$ также называется абсолютно непрерывной, а $p(t)$ — плотность функции распределения $F(x)$. Причем $p(t)$ определена однозначно, кроме множества меры нуль.

Из формулы Ньютона-Лейбница: если $F(x)$ — дифференцируема, то $p(x) = F'(x)$.

Если $p(x)$ — плотность функции распределения $F(x)$, то $\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathsf{P}(B) = \int\limits_B p(x)dx$.

Примеры:

1. Равномерное распределение $R[a, b]$

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \cdot I\big(x \in [a, b]\big).$$

2. Нормальное (гауссовское) распределение $N(a, \sigma^2)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right].$$

3. Экспоненциальное распределение $\mathrm{Exp}(\alpha)$

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} \cdot I(x > 0).$$

4. Распределение Коши $\mathrm{Cauchy}(\theta)$

$$p(x) = \frac{\theta}{\pi\left(x^2 + \theta^2\right)}.$$

5. Гамма распределение $\Gamma(\alpha, \gamma)$

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1}\gamma^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\gamma x} \cdot I(x > 0).$$

Определение. $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$, причем $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \Gamma(n) = (n-1)!$, $\forall \lambda \in \mathbb{R} \hookrightarrow \Gamma(\lambda \pm 1) = \lambda\Gamma(\lambda)$, а $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

③ Сингулярные распределения

Определение. Пусть $F(x)$ — функция распределения на $\mathbb{R}$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется точкой роста $F(x)$, если $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow F(x_0+\varepsilon) - F(x_0-\varepsilon) > 0$.

Определение. Функция распределения называется сингулярной, если она непрерывна и множество ее точек роста имеет Лебегову меру нуль. Например, функция Кантора.

Теорема (Лебега о функции распределения). *[б/д] Пусть $F(x)$ — функция распределения на $\mathbb{R}$.*

Тогда существуют единственные α_1, α_2 и α_3, $\alpha_i \geqslant 0, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1$ и функции распределения $F_1(x), F_2(x)$ и $F_3(x)$ такие, что $F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$, где $F_1(x)$ — дискретная функция распределения, $F_2(x)$ — абсолютно непрерывная, а $F_3(x)$ — сингулярная.

Вероятностная мера в $\big(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\big)$

Определение. Пусть P — вероятностная мера в $\big(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\big)$, где $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\{B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n,\ B_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),\ i \leqslant n\}$, тогда функция $F(\vec{x}) = \mathsf{P}\big((-\infty; x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n]\big)$ называется функцией распределения вероятностной меры P в $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Пусть $\vec{x}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) \in \mathbb{R}^n$. Будем писать $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{x}$, если $\forall i, k \hookrightarrow x_i^{(k)} \geqslant x_i^{(k+1)}$ и $x_i^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x_i$.

Лемма (Свойства многомерной функции распределения). *Пусть $F(\vec{x})$ — функция распределения вероятностной меры в $\mathbb{R}^n$.*

Тогда для нее верно:

1. *Если $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{x}$, то $F\big(\vec{x}^{(k)}\big) \to F\big(\vec{x}\big), k \to +\infty$;*
2. $\lim\limits_{\forall i: x_i \to +\infty} F(\vec{x}) = 1$; $\lim\limits_{\exists i: x_i \to -\infty} F(\vec{x}) = 0$;
3. $\forall a_1 < b_1, a_2 < b_2, \ldots,\ \Delta^1_{a_1 b_1} \ldots \Delta^n_{a_n b_n} F(x) > 0$:, *где* $\Delta^i_{a_i b_i} F(\vec{x}) = F(x_1, \ldots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \ldots x_n) - F(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

▲ Первое свойство следует из непрерывности вероятностной меры, так как

$$\bigtimes_{i=1}^{n} \big(-\infty, x_i^{(k)}\big] \downarrow \bigtimes_{i=1}^{n} \big(-\infty, x_i\big].$$

Для доказательства второго пункта рассмотрим

$$B_m = \bigtimes_{i=1}^{n} \big(-\infty, \inf_{k \geqslant m} x_i^{(k)}\big].$$

Если $\forall i : x_i^k \to +\infty$, то $B_m \to \mathbb{R}^n$, $\mathsf{P}(B_m) \to \mathsf{P}(\mathbb{R}^n) = 1$. А если $\exists i : x_i^{(k)} \to -\infty$, то $B_m \to \varnothing, \mathsf{P}(B_n) \to 0$.

Не трудно понять, что

$$\Delta^1_{a_1 b_1} \dots \Delta^n_{a_n b_n} F(x) = \mathsf{P}\big((a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]\big),$$

откуда следует утверждение третьего пункта леммы. Так, например,

$$\Delta^1_{a_1 b_1} \Delta^2_{a_2, b_2} F(x) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - (F(b_1, a_2) - F(a_1, a_2)).$$

■

Теорема (О взаимооднозначном соответствии вероятностной меры и функции распределения в $\mathbb{R}^n$)**.** *[б/д] Если функция $F(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет свойствам из леммы, то существует единственная P на $\big(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\big)$, для которой $F(\vec{x})$ является функцией распределения.*

Замечание. Почему нельзя заменить свойство 3) на монотонность на любом компакте?

▲ Пусть $F(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$ на $[0, 1]^2$, но тогда $-1 = \Delta^1_{0;1} \Delta^2_{0;1} F(x_1, x_2) \neq \mathsf{P}([0, 1]^2) = 1$. Следовательно, $F(x)$ не функция распределения. ■

Определение. Функция $F(\vec{x})$, удовлетворяющая условиями из леммы называется функцией распределения в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Маргинальной функцией распределения i-й компоненты функции распределения $F(\vec{x})$ называется $F_i(x_i) = F(+\infty, \dots, +\infty, x_i, +\infty, \dots, +\infty)$.

Многомерная плотность вероятности

Определение. Если

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_n} p(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n, \ p(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0,$$

$$\int \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^n} p(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n = 1,$$

то $p(x_1, \dots, x_n)$ называется n-мерной плотностью вероятности.

Если дифференцируема $F(x_1, \dots, x_n)$, то

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F(x_1, \dots, x_n).$$

2 Глава 2.

Случайные величины

Определение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$ — два измеримых пространства. Отображение $X : \Omega \to E$, такое что $\forall B \in \mathcal{E} \hookrightarrow X^{-1} \in \mathcal{F}$ называется случайным элементом, так же его называются $\mathcal{F}$-измеримым или $\mathcal{F}|\mathcal{E}$-измеримым.
Если $(E, \mathcal{E}) = \big(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\big)$, то это случайная величина.
Если $(E, \mathcal{E}) = \big(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\big)$, то это случайный вектор.

Определение. Функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — борелевская, если $\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \varphi^{-1}(B) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

Утверждение. *Любая непрерывная и кусочно-непрерывная функция — борелевская.*

Теорема (критерий измеримости). *[б/д] Пусть $(\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathcal{E})$ — два измеримых пространства, $X : \Omega \to E$ — случайный элемент тогда, и только тогда, когда существует система событий $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$, такая что $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$ и $\forall B \in \mathcal{M} \hookrightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.*

Лемма. *Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — борелевская функция, тогда $\varphi(\vec{\xi})$ — случайный вектор.*

▲ Пусть $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$. Тогда

$$(\varphi(\vec{\xi}))^{-1}(B) = \big\{\omega : \varphi(\vec{\xi}(\omega)) \in B\big\} = \big\{\omega : \vec{\xi}(\omega) \in \varphi^{-1}(B) \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\big\} \in \mathcal{F}.$$

Так как выполняется $\forall B$, то $\varphi(\xi)$ — случайный вектор. ■

Лемма. *$\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор тогда, и только тогда, когда $\forall i : \xi_i$ — случайная величина.*

▲ *Необходимость.* $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ — непрерывная функция, значит борелевская, следовательно, по предыдущей лемме ξ_i — случайная величина.
Достаточность. $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\big(B_1 \times \ldots \times B_n, B_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\big)$, поэтому $\vec{\xi}^{-1}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \big\{\omega : \vec{\xi}(\omega) \in B_1 \times \ldots \times B_n\big\} = \big\{\omega : \xi_1(\omega) \in B_1, \ldots, \xi_n(\omega) \in B_n\big\} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \big\{\omega : \xi(\omega) \in B_i\big\} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \xi_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}$, значит, по критерию измеримости, $\vec{\xi}$ — случайный вектор. ■

Следствие. *Пусть ξ, η — случайные величины, $c \in \mathbb{R}$,тогда $\xi + \eta$, $\xi - \eta$, $c\xi$, $\xi \cdot \eta$ и ξ/η, если $\forall \omega \in \Omega : \eta \neq 0$, тоже случайные величины.*

Лемма (О пределах случайной величины). *Пусть $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ последовательность случайных величин, тогда, если пределы $\overline{\lim}\, \xi_n$, $\underline{\lim}\, \xi_n$, $\inf \xi_n$, $\sup \xi_n$ существуют, они являются случайными величинами.*

▲ $\{\omega : \sup \xi_n \leqslant x\} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \{\omega : \xi_n(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{F}$. По критерию измеримости, так как $\sigma\big(x : (-\infty, x]\big) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$, мы доказали, что $\sup \xi_n$ — случайная величина. Аналогично, $\{\omega : \inf \xi_n \geqslant x\} = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \{\omega : \xi_n(\omega) \geqslant x\} \in \mathcal{F}$, так как $\sigma\big((x, +\infty)\big) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$, по критерию измеримости $\inf \xi_n$ — случайная величина. Отсюда $\overline{\lim}\, \xi_n = \inf\limits_n \sup\limits_{m \geqslant n} \xi_m$ и $\underline{\lim}\, \xi_n = \sup\limits_n \inf\limits_{m \geqslant n} \xi_m$ тоже случайные величины. ■

Следствие. *Пусть $\xi = \lim \xi_n$ и предел существует $\forall \omega \in \Omega$, тогда ξ — случайная величина.*

▲ $\xi = \lim\limits_n \xi_n = \overline{\lim}_n \xi_n = \underline{\lim}_n \xi_n$. Тогда ξ — случайная величина. ■

Характеристики случайных величин и векторов

(1) Распределение случайной величины

Определение. Пусть $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\big)$ — вероятностное пространство, ξ — случайная величина (вектор) на нем. Распределением случайной величины называется вероятностная мера P_ξ на $\big(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\big)$ $\big((\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))\big)$, заданная по правилу $\mathsf{P}_\xi(B) = \mathsf{P}(\xi \in B)$, $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ $(B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$.

(2) Функция распределения случайной величины

Определение. Пусть $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\big)$ — вероятностное пространство, ξ — случайная величина (вектор) на нем. Функцией распределения ξ называется $F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi \leqslant x)$ $(F_\xi(\vec{x}) = \mathsf{P}(\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n))$.

(3) Дискретность и непрерывность

Определение. Случайная величина называется дискретной, если ее распределение дискретно.

Определение. Случайная величина называется абсолютно непрерывной, если ее распределение абсолютно непрерывно, то есть $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(y)dy$, $p_\xi(y) \geqslant 0$ — плотность случайной величины ξ.

Определение. Случайная величина называется сингулярной, если её распределение сингулярно.

(4) Сигма-алгебра, порожденная случайной величиной

Определение. Пусть $\xi = \xi(\omega)$ — случайная величина (вектор) на $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\big)$, тогда σ-алгеброй $\mathcal{F}_\xi$, порожденной случайной величиной ξ, называется $\mathcal{F}_\xi = \big\{\xi^{-1}(B), B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\ (\mathscr{B}(\mathbb{R}^n))\big\}$.

Определение. Пусть ξ, η — случайные величины. Тогда η является $\mathcal{F}_\xi$-измеримой, если $\mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi$.

Пример. Пусть f — борелевская, $\eta = f(\xi)$. Тогда η — $\mathcal{F}_\xi$-измерима.

▲ $\{\eta \in B\} \in \mathcal{F}_\xi$, где $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, значит $\{\eta \in B\} = \{\xi \in f^{-1}(B) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\} \in \mathcal{F}_\xi$ ■

Теорема. *[б/д] Случайная величина η — $\mathcal{F}_\xi$-измерима, тогда и только тогда, когда существует борелевская φ, такая что $\forall \omega \in \Omega \hookrightarrow \eta(\omega) = \varphi(\xi(\omega))$ почти наверное, то есть $\mathsf{P}\big(\eta = \varphi(\xi)\big) = 1$.*

Независимость случайных величин

Определение. Системы множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ независимы, если $\forall A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G} \hookrightarrow \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$.

Определение. Пусть ξ и η — случайные величины, тогда ξ и η независимы, если $\forall B_1, B_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathsf{P}(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = \mathsf{P}(\xi \in B_1) \cdot \mathsf{P}(\eta \in B_2)$.

Определение. Случайные величины $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ независимы (в совокупности), если для любого конечного набора индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \hookrightarrow \mathsf{P}(\xi_{\alpha_1} \in B_1, \ldots, \xi_{\alpha_n} \in B_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\xi_{\alpha_i} \in B_i),\ B_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), i = 1, \ldots, n$.

Теорема (Критерий независимости в терминах функции распределения)**.** *Случайные величины $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ независимы в совокупности тогда, и только тогда, когда $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \hookrightarrow \mathsf{P}(\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\xi_i \leqslant x_i)$.*

▲ $\Rightarrow$. Возьмем в качестве $B_i = (-\infty, x_i]$.

$\Leftarrow$. Не доказываем. ■

Теорема. *Пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — независимые в совокупности случайные векторы, ξ_i имеет размерность n_i. Пусть $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{k_i}$ — борелевские функции. Тогда величины $f_1(\xi_1), \ldots, f_n(\xi_n)$ — независимые в совокупности.*

▲ Обозначим $\eta_i = f_i(\xi_i) \Rightarrow \eta_i$ — $\mathcal{F}_{\xi_i}$-измеримая. По условию $\{\mathcal{F}_{\xi_i}\}_{i=1}^{n}$ — независимые σ-алгебры, следовательно $\{\mathcal{F}_{\eta_i}\}$ независимы, т.к. $\forall i : \mathcal{F}_{\eta_i} \subset \mathcal{F}_{\xi_i}$, значит по определению $\{\eta_i\}$ независимы в совокупности. ■

3 Глава 3.

Интеграл Лебега

Определение. Пусть $A \in \mathcal{F}$. Тогда индикатор множества A:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \in \overline{A}. \end{cases}$$

Определение. Случайная величина ξ называется простой, если существует разбиение $\Omega = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$, такое что $\xi(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i I_{A_i}(\omega)$.

Определение. Пусть ξ — случайная величина, тогда введем обозначения $\xi_+ = \max(\xi, 0)$, $\xi_- = \max(-\xi, 0)$. $\xi = \xi_+ - \xi_-$.

Лемма. *[б/д] $\forall \xi \geqslant 0$ существует набор простых случайных величин ξ_n: $\xi_n \uparrow \xi$ (ξ_n — простая, если $\xi_n = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i I_{A_i}$).*

Определение. Пусть ξ — простая случайная величина, то есть $\xi = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i I_{A_i}$, тогда матожидание $\mathsf{E}\xi = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i \mathsf{P}(A_i)$, где $\bigsqcup\limits_{i=1}^{k} A_i = \Omega$.

Определение. Пусть $\xi \geqslant 0$, тогда матожидание $\mathsf{E}\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\xi_n$, где $\xi_n \uparrow \xi$, ξ_n — простые неотрицательные случайные величины, также справедливо равенство $\mathsf{E}\xi = \sup\limits_{\eta \leqslant \xi} \mathsf{E}\eta$, где η — простые неотрицательные случайные величины.

Определение. Пусть ξ — произвольные случайные величины. Пусть $\xi_+ = \max(\xi, 0)$, $\xi_- = \max(-\xi, 0) \Rightarrow \xi = \xi_+ - \xi_-$, тогда матожидание

$\mathsf{E}\xi =$

$\mathsf{E}\xi_- \setminus \mathsf{E}\xi_+$	$< +\infty$	$= +\infty$
$< +\infty$	$\mathsf{E}\xi_+ - \mathsf{E}\xi_-$	$+\infty$
$= +\infty$	$-\infty$	$\nexists$

Следствие. $\mathsf{E}\xi$ *— конечно* $\Leftrightarrow$ $\mathsf{E}|\xi|$ *— конечно.*

▲ $|\xi| = \xi_+ + \xi_-$. $E|\xi|$ — конечно $\Leftrightarrow \mathsf{E}\xi_+, \mathsf{E}\xi_-$ — конечны $\Leftrightarrow \mathsf{E}\xi$ — конечно. ■

Утверждение. *Таким образом, матожидание случайной величины — это интеграл Лебега по мере* P*, то есть:*

$$\mathsf{E}\xi = \int\limits_{\Omega} \xi dP = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega).$$

Для множества A:

$$\mathsf{E}(\xi \cdot I_A) = \int\limits_{A} \xi dP.$$

Пример: Для случайной величины $\xi \sim \text{Cauchy}(\theta)$ матожидание $\mathsf{E}\xi = +\infty$, то есть матожидание не определено.

Свойства матожидания (9 штук)

Свойство 1. *Пусть ξ — случайная величина, $\mathsf{E}\xi$ — конечно, тогда $\forall c \in \mathbb{R} \hookrightarrow \mathsf{E}(c\xi)$ — конечно и $\mathsf{E}(c\xi) = c\mathsf{E}\xi$.*

▲

1. Для простых случайных величин свойство очевидно — выносим константу c за сумму.
2. Пусть $\xi \geqslant 0$, $\xi_n \uparrow \xi$ — последовательность простых неотрицательных случайных величин, $c \geqslant 0$. Тогда $c\xi_n \uparrow c\xi \Rightarrow \mathsf{E}(c\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}(c\xi_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}(\xi_n) = c\mathsf{E}\xi$.
3. В общем случае $\xi = \xi_+ - \xi_-$, тогда $(c\xi)_+ = c\xi_+$, $(c\xi)_- = c\xi_- \Rightarrow \mathsf{E}(c\xi) = \mathsf{E}(c\xi)_+ - \mathsf{E}(c\xi)_- = c\mathsf{E}\xi$. Если $c < 0$, то $(c\xi)_+ = -c\xi_-$ и $(c\xi)_- = -c\xi_+$.

■

Свойство 2. *Если $\xi \leqslant \eta, \mathsf{E}\xi, \mathsf{E}\eta$ — конечны, то $\mathsf{E}\xi \leqslant \mathsf{E}\eta$.*

▲

1. Для простых случайных величин — очевидно.
2. Для неотрицательных ξ, η $\mathsf{E}\xi = \sup\limits_{\mu \leqslant \xi} \mathsf{E}\mu$, где μ — простая случайная величина. $\sup\limits_{\mu\leqslant\xi} \mathsf{E}\mu \leqslant \sup\limits_{\mu\leqslant\eta} \mathsf{E}\mu = \mathsf{E}\eta$.
3. Пусть ξ, η — произвольные, тогда $\xi_+ \leqslant \eta_+$ и $\xi_- \geqslant \eta_-$. $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\xi_+ - \mathsf{E}\xi_- \leqslant \mathsf{E}\eta_+ - \mathsf{E}\eta_- = \mathsf{E}\eta$.

■

Свойство 3. *Если $\mathsf{E}\xi$ — конечно, то $|\mathsf{E}\xi| \leqslant \mathsf{E}|\xi|$.*

▲ $|\xi| = \xi_+ + \xi_- \Rightarrow \mathsf{E}|\xi|$ — конечно. $\underbrace{-\mathsf{E}\xi_+ - \mathsf{E}\xi_-}_{-\mathsf{E}|\xi|} \leqslant \underbrace{\mathsf{E}\xi_+ - \mathsf{E}\xi_-}_{\mathsf{E}\xi} \leqslant \underbrace{\mathsf{E}\xi_+ + \mathsf{E}\xi_-}_{\mathsf{E}|\xi|}$. ■

Свойство 4 (Аддитивность)**.** *Пусть ξ и η — случайные величины, $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{E}\eta$ — конечные, тогда $\mathsf{E}(\xi + \eta) = \mathsf{E}\xi + \mathsf{E}\eta$.*

▲

1. Для простых случайных величин — очевидно.
2. Пусть $\xi, \eta \geqslant 0$, возьмем $\xi_n \uparrow \xi$, $\eta_n \uparrow \eta$ — простые и положительные. Тогда $\xi_n + \eta_n \uparrow \xi + \eta \Rightarrow \mathsf{E}(\xi + \eta) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}(\xi_n + \eta_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\xi_n + \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\eta_n = \mathsf{E}\xi + \mathsf{E}\eta$.

3. Пусть ξ, η — произвольные, тогда $(\xi+\eta)_+ \leqslant \xi_+ + \eta_+$. Пусть $\delta = (\xi_+ + \eta_+) - (\xi + \eta)_+ \Rightarrow \mathsf{E}\delta + \mathsf{E}(\xi+\eta)_+ = \mathsf{E}\xi_+ + \mathsf{E}\eta_+ \Rightarrow \mathsf{E}(\xi+\eta)_+ = \mathsf{E}\xi_+ + \mathsf{E}\xi_+ - \mathsf{E}\delta$. Аналогично, $\mathsf{E}(\xi+\eta)_- = \mathsf{E}\xi_- + \mathsf{E}\eta_- - \mathsf{E}\delta$. Тогда $\mathsf{E}(\xi+\eta) = \mathsf{E}(\xi+\eta)_+ - \mathsf{E}(\xi+\eta)_- = \mathsf{E}\xi_+ + \mathsf{E}\eta_+ - \mathsf{E}\delta - \mathsf{E}\xi_- - \mathsf{E}\eta_- + \mathsf{E}\delta = \mathsf{E}\xi + \mathsf{E}\eta$. Рассмотрим $(\xi+\eta)_- = (\xi+\eta)_+ - (\xi+\eta) = \xi_+ + \eta_+ - \delta - (\xi+\eta) = \xi_- + \eta_- - \delta$.

■

Свойство 5. *1. Пусть $|\xi| \leqslant \eta$, $\mathsf{E}\eta$ — конечное, тогда $\mathsf{E}\xi$ — конечная.*

2. Пусть $\xi \leqslant \eta$, $\mathsf{E}\eta$ — конечное, тогда $\mathsf{E}\xi < +\infty$.
Пусть $\xi \geqslant \eta$, $\mathsf{E}\eta$ — конечное, тогда $\mathsf{E}\xi > -\infty$.

3. Если $\mathsf{E}\xi$ — конечное и $A \in \mathcal{F}$, то $\mathsf{E}(\xi \cdot I_A)$ — конечное.

▲

1. $\xi_-, \xi_+ \leqslant \eta \Rightarrow 0 \leqslant \mathsf{E}\xi_+ = \sup\limits_{0 \leqslant \mu \leqslant \xi_+} \mathsf{E}\mu \leqslant \mathsf{E}\eta < +\infty \Rightarrow \mathsf{E}\xi_+, \mathsf{E}\xi_- < +\infty \Rightarrow \mathsf{E}\xi$ — конечное.
2. $\xi_+ \leqslant \eta_+ < +\infty \Rightarrow$ по первому пункту $\mathsf{E}\xi_+ < +\infty \Rightarrow \mathsf{E}\xi < +\infty$.
3. $(\xi \cdot I_A)_+ = I_A \cdot \xi_+ < \xi_+ \Rightarrow \mathsf{E}(\xi \cdot I_A)_+$ — конечное. Аналогично $\mathsf{E}(\xi \cdot I_A)_-$ — конечное $\Rightarrow \mathsf{E}(\xi \cdot I_A)$ — конечное.

■

Определение. Событие A происходит почти наверное, если $\mathsf{P}(A) = 1$.

Свойство 6. *Если $\xi = 0$ почти наверное, то $\mathsf{E}\xi = 0$.*

▲

1. Пусть ξ — простая случайная величина, то есть $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k I_{A_k}$, где $\{x_k\}$ различные, $\{A_k\}$ — разбиение Ω, $A_k = \{\xi = x_k\}$. Тогда если $x_k \neq 0$, то $A_k = \{\xi = x_k\} \subseteq \{\xi \neq 0\} \Rightarrow \mathsf{P}(A_k) \leqslant \mathsf{P}(\xi \neq 0) = 0 \Rightarrow \mathsf{E}\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(A_k) = 0$.
2. Если $\xi \geqslant 0$, то $\mathsf{E}\xi = \sup\limits_{\xi \geqslant \eta} \mathsf{E}\eta$, где η — простые $\Rightarrow \mathsf{E}\xi \geqslant 0$. Но $0 \leqslant \eta \leqslant \xi = 0$ почти наверное $\Rightarrow \mathsf{E}\eta = 0 \Rightarrow \mathsf{E}\xi = 0$.
3. Пусть ξ — произвольные $\Rightarrow \xi_+ = 0$ почти наверное, $\xi_- = 0$ почти наверное и $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\xi_+ - \mathsf{E}\xi_- = 0$.

■

Следствие. *(Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.)*

$$\mathsf{P}(A) = 0, A \in \mathcal{F} \Rightarrow \int\limits_A \xi d\mathsf{P} = 0.$$

▲ $\xi \cdot I_A = 0$ п.н. $\Rightarrow 0 = \mathsf{E}(\xi \cdot I_A) = \int\limits_A \xi d\mathsf{P}$. ■

Свойство 7. *Если $\xi = \eta$ почти наверное и $\mathsf{E}|\eta| < +\infty$, то $\mathsf{E}|\xi| < +\infty$ и $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\eta$.*

▲ Пусть $A = \{\xi \neq \eta\}$, тогда $I_A = 0$ почти наверное, следовательно $\xi \cdot I_A = 0$ почти наверное и $\eta \cdot I_A = 0$ почти наверное. Так как $\xi = \xi \cdot I_A + \xi \cdot I_{\overline{A}}$, то $\xi = \xi \cdot I_A + \eta \cdot I_{\overline{A}}$, потому что на $\overline{A}$ выполняется $\xi = \eta$. Из свойства 6 имеем $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}(\xi \cdot I_A) + \mathsf{E}(\eta \cdot I_{\overline{A}}) = \mathsf{E}(\eta \cdot I_A) + E(\eta \cdot I_{\overline{A}}) = \mathsf{E}\eta$. ■

Свойство 8. *Пусть $\xi \geqslant 0$ и $\mathsf{E}\xi = 0$, тогда $\xi = 0$ почти наверное.*

▲ Рассмотрим события $A = \{\xi > 0\}$ и $A_n = \left\{\xi > \frac{1}{n}\right\}$, следовательно, $A_n \uparrow A$. Имеем $\mathsf{P}(A_n) = \mathsf{E}I_{A_n}$, так как $n\xi > 1$ на A_n, то $\mathsf{E}I_{A_n} \leqslant \mathsf{E}(n\xi \cdot I_A) \leqslant n\mathsf{E}\xi = 0$, значит, $\mathsf{P}(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{P}(A_n) = 0$. ■

Свойство 9. *Пусть $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{E}\eta$ конечны, $\forall A \in \mathcal{F} \hookrightarrow \mathsf{E}(\xi \cdot I_A) \leqslant \mathsf{E}(\eta \cdot I_A)$. Тогда $\xi \leqslant \eta$ почти наверное.*

▲ Рассмотрим событие $B = \{\xi > \eta\}$. Из условия и построения B получаем, что $\mathsf{E}(\eta \cdot I_B) \leqslant \mathsf{E}(\xi \cdot I_B) \leqslant \mathsf{E}(\eta \cdot I_B)$, следовательно, $\mathsf{E}(\xi \cdot I_B) = \mathsf{E}(\eta \cdot I_B)$, значит $\mathsf{E}\big((\xi - \eta) \cdot I_B\big) = 0$. Так как $(\xi - \eta) \cdot I_B \geqslant 0$, то по свойству 8 $(\xi - \eta) \cdot I_B = 0$ почти наверное, следовательно $I_B = 0$ почти наверное, потому что $\xi - \eta > 0$ на B. ■

Теорема (о математическом ожидании произведения случайных величин)**.** *Пусть $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$, причем $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{E}\eta$ конечны, тогда $\mathsf{E}\xi\eta$ конечно и $\mathsf{E}\xi\eta = \mathsf{E}\xi \cdot \mathsf{E}\eta$.*

▲

1. Пусть ξ и η — простые случайные величины, то есть ξ принимает значения $\{x_1, \ldots, x_n\}$, η принимает значения $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Тогда по линейности

$$\mathsf{E}\xi\eta = \sum_{k,j=1}^{n} x_k y_j \mathsf{P}(\xi = x_k, \eta = y_j) = \sum_{k,j=1}^{n} x_k y_j \mathsf{P}(\xi = x_k) \cdot \mathsf{P}(\eta = y_j) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(\xi = x_k) \sum_{j=1}^{n} y_j \mathsf{P}(\eta = y_j) = \mathsf{E}\xi \cdot \mathsf{E}\eta.$$

2. Рассмотрим $\xi_n \uparrow \xi$,

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{n\cdot 2^n - 1} \frac{k}{2^n} I\left(\frac{k}{2^n} \leqslant \xi \leqslant \frac{k+1}{2^n}\right) + nI(\xi > n),$$

следовательно, $\xi_n = \varphi_n(\xi)$, значит, ξ_n — $\mathcal{F}_\xi$-измеримая.

Пусть $\xi, \eta \geqslant 0$. Существует последовательность $\mathcal{F}_\xi$-измеримых ($\mathcal{F}_\eta$-измеримых) простых неотрицательных простых функций $\xi_n \uparrow \xi$ ($\eta_n \uparrow \eta$). Так как $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$, то $\xi_n = \varphi_n(\xi) \perp\!\!\!\perp \varphi_n(\eta) = \eta_n$. Следовательно, $\xi_n \cdot \eta_n \uparrow \xi \cdot \eta$, а по определению математического ожидания $\mathsf{E}\xi\eta = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{E}(\xi_n\eta_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{E}\xi_n \cdot \mathsf{E}\eta_n = \mathsf{E}\xi \cdot \mathsf{E}\eta$.

3. Пусть теперь ξ и η — произвольные случайные величины. ξ^+ и ξ^- — функции от ξ, η^+ и η^- — функции от η, следовательно, $\xi^+ \perp\!\!\!\perp \eta^+$ и $\xi^- \perp\!\!\!\perp \eta^-$, отсюда $(\xi\eta)^+ = \xi^+\eta^+ + \xi^-\eta^-$ значит, $\mathsf{E}(\xi\eta)^+ = \mathsf{E}\xi^+\eta^+ + \mathsf{E}\xi^-\eta^- = \mathsf{E}\xi^+\mathsf{E}\eta^+ + \mathsf{E}\xi^-\mathsf{E}\eta^-$, аналогично $\mathsf{E}(\xi\eta)^- = \mathsf{E}\xi^+\eta^- + \mathsf{E}\xi^-\eta^+ = \mathsf{E}\xi^+\mathsf{E}\eta^- + \mathsf{E}\xi^-\mathsf{E}\eta^+$. Осталось заметить, что $\mathsf{E}\xi\eta = \mathsf{E}(\xi\eta)^+ - \mathsf{E}(\xi\eta)^- = \mathsf{E}\xi^+\mathsf{E}\eta^+ + \mathsf{E}\xi^-\mathsf{E}\eta^- - \mathsf{E}\xi^+\mathsf{E}\eta^- - \mathsf{E}\xi^-\mathsf{E}\eta^+ = (\mathsf{E}\xi^+ - \mathsf{E}\xi^-)(\mathsf{E}\eta^+ - \mathsf{E}\eta^-) = \mathsf{E}\xi \cdot \mathsf{E}\eta$.

■

Пусть $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot I(\xi = x_i)$ — простая случайная величина. Тогда $\mathsf{E}g(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i) \cdot \mathsf{P}(\xi = x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta F_\xi(x_i)$, где $\Delta F_\xi(x_i) = F_\xi(x_i) - F_\xi(x_i - 0)$.

Теорема (о замене переменной в интеграле Лебега)**.** *[б/д] Пусть*

1. *$(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$ — два измеримых пространства;*
2. *$X : \Omega \to E$ — $\mathcal{F}$-измеримая функция, то есть $\forall B \in \mathcal{E} \hookrightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$;*
3. *P — вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$;*
4. *P_X — вероятностная мера на $(E, \mathcal{E})$, заданная по правилу $\mathsf{P}_X(A) = \mathsf{P}(\omega : X(\omega) \in A)$ для $A \in \mathcal{E}$.*

Тогда для любой $\mathcal{E}$-измеримой функции $g(x) : E \to \mathbb{R}$, то есть $\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow g^{-1}(B) \in \mathcal{E}$, верно,

$$\int\limits_A g(x)\mathsf{P}_X(dx) = \int\limits_{X^{-1}(A)} g\big(X(\omega)\big)\mathsf{P}(d\omega).$$

Следствие (1)**.** *Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$, в таком случае вероятностная мера P_ξ однозначно восстанавливается по F_ξ, следовательно, по теореме $\mathsf{E}g(\xi) = \int g(\xi)\, d\mathsf{P} = \int g(x)\mathsf{P}_\xi(dx) = \int g(x)\, dF_\xi(x)$.*

Следствие (2)**.** *Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью $p_\xi(x)$, тогда $dF_\xi(x) = p_\xi(x)\, dx$, следовательно $\mathsf{E}g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)p_\xi(x)\, dx$.*

Прямое произведение вероятностных пространств и формула свертки

Определение. Пусть $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathsf{P}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathsf{P}_2)$ — два вероятностных пространства. Тогда $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — их прямое произведение, если

1. $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, то есть $\omega = (\omega_1, \omega_2)$;
2. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, то есть $\mathcal{F} = \sigma\big\{\{B_1 \times B_2\} | B_1 \in \mathcal{F}_1, B_2 \in \mathcal{F}_2\big\}$;

3. $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 \otimes \mathsf{P}_2$, то есть P — продолжение вероятностной меры $\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$, заданное на прямоугольнике $B_1 \times B_2, B_1 \in \mathcal{F}_1, B_2 \in \mathcal{F}_2$ по правилу $\mathsf{P}(B_1 \times B_2) = \mathsf{P}_1(B_1) \cdot \mathsf{P}_2(B_2)$. Так как $\{B_1 \times B_2\}$ — полукольцо, то P существует и единственна по теореме Каратеодори.

Теорема (Фубини)**.** *[б/д] Пусть*

1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *— прямое произведение вероятностных пространств* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathsf{P}_1)$ *и* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathsf{P}_2)$.
2. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *такая, что* $\int\limits_{\Omega} \left|\xi(\omega_1, \omega_2)\right| d\mathsf{P} < +\infty$.

Тогда интегралы

$$\int\limits_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2)\mathsf{P}_1(d\omega_1) \text{ и } \int\limits_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2)\mathsf{P}_2(d\omega_2)$$

1. *определены почти наверное относительно* P_2 *и* P_1 *соответственно;*
2. *являются измеримыми случайными величинами относительно* $\mathcal{F}_2$ *и* $\mathcal{F}_1$.
3. $$\int\limits_{\Omega} \xi(\omega_1, \omega_2)\, d\mathsf{P} = \int\limits_{\Omega_2}\int\limits_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2)\mathsf{P}_1(d\omega_1)\mathsf{P}_2(d\omega_2) = \int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2)\mathsf{P}_2(d\omega_2)\mathsf{P}_1(d\omega_1).$$

Из всего этого следует, что двойной интеграл равен повторному.

Утверждение. *Пусть* $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$ *— случайные величины, тогда* $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2), \mathsf{P}_{(\xi,\eta)}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\xi) \otimes (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\eta)$.

▲ Достаточно проверить свойство прямого произведения:

1. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
2. $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ по определению борелевской σ-алгебры в $\mathbb{R}^2$;
3. $\mathsf{P}_{(\xi,\eta)}(B_1 \times B_2) = \mathsf{P}(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = \mathsf{P}(\xi \in B_1) \cdot \mathsf{P}(\eta \in B_2) = \mathsf{P}_\xi(B_1) \cdot \mathsf{P}_\eta(B_2)$. ■

Лемма (о свертке)**.** *Пусть случайные величины* ξ *и* η *независимы с функциями распределения* F_ξ *и* F_η*. Тогда*

1. *Выполняется равенство:*

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(z - x)\, dF_\eta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\eta(z - x)\, dF_\xi(x).$$

2. Если ξ и η имеют плотности распределения f_ξ и f_η соответственно, то $\xi+\eta$ имеет плотность распределения

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\xi(z-x)f_\eta(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\eta(z-x)f_\xi(x)\,dx$$

.

▲ Заметим, $F_{\xi+\eta}(z) = \mathsf{P}(\xi+\eta\leqslant z) = \mathsf{E}I(\xi+\eta\leqslant z)$, а по теореме о замене переменных в интеграле Лебега это равно $\int\limits_{\mathbb{R}^2} I(x+y\leqslant z)\mathsf{P}_\xi(dx)\mathsf{P}_\eta(dy)$, полученный двойной интеграл по Фубини можно записать как повторный:

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} I(x+y\leqslant z)\mathsf{P}_\xi(dx)\right)\mathsf{P}_\eta(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{-\infty}^{z-y}\mathsf{P}_\xi(dx)\right)\mathsf{P}_\eta(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(z-y)\,dF_\eta(y).$$

Перейдем ко второму пункту доказательства:

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} I(x+y\leqslant z)\mathsf{P}_\xi(dx)\mathsf{P}_\eta(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} I(x+y\leqslant z)f_\xi(x)f_\eta(y)\,dx\,dy \overset{t=x+y}{=}$$

$$\overset{t=x+y}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^2} I(t\leqslant z)f_\xi(x)f_\eta(t-x)\,dx\,dt = \int\limits_{-\infty}^{z}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f_\xi(x)f_\eta(t-x)\,dx\right)dt.$$

Следовательно, по определению плотности, $f_{\xi+\eta}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\xi(x)f_\eta(t-x)\,dx$. ■

Дисперсия и ковариация

Определение. Дисперсией случайной величины ξ называется $\mathsf{D}\xi = \mathsf{E}(\xi-\mathsf{E}\xi)^2$, если $\mathsf{E}\xi < +\infty$. Очевидно, $\mathsf{D}\xi \geqslant 0$.

Определение. Ковариацией двух случайных величин называется $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathsf{E}\big((\xi-\mathsf{E}\xi)(\eta-\mathsf{E}\eta)\big)$. Легко заметить, что $\operatorname{cov}(\xi,\xi) = \mathsf{D}\xi$.

Определение. Если $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$, то случайные величины ξ и η называются некоррелированными.

Определение. Величина $\rho(\xi,\eta) = \dfrac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathsf{D}\xi\cdot\mathsf{D}\eta}}$ называется коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η при условии, что $\mathsf{D}\xi$ и $\mathsf{D}\eta$ не равны нулю и конечны.

Свойства ковариации и дисперсии (7 штук)

Свойство 1. $\operatorname{cov}(a\xi + b\zeta, \eta) = a\operatorname{cov}(\xi, \eta) + b\operatorname{cov}(\zeta, \eta)$. *Ковариация билинейна.*

Свойство 2. $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathsf{E}\xi\eta - \mathsf{E}\xi \cdot \mathsf{E}\eta \Rightarrow \mathsf{D}\xi = \mathsf{E}\xi^2 - (\mathsf{E}\xi)^2$.

▲ $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)(\eta - \mathsf{E}\eta) = \mathsf{E}\xi\eta - \mathsf{E}\big((\mathsf{E}\xi)\cdot\eta\big) - \mathsf{E}\big((\mathsf{E}\eta)\cdot\xi\big) + \mathsf{E}\xi\cdot\mathsf{E}\eta = \mathsf{E}\xi\eta - \mathsf{E}\xi\cdot\mathsf{E}\eta$ ■

Свойство 3. *Пусть $c \in \mathbb{R}$, тогда* $\mathsf{D}(c\xi) = c^2\mathsf{D}\xi$, $\mathsf{D}(\xi + c) = \mathsf{D}\xi$, $\mathsf{D}c = 0$.

▲
$$\mathsf{D}(c\xi) = \mathsf{E}c^2\xi^2 - (\mathsf{E}c\xi)^2 = c^2\mathsf{E}\xi^2 - c^2(\mathsf{E}\xi)^2 = c^2\mathsf{D}\xi;$$
$$\mathsf{D}(c+\xi) = \mathsf{E}\big(c + \xi - \mathsf{E}(c+\xi)\big)^2 = \mathsf{E}(c + \xi - c - \mathsf{E}\xi)^2 = \mathsf{D}\xi;$$
$$\mathsf{D}c = \mathsf{E}(c - \mathsf{E}c)^2 = \mathsf{E}(c-c)^2 = 0.$$
■

Свойство 4 (Неравенство Коши-Буняковского)**.** $|\mathsf{E}\xi\eta|^2 \leqslant \mathsf{E}\xi^2 \cdot \mathsf{E}\eta^2$

▲ Рассмотрим для $\lambda \in \mathbb{R}$ функцию $f(\lambda) = \mathsf{E}(\xi - \lambda\eta)^2 \geqslant 0$. Имеем $f(\lambda) = \mathsf{E}\xi^2 + 2\lambda\mathsf{E}\xi\eta + \lambda^2\mathsf{E}\eta^2 \geqslant 0$. Для выполнения неравенства дискриминант полученного многочлена должен быть меньше нуля: $D = 4\mathsf{E}\xi\eta - 4\mathsf{E}\xi^2\eta^2 \leqslant 0$, откуда следует неравенство. ■

Свойство 5. $|\rho(\xi,\eta)| \leqslant 1$, *причем* $\rho(\xi,\eta) = \pm 1 \Leftrightarrow \xi = a\eta + b$ *почти наверное.*

▲

1. Рассмотрим случайные величины $\xi_1 = \xi - \mathsf{E}\xi$ и $\eta_1 = \eta - \mathsf{E}\eta$, следовательно $\rho(\xi_1, \eta_1) = \dfrac{\mathsf{E}\xi_1\eta_1}{\sqrt{\mathsf{E}\xi_1^2 \cdot \mathsf{E}\eta_1^2}} \leqslant 1$ по неравенству Коши-Буняковского.
2. Пусть $\rho(\xi_1, \eta_1) = 1$. Из $\dfrac{\mathsf{E}\xi_1\eta_1}{\sqrt{\mathsf{E}\xi_1^2 \cdot \mathsf{E}\eta_1^2}} = 1$ получим: $(\mathsf{E}\xi_1\eta_1)^2 = \mathsf{E}\xi_1^2 \cdot \mathsf{E}\eta_1^2$.

   Рассмотрим для $\lambda \in \mathbb{R}$ функцию $f(\lambda) = \mathsf{E}(\xi_1 - \lambda\eta_1)^2 = \mathsf{E}\xi^2 + 2\lambda\mathsf{E}\xi\eta + \lambda^2\mathsf{E}\eta^2 \geqslant 0$, учитывая полученное ранее: $\dfrac{D}{4} = (\mathsf{E}\xi_1\eta_1)^2 - \mathsf{E}\xi_1^2\mathsf{E}\eta_1^2 = 0$, следовательно, $\exists!\lambda_0 : f(\lambda_0) = 0$, то есть $\mathsf{E}(\xi_1 + \lambda_0\eta_1)^2 = 0$, отсюда $(\xi_1 + \lambda_0\eta)^2 = 0$ почти наверное, а, значит, и $\xi_1 + \lambda_0\eta = 0$ почти наверное. Теперь можно заключить, что $\xi = \mathsf{E}\xi - \lambda_0(\eta - \mathsf{E}\eta)$.

■

Свойство 6. *Если $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$, то* $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$, *обратное неверное.*

▲ $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathsf{E}\xi\eta - \mathsf{E}\xi\cdot\mathsf{E}\eta$, но так как $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$, то $\mathsf{E}\xi\eta = \mathsf{E}\xi\cdot\mathsf{E}\eta$, следовательно, $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$. ■

Лемма. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — попарно некоррелированные случайные величины (например, независимые в совокупности),* $\mathsf{D}\xi_1 + \ldots + \mathsf{D}\xi_n < +\infty$, *тогда* $\mathsf{D}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \mathsf{D}\xi_1 + \ldots + \mathsf{D}\xi_n$.

▲
$$\mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i, \sum_{j=1}^{n}\xi_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j).$$

По условию, если $i \neq j$, то $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$, следовательно

$$\mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathsf{D}\xi_i.$$

■

Многомерный случай

Определение. Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор, тогда его математическим ожиданием называется вектор из математических ожиданий его компонент, то есть $\mathsf{E}\vec{\xi} = (\mathsf{E}\xi_1, \ldots, \mathsf{E}\xi_n)$.

Определение. Матрицей коварияций случайного вектора $\vec{\xi}$ называется

$$\operatorname{Var}\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_1) & \cdots & \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_1) & \cdots & \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_n) \end{pmatrix} = \left\|\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)\right\|_{i,j=1}^{n}.$$

Лемма. *Матрица коварияций случайного вектора — симметрическая и неотрицательно определенная*[1].

▲ Матрица $\operatorname{Var}\vec{\xi} = \left\|\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)\right\|_{i,j=1}^{n}$ — симметрическая, так как $r_{ij} \equiv \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \operatorname{cov}(\xi_j, \xi_i) \equiv r_{ji}$. Пусть $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, тогда

$$\vec{x}^T \operatorname{Var}\vec{\xi}\vec{x} = (\vec{x}, \operatorname{Var}\vec{\xi}\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n}\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n}\operatorname{cov}(x_i\xi_i, x_j\xi_j) =$$
$$= \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\xi_i, \sum_{j=1}^{n}x_j\xi_j\right) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\xi_i, \sum_{i=1}^{n}x_i\xi_i\right) = \mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\xi_i\right) \geqslant 0.$$

■

Неравенства (3 штуки)

Лемма (Неравенство Маркова)**.** *Пусть* $\xi \geqslant 0$ *— случайная величина,* $\mathsf{E}\xi < +\infty$*. Тогда* $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mathsf{P}(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathsf{E}\xi}{\varepsilon}$.

[1] Матрица A неотрицательно определена, если $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x}^T A\vec{x} \geqslant 0$

▲ $\mathsf{P}(\xi \geqslant \varepsilon) = \mathsf{E}I(\xi \geqslant \varepsilon)$. На множестве $\xi \geqslant \varepsilon$ случайная величина $\dfrac{\xi}{\varepsilon} \geqslant 1$, следовательно $\mathsf{E}I(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathsf{E}\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon} \cdot I(\xi \geqslant \varepsilon)\right) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon} \cdot \mathsf{E}\xi$. ■

Лемма (Неравенство Чебышёва)**.** *Пусть ξ — случайная величина такая, что $\mathsf{D}\xi < +\infty$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mathsf{P}\big(|\xi - \mathsf{E}\xi| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \dfrac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}$.*

▲ $\mathsf{P}\big(|\xi - \mathsf{E}\xi| \geqslant \varepsilon\big) = \mathsf{P}\big(|\xi - \mathsf{E}\xi|^2 \geqslant \varepsilon^2\big)$. Из неравенства Маркова имеем, что $\mathsf{P}\big(|\xi - \mathsf{E}\xi|^2 \geqslant \varepsilon^2\big) \leqslant \dfrac{\mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^2}{\varepsilon^2} = \dfrac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}$. ■

Лемма (Неравенство Йенсена)**.** *Пусть $g(x)$ — борелевская выпуклая вниз (вверх) функция и $\mathsf{E}\xi < +\infty$. Тогда $\mathsf{E}g(\xi) \geqslant g(\mathsf{E}\xi)$ ($\mathsf{E}g(\xi) \leqslant g(\mathsf{E}\xi)$).*

▲ Так как $g(x)$ выпукла вниз, то $\forall x_0 \in \mathbb{R} : g(x) \geqslant g(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0)$. Положим $x = \xi$ и $x_0 = \mathsf{E}\xi$, тогда $g(\xi) \geqslant g(\mathsf{E}\xi) + \lambda(\mathsf{E}\xi)(\xi - \mathsf{E}\xi)$, считая математическое ожидание от обоих частей неравенства, получаем $\mathsf{E}g(\xi) \geqslant g(\mathsf{E}\xi) + 0$. ■

Теорема (ЗБЧ в форме Чебышёва)**.** *Пусть*

1. *$\{\xi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ — попарно некоррелированные случайные величины, причем $\forall n \hookrightarrow \mathsf{D}\xi_n \leqslant C$.*
2. *Обозначим $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$.*

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mathsf{P}\left(\left|\dfrac{S_n - \mathsf{E}S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \to 0$ при $n \to +\infty$.
То же самое: $\dfrac{S_n - \mathsf{E}S_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ при $n \to +\infty$

▲ По неравенству Чебышёва

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathsf{D}S_n}{n^2\varepsilon^2} \leqslant \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} \to 0.$$

■

Следствие. *Пусть $\{\xi_n\}_{i=1}^{+\infty}$ — независимые случайные величины такие, что:*

1. *$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \mathsf{D}\xi_n \leqslant C$,*
2. *$\mathsf{E}\xi_n = a$.*

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mathsf{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) \to 0$ при $n \to +\infty$.
То же самое: $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} a$ при $n \to +\infty$.

4 Глава 4.

Условные математические ожидания (УМО)

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство; $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина; $\mathcal{F}_\xi = \{\xi^{-1}(B), B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$ — σ-алгебра, порожденная ξ.

Определение. ξ называется $\mathcal{G}$-измеримой, если:

1. $\mathcal{G}$ — подσ-алгебра σ-алгебры $\mathcal{F}$;
2. $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{G}$.

Определение. Пусть ξ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $\mathcal{G}$ — подσ-алгебра $\mathcal{F}$.

Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно $\mathcal{G}$ называется случайная величина $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$, обладающая следующими свойствами:

1. $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$ является $\mathcal{G}$-измеримой случайной величиной;
2. $\forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow \mathsf{E}(\xi \cdot I_A) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_A\big)$ или, что тоже самое, $\int\limits_A \xi \, d\mathsf{P} = \int\limits_A \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \, d\mathsf{P}$.

Обозначаем $\mathsf{E}(\xi|\eta) \equiv \mathsf{E}(\xi|\mathcal{F}_\eta)$, если такая η существует.

Определение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство. Функция множеств $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ — заряд (мера со знаком), если ν — σ-аддитивна на $\mathcal{F}$, то есть $\nu\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \nu(A_i)$ для $\{A_i\}_{i=1}^{+\infty} \in \mathcal{F}$, ряд в правой части сходится абсолютно и $\sup\limits_{A \in \mathcal{F}} |\nu(A)| < +\infty$.

Любой заряд можно разложить в разность двух мер.

Определение. Заряд ν называется абсолютно непрерывным относительно меры P (не обязательно вероятностной), если $\forall A \in \mathcal{F} \hookrightarrow \big(\mathsf{P}(A) = 0 \;\Rightarrow\; \nu(A) = 0\big)$.

Теорема (Радона-Никодима). *[б/д] Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, ν — заряд на $\mathcal{F}$, абсолютно непрерывный относительно меры P.*

Тогда существует и единственна почти наверное случайная величина η на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ такая, что $\mathsf{E}\eta < +\infty$ и $\nu(A) = \int\limits_A \eta \, d\mathsf{P} = \mathsf{E}\eta \cdot I_A$.

Утверждение. *Вероятностная мера $\mathsf{P}(A) = \int\limits_A p(x)dx$, то есть плотность — это производная Радона-Никодима P_ξ по мере Лебега на $\mathbb{R}$.*

Лемма (о существовании УМО). *Пусть ξ — случайная величина с $\mathsf{E}|\xi| < +\infty$. Тогда $\forall \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ (подσ-алгебра) $\hookrightarrow \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$ существует и единственно почти наверное.*

▲ Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{G}, \mathsf{P})$. Положим, что $\forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow Q(A) = \int\limits_A \xi \, d\mathsf{P} = \mathsf{E}(\xi \cdot I_A)$, следовательно, $Q(A)$ — заряд на $(\Omega, \mathcal{G}, \mathsf{P})$, абсолютно непрерывный относительно меры P. Тогда по теореме Радона-Никодима существует и единственна почти наверное случайная величина η на $(\Omega, \mathcal{G}, \mathsf{P})$ с $\mathsf{E}\eta < +\infty$ такая, что $Q(A) = \int\limits_A \eta \, d\mathsf{P}$. Значит, η — УМО. Действительно, η $\mathcal{G}$-измерима и $\forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow \int\limits_A \eta \, d\mathsf{P} = \int\limits_A \xi \, d\mathsf{P} \Rightarrow \eta = \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$. ■

Теорема. *Пусть σ-алгебра $\mathcal{G}$ порождена разбиением Ω на $\{D_n\}_{n=1}^{+\infty}$, причем, $\mathsf{P}(D_n) > 0$, $\mathsf{E}\xi < +\infty$.*
Тогда $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\mathsf{E}(\xi \cdot I(\omega \in D_n))}{\mathsf{P}(D_n)} \cdot I(\omega \in D_n)$.

▲ Пусть η $\mathcal{G}$-измерима. Покажем, что $\eta = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n I_{D_n}(\omega)$. Пусть $\eta \neq \mathrm{const}$ на D_n, тогда $\exists a \neq b : \{\omega : \eta(\omega) = a\} \cap D_n \neq \varnothing$ и $\{\omega : \eta(\omega) = b\} \cap D_n \neq \varnothing$, следовательно, $\{\omega : \eta(\omega) = a\} \cap D_n = D_n$ и $\{\omega : \eta(\omega) = b\} \cap D_n = D_n$, иначе $\{\omega : \eta(\omega) = a\} \notin \mathcal{G}$, то есть η не $\mathcal{G}$-измерима. Получили противоречие.
Найдем $c_n : \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n I_{D_n}$, так как $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$ $\mathcal{G}$-измерима по определению.

$$\mathsf{E}(\xi \cdot I_{D_n}) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_{D_n}\big) = \mathsf{E}\left(\sum_{m=1}^{+\infty} c_m I_{D_m} I_{D_n}\right) = \mathsf{E}(c_n I_{D_n}) = c_n \mathsf{P}(D_n).$$

Следовательно, $c_n = \dfrac{\mathsf{E}(\xi \cdot I_{D_n})}{\mathsf{P}(D_n)}$. ■

Утверждение. $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$ *— усреднение ξ по σ-алгебре $\mathcal{G}$.*

Свойства УМО (9 штук)

Все матожидания ниже существуют, то есть $\mathsf{E}|\xi| < +\infty, \mathsf{E}|\eta| < +\infty$.
Свойство МО : если $\forall A \in \mathcal{F} \hookrightarrow \mathsf{E}(\xi \cdot I_A) = \mathsf{E}(\eta \cdot I_A)$, то $\xi = \eta$ почти наверное на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$

Свойство 1. *Если ξ — $\mathcal{G}$-измерима, то $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \xi$ почти наверное.*

▲ ξ удовлетворяет свойствам УМО: первому по условиям, а второму, поскольку $\int\limits_A \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \, d\mathsf{P} = \int\limits_A \xi \, d\mathsf{P}$. Следовательно, $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \xi$ почти наверное. ■

Свойство 2 (формула полной вероятности). $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\big) = \mathsf{E}\xi$.

▲ Так как $\Omega \in \mathcal{G}$, то по интегральному свойству $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\big) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_\Omega\big) = \mathsf{E}(\xi \cdot I_\Omega) = \mathsf{E}\xi$. ■

Свойство 3 (линейность). $\mathsf{E}(\alpha\xi+\beta\eta|\mathcal{G}) = \alpha\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) + \beta\mathsf{E}(\eta|\mathcal{G})$.

▲ $\alpha\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) + \beta\mathsf{E}(\eta|\mathcal{G})$ $\mathcal{G}$-измерима. Осталось проверить интегральное свойство:

$$\forall A \in G \hookrightarrow \int\limits_A \big(\alpha\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) + \beta\mathsf{E}(\eta|\mathcal{G})\big)\,d\mathsf{P} = \alpha\int\limits_A \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\,d\mathsf{P} + \beta\int\limits_A \mathsf{E}(\eta|\mathcal{G})\,d\mathsf{P} =$$

$$= \alpha\int\limits_A \xi\,d\mathsf{P} + \beta\int\limits_A \eta\,d\mathsf{P} = \int\limits_A (\alpha\xi+\beta\eta)\,d\mathsf{P} = \int\limits_A \mathsf{E}(\alpha\xi+\beta\eta|\mathcal{G})\,d\mathsf{P}$$

Объяснение последнего равенства: для случайной величины $\alpha\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) + \beta\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$ выполняются два свойства УМО, значит поскольку УМО существует и единственно, то нашли образец который подходит: $\alpha\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) + \beta\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$, то есть он является УМО: $\mathsf{E}(\alpha\xi+\beta\eta|\mathcal{G}) = \alpha\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) + \beta\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$. ■

Свойство 4. *Пусть ξ не зависит от $\mathcal{G}$, то есть $\mathcal{F}_\xi \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$. Тогда $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \mathsf{E}\xi$ почти наверное.*

▲ Пусть $\xi \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$, что равносильно $\forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow \xi \perp\!\!\!\perp I_A$. $\mathsf{E}\xi$ — константа, следовательно, она измерима относительно $\mathcal{G}$, так как $\mathcal{F}_{\mathsf{E}\xi} = \{\Omega, \varnothing\}$. Интегральное свойство УМО: $\mathsf{E}(\xi\cdot I_A) = \boxed{\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\cdot I_A\big)} = \mathsf{E}\xi\cdot\mathsf{P}(A) = \boxed{\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi)\cdot I_A\big)}$, следовательно, $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$. ■

Свойство 5. *(Свойство монотонности.) Пусть $\xi \leqslant \eta$ почти наверное, тогда $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \leqslant \mathsf{E}(\eta|\mathcal{G})$ почти наверное.*

▲ $\xi \leqslant \eta$ почти наверное, следовательно, $\forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow \int\limits_A \xi\,d\mathsf{P} \leqslant \int\limits_A \eta\,d\mathsf{P}$, что равносильно $\int\limits_A \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\,d\mathsf{P} \leqslant \int\limits_A \mathsf{E}(\eta|\mathcal{G})\,d\mathsf{P}$, а из свойств математического ожидания вытекает, что $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \leqslant \mathsf{E}(\eta|\mathcal{G})$ почти наверное. ■

Свойство 6. $\big|\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\big| \leqslant \mathsf{E}\big(|\xi|\big|\mathcal{G}\big)$ *п.н.*

▲ $-|\xi| \leqslant \xi \leqslant |\xi|$ из свойства монотонности. ■

Свойство 7 (телескопическое свойство). *Пусть $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$, тогда*

1. $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_1)\big|\mathcal{G}_2\big) = \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_1)$ *почти наверное,*
2. $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_2)\big|\mathcal{G}_1\big) = \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_1)$ *почти наверное.*

▲ $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_1)$ $\mathcal{G}_2$-измерима, следовательно, по первому свойству

$$\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_1)\big|\mathcal{G}_2\big) = \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_1).$$

Пусть $A \in \mathcal{G}_1$, следовательно, $A \in \mathcal{G}_2$.

$$\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_1)\cdot I_A\big) = \mathsf{E}(\xi\cdot I_A) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_2)\cdot I_A\big) = \mathsf{E}\Big(\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_2)\big|\mathcal{G}_1\big)\cdot I_A\Big).$$

По свойству математического ожидания $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_1) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_2)\big|\mathcal{G}_1\big)$.

■

Свойство 8. *[б/д] Пусть* $\forall n > 1 \hookrightarrow |\xi_n| \leqslant \eta$, $\mathsf{E}\eta < +\infty$ *и* $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$.
Тогда $\forall \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \hookrightarrow \mathsf{E}(\xi_n|\mathcal{G}) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$.

Свойство 9. *Пусть* η *—* $\mathcal{G}$*-измерима,* $\mathsf{E}|\xi\eta| < +\infty$, $\mathsf{E}|\xi| < +\infty$.
Тогда $\mathsf{E}(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$ *почти наверное.*

▲ Пусть $\eta = I_B$, где $B \in \mathcal{G}$. Тогда

$$\forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi\eta|\mathcal{G}) \cdot I_A\big) = \mathsf{E}(\xi\eta \cdot I_A) = \mathsf{E}(\xi I_B I_A) = \\ = \mathsf{E}(\xi I_{A\cap B}) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_{A\cap B}\big) = \mathsf{E}\big(\eta\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_A\big).$$

Следовательно, $\mathsf{E}(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$ почти наверное по свойству математического ожидания.

Так как доказали для индикаторов, то доказали и для любой простой функции. Теперь пусть η — произвольная случайная величина. Возьмем последовательно простых $\mathcal{F}_\eta$-измеримых случайных величин $\eta_n : |\eta_n| \leqslant |\eta|$ и $\eta_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \eta$. По свойству 8 $\cancel{\mathsf{E}(\xi\eta|\mathcal{G})} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E}(\xi\eta|\mathcal{G}) = \cancel{\eta_n\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})} \to \eta\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$, то есть $\mathsf{E}(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$ почти наверное. ■

Теорема (о наилучшем квадратичном прогнозе). *Пусть* ξ *— случайная величина,* $\mathcal{G}$ *— под*σ*-алгебра* $\mathcal{F}$. *Обозначим* $\mathcal{A}_\mathcal{G} = \{\eta$ *- сл. вел.*$|\eta$ *—* $\mathcal{G}$*-измеримая сл. вел.*$\}$.
Тогда $\inf\limits_{\eta\in\mathcal{A}_\mathcal{G}} \mathsf{E}(\xi - \eta)^2 = \mathsf{E}\big(\xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\big)^2$.

▲ Пусть $\eta \in \mathcal{A}_\mathcal{G}$, тогда

$$\mathsf{E}(\xi - \eta)^2 = \mathsf{E}\big(\xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) + \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) - \eta\big)^2 = \\ = \mathsf{E}\big(\xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\big)^2 + \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) - \eta\big)^2 + 2\mathsf{E}\Big(\big(\xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\big)\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) - \eta\big)\Big).$$

Пусть $\varkappa \equiv \xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$, $\psi \equiv \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) - \eta$. Рассмотрим $\mathsf{E}(\varkappa\psi)$, по свойству 2 это равно $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\varkappa\psi|\mathcal{G})\big)$, а по свойству 9, это можно переписать, как $\mathsf{E}\big(\psi\mathsf{E}(\varkappa|\mathcal{G})\big)$. Но $\mathsf{E}(\varkappa|\mathcal{G}) = \mathsf{E}\big((\xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}))\big|\mathcal{G}\big) = 0$, следовательно, $\mathsf{E}(\varkappa\psi) = 0$. Значит $\mathsf{E}(\xi - \eta)^2 = \mathsf{E}\big(\xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\big)^2 + \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) - \eta\big)^2 \geqslant \mathsf{E}\big(\xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\big)^2$. Равенство достигается, если $\mathsf{E}(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) - \eta)^2 = 0 \Rightarrow \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \eta$ п.н. ■

Условные распределения

Определение. Пусть $A \in \mathcal{F}$, тогда по определению $\mathsf{P}(A|\mathcal{G}) = \mathsf{E}(I_A|\mathcal{G})$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.
Если ξ, η — случайные величины на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, то $\mathsf{E}(\xi|\eta) = \mathsf{E}(\xi|\mathcal{F}_\eta)$.

Определение. Величиной $\mathsf{E}(\xi|\eta = y)$ называется такая борелевская функция $\varphi(y)$, что $\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathsf{E}(\xi \cdot I(\eta \in B)) = \int\limits_B \varphi(y)\mathsf{P}_\eta(dy)$.

Лемма. *Если* $\mathsf{E}\xi < +\infty$, *то* $\mathsf{E}(\xi|\eta = y)$ *существует и единственно почти наверное относительно* P_η.

▲ Рассмотрим $\psi(B) = \mathsf{E}\big(\xi \cdot I(\eta \in B)\big)$ — заряд на $\big(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\eta\big)$, потому что $\psi(B)$ σ-аддитивна по свойству интеграла Лебега и конечна, так как $\mathsf{E}(\xi) < +\infty$. ψ абсолютно непрерывна относительно P_η, так как если $\mathsf{P}_\eta(B) = 0$, то $I(\eta \in B) = 0$ почти наверное, следовательно, $\mathsf{E}\big(\xi \cdot I(\eta \in B)\big) = 0$, а, значит, выполнены условия теоремы Радона-Никодима, то есть существует и единственна почти наверное случайная величина φ на $\big(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), P_\eta\big)$ (борелевская функция) такая, что $\psi(B) = \int\limits_B \varphi(y) \mathsf{P}_\eta(dy)$. ■

Лемма. $\mathsf{E}(\xi|\eta = y) = \varphi(y)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathsf{E}(\xi|\eta) = \varphi(\eta)$ *почти наверное.*

▲ Пусть $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, тогда $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\eta) \cdot I(\eta \in B)\big) = \mathsf{E}\big(\xi \cdot I(\eta \in B)\big) = \int\limits_B \varphi(y) \mathsf{P}_\eta(dy)$. По теореме о замене переменных в интеграле Лебега это можно переписать, как $\int\limits_{\{\eta \in B\}} \varphi(\eta)\, d\mathsf{P} = \mathsf{E}\big(\varphi(\eta) \cdot I(\eta \in B)\big)$, что равносильно условию $\mathsf{E}(\xi|\eta) = \varphi(\eta)$ почти наверное по Свойству. Обратно аналогично, по тем же равенствам. ■

Следствие. *Пусть* ξ *—* $\mathcal{F}_\eta$*-измеримая случайная величина, тогда существует борелевская функция* $\psi(x)$ *такая, что* $\xi = \psi(\eta)$ *почти наверное.*

▲ Так как ξ — $\mathcal{F}_\eta$-измеримая, то по свойству 1 $\xi = \mathsf{E}(\xi|\eta)$ почти наверное. С другой стороны, так как существует единственная $\psi(x) : \psi(x) = \mathsf{E}(\xi|\eta = x)$, то $\xi = \mathsf{E}(\xi|\eta) = \psi(\eta)$. ■

Определение. Условным распределением случайной величины ξ при условии $\eta = y$ называется вероятностная мера $\mathsf{P}(\xi \in B|\eta = y) = \mathsf{E}\big(I(\xi \in B)|\eta = y\big)$. Является мерой на $\mathscr{B}(R)$.

Определение. Условной плотностью случайной величины ξ относительно η называется плотность условного распределения $\mathsf{P}(\xi \in B|\eta = y)$, то есть борелевская функция $f_{\xi|\eta}(x|y)$ такая, что $\mathsf{P}(\xi \in B|\eta = y) = \int\limits_B f_{\xi|\eta}(x|y)\, dx$.

Теорема (о свойстве условной плотности). *Пусть существует условная плотность случайной величины* ξ *относительно случайной величины* η *—* $f_{\xi|\eta}(x|y)$. *Тогда для любой борелевской функции* $g(x)$ *такой, что* $\mathsf{E}\big|g(\xi)\big|$ *существует, выполнено* $\mathsf{E}\big(g(\xi)|\eta = y\big) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) f_{\xi|\eta}(x|y)\, dx$ *относительно* P_η *почти наверное.*

▲ Пусть также $g(x) = I_A(x), A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_{\xi|\eta}(x|y)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} I_A(x) \cdot f_{\xi|\eta}(x|y)\, dx = \int\limits_A f_{\xi|\eta}(x|y)\, dx =$$
$$= \mathsf{P}(\xi \in A|\eta = y) = \mathsf{E}\big(I(\xi \in A)|\eta = y\big) = \mathsf{E}\big(g(\xi)|\eta = y\big)\big).$$

Так как доказали для индикаторов, то доказали и для всех простых функций $g(x)$. Далее с помощью теоремы Лебега для условных математических ожиданий доказываем для всех $g(x)$. ($\mathsf{E}(\xi_n|\eta) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E}(\xi|\eta)$, где $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, ξ_n — простые). ■

Теорема (Достаточное условие существования условной плотности.)**.** *Пусть ξ и η — случайные величины такие, что существует их совместная плотность $f_{(\xi,\eta)}(x,y)$. Пусть $f_\eta(y)$ — плотность случайной величины η.*
Тогда функция

$$\varphi(x,y) = \frac{f_{(\xi,\eta)}(x,y)}{f_\eta(y)} \cdot I\big(f_\eta(y) > 0\big)$$

есть условная плотность $f_{\xi|\eta}(x|y)$.

▲ Для любых $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ выполнено

$$\mathsf{P}(\xi \in B, \eta \in A) = \int\limits_{B \rtimes A} f_{(\xi,\eta)}(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_A \left(\int\limits_B \frac{f_{(\xi,\eta)}(x,y)}{f_\eta(y)}\,dx \right) f_\eta(y)\,dy,$$

с другой стороны

$$\mathsf{P}(\xi \in B, \eta \in A) = \mathsf{E}\big(I(\xi \in B, \eta \in A)\big) = \int\limits_{\{\eta \in A\}} I(\xi \in B)\,d\mathsf{P}.$$

Далее по интегральному свойству получаем, что

$$\mathsf{P}(\xi \in B, \eta \in A) = \int\limits_{\{\eta \in A\}} \mathsf{E}\big(I(\xi \in B)|\eta\big)\,d\mathsf{P},$$

заменяя переменные, окончательно имеем следующее:

$$\mathsf{P}(\xi \in B, \eta \in A) = \int\limits_A \mathsf{E}\big(I(\xi \in B|\eta = y)\big)\mathsf{P}_\eta(dy) =$$

$$= \int\limits_A \mathsf{P}(\xi \in B|\eta = y)\mathsf{P}_\eta(dy) = \int\limits_A \mathsf{P}(\xi \in B|\eta = y) f_\eta(y)\,dy.$$

■

Алгоритм подсчета УМО

1. Найти совместную плотность $f_{(\xi,\eta)}(x,y)$, затем $f_\eta(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{(\xi,\eta)}(x,y)\,dx$, тогда условная плотность $f_{\xi|\eta}(x|y) = \dfrac{f_{(\xi,\eta)}(x,y)}{f_\eta(y)}$.
2. Вычислить $\varphi(y) = \mathsf{E}\big(g(\xi)|\eta = y\big) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) f_{\xi|\eta}(x|y)\,dx$.
3. Тогда $\mathsf{E}\big(g(x)|\eta\big) = \varphi(\eta)$.

5 Глава 5.

Виды сходимости случайных величин

Определение. ξ_n и ξ — случайные величины.

1. $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$, если $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mathsf{P}\big(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
2. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, если $\mathsf{P}(\omega : \xi_n \to \xi) = 1$,
3. $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$, если $\mathsf{E}|\xi_n|^p < +\infty$, $\mathsf{E}|\xi|^p < +\infty$ и $\mathsf{E}|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $(p > 0)$,
4. $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, если для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$ выполнено $\mathsf{E}f(\xi_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathsf{E}f(\xi)$.

Теорема (Александрова). *[б/д] $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ тогда только тогда, когда $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{\text{в основном}} F_\xi(x)$, то есть $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$ во всех точках непрерывности функции распределения $F_\xi(x)$.*

Лемма (критерий сходимости почти наверное). *$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mathsf{P}\big(\omega : \sup\limits_{k\geqslant n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

▲ Пусть $A_k^\varepsilon = \big\{\omega : |\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon\big\}$, $A^\varepsilon = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k^\varepsilon = \big\{\omega : \forall n\ \exists k \geqslant n : |\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon\big\}$.
Тогда $\big\{\omega : \xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega)\big\} = \bigcup\limits_{m=1}^{+\infty} A^{\frac{1}{m}} = \big\{\omega : \exists m\ \forall n\ \exists k \geqslant n : |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \frac{1}{m}\big\}$.
Следовательно, по непрерывности вермеры:

$$\mathsf{P}\big(\omega : \xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega)\big) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{P}\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} A^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} \hookrightarrow \mathsf{P}\left(A^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mathsf{P}\left(A^\varepsilon\right) = 0,$$

так как всегда существует m, что $\frac{1}{m} \geqslant \varepsilon \geqslant \frac{1}{m+1}$, то есть $A^{\frac{1}{m+1}} \supseteq A^\varepsilon \supseteq A^{\frac{1}{m}}$. Но $\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k^\varepsilon \downarrow A^\varepsilon$, следовательно,

$$0 = \mathsf{P}\left(A^\varepsilon\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k^\varepsilon\right) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mathsf{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k^\varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mathsf{P}\big(\omega : \sup_{k\geqslant n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

■

Теорема (взаимоотношения различных видов сходимости)**.**

$$\begin{array}{ccc} \textit{п.н.} & \searrow & \\ & & \mathsf{P} \longrightarrow d \\ L_p & \nearrow & \end{array}$$

▲ (п.н. $\Rightarrow \mathsf{P}$) $\qquad \xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \mathsf{P}\big(\omega : \sup\limits_{k\geqslant n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\big) \to 0$, но

$$\big\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\big\} \subset \big\{\omega : \sup_{k\geqslant n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\big\},$$

следовательно, $\mathsf{P}\big(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \mathsf{P}\big(\sup\limits_{k\geqslant n} |\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon\big) \to 0$.

($L_p \Rightarrow \mathsf{P}$) $\qquad \mathsf{P}\big(|\xi_n-\xi| \geqslant \varepsilon\big) = \mathsf{P}\big(\omega : |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|^p \geqslant \varepsilon^p\big) \leqslant \dfrac{\mathsf{E}|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^p}{\varepsilon^p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (неравенство Маркова).

($\mathsf{P} \Rightarrow d$) $\qquad$ Пусть $f(x)$ — ограниченная непрерывная функция, тогда $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow |f(x)| \leqslant C$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, возьмем $N \in \mathbb{R} : \mathsf{P}\big(|\xi| > N\big) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4C}$. На отрезке $[-N, N]$ функция $f(x)$ равномерно непрерывна, следовательно,

$$\exists\delta > 0 \ \ \forall x, y \in [-N, N] \hookrightarrow \left(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Рассмотрим разбиение Ω:

$$\begin{aligned} A_1 &= \big\{\omega : |\xi(\omega)| < N,\ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leqslant \delta\big\}, \\ A_2 &= \big\{\omega : |\xi(\omega)| > N,\ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leqslant \delta\big\}, \\ A_3 &= \big\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \delta\big\}. \end{aligned}$$

Оценим

$$\big|\mathsf{E}f(\xi_n) - \mathsf{E}f(\xi)\big| \leqslant \mathsf{E}\big|f(\xi_n) - f(\xi)\big| = \mathsf{E}\big[|f(\xi_n) - f(\xi)| \cdot (I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3})\big] \boxed{\leqslant}.$$

Пусть $\omega \in A_1$, тогда, так как $|\xi_n-\xi| \leqslant \delta$, то $|x-y| \leqslant \delta$, а значит $\big|f(\xi_n)-f(\xi)\big| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, следовательно, $\mathsf{E}\big[|f(\xi_n) - f(\xi)| \cdot I_{A_1}\big] \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \cdot \mathsf{E}I_{A_1} = \dfrac{\varepsilon}{2} \cdot \mathsf{P}(A_1) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Если же $\omega \in A_2, A_3$, то $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leqslant 2C$ так как f ограничена.

Значит, $\boxed{\leqslant} \dfrac{\varepsilon}{2} + 2C\cdot\mathsf{P}(A_2) + 2C\cdot\mathsf{P}(A_3) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + 2C\cdot\mathsf{P}\big(|\xi| > N\big) + 2C \cdot \overbrace{\mathsf{P}\big(|\xi_n - \xi| > \delta\big)}^{0,\ \text{т. к. } \xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi} \leqslant C_1\varepsilon$, где $\mathsf{P}\big(|\xi| > N\big) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4C}$. Следовательно, в силу произвольности ε, $\mathsf{E}f(\xi_n) \to \mathsf{E}f(\xi)$, то есть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. ■

Контрпримеры

Пример (п.н. $\not\Rightarrow L_p$, а значит, $\mathsf{P} \not\Rightarrow \mathrm{L}_p$ и $d \not\Rightarrow L_p$)**.** Рассмотрим $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathscr{B}\big([0,1]\big)$, P — мера Лебега на $[0,1]$. Пусть $\xi_n = e^n \cdot I_{[0,\frac{1}{n}]}$, тогда $\forall \omega \in (0,1)\ \exists n :$ $\omega > \dfrac{1}{n} \Rightarrow \forall k \geqslant n\ \xi_k(\omega) = 0$ (значит имеется сходимость п.н.), следовательно $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi = 0$, но $\mathsf{E}|\xi_n - \xi|^p = e^{np} \cdot \dfrac{1}{n} \to +\infty$, значит сходимости в L_p нет.

Пример ($L_p \not\Rightarrow$ п.н., $\mathsf{P} \not\Rightarrow$ п.н., $d \not\Rightarrow$ п.н.)**.** Рассмотрим $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathscr{B}\big([0,1]\big)$, P — мера Лебега на $[0,1]$. Возьмем $\xi_{2^n+i} = I\left(\omega \in \left[\dfrac{i}{2^n}, \dfrac{i+1}{2^n}\right)\right)$, $i = 0, \ldots, 2^n - 1$; $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\xi_k \xrightarrow{L_p} 0$ при $k \to +\infty$, так как $\mathsf{E}|\xi_k - 0|^p = \dfrac{1}{2^n} \cdot 1^p \to 0$, где $n = [\log_2 k]$. Но $\forall \omega$ из $[0,1]$ $\exists$ бесконечно много ξ_i таких, что $\xi_i(\omega) = 1$ и $\xi_i(\omega) = 0$, следовательно, $\forall \omega \hookrightarrow \xi_i(\omega) \nrightarrow 0$, ровно как и к 1, в смысле почти наверное.

Пример ($d \not\Rightarrow \mathsf{P}$)**.** Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathsf{P}(\omega_i) = \dfrac{1}{2}$, $\forall n \hookrightarrow \xi_n(\omega_1) = 0, \xi_n(\omega_2) = 1$. Тогда $\xi_n \sim \mathrm{Bern}\left(\frac{1}{2}\right)$. $\xi(\omega_1) = 0, \xi(\omega_2) = 1$, значит, $\xi \sim \mathrm{Bern}\left(\frac{1}{2}\right)$, следовательно, по теореме Александрова $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, но $\mathsf{P}\big(|\xi_n - \xi| > 0.5\big) = 1$, значит, $\xi_n \overset{\mathsf{P}}{\not\to} \xi$.

Определение. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ фундаментальна почти наверное, если $\mathsf{P}\big(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| \to 0\big) = 1$ при $n, m \to +\infty$.

Лемма (критерий фундаментальности почти наверное)**.** *[б/д] Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ фундаментальна почти наверное тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mathsf{P}\big(\omega : \sup\limits_{k \geqslant n} |\xi_k(\omega) - \xi_n(\omega)| \geqslant \varepsilon\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.*

Теорема (критерий Коши сходимость почти наверное)**.** *Последовательно случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится почти наверное тогда и только тогда, когда $\{\xi_n\}$ фундаментальна почти наверное.*

▲ $(\Rightarrow)$ Пусть $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, тогда, если $\omega \in \big\{\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\big\}$, то по критерию Коши для числовых последовательностей $\omega \in \big\{\omega : \{\xi_n\}$ — фундаментальная$\big\}$, следовательно, $\mathsf{P}\big(\omega : \{\xi_n(\omega)\}$ — фундаментальная$\big) \geqslant \mathsf{P}\big(\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\big) = 1$.

$(\Leftarrow)$ Обозначим $A = \{\omega : \{\xi_n\}$ — фундаментальная$\big\}$. Построим такую случайную величину ξ, что $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$. По критерию Коши для любого $\omega \in A$ у последовательности $\big\{\xi_n(\omega)\big\}$ существует предел $\xi(\omega)$. Положим по определению $\xi(\omega) = \lim\limits_{n \to +\infty} \xi_n(\omega) \cdot I_A(\omega)$. Тогда $\xi_n \cdot I_A \to \xi$ во всех точках, то есть ξ — случайная величина, как предел случайных величин, и $\mathsf{P}\big(\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\big) = \mathsf{P}(A) = 1$. ■

Определение. Пусть $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность событий, тогда событием $\{A_n$ бесконечно часто (б.ч.)$\}$ называется событие $\{\omega : \forall n\ \exists k \geqslant n : \omega \in A_k\}$, то есть все такие ω, что ω принадлежит бесконечному числу элементов из $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. $\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k \geqslant n}^{\infty} A_k$.

Лемма (Бореля-Кантелли)**.** *1. Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) < +\infty$*, то* $\mathsf{P}(A_n \text{ б.ч.}) = 0$.

2. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) = +\infty$ *и* $\{A_k\}$ *независимы в совокупности, то* $\mathsf{P}(A_n \text{ б.ч.}) = 1$.

▲

1. $\mathsf{P}(A_n \text{ б.ч.}) = \mathsf{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k\geqslant n}^{\infty} A_k\right) \boxed{=}$. Известно, что $\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_n \downarrow \{A_n \text{ б.ч.}\}$, следовательно, по непрерывности вероятностной меры имеем $\boxed{=} \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k\right) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k\geqslant n} \mathsf{P}(A_k) = 0$ т.к. ряд сходится.

2. Заметим, что $\mathsf{P}(A_n \text{ б.ч.}) = \mathsf{P}\big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k\big) =$ /по непрерывности вермеры/ $= \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k\right) =$ /по законам да Моргана/ $= \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \mathsf{P}\left(\bigcap\limits_{k\geqslant n} \overline{A_k}\right)\right)$, (надо доказать, что P в скобках стремится к нулю). Покажем это:

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{k\geqslant n} \overline{A}\right) = \text{/непрерывность вермеры/} = \lim_{N\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}\right) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} \mathsf{P}\left(\overline{A_k}\right) =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} [1 - \mathsf{P}(A_k)] \leqslant /1 - x \leqslant e^{-x}/ \geqslant \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} \exp\left(-\mathsf{P}\left(A_k\right)\right) =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \exp\left(-\sum_{k=n}^{N} \mathsf{P}\left(A_k\right)\right) = \exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}\left(A_k\right)\right) = 0.$$

В последнем равенстве сумма равна бесконечности, так как это сумма хвоста расходящегося ряда.

Значит, продолжая равенство выше, получаем что $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - 0) = 1$.

■

Определение. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ фундаментальна по вероятности, если

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mathsf{P}\big(\omega : |\xi_k - \xi_n| > \varepsilon\big) \xrightarrow[n,k\to\infty]{} 0.$$

Теорема (Рисса)**.** *Если последовательность случайных величин* $\{\xi_n\}$ *фундаментальна (или сходится) по вероятности, то из нее можно выделить подпоследовательность* $\{\xi_{n_k}\}$ *фундаментальную (сходящуюся) почти наверное.*

▲ Т.к. фундаментальность п.н. $\Leftrightarrow$ сходимость п.н., то докажем, что можно выделить подпоследовательность $\{\xi_{n_k}\}$, сходящуюся почти наверное. Пусть $n_1 = 1$. По индукции определим n_k, как наименьшее $n > n_{k-1}$ такое, что $\forall s \geqslant n, t \geqslant n \hookrightarrow \mathsf{P}\big(|\xi_t - \xi_s| > 2^{-k}\big) < 2^{-k}$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\big(|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| > 2^{-k}\big) < \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < +\infty$, следовательно, по лемме Бореля-Кантелли $\mathsf{P}\big(|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| > 2^{-k} \text{ б.ч.}\big) = 0$, значит, почти наверное $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| < +\infty$. Пусть $\mathcal{N} = \left\{\omega : \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \big|\xi_{n_{k+1}}(\omega) - \xi_{n_k}(\omega)\big| = +\infty\right\}$, тогда $\mathsf{P}(\mathcal{N}) = 0$. Положим $\xi(\omega) = \left(\xi_{n_1}(\omega) + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \big(\xi_{n_{k+1}}(\omega) - \xi_{n_k}(\omega)\big)\right) \cdot I(\omega \in \mathcal{N})$, где ряд в скобках сходится на $\omega \in \Omega/\mathcal{N}$. Получаем, $\sum\limits_{j=1}^{k} (\xi_{n_j+1} - \xi_{n_j}) + \xi_{n_1} = \xi_{n_{k+1}} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$.

Пусть теперь $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$, тогда

$$\mathsf{P}\big(|\xi_m - \xi_n| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \mathsf{P}\left(|\xi_n - \xi| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathsf{P}\left(|\xi_m - \xi| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Следовательно, из сходимости по вероятности следует фундаментальность по вероятности, а дальше все тоже самое (из фундаментальности следует, что можно выделить сходящуюся подпоследовательность. ■

Теорема (критерий Коши сходимости по вероятности)**.** *$\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$ тогда и только тогда, когда $\{\xi_n\}$ фундаментальна по вероятности.*

▲ $(\Rightarrow)$ Следует из теоремы Рисса.

$(\Leftarrow)$ Если $\{\xi_n\}$ фундаментально по вероятности, то по теореме Рисса существует подпоследовательность $\{\xi_{n_k}\}$ такая, что $\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, то есть из связи между разными видами сходимости: $\xi_{n_k} \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$. Тогда $\mathsf{P}\big(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \cancelto{0,\text{ т.к. фунд.}}{\mathsf{P}\left(|\xi_n - \xi_{n_k}| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)} + \cancelto{0,\text{ т.к. сход.}}{\mathsf{P}\left(|\xi_{n_k} - \xi| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$ ■

Теорема (Неравенство Колмогорова)**.** *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины такие, что*

1. $\mathsf{E}\xi_i = 0$, $\mathsf{E}\xi_i^2 < +\infty$.
2. *Обозначим* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mathsf{P}\left(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\mathsf{E}S_n^2}{\varepsilon^2}$.

▲ Обозначим $A = \{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\}$. Разобьем A на несколько непересекающихся событий, то есть $A_k = \big\{|S_k| \geqslant \varepsilon\big\}$ и $\forall i \leqslant k-1 \hookrightarrow |S_i| \leqslant \varepsilon$, следовательно,

$A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Тогда

$$\mathsf{E}(S_n^2 \cdot I_{A_k}) = \mathsf{E}\big((S_k + \underbrace{\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n}_{\overline{S_k}})^2 \cdot I_{A_k}\big) =$$
$$= \mathsf{E}(S_k^2 \cdot I_{A_k}) + \mathsf{E}\left(\overline{S_k}^2 \cdot I_{A_k}\right) + 2\mathsf{E}\left(S_k\overline{S_k} \cdot I_{A_k}\right) = (*).$$

Докажем, что $\mathsf{E}\big(S_k\overline{S_k}I_{A_k}\big) = 0$, I_{A_k} зависит от $(S_1, \ldots, S_k)$ и не зависит от $(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$. Следовательно, $S_k \cdot I_{A_k} \perp\!\!\!\perp \overline{S_k}$, так как $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\} \perp\!\!\!\perp \{\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n\}$, а, значит, $\mathsf{E}(S_k \cdot I_{A_k} \cdot \overline{S_k}) = \mathsf{E}(S_k \cdot I_{A_k}) \cdot \cancelto{0}{\mathsf{E}\overline{S_k}} = 0$. Отсюда

$$(*) = \mathsf{E}(S_k^2 \cdot I_{A_k}) + \mathsf{E}\left(\overline{S_k}^2 \cdot I_{A_k}\right) \geqslant \mathsf{E}(S_k^2 \cdot I_{A_k}) \geqslant \varepsilon^2 \cdot \mathsf{E}I_{A_k} = \varepsilon^2 \cdot \mathsf{P}(A_k).$$

В итоге,

$$\mathsf{E}S_n^2 \geqslant \mathsf{E}(S_n^2 \cdot I_A) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(S_n^2 \cdot I_{A_k}) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_k) \cdot \varepsilon^2 = \mathsf{P}(A) \cdot \varepsilon^2.$$

■

Теорема (Колмогорова-Хинчина о сходимости ряда)**.** *Пусть $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых случайных величин такая, что $\mathsf{E}\xi_n = 0$ и $\mathsf{E}\xi_n^2 < +\infty$.*
Тогда, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\xi_n^2 < +\infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится почти наверное.

▲ Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. По критерию Коши $\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n \text{ сходится п.н.}\right\}$ равносильно тому, что $\{S_n$ фундаментально п.н.$\}$, а это в свою по критерию фундаментальности равносильно тому, что

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mathsf{P}\left(\sup_{k\geqslant n} |S_k - S_n| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Докажем это. Очевидно, что

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k\geqslant n} |S_k - S_n| \geqslant \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} \big\{|S_k - S_n| \geqslant \varepsilon\big\}\right) =$$

а из непрерывности вероятностной меры следует, что

$$= \lim_{N\to+\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{N} \big\{|S_k - S_n| \geqslant \varepsilon\big\}\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathsf{P}\left(\max_{n\leqslant k\leqslant N} |S_k - S_n| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant$$

А по неравенству Колмогорова:

$$\leqslant \lim_{N\to+\infty} \frac{\mathsf{E}(S_N - S_n)^2}{\varepsilon^2} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon^2}\mathsf{E}\left(\sum_{k=n+1}^{N} \xi_k\right)^2 = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon^2}\mathsf{E}\sum_{k=n+1}^{N} \xi_k^2 =$$

Второе равенство, поскольку случайные величины независимы и с нулевым матожиданием.
Так как ξ_k независимы, то

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=n+1}^{N} \mathsf{E}\xi_k^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k>n} \mathsf{E}\xi_k^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

■

Лемма (Тёплица)**.** *Пусть* $x_n \to x$ *— числовая последовательность, числа* $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ *таковы, что* $\forall n \hookrightarrow a_n \geqslant 0$ *и* $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \uparrow +\infty$*.*

Тогда $\dfrac{1}{b_n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$*.*

▲ Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем n_0 так, что $\forall n > n_0 \hookrightarrow |x_n - x| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Выберем $n_1 > n_0$ такое, что $\dfrac{1}{b_{n_1}}\sum\limits_{k=1}^{n_0} a_k|x_k - x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, тогда

$$\forall n > n_1 \hookrightarrow \left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k x_k - x\right| = \left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k x_k - \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k x\right| \leqslant \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k|x_k - x| =$$
$$= \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n_0} a_k|x_k - x| + \frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0+1}^{n} a_k|x_k - x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \leqslant \varepsilon.$$

■

Лемма (Кронекера)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится,* $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ *такова, что* $a_n \geqslant 0$*,* $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \uparrow +\infty$*.*

Тогда $\dfrac{1}{b_n}\sum\limits_{k=1}^{n} b_k x_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*.*

▲ Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, тогда $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$. Воспользуемся методом суммирования Абеля:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j = \sum_{j=1}^{n} b_j(S_j - S_{j-1}) = b_n S_n - \sum_{j=1}^{n} S_{j-1}(b_j - b_{j-1}) = b_n S_n - \sum_{j=1}^{n} S_{j-1}a_j.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k x_k = S_n - \overbrace{\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} S_{j-1}a_j}^{\to S \text{ по Тёплицу}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

■

Теорема (УЗБЧ в форме Колмогорова-Хинчина)**.** *Пусть*

1. *случайные величины* $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ *независимы и* $\forall n \hookrightarrow \mathsf{D}\xi_n < +\infty$*;*
2. *числа* $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$*,* $b_1 > 0$ *и* $b_n \uparrow +\infty$*, такие что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathsf{D}\xi_n}{b_n^2} < +\infty$*;*
3. *обозначим* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$*.*

Тогда $\dfrac{S_n - \mathsf{E}S_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{п.н.}} 0$*.*

▲ Преобразуем:

$$\frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{b_n} = \frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \frac{\xi_i - \mathsf{E}\xi_i}{b_i}.$$

Обозначим $\eta_i = \dfrac{\xi_i - \mathsf{E}\xi_i}{b_i}$. Случайные величины η_i независимы и $\mathsf{E}\eta_i = 0$. Значит,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{E}\eta_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}(\xi_i - \mathsf{E}\xi_i)^2}{b_i^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathsf{D}\xi_i}{b_i^2} < +\infty.$$

Следовательно, по теореме Колмогорова-Хинчина о сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \eta_i$ сходится почти наверное. По лемме Кронекера последовательность

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \frac{\xi_i - \mathsf{E}\xi_i}{b_i}$$

сходится к нулю для всех ω, для которых сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i - \mathsf{E}\xi_i}{b_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \text{ — сходится п.н.}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \frac{\xi_i - \mathsf{E}\xi_i}{b_i} = \frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н}} 0.$$

■

Лемма. *Пусть* $\xi \geqslant 0$, $\mathsf{E}\xi < +\infty$, *тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geqslant n) \leqslant \mathsf{E}\xi \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geqslant n).$$

▲

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geqslant n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(k \leqslant \xi \leqslant k+1) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \mathsf{P}(k \leqslant \xi \leqslant k+1) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathsf{P}(k \leqslant \xi \leqslant k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\big(k \cdot I(k \leqslant \xi \leqslant k+1)\big) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\big(\lfloor\xi\rfloor\big) \cdot I(k \leqslant \xi \leqslant k+1) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\big(\xi \cdot I(k \leqslant \xi \leqslant k+1)\big) =$$
$$= \mathsf{E}\left(\xi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} I(k \leqslant \xi \leqslant k+1)\right) = \mathsf{E}\xi.$$

Верхнее неравенство доказывается аналогично. ■

Определение. Случайные величины ξ и η одинаково распределены, если $\forall x \hookrightarrow F_\xi(x) = F_\eta(x)$. Обозначают $\xi \overset{d}{=} \eta$.

Утверждение. *Если* $\xi \overset{d}{=} \eta$, *то* $\forall g(x) \hookrightarrow \mathsf{E}g(\xi) = \mathsf{E}g(\eta)$.

▲ $\mathsf{E}g(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\, dF_\xi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\, dF_\eta(x) = \mathsf{E}g(\eta)$. ■

Теорема (УЗБЧ в форме Колмогорова)**.** *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что* $\mathsf{E}|\xi_1| < +\infty$.
Тогда

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \mathsf{E}\xi_1.$$

▲ Поскольку $\mathsf{E}|\xi_1| < +\infty$, то по предыдущей лемме $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\big(|\xi_1| \geqslant n\big) < +\infty$. Так как $\xi_1 \overset{d}{=} \xi_n$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\big(|\xi_n| \geqslant n\big) < +\infty$, следовательно, по лемме Бореля-Кантелли $\mathsf{P}\Big(\big\{|\xi_n| \geqslant n\big\} \text{ б.ч.}\Big) = 0$. То есть с вероятностью 1 случается конечное число $\big\{|\xi_n| \geqslant n\big\}$. Обозначим $\tilde{\xi}_n \equiv \xi_n \cdot I\big\{|\xi_n| \leqslant n\big\}$. Тогда с вероятность 1 $\xi_n = \tilde{\xi}_n$ кроме конечного числа ξ_n. Пусть $\mathsf{E}\xi_i = 0$, если это не так, то $\eta_i = \xi_i - \mathsf{E}\xi_i$. Получаем, что

$$\mathsf{P}\left(\frac{\xi_n + \ldots + \xi_n}{n} \to 0\right) = \mathsf{P}\left(\frac{\tilde{\xi}_1 + \ldots + \tilde{\xi}_n}{n} \to 0\right).$$

Рассмотрим

$$\mathsf{E}\tilde{\xi}_n = \mathsf{E}\Big(\xi_n \cdot I\big(|\xi_n| \leqslant n\big)\Big) = \mathsf{E}\Big(\xi_1 \cdot I\big(|\xi_1| \leqslant n\big)\Big) \to \mathsf{E}\xi_1 = 0$$

по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, поскольку

$$\Big|\xi_1 \cdot I\big(|\xi_1| \leqslant n\big)\Big| \leqslant \xi_1 \ \text{ и } \ \xi_1 \cdot I\big(|\xi_1| \leqslant n\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi_1.$$

По лемме Тёплица

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\tilde{\xi}_i \to \mathsf{E}\xi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde{\xi}_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Big(\tilde{\xi}_i - \mathsf{E}\tilde{\xi}_i\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} 0.$$

Обозначим $\overline{\xi}_n = \tilde{\xi}_n - \mathsf{E}\tilde{\xi}_n$. По лемме Кронекера, если сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\overline{\xi}_k}{k}$ на каком-то ω, то $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot \dfrac{\overline{\xi}_k}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ на том же ω. Проверим, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\overline{\xi}_k}{k}$ сходится почти наверное. По теореме Колмогорова-Хинчина достаточно показать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\mathsf{E}\left(\overline{\xi}_k\right)^2}{k^2} < +\infty$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\left(\overline{\xi}_k\right)^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\left(\tilde{\xi}_k - \mathsf{E}\tilde{\xi}_k\right)^2}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\left(\tilde{\xi}_k\right)^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \mathsf{E}\Big(\xi_k^2 \cdot I\big(|\xi_k| \leqslant k\big)\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \mathsf{E}\Big(\xi_1^2 \cdot I\big(|\xi_1| \leqslant k\big)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \mathsf{E}\left(\xi_1^2 \cdot \sum_{n=1}^{k} I\big(n-1 < |\xi_1| \leqslant n\big)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\Big(\xi^2 \cdot I\big(n-1 < |\xi_1| \leqslant n\big)\Big) \cdot \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\leqslant 2/n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cdot \mathsf{E}\Big(\xi_1^2 \cdot I\big(n-1 < |\xi_1| \leqslant n\big)\Big) \leqslant$$

Так как $|\xi_1| \leqslant n$, то заменим одну ξ на n:

$$\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}|\xi_1| \cdot I\big(n-1 < |\xi_1| \leqslant n\big) \overset{\text{по т. Беппо-Леви}}{=} 2\mathsf{E}|\xi_1| \sum_{n=1}^{\infty} I\big(n-1 < |\xi_1| \leqslant n\big) =$$

$$= 2\mathsf{E}|\xi_1| < +\infty.$$

■

Теорема (Беппо-Леви)**.** *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ *— случайные величины,* $\forall n \hookrightarrow \xi_n \geqslant 0$. *Тогда* $\mathsf{E}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\xi_n$.

▲ Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, тогда $S_n \uparrow S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k$. По теореме о монотонной сходимости

$\mathsf{E}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathsf{E}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k$, следовательно,

$$\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = \sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}\xi_k \uparrow \mathsf{E}\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}\xi_k.$$

■

Теорема (о монотонной сходимости). *[б/д] Пусть $\{\xi_n\}_{n\geqslant1}, \xi, \eta$ — случайные величины, тогда*

1. *Если $\xi_n \uparrow \xi$ почти наверное и $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \xi_n \geqslant \eta, \mathsf{E}\eta > -\infty$, то $\mathsf{E}\xi = \lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}\xi_n$.*
2. *Если $\xi_n \downarrow \xi$ почти наверное и $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \xi_n \leqslant \eta, \mathsf{E}\eta < +\infty$, то $\mathsf{E}\xi = \lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}\xi_n$.*

Лемма (Фату). *Пусть $\{\xi_n\}_{n\geqslant1}$ и η — случайные величины, $\mathsf{E}|\eta| < +\infty$, тогда*

1. *Если $\forall n \hookrightarrow \xi_n \geqslant \eta$, то $\varliminf\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}\xi_n \geqslant \mathsf{E}\varliminf\limits_{n\to\infty}\xi_n$.*
2. *Если $\forall n \hookrightarrow \xi_n \leqslant \eta$, то $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}\xi_n \leqslant \mathsf{E}\varlimsup\limits_{n\to\infty}\xi_n$.*
3. *Если $\forall n \hookrightarrow |\xi_n| < \eta$, то $\mathsf{E}\varliminf\limits_{n\to\infty}\xi_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}\xi_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}\xi_n \leqslant \mathsf{E}\varlimsup\limits_{n\to\infty}\xi_n$.*

▲ (1) Обозначим $\psi_n = \inf\limits_{k\geqslant n}\xi_k$. Очевидно, $\psi_n \uparrow \varliminf\limits_{n\to\infty}\xi_n$. кроме того $\psi_n \geqslant \eta$, следовательно, по теореме о монотонной сходимости $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}\psi_n = \mathsf{E}\varliminf\limits_{n\to\infty}\xi_n$. Рассмотрим

$$\mathsf{E}\varliminf_{n\to\infty}\xi_n = \lim_{n\to\infty}\mathsf{E}\psi_n = \varliminf_{n\to\infty}\mathsf{E}\psi_n \overset{\text{т.к. } \psi_n\leqslant\xi_n}{\leqslant} \varliminf_{n\to\infty}\mathsf{E}\xi_n.$$

Второе равенство – в силу существования предела существует и нижний предел.
(2) Следует из пункта (1) заменой $\xi_n' = -\xi_n$.
(3) Следует из (1) и (2). ■

Теорема (Лебега о мажорируемой сходимости). *Пусть $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi, |\xi| \leqslant \eta, \mathsf{E}\eta < +\infty$.*
Тогда $\mathsf{E}\xi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{E}|\xi_n - \xi| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (не требуем независимости!).

▲ Заметим, что $\xi \overset{\text{п.н.}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = \varliminf\limits_{n\to\infty}\xi_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty}\xi_n$. По пункту (3) леммы Фату

$$\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\varliminf_{n\to\infty}\xi_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\mathsf{E}\xi_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\xi_n \leqslant \mathsf{E}\varlimsup_{n\to\infty}\xi_n = \mathsf{E}\xi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{E}\xi = \lim_{n\to\infty}\mathsf{E}\xi_n.$$

Конечность $\mathsf{E}\xi$ следует из того, что $|\xi| < \eta$ почти наверное, следовательно, так как $\mathsf{E}\eta < +\infty$, то $\mathsf{E}|\xi| \leqslant \mathsf{E}|\eta| < +\infty$.
Докажем L_1-сходимость. Возьмем $\psi_n = |\xi_n - \xi|$. Тогда $|\psi_n| \leqslant 2\eta$ почти наверное и $\psi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$, следовательно, $\mathsf{E}\psi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ по теореме Лебега. ■

Сходимость в L_2

Введем пространство $L_2 = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}) = \{\xi : \mathsf{E}\xi^2 < +\infty\}$. Это минимальное пространство, так как $\mathsf{E}(a\xi + b\eta)^2 \leqslant 2a^2\mathsf{E}\xi^2 + 2b^2\mathsf{E}\eta^2$.

Основное неравенство: $(x+y)^2 \leqslant 2x^2 + 2y^2$.

Норма $\|\xi\| = \sqrt{\mathsf{E}\xi^2}$; скалярное произведение $(\xi, \eta) = \mathsf{E}\xi\eta$.

Лемма. *Пусть* $\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$, $\forall n \hookrightarrow \xi_n \in L_2$. *Тогда*

1. $\xi \in L_2$,
2. $\mathsf{E}\xi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathsf{E}\xi$,
3. $\mathsf{E}\xi_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathsf{E}\xi^2$,
4. *если* $\eta_n \xrightarrow{L_2} \eta$, $\forall n \hookrightarrow \eta_n \in L_2$, *то* $(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (\xi, \eta)$.

▲ Докажем первый пункт леммы:

$$\mathsf{E}\xi^2 = \mathsf{E}(\xi - \xi_n + \xi_n)^2 \leqslant \underbrace{2\mathsf{E}(\xi-\xi_n)^2}_{\to 0} + \underbrace{2\mathsf{E}\xi_n^2}_{<+\infty} < +\infty.$$

Перейдем ко второму пункту. Если $\mathsf{E}\xi^2 < +\infty$, то $\mathsf{E}|\xi| = \mathsf{E}|\xi|\cdot 1$, а по неравенству Коши-Буняковского это меньше или равно, чем $\sqrt{\mathsf{E}\xi^2 \cdot \cancelto{1}{\mathsf{E}1^2}} < +\infty$. Осталось заметить, что $\left|\mathsf{E}(\xi_n - \xi)\right| \leqslant \mathsf{E}|\xi_n - \xi| \leqslant \sqrt{\mathsf{E}(\xi_n-\xi)^2 \cdot \mathsf{E}1^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Пункт 3.

$$\mathsf{E}(\xi_n^2 - \xi^2) = \mathsf{E}(\xi_n + \xi)(\xi_n - \xi) \leqslant \sqrt{\mathsf{E}(\xi_n+\xi)^2 \cdot \mathsf{E}(\xi_n - \xi)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\Big(\underbrace{2\mathsf{E}(\xi_n-\xi)^2}_{\to 0} + \underbrace{8\mathsf{E}\xi^2}_{=\text{const}}\Big) \cdot \underbrace{\mathsf{E}(\xi_n^2 - \xi^2)}_{\to 0}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Остается доказать четвертый пункт леммы:

$$\mathsf{E}(\xi_n\eta_n - \xi\eta) = \mathsf{E}(\xi_n\eta_n - \xi_n\eta) + \mathsf{E}(\xi_n\eta - \xi\eta) \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\mathsf{E}\xi^2 \cdot \underbrace{\mathsf{E}(\eta_n - \eta)^2}_{\to 0}} + \sqrt{\mathsf{E}\eta^2 \cdot \underbrace{\mathsf{E}(\xi_n - \xi)^2}_{\to 0}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

■

6 Глава 6.

Случайные блуждания и закон повторного логарифма

Пусть $\{\xi_i\}_{i\geqslant 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что $\mathsf{E}\xi_n = 0, \mathsf{E}\xi_n^2 = \sigma^2$.

Определение. Случайная величина $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ называется случайным блужданием.

Известно (из Ц.П.Т.), что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty$, а $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty$ (Можно получить с помощью теоремы Муавра-Лапласа). С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\xi_n^2}{n\ln^2 n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{n\ln^2 n} < +\infty.$$

Следовательно, по теореме Колмогорова-Хинчина о сходимости ряда почти наверное $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\xi_n}{\sqrt{n}\ln n}$ сходится почти наверное, значит, по лемме Кронекера,

$$\frac{1}{\sqrt{n}\ln n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\ln k \frac{\xi_k}{\sqrt{k}\ln k} = \frac{S_n}{\sqrt{n}\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} 0.$$

Значит S_n не выходит за $\varepsilon\sqrt{n}$ начиная с некоторого момента п.н.

Теорема. *(Теорема Муавра-Лапласа)*
Независимые случайные величины $\xi_i \sim Bern(p)$.

$$\sup_{-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty} \left| \mathsf{P}\left(a \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right) - \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \right| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Определение. Функция $\varphi^* = \varphi^*(n)$, $n > 1$ называется верхней для S_n, если $S_n(\omega) < \varphi^*(n)$ почти наверное для всех n, начиная с некоторого $n_0(\omega)$.

Определение. Функция $\varphi_* = \varphi_*(n)$, $n > 1$ называется нижней для S_n, если $S_n(\omega) > \varphi_*(n)$ почти наверное для бесконечно многих n (бесконечно часто).

То есть $\forall\varepsilon$ $\varphi^*(n) = \varepsilon\sqrt{n}\ln n$ — верхняя для произвольного случайного блуждания, $\varphi_*(n) = \varepsilon\sqrt{n}$ — нижняя. Пусть некая функция $\varphi(n)$ — «точная асимптотика», возьмем $\varphi^*_\varepsilon = (1+\varepsilon)\varphi$; $\varphi_{*\varepsilon} = (1-\varepsilon)\varphi$ для $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\varphi(n)} \leqslant 1\right\} = \left\{\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geqslant n} \frac{S_m}{\varphi(m)} \leqslant 1\right\} =$$
$$= \left\{\forall\varepsilon > 0 \text{ и некоторого } n_\varepsilon \hookrightarrow \sup_{m\geqslant n_\varepsilon} \frac{S_m}{\varphi(m)} \leqslant 1+\varepsilon\right\} =$$
$$= \big\{\forall\varepsilon > 0 \ \ \forall m \geqslant n_\varepsilon \hookrightarrow S_m \leqslant (1+\varepsilon)\varphi(m)\big\} \quad \Leftrightarrow \quad (1+\varepsilon)\varphi(m) \text{ — верхняя.}$$

Аналогично,

$$\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\varphi(n)} \geqslant 1\right\} = \left\{\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geqslant n} \frac{S_m}{\varphi(m)} \geqslant 1\right\} =$$
$$= \big\{\forall\varepsilon > 0 \text{ и для беск. многих } n_\varepsilon \hookrightarrow S_m \geqslant (1-\varepsilon)\varphi(m)\big\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1-\varepsilon)\varphi(m) \text{ — нижняя.}$$

Отметим, $\forall \varepsilon > 0 : \varphi^*_\varepsilon = (1+\varepsilon)\varphi$ — верхняя $\Leftrightarrow$ $\mathsf{P}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{S_n}{\varphi(n)} \leqslant 1\right) = 1.$

Аналогично, $\forall \varepsilon > 0 : \varphi^*_\varepsilon = (1+\varepsilon)\varphi$ — нижняя $\Leftrightarrow$ $\mathsf{P}\left(\underline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{S_n}{\varphi(n)} \geqslant 1\right) = 1.$

Теорема (закон повторного логарифма (ЗПЛ))**.** *[б/д] Пусть* $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ *— независимые одинаково распределенные случайные величины,* $\mathsf{E}\xi_1 = 0, \mathsf{E}\xi_1^2 = \sigma^2, 0 < \sigma^2 < +\infty$.
Тогда

$$\mathsf{P}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\varphi(n)} = 1\right) = 1, \varphi(n) = \sqrt{2\sigma^2 n \ln\ln n}.$$

Замечание. Применяя ЗПЛ к S_n, получаем, что $\mathsf{P}\left(\underline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{S_n}{\varphi(n)} = -1\right) = 1.$

За нижнюю ветку S_n выходит бесконечно часто (см. Рис. 1), а за верхнюю лишь конечное число раз (почти наверное не выходит).

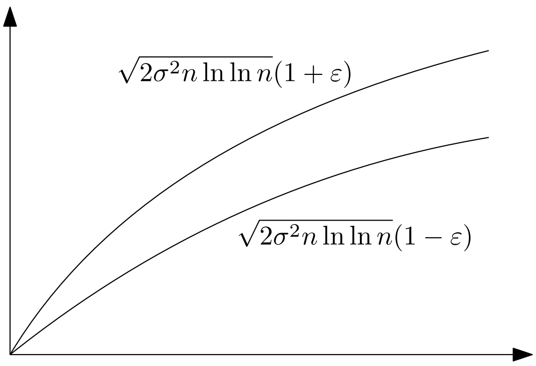


Рис. 1: Поведение верхней и нижней функции случайного блуждания

7 Глава 7.

Характеристические функции

Определение. Характеристической функцией случайной величины ξ называется $\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}e^{it\xi}, t \in \mathbb{R}$. (Формально это преобразование Фурье случайной величины ξ).

Определение. Пусть $F(x)$ — функция распределения, тогда ее характеристическая функция $\varphi_F(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dF(x)$.

Если $F_\xi(x)$ — функция распределения случайной величины ξ, то характеристические функции ξ и F_ξ совпадают.

Чтобы считать интеграл Лебега от комплекснозначной функции, будем пользоваться формулой Эйлера: $\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}e^{it\xi} = \mathsf{E}\cos(t\xi) + i\mathsf{E}\sin(t\xi)$.

Определение. Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор. Его характеристической функцией называется $\varphi_{\vec{\xi}}\left(\vec{t}\right) = \mathsf{E}e^{i\left(\vec{t},\vec{\xi}\right)}, t \in \mathbb{R}^n$.

Определение. Пусть $F\left(\vec{x}\right), \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ — функция распределения в $\mathbb{R}^n$, тогда его характеристической функцией называется $\varphi_F\left(\vec{t}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\left(\vec{t},\vec{x}\right)}\, dF\left(\vec{x}\right), \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Свойства характеристических функций

Свойство №0. Харфункция существует всегда.

Свойство 1. *Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ, тогда $|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0) = 1$.*

▲ $|\varphi(t)| = |\mathsf{E}e^{it\xi}| \leqslant \mathsf{E}|\underbrace{e^{it\xi}}_{\equiv 1}| = 1 = \varphi(0)$. ($\cos t\xi + i\sin t\xi$, модуль этого комплексного числа равен единице). ■

Свойство 2. *Пусть $\varphi(t)$ —характеристическая функция случайной величины ξ, а $\eta = a\xi + b$, где $a, b \in \mathbb{R}$, тогда $\varphi_\eta(t) = e^{itb} \cdot \varphi_\xi(at)$.*

▲ $\varphi_\eta(t) = \mathsf{E}e^{it\eta} = \mathsf{E}e^{it(a\xi+b)} = e^{itb}\mathsf{E}e^{ita\xi} = e^{itb} \cdot \varphi_\xi(at)$ ($e^{itb} = const$, значит можем вытащить за матожидание). ■

Свойство 3. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ —независимые случайные величины, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \Rightarrow$*

$\varphi_{S_n}(t) = \prod\limits_{i=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t)$.

▲ $\varphi_{S_n}(t) = \mathsf{E}e^{it\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k} = \mathsf{E}\prod\limits_{k=1}^{n} e^{it\xi_k} =$

/$e^{it\xi_k}$ - борелевская функция от независимой случайной величины. /

$= \prod\limits_{k=1}^{n} \mathsf{E}e^{it\xi_k} = \prod\limits_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t)$. ■

Свойство 4. *Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция, тогда $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$*

▲ $\varphi(t) = \mathsf{E}e^{it\xi} = \mathsf{E}\overline{e^{-it\xi}} \overset{*}{=} \overline{\mathsf{E}e^{-it\xi}} = \overline{\varphi(-t)}$.

Комментарий к $(*)$: матожидание можно записать как предел матожиданий простых функций, простые функции – это конечные суммы, у них можно навесить сопряжение на все выражение. Поэтому в пределе получаем верный переход. ■

Свойство 5. *Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ, тогда $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.*

▲ Рассмотрим $|\varphi(t+h)-\varphi(t)| = |\mathsf{E}e^{i(t+h)\xi} - \mathsf{E}e^{it\xi}| = |\mathsf{E}e^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)| \leqslant \mathsf{E}(|e^{it\xi}| \cdot |e^{ih\xi}-1|) = \mathsf{E}|e^{ih\xi}-1|$. При $h \to 0$ выполнено $e^{ih\xi}-1 \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ по теореме о наследовании сходимости. $\forall h : |e^{ih\xi}-1| \leqslant |e^{ih\xi}|+1 = 2,\ \mathsf{E}2 < +\infty$. Следовательно, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, $\mathsf{E}|e^{ih\xi}-1| \to \mathsf{E}0 = 0$. Значит, $\varphi(t)$ равномерно непрерывна. ■

Теорема (единственности (д-во позже)). *Пусть F и G — функции распределения, такие что $\varphi_{F(x)} = \varphi_{G(x)} \Rightarrow \forall x\ F(x) = G(x)$.*

Свойство 6. *Пусть $\varphi_\xi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ. $\varphi(t)$ принимает действительные значения $\Leftrightarrow$ ξ имеет симметричное распределение ($\xi \overset{d}{=} -\xi$).*

▲ ($\Leftarrow$) Пусть распределение ξ — симметрично, тогда $E(\sin(t\xi)) = E(\sin(t(-\xi))) = -E(\sin(t\xi)) = 0$. Значит $\varphi_\xi(t) = E\cos t\xi + iE\sin t\xi = E\cos t\xi \in \mathbb{R}$.

($\Rightarrow$) Пусть $\varphi_\xi(t) \in \mathbb{R}\ \forall t$. Тогда по свойствам 2 и 4 $\varphi_\xi(t) = \overline{\varphi_\xi(-t)} = \varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t)$ $\Rightarrow \xi$ и $-\xi$ имеют одинаковую характеристическую функцию $\Rightarrow$ $\xi \overset{d}{=} -\xi$ по теореме единственности. ■

Свойство 7.

Теорема (о производных х.ф.). *Пусть $E|\xi|^n < +\infty,\ n \in \mathbb{N}$.*
Тогда $\forall k \leqslant n\ \exists \varphi_\xi^{(k)}(t)$, причём

1. $\varphi_\xi^{(k)}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx} dF(x)$,
2. $E\xi^k = \frac{\varphi_\xi^{(k)}(0)}{i^k}$,
3. $\varphi_\xi(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t)$, *где*

$|\varepsilon_n(t)| \leqslant 3E|\xi|^n,\ \varepsilon_n(t) \to 0,\ t \to 0.$

▲

1. Рассмотрим $\frac{\varphi_\xi(t+h)-\varphi_\xi(t)}{h} = \frac{Ee^{i(t+h)\xi}-Ee^{it\xi}}{h} = \frac{Ee^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)}{h}$. при $h \to 0$ $\frac{e^{ih\xi}-1}{h} \xrightarrow{\text{п.н.}} i\xi$, кроме того, $\left|\frac{e^{ih\xi}-1}{h}\right| \leqslant |\xi|$ почти наверное, так как хорда меньше дуги. По теореме о мажорируемой сходимости $\lim\limits_{h\to 0} E\frac{e^{ih\xi}-1}{h}e^{it\xi} = \varphi_\xi'(t) = E(i\xi \cdot e^{it\xi}) = \int\limits_{\mathbb{R}} ixe^{itx}dF_\xi(x)$. Доказательство формулы для $\varphi^{(k)}$ аналогично.
2. Из пункта 1, $\frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k} = \frac{1}{i^k}\int\limits_{\mathbb{R}}(ix)^k e^{i0x}dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} x^k dF_\xi(x) = E\xi^k$.

3. Ряд Тейлора $e^{iy} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(iy)^k}{k!} + \frac{(iy)^n}{n!}(\cos\theta_1 y + i\sin\theta_2 y)$, $|\theta_1| \leqslant 1$, $|\theta_2| \leqslant 1$, тогда $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = E\left[\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(it\xi)^k}{k!} + \frac{(it\xi)^n}{n!}(\cos\theta_1 t\xi + i\sin\theta_2 t\xi)\right] = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t)$, где $\varepsilon_n(t) = E(\xi^n \cdot [\cos\theta_1 t\xi + i\sin(\theta_2 t\xi) - 1]) \Rightarrow \varepsilon_n(t) \leqslant 3E|\xi|^n$;
$|\xi^n[\cos(\theta_1 t\xi) + i\sin(\theta_2 t\xi) - 1]| \leqslant 3|\xi|^n$ и $\xi^n(\cos(\theta_1 t\xi) - 1 + \underbrace{\sin(\theta_2 t\xi)}_{\to 0}) \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ при $t \to 0 \Rightarrow$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, $\varepsilon_n(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.

■

Свойство 8 (б/д). *Если существует и конечна $\varphi^{(2n)}(0)$, то $E|\xi|^{2n} < +\infty$.*

Теорема (о разложении х.ф. в ряд). *Пусть ξ случайная величина, такая что $\forall n\ E|\xi|^n < +\infty$.*

Если для некоторого $T > 0 \hookrightarrow \overline{\lim\limits_{n}} \left(E\frac{|\xi|^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{T}$, то $\forall t : |t| < T$ выполнено $\varphi_\xi(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!}E\xi^n$.

▲ Пусть t_0 такое, что $|t_0| < T$, тогда $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} E\left(\frac{|\xi|^n \cdot |t_0|^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{|t_0|}{T} < 1$, следовательно, по признаку Коши-Адамара сходимости рядов, ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{E|\xi|^n \cdot |t_0|^n}{n!}$ сходится.
Рассмотрим $|t| \leqslant |t_0| : \varphi_\xi(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}E\xi^k + \underbrace{\frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t)}_{R_n(t)}$ $(*)$.

$R_n(t) \leqslant 3 \cdot \frac{|t|^n}{n!} \cdot E|\xi|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ по условию теоремы. Устремляя $n \to +\infty$ в $(*)$, получаем $\varphi_\xi(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!}E\xi^k$. В силу произвольности $|t_0| < T$, разложение верно $\forall t \in (-T, T)$. ■

Пример. (Харфункция нормального распределения)

Пусть $\xi \sim N(0;1) \Rightarrow \varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Мы знаем, что $E\xi^m = \begin{cases} (m-1)!!,\ m \vdots 2 \\ 0,\ m \not\vdots 2 \end{cases}$

$E|\xi|^m = \begin{cases} (m-1)!!,\ m \vdots 2 \\ (m-1)!!\sqrt{\frac{2}{\pi}}, m \not\vdots 2 \end{cases} \Rightarrow$ по предыдущей теореме:

$$\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}e^{it\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{(2n)!}(2n-1)!! = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^{2n}}{(2n)!!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{(2n)!!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{t^2}{2}\right)^n \frac{1}{n!} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

<u>Условие теоремы:</u> $\left(\frac{E|\xi|^m}{m!}\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \left(\frac{(m-1)!!}{m!}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{1}{m!!}\right)^{\frac{1}{m}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{1}{m}} \sim \frac{C}{\sqrt{m}} \to 0 \Rightarrow T = +\infty$. (В приближении воспользовались формулой Стирлинга.)

Теорема (формула обращения (б/д)). *Пусть $\varphi(t)$ характеристическая функция функции распределения F. Тогда*

1. *Для $\forall a < b$ (точки непрерывности) F выполнено $F(b)-F(a) = \frac{1}{2\pi}\lim\limits_{c\to+\infty}\int\limits_{-c}^{c}\frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{it}\varphi(t)dt$*

2. *Если $\int\limits_{\mathbb{R}}|\varphi(t)|dt < +\infty$, то у функции распределения $F(x)$ существует плотность $f(x)$ и $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi(t)dt$.*

Теорема (единственности). *Пусть F и G — функции распределения, такие что $\varphi_{F(x)} = \varphi_{G(x)} \Rightarrow \forall x\ F(x) = G(x)$.*

▲ Пусть $a < b \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $f_\varepsilon(x)$(шапочка). Докажем, что $\forall\varepsilon > 0 \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dG(x)$. Рассмотрим отрезок $[-n, n]$ такой, что $[a, b+\varepsilon] \subset [-n, n]$. По теореме Вейерштрасса-Стоуна (приближение любой функции тригонометрическими полиномами), $f_\varepsilon(x)$ сколь угодно точно приближается тригонометрическими многочленами от $\frac{\pi x}{n}$, так как $f_\varepsilon(x)$ непрерывна и периодична на $[-n, n]$ с периодом $2n$ на $\mathbb{R}$.
$\Rightarrow \forall n\ \exists f_\varepsilon^n(x) = \sum\limits_{k\in K} a_k \cdot e^{\frac{ik\pi x}{n}},\ a_k \in \mathbb{R}$, K — конечное подмножество $\mathbb{Z}$, такое, что $\forall x \in [-n, n] : |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)| < \frac{1}{n}$. f_ε^n —периодическая с периодом $2n$ на R. Поскольку $|f_\varepsilon(x)| < 2$ и $\forall x \in [-n, n] : |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)| < \frac{1}{n}$, то $|f_\varepsilon^n(x)| \leqslant 2\ \forall x$. По условию, $\forall t \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}dG(x) \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x)dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x)dG(x)$.

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dF(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dG(x)\right| \leqslant \left|\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dF(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x)dF(x)\right| +$$
$$+\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x)dF(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x)dG(x)\right| + \left|\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x)dG(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dG(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\int\limits_{[-n,n]} dF(x) + \frac{1}{n}\int\limits_{[-n,n]} dG(x) + (\underbrace{1-F(n)}_{\to 0} + \underbrace{F(-n)}_{\to 0} + \underbrace{1-G(n)}_{\to 0} + \underbrace{G(-n)}_{\to 0}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{n} + o(1) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \hookrightarrow \int f_\varepsilon(x)dF(x) = \int f_\varepsilon(x)dG(x).$$

При $\varepsilon \to 0 f_\varepsilon(x) \to I_{[a,b]}(x)$, при этом $|f_\varepsilon(x)| \leqslant 1\ \forall x \in \mathbb{R}$. По теореме Лебега о мажорированной сходимости (рассматриваем $f_\varepsilon(x)$ как набор случайных величин на $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), P_f) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$). $\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dF(x) \to \int\limits_{\mathbb{R}} I_{[a,b]}dF(x) = F(b) - F(a)$. Аналогично, для функции распределения $G \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dG(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} G(b) - G(a) \Rightarrow \forall a < b\ F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$. Полагая $a = (-\infty)$, получаем требуемое. ■

Теорема (критерий назависимости). *Пусть* $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. *Тогда* $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — *назависимые в совокупности* $\Leftrightarrow \varphi_{\vec{\xi}(\vec{t})} = \prod\limits_{i=1}^{n} \varphi_{\xi_i}(t_i)\ \forall \vec{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$.

▲ $(\Rightarrow)$ $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = Ee^{i(\vec{t},\vec{\xi})} = Eei^{\sum\limits_{k=1}^{n} t_k\xi_k} \overset{\text{нез-сть}}{=} \prod\limits_{k=1}^{n} Ee^{it_k\xi_k} = \prod\limits_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_x}(t_k)$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $F_k(x)$ — функция распределения случайной величины ξ_k. Пусть $G(x_1, \dots, x_n) = F_1(x) \cdot \ldots \cdot F_n(x)$ — это функция распределения. Посчитаем её характеристическую функцию: $\varphi_G(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\vec{t},\vec{x})} dG(\vec{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i(\vec{t},\vec{x})} dF_1(x_1) \cdot \ldots \cdot dF_n(x_n)$ =(по теореме Фубини) $\prod\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{it_kx_k} dF_k(x_k) = \prod\limits_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t_k) \overset{\text{по усл}}{=} \varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) \Rightarrow$ характеристическая функция G и $\vec{\xi}$ совпадают $\Rightarrow$ по теореме единственности $F_\xi = G \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = \prod\limits_{k=1}^{n} F_{\xi_k}(x_k) \Rightarrow \xi_1, \dots, \xi_n$ независимы в совокупности по критерию независимости в терминах функции распределения. ■

Проверка того, что φ —характеристическая функция

Определение. Функция $\varphi(t)$ является неотрицательно определённой, если $\forall n\ \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, $\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \varphi(t_i - t_j) z_i \overline{z_j} \geqslant 0$.

Теорема (Бохнера-Хинчина). *Пусть* $\varphi(t)$ *такая, что* $\varphi(0) = 1$ *и* $\varphi(t)$ *непрерывна в нуле.*
Тогда $\varphi(t)$ *— характеристическая функция* $\Leftrightarrow \varphi(t)$ *неотрицательно определённая.*

▲ $(\Rightarrow)$ $\varphi(t)$ — характеристическая функция, проверим неотрицательность:

$$\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}\ \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \varphi(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} = \sum_{j,k=1}^{n} Ee^{i(t_j - t_k)\xi} z_j \overline{z_k} = E\Bigg(\Big(\sum_{j=1}^{n} e^{it_j\xi} z_j\Big)\overline{\Big(\sum_{k=1}^{n} e^{it_k\xi} z_k\Big)}\Bigg) =$$

$$= E\sum_{k,k=1}^{n} e^{it_j\xi} \cdot z_j \cdot \overline{e^{et_k\xi}} \cdot \overline{z_k} = E\left|\sum_{j=1}^{n} e^{it_j\xi} z_j\right|^2 \geqslant 0$$

$(\Leftarrow)$ [б/д] ■

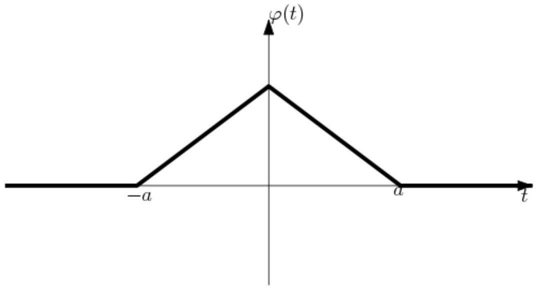
Следствие. *Если* $\varphi(t) = \psi(t)$ *— характеристическая функция,* $\alpha \in (0, 1)$*, то* $\alpha\varphi(t) + (1 - \alpha)\psi(t)$ *— характеристическая функция.*

▲ Все три условия из теоремы Бохнера-Хинчина выполнены. ■

Теорема (Пойа(б/д))**.** *Пусть непрерывная, чётная и выпуклая вниз на* $(0; +\infty)$ *функция* $\varphi(t)$ *такова, что* $\varphi(t) \geqslant 0$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Тогда $\varphi(t)$ *—характеристическая функция.*

Пример. Любая функция вида



является характеристической.

Теорема (Марцинкевича(б/д))**.** *Если характеристическая функция* $\varphi(t)$ *имеет вид* $\exp(P(t))$, *где* $P(t)$ *— полином, то степень этого полинома* $\leqslant 2$ $(\deg P(t) \leqslant 2)$.

Пример. e^{-t^n} не является характеристической функцией.

Определение. Последовательность функций $F_n(x)$ слабо сходится к $F(x)$, если $\forall f(x)$ — непрерывна и ограничена, то верно $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dF_n(x) \to \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dF(x)$.

Обозначение $F_n \xrightarrow{w} F$. $(\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F)$.

Теорема (непрерывности для х.ф.)**.**

1. Пусть $\{F_n\}_{n\geqslant1}$ *— последовательность функций распределения на* $\mathbb{R}$, $\varphi_n(t)_{n\in\mathbb{N}}$ *— их х.ф.*

Тогда $F_n \xrightarrow{w} F \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}\ \varphi_n(t) \to \varphi(t)$, *где* φ *— характеристическая функция* F.

2.(б/д) Пусть $\forall t \in \mathbb{R}\ \exists \varphi(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(t)$, *причём* $\varphi(t)$ *непрерывна в нуле.*

Тогда $\exists F$ *— функция распределения такая, что* $F_n \xrightarrow{w} F$ *и* $\varphi(t)$ *—характеристическая функция* F.

▲ $F_n \xrightarrow{w} F$, значит $\forall f$ — непрерывной ограниченной функции $\hookrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dF_n(x) \to \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dF(x)$. Но функции $\sin tx$ и $\cos tx$ непрерывны и ограничены $\Rightarrow \varphi_n(t) = \int\limits_{\mathbb{R}}(\cos tx + i\sin tx)dF_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{\mathbb{R}}(\cos tx + i\sin tx)dF(x) = \varphi(t)$. ■

Центральная предельная теорема

Теорема (ЦПТ в форме Леви)**.** *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\geqslant1}$ *— независимые одинаково распределённые случайные величины,* $0 < D\xi < +\infty$. *Обозначим* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$.

Тогда $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} N(0,1)$.

▲ Обозначим $E\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2$. Рассмотрим случайные величины $\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma} \Rightarrow E\eta_i = 0$; $D\eta_i = 1$. Тогда $T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n}{\sqrt{n}}$. Рассмотрим характеристическую функцию η_i: по свойствам характеристической функции о разложении в ряд $\varphi(t) \equiv \varphi_{\eta_i}(t) = 1 + it\underbrace{E\eta_j}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{E\eta_j^2}_{1} \cdot (it)^2 + o(t^2) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, $t \to 0$. Отсюда, $\varphi_{T_n}(t) = \varphi_{\sum\limits_{j=1}^{n}\eta_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \overset{\text{св-ва х.ф. о независимости}}{=} \left(\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}\ \forall t$. Но $e^{-\frac{t^2}{2}}$ — характеристическая функция $N(0,1) \Rightarrow$ (по т. непрерывности) $T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$. ■

Теорема (Линдберга)**.** *[б/д] Пусть*

1. *случайные величины* $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$ *независимы, и* $\forall k\ E\xi_k^2 < +\infty$.
2. *Обозначим* $m_k = E\xi_k$; $\sigma_k^2 = D\xi_k$; $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$; $D_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2$ *и* $F_k(x)$ *— функция распределения* ξ_k.
3. *Пусть выполнено условие Линдберга:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \frac{1}{D_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\{x:|x-m_k|>\varepsilon D_n\}}(x-m_k)^2 dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Тогда $\dfrac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0,1), n \to \infty$.

Когда выполнены условия Линдберга?

1. Пусть для некоторого $\delta > 0$ выполнено условие Ляпунова:

$$\frac{1}{D_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}E|\xi_k - m_k|^{2+\delta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

тогда выполнено условие Линдберга.

▲ Пусть фиксировано $\varepsilon > 0$.

$$E|\xi_k - m_k|^{2+\delta} = \int\limits_{\mathbb{R}}|x - m_k|^{2+\delta}dF_k(x) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{|x-m_k|\geqslant\varepsilon D_n}|x-m_k|^{2+\delta}dF_k(x) \geqslant \varepsilon^\delta D_n^\delta \int\limits_{|x-m_k|>\varepsilon D_n}|x-m_k|^2 dF_k(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{D_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}E|\xi_k - m_k|^{2+\delta} \geqslant \frac{\varepsilon^\delta}{D_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\{x:|x-m_k|>\varepsilon D_n\}}|x-m_k|^2 dF_k(x).$$

■

2. Из условий теоремы Леви вытекает условие Линдберга.

▲ Пусть $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$ — независимые одинаково распределённые случайные величины, $+\infty > D\xi_1 = \sigma^2 > 0,\ E\xi_1 = a \Rightarrow$

$$\frac{1}{D_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\{x:|x-a|>\varepsilon D_n\}}|x-a|^2 dF_k(x) =$$

$$= \frac{1}{n\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\{x:|x-a|>\varepsilon D_n\}}|x-a|^2 dF_1(x) =$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_{|x-a|>\varepsilon\sqrt{n}\sigma}|x-a|^2 dF_1(x) \to 0,\ \text{т.к. } \{x : |x-a| > \varepsilon\sqrt{n}\sigma\} \to \varnothing;$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}}|x-a|^2 dF_1(x) < +\infty.$$

■

3. Пусть $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$ — независимые случайные величины, $|\xi_k| \leqslant K;\ D_n \to +\infty$. Тогда

$$\int\limits_{|x-m_k|>\varepsilon D_n}(x-m_k)^2 dF_k(x) =$$

$$= E((\xi_k - m_k)^2 \cdot T(|\xi_k - m_k| > \varepsilon D_n)) \leqslant (2k)^2 EI(|\xi_k - m_k| > \varepsilon D_n) =$$
$$= (2k)^2 P(|\xi_k - m_k| > \varepsilon D_n),$$

то по неравенству Чебышева это не превосходит

$$(2k)^2\frac{\sigma_k^2}{\varepsilon^2 D_n^2}.$$

Рассмотрим сумму

$$\frac{1}{D_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x:|x-m_k|>\varepsilon D_n}|x-m_k|^2 dF_k(x) \leqslant \frac{(2k)^2}{D_n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k^2}{\varepsilon^2 D_n^2} = \frac{(2k)^2}{\varepsilon^2 D_n^2}\xrightarrow{n\to\infty} 0\ \text{ т.к. } D_n \to \infty.$$

Замечание (Теорема Феллера.). Условие Линдберга является необходимым и достаточным условием для справедливости ЦПТ при выполнении условия бесконечной малости слагаемых:

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} P\left(\frac{|\xi_k - m_k|}{D_n} \geqslant \varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема (Берри-Эссена(б/д))**.** *Пусть* $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$ *— независимые одинаково распределённые случайные величины,* $E|\xi_i|^3 < +\infty$, $E\xi_i = a$, $D\xi_i = \sigma^2$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$; $T_n = \dfrac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$. *Тогда*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant C \cdot \frac{E|\xi_1 - a|^3}{\sigma^3\sqrt{n}}, \text{ где } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < C < 0,48,$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$

8 Глава 8.

Гауссовские случайные векторы

Определение (1)**.** Случайный вектор $\vec{\xi} \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ — гауссовский, если его характеристическая функция $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = \mathsf{E} e^{i(\vec{t},\vec{\xi})} = \exp\left(i(\vec{m},\vec{t}) - \frac{1}{2}(\Sigma\vec{t},\vec{t})\right)$, $\vec{m} \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ — симметричная неотрицательно определённая матрица.

Определение (2)**.** Случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$ — гауссовский, если он представляется в следующем виде: $\vec{\xi} = A\vec{\eta} + \vec{B}$, где $\vec{B} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}$ и $\vec{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_m)^T$ — независимые и $\sim N(0,1)$.

Определение (3)**.** Случайный вектор $\vec{\xi}$ — гауссовский, если $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ случайная величина $(\vec{\lambda}, \vec{\xi})$ имеет нормальное распределение.

Теорема. *Предыдущие 3 определения эквивалентны.*

▲

1. Опр 1 ⇒ Опр 2. Пусть $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = Ee^{i(\vec{t},\vec{\xi})} = e^{i(\vec{t},\vec{m} - \frac{1}{2}(R\vec{t},\vec{t}))}$. Так как матрица R — симметричная и неотрицательно определённая, то $\exists S$ — ортогональная, такая что $S^T R S = D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & d_k & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, d_i > 0.$

   Определим $\tilde{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \frac{1}{\sqrt{d_k}} & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$, в таком случае

$$\tilde{D}^T S^T R S \tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим вектор $(S\tilde{D})^T\vec{\xi}$ и его характеристическую функцию. Докажем что он подходит с точностью до линейного преобразования. Действительно, рассмотрим характеристическую функцию этого вектора: $\varphi_{(S\tilde{D})^T\vec{\xi}}(\vec{t}) = \varphi_{\vec{\xi}}((S\tilde{D})\vec{t})$, так как

$$\varphi_{(S\tilde{D})^T\vec{\xi}}(\vec{t}) = Ee^{i(\vec{t},(S\tilde{D})^T\vec{\xi})} = \exp(i((S\tilde{D})\vec{t},\vec{m}) - \frac{1}{2}(R(S\tilde{D})\vec{t},(S\tilde{D})\vec{t})) =$$

$$= \exp[i(\vec{t},(S\tilde{D})^T\vec{m}) - \frac{1}{2}\underbrace{(\tilde{D}^T S^T R S\tilde{D}\vec{t},\vec{t})}_{=\sum\limits_{i=1}^{k} t_i^2}] =$$

$$= \exp[i(\vec{t},(S\tilde{D})^T\vec{m})]\prod_{i=1}^{k}\varphi_{\eta_i}(t_i),$$

$\eta_i \sim N(0;1)$ и независимы по теореме единственности и теореме независимости в терминах характеристической функции $\Rightarrow$ вектор $\vec{\eta} = (S\tilde{D})^T(\vec{\xi}-\vec{m})$ — искомый, так как $\vec{\xi} = ((S\tilde{D})^T)^{-1}\vec{\eta} + \vec{m}$.

2. Опр 2 $\Rightarrow$ Опр 3. Если $\vec{\xi} = A\vec{\eta} + \vec{b}$, то $(\vec{\lambda},\vec{\xi}) = (\vec{\lambda}, A\vec{\eta}) + (\vec{\lambda},\vec{b}) = \underbrace{\lambda^T A\eta}_{\text{сл. вел.}} + \underbrace{\lambda^T b}_{\text{число}}$ — линейная комбинация независимых нормально распределённых случайных величин. $\Rightarrow$ то есть имеем нормальное распределение.

3. Опр 3 $\Rightarrow$ Опр 1. Пусть $(\xi;\lambda)$ — нормально распределённая случайная величина, тогда её характеристическая функция $Ee^{i(\xi,\lambda)t} = e^{iE(\xi,\lambda)t - \frac{D(\xi,\lambda)t^2}{2}}$. Подставим $t=1 \Rightarrow Ee^{i(\xi,\lambda)} = e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k E\xi_k - \frac{1}{2}\sum\limits_{k,l=1}^{n}\lambda_k\lambda_l \operatorname{cov}(\xi_k,\xi_l)} = \exp(i(\vec{\lambda},E\vec{\xi}) - \frac{1}{2}(R\vec{t},\vec{t}))$, $R = \operatorname{Var}\vec{\xi}$.

■

Свойства гауссовских векторов

Свойство 1. *Если $\vec{\xi} \sim N(a,\Sigma)$, то $\vec{a} = \begin{pmatrix} E\xi_1 \\ \vdots \\ E\xi_n \end{pmatrix}$ — вектор средних, Σ — матрица ковариаций.*

▲ Аналогично пункту 3 предыдущей теоремы. ■

Свойство 2. *Пусть* $\vec{\xi} \sim N(a, \Sigma)$,*тогда* ξ_i *независимы* $\Leftrightarrow$ Σ *— диагональна.*

▲ Заметим, что характеристическая функция ξ_j равна $\varphi_{\xi_j}(t_j) = e^{et_j a_j - \frac{1}{2}\sigma_{jj}^2 t_j^2}$, нужно подставить $\vec{t} = (0 \dots 0, t, 0 \dots 0)$. Тогда $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = \prod\limits_{i=1}^{n} \varphi_{\xi_j}(t_j) = e^{i(\vec{a},\vec{t}) - \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{jj}^2 t_j^2} \Leftrightarrow \Sigma$ — диагональна. ■

Свойство 3 (Коши)**.** *Гауссовские вектора — нормальные случайные величины.*

▲ Следует из определения 3 для $\lambda_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (спроецируем гауссовский вектор на одну из компонент). ■

Свойство 4. $\vec{\xi}$ *— гауссовский* $\Rightarrow$ *любое его линейное преобразование — гауссовский вектор.*

▲ Пусть $\vec{\chi} = B\vec{\xi} + \vec{c}$. По второму определению гауссовского вектора, $\vec{\chi} = B(A\vec{\eta} + \vec{b}) + \vec{c} = BA\vec{\eta} + B\vec{b} + \vec{c}$, отсюда $\vec{\chi}$ — гауссовский по определению 2. ■

Свойство 5. *Пусть* $\vec{\xi}$ *— гауссовский. Тогда его компоненты независимые* $\Leftrightarrow$ *они некоррелированы.*

▲ $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — попарно некоррелированы $\Leftrightarrow$ $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0, \forall i \neq j \Leftrightarrow \Sigma$ — диагонально $\Leftrightarrow$ по свойству 2 компоненты $\vec{\xi}$ независимы в совокупности. ■

Свойство 6 (Явный вид плотности многомерного нормального распределения, б/д)**.** $\operatorname{Var}\vec{\xi} = \Sigma, \mathsf{E}\vec{\xi} = \vec{m}$. *Если матрица ковариации* Σ *— невырожденная, то* $\vec{\xi}$ *имеет плотность в* $\mathbb{R}^n$.
$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{m}), (\vec{x} - \vec{m}))\right), x \in \mathbb{R}^n$.

Многомерная ЦПТ

Теорема (Многомерная ЦПТ)**.** *Пусть* $\{\vec{x}_i\}_{i \geqslant 1}$ *— независимые одинаково распределенные случайные вектора,* $\mathsf{E}\vec{x}_i = \vec{a}$, $\operatorname{Var}\vec{x}_i = \Sigma$.
Тогда $\sqrt{n}\left(\frac{\vec{x_1} + \dots + \vec{x_n}}{n} - \vec{a}\right) \xrightarrow{d} N(\vec{0}, \Sigma), n \to +\infty$.

Замечание. Сходимость векторов по распределению вводится аналогично обычной сходимости случайной величины по распределению, то есть $\forall f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывно ограниченных $\mathsf{E}f(\vec{x_n}) \to \mathsf{E}f(\vec{x})$.