

# Конспект лекций по курсу «Теория вероятностей»

Лектор: к. ф.-м. н. Родионов Игорь Владимирович

3 сентября 2019 г.

## Содержание

<b>1 Глава 1.</b>	<b>2</b>
Функция распределения . . . . .	3
Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой . . . . .	4
Вероятностная мера в $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ . . . . .	6
Многомерная плотность вероятности . . . . .	7
<b>2 Глава 2.</b>	<b>8</b>
Случайные величины . . . . .	8
Характеристики случайных величин и векторов . . . . .	9
Независимость случайных величин . . . . .	10
<b>3 Глава 3.</b>	<b>10</b>
Интеграл Лебега . . . . .	10
Свойства математического ожидания (9 штук) . . . . .	12
Прямое произведение вероятностных пространств и формула свертки . . . . .	15
Дисперсия и ковариация . . . . .	17
Свойства ковариации и дисперсии (7 штук) . . . . .	18
Многомерный случай . . . . .	19
Неравенства (3 штуки) . . . . .	19
<b>4 Глава 4.</b>	<b>21</b>
Условные математические ожидания (УМО) . . . . .	21
Свойства УМО (9 штук) . . . . .	22

Условные распределения . . . . .	24
Алгоритм подсчета УМО . . . . .	26
<b>5 Глава 5.</b>	<b>27</b>
Виды сходимости случайных величин . . . . .	27
Контрпримеры . . . . .	29
Сходимость в $L_2$ . . . . .	38
<b>6 Глава 6.</b>	<b>38</b>
Случайные блуждания и закон повторного логарифма . . . . .	38
<b>7 Глава 7.</b>	<b>40</b>
Характеристические функции . . . . .	40
Свойства характеристических функций . . . . .	41
Проверка того, что $\varphi$ — характеристическая функция . . . . .	45
Центральная предельная теорема . . . . .	46
Когда выполнены условия Линдберга? . . . . .	47
<b>8 Глава 8.</b>	<b>49</b>
Гауссовские случайные векторы . . . . .	49
Свойства гауссовских векторов . . . . .	50
Многомерная ЦПТ . . . . .	51

## 1 Глава 1.

**Определение.** Под  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  будем понимать вероятностное пространство, где:

1.  $\Omega$  — пространство элементарных исходов;
2.  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра на  $\Omega$ ;
3.  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  — вероятностная мера, причем:
  - а)  $P(\Omega) = 1$ ;
  - б)  $P$  —  $\sigma$ -аддитивна, то есть  $\forall \{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \in \mathcal{F}$ , причем  $A_n \cap A_m = \emptyset$  при  $n \neq m$ :
 
$$P\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

**Определение.** Последовательность  $\{A_n\}$  убывает к  $A$ , если  $\forall n \hookrightarrow A_n \supseteq A_{n+1}$  и  $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ . Последовательность  $\{A_n\}$  возрастает к  $A$ , если  $\forall n \hookrightarrow A_n \subseteq A_{n+1}$  и  $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ .

**Теорема** (О непрерывности вероятностной меры). [б/д] Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  — измеримое пространство и на нем определена функция  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ , удовлетворяющая следующим свойствам:

1.  $P(\Omega) = 1$ ;
2.  $P$  — конечно аддитивная.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1.  $P$  — вероятностная мера;
2.  $\forall A_n \downarrow A \hookrightarrow P(A_n) \rightarrow P(A)$  (непрерывность снизу);
3.  $\forall A_n \uparrow A \hookrightarrow P(A_n) \rightarrow P(A)$  (непрерывность сверху);
4.  $\forall A_n \downarrow \emptyset \hookrightarrow P(A_n) \rightarrow 0$  (непрерывность в нуле).

**Теорема** (Каратеодори). [б/д] Пусть  $\Omega$  — некоторое множество,  $\mathcal{A}$  — алгебра на  $\Omega$  и  $P_\sigma$  — вероятностная мера на  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

Тогда существует единственная вероятностная мера на  $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$ , являющаяся продолжением  $P_\sigma$ , то есть  $\forall A \in \mathcal{A} \hookrightarrow P_\sigma(A) = P(A)$ .

## Функция распределения

Рассмотрим измеримое пространство  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  и вероятностную меру  $P$  на нем.

**Определение.** Функция  $F(x), x \in \mathbb{R}$ , заданная по правилу  $F(x) = P((-\infty, x])$  — функция распределения вероятностной меры  $P$ .

**Лемма** (свойства функции распределения). Пусть  $F(x)$  — функция распределения, тогда

1.  $F(x)$  не убывает;
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ;
3.  $F(x)$  непрерывна справа.

▲ Пусть  $y \geq x$ , тогда  $F(y) - F(x) = P((-\infty, y]) - P((-\infty, x]) = P((x, y]) \geq 0$ , следовательно,  $F(x)$  неубывает.

Пусть  $x_n \rightarrow -\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ , тогда  $(-\infty, x_n] \rightarrow \emptyset$ , следовательно,  $F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  по теореме о непрерывности вероятностной меры.

Пусть  $x_n \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ , тогда  $(-\infty, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ , следовательно,  $F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\mathbb{R}) = 1$ .

Пусть  $x_n \downarrow x$ , тогда  $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x]$ , отсюда по теореме о непрерывности вероятностной меры вытекает, что  $F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P((-\infty, x]) = F(x)$ . ■

**Свойство 1.** Функция распределения имеет предел слева  $\forall x \in \mathbb{R}$ , при этом число точек разрыва не более, чем счетно.

▲ Пусть  $x_n \rightarrow x - 0$  — возрастающая последовательность, тогда  $F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P((-\infty, x)) = F(x - 0)$ .

Каждая точка разрыва — скачок функции распределения, каждому скачку сопоставим  $[F(x - 0), F(x)]$ , а этому отрезку в свою очередь сопоставим некую рациональную точку, которая лежит в  $(F(x - 0), F(x))$ . Следовательно каждому скачку мы сопоставили точку из  $\mathbb{Q}$ , а так как  $\mathbb{Q}$  счетно, то число разрывов не более, чем счетно. ■

**Определение.** Функция  $F(x)$ , удовлетворяющая свойствам 1) – 3) из леммы, называется функцией распределения на  $\mathbb{R}$ .

**Теорема** (о взаимно однозначном соответствии между вероятностной мерой и функцией распределения на  $\mathbb{R}$ ). Пусть  $F(x)$  — функция распределения на  $\mathbb{R}$ . Тогда существует единственная вероятностная мера  $P$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  такая, что  $F(x)$  является ее функцией распределения, то есть  $F(x) = P((-\infty, x])$ .

▲ Рассмотрим полукольцо  $S = \{(a, b]\}$  на  $\mathbb{R}$ . Определим  $\sigma$ -аддитивную вероятностную меру  $P((a, b]) = F(b) - F(a)$ , а по теореме Каратеодори  $P$  единственным образом продолжается на всю  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . ■

## Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой

### ① Дискретное распределение

Пусть  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$  не более, чем счетно.

**Определение.** Вероятностная мера  $P$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , удовлетворяющая свойству  $P(\mathbb{R} \setminus \mathcal{X}) = 0$ , называется дискретной вероятностной мерой на  $\mathcal{X}$ , ее функция распределения также называется дискретной.

Рассмотрим  $\mathcal{X} = \{x_k\}$ , положим  $p_k = P(\{x_k\})$ , тогда  $P(\mathcal{X}) = 1 = \sum_k P(x_k)$ .

**Определение.** Набор чисел  $\{p_k\}$  — распределение вероятностей на  $\mathcal{X}$ .

### ② Абсолютно непрерывное распределение

**Определение.** Пусть  $F(x)$  — функция распределения вероятностной меры  $P$  на  $\mathbb{R}$ , причем  $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$ , где  $p(t) \geq 0$ , а  $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = 1$ .

Тогда  $P$  абсолютно непрерывна,  $F(x)$  также называется абсолютно непрерывной, а  $p(x)$  — плотность функции распределения  $F(x)$ . Причем  $p(x)$  определена однозначно, кроме множества меры нуль.

Из формулы Ньютона-Лейбница: если  $F(x)$  — дифференцируема, то  $p(x) = F'(x)$ .

Если  $p(x)$  — плотность функции распределения  $F(x)$ , то  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow P(B) = \int_B p(x) dx$ .

### Примеры:

1. Равномерное распределение  $R[a, b]$

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \cdot I(x \in [a, b]).$$

2. Нормальное (гауссовское) распределение  $N(a, \sigma^2)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp \left[ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right].$$

3. Экспоненциальное распределение  $\text{Exp}(\alpha)$

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} \cdot I(x > 0).$$

4. Распределение Коши  $\text{Cauchy}(\theta)$

$$p(x) = \frac{\theta}{\pi(x^2 + \theta^2)}.$$

5. Гамма распределение  $\Gamma(\alpha, \gamma)$

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1} \gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\gamma x} \cdot I(x > 0).$$

**Определение.**  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ , причем  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \Gamma(n) = (n-1)!, \forall \lambda \in \mathbb{R} \hookrightarrow \Gamma(\lambda \pm 1) = \lambda \Gamma(\lambda)$ , а  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

### ③ Сингулярные распределения

**Определение.** Пусть  $F(x)$  — функция распределения на  $\mathbb{R}$ . Точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  называется точкой роста  $F(x)$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0 - \varepsilon) > 0$ .

**Определение.** Функция распределения называется сингулярной, если она непрерывна и множество ее точек роста имеет Лебегову меру нуль. Например, функция Кантора.

**Теорема** (Лебега о функции распределения). *[б/д] Пусть  $F(x)$  — функция распределения на  $\mathbb{R}$ .*

*Тогда существуют единственные  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\alpha_3$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$  и функции распределения  $F_1(x), F_2(x)$  и  $F_3(x)$  такие, что  $F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$ , где  $F_1(x)$  — дискретная функция распределения,  $F_2(x)$  — абсолютно непрерывная, а  $F_3(x)$  — сингулярная.*

### Вероятностная мера в $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

**Определение.** Пусть  $P$  — вероятностная мера в  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , где  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\{B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i \leq n\}$ , тогда функция  $F(\vec{x}) = P((-\infty; x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n])$  называется функцией распределения вероятностной меры  $P$  в  $\mathbb{R}^n$ .

**Замечание.** Пусть  $\vec{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$ . Будем писать  $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{x}$ , если  $\forall i, k \hookrightarrow x_i^{(k)} \geq x_i^{(k+1)}$  и  $x_i^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x_i$ .

**Лемма** (Свойства многомерной функции распределения). Пусть  $F(\vec{x})$  — функция распределения вероятностной меры в  $\mathbb{R}^n$ .

Тогда для нее верно:

1. Если  $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{x}$ , то  $F(\vec{x}^{(k)}) \rightarrow F(\vec{x}), k \rightarrow +\infty$ ;
2.  $\lim_{\forall i: x_i \rightarrow +\infty} F(\vec{x}) = 1$ ;  $\lim_{\exists i: x_i \rightarrow -\infty} F(\vec{x}) = 0$ ;
3.  $\forall a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, \Delta_{a_1 b_1}^1 \dots \Delta_{a_n b_n}^n F(x) > 0$  :, где  $\Delta_{a_i b_i}^i F(\vec{x}) = F(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ .

▲ Первое свойство следует из непрерывности вероятностной меры, так как

$$\bigtimes_{i=1}^n (-\infty, x_i^{(k)}] \downarrow \bigtimes_{i=1}^n (-\infty, x_i].$$

Для доказательства второго пункта рассмотрим

$$B_m = \bigtimes_{i=1}^n (-\infty, \inf_{k \geq m} x_i^{(k)}].$$

Если  $\forall i : x_i^k \rightarrow +\infty$ , то  $B_m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $P(B_m) \rightarrow P(\mathbb{R}^n) = 1$ . А если  $\exists i : x_i^{(k)} \rightarrow -\infty$ , то  $B_m \rightarrow \emptyset$ ,  $P(B_m) \rightarrow 0$ .

Не трудно понять, что

$$\Delta_{a_1 b_1}^1 \dots \Delta_{a_n b_n}^n F(x) = P((a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]),$$

откуда следует утверждение третьего пункта леммы. Так, например,

$$\Delta_{a_1 b_1}^1 \Delta_{a_2, b_2}^2 F(x) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - (F(b_1, a_2) - F(a_1, a_2)).$$

■

**Теорема** (О взаимнооднозначном соответствии вероятностной меры и функции распределения в  $\mathbb{R}^n$ ). [б/д] Если функция  $F(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  удовлетворяет свойствам из леммы, то существует единственная  $P$  на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , для которой  $F(\vec{x})$  является функцией распределения.

*Замечание.* Почему нельзя заменить свойство 3) на монотонность на любом компакте?

▲ Пусть  $F(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$  на  $[0, 1]^2$ , но тогда  $-1 = \Delta_{0;1}^1 \Delta_{0;1}^2 F(x_1, x_2) \neq P([0, 1]^2) = 1$ . Следовательно,  $F(x)$  не функция распределения. ■

**Определение.** Функция  $F(\vec{x})$ , удовлетворяющая условиями из леммы называется функцией распределения в  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение.** Маргинальной функцией распределения  $i$ -й компоненты функции распределения  $F(\vec{x})$  называется  $F_i(x_i) = F(+\infty, \dots, +\infty, x_i, +\infty, \dots, +\infty)$ .

## Многомерная плотность вероятности

**Определение.** Если

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n, \quad p(x_1, \dots, x_n) \geq 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \dots \int p(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n = 1,$$

то  $p(x_1, \dots, x_n)$  называется  $n$ -мерной плотностью вероятности.

Если дифференцируема  $F(x_1, \dots, x_n)$ , то

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F(x_1, \dots, x_n).$$

## 2 Глава 2.

### Случайные величины

**Определение.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  и  $(E, \mathcal{E})$  — два измеримых пространства. Отображение  $X : \Omega \rightarrow E$ , такое что  $\forall B \in \mathcal{E} \hookrightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$  называется случайным элементом, так же его называются  $\mathcal{F}$ -измеримым или  $\mathcal{F}|\mathcal{E}$ -измеримым.

Если  $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , то это случайная величина.

Если  $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , то это случайный вектор.

**Определение.** Функция  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — борелевская, если  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .

**Утверждение.** Любая непрерывная и кусочно-непрерывная функция — борелевская.

**Теорема** (критерий измеримости). [б/д] Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathcal{E})$  — два измеримых пространства,  $X : \Omega \rightarrow E$  — случайный элемент тогда, и только тогда, когда существует система событий  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$ , такая что  $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$  и  $\forall B \in \mathcal{M} \hookrightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ .

**Лемма.** Пусть  $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  — случайный вектор,  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — борелевская функция, тогда  $\varphi(\vec{\xi})$  — случайный вектор.

▲ Пусть  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ . Тогда

$$(\varphi(\vec{\xi}))^{-1}(B) = \{\omega : \varphi(\vec{\xi}(\omega)) \in B\} = \{\omega : \vec{\xi}(\omega) \in \varphi^{-1}(B) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\} \in \mathcal{F}.$$

Так как выполняется  $\forall B$ , то  $\varphi(\vec{\xi})$  — случайный вектор. ■

**Лемма.**  $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  — случайный вектор тогда, и только тогда, когда  $\forall i : \xi_i$  — случайная величина.

▲ *Необходимость.*  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_i$  — непрерывная функция, значит борелевская, следовательно, по предыдущей лемме  $\xi_i$  — случайная величина.

*Достаточность.*  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(B_1 \times \dots \times B_n, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , поэтому  $\vec{\xi}^{-1}(B_1 \times \dots \times B_n) = \{\omega : \vec{\xi}(\omega) \in B_1 \times \dots \times B_n\} = \{\omega : \xi_1(\omega) \in B_1, \dots, \xi_n(\omega) \in B_n\} = \bigcap_{i=1}^n \{\omega : \xi_i(\omega) \in B_i\} = \bigcap_{i=1}^n \xi_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}$ , значит, по критерию измеримости,  $\vec{\xi}$  — случайный вектор. ■

**Следствие.** Пусть  $\xi, \eta$  — случайные величины,  $c \in \mathbb{R}$ , тогда  $\xi + \eta, \xi - \eta, c\xi, \xi \cdot \eta$  и  $\xi/\eta$ , если  $\forall \omega \in \Omega : \eta \neq 0$ , тоже случайные величины.

**Лемма** (О пределах случайной величины). Пусть  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  последовательность случайных величин, тогда, если пределы  $\overline{\lim} \xi_n, \underline{\lim} \xi_n, \inf \xi_n, \sup \xi_n$  существуют, они являются случайными величинами.



▲  $\{\omega : \sup \xi_n \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{\omega : \xi_n(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ . По критерию измеримости, так как  $\sigma(x : (-\infty, x]) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , мы доказали, что  $\sup \xi_n$  — случайная величина. Аналогично,  $\{\omega : \inf \xi_n \geq x\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{\omega : \xi_n(\omega) \geq x\} \in \mathcal{F}$ , так как  $\sigma((x, +\infty)) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , по критерию измеримости  $\inf \xi_n$  — случайная величина. Отсюда  $\overline{\lim} \xi_n = \inf \sup_{m \geq n} \xi_m$  и  $\underline{\lim} \xi_n = \sup \inf_{m \geq n} \xi_m$  тоже случайные величины. ■

**Следствие.** Пусть  $\xi = \lim \xi_n$  и предел существует  $\forall \omega \in \Omega$ , тогда  $\xi$  — случайная величина.

▲  $\xi = \lim \xi_n = \overline{\lim} \xi_n = \underline{\lim} \xi_n$ . Тогда  $\xi$  — случайная величина. ■

## Характеристики случайных величин и векторов

### ① Распределение случайной величины

**Определение.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $\xi$  — случайная величина (вектор) на нем. Распределением случайной величины называется вероятностная мера  $P_\xi$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  ( $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ), заданная по правилу  $P_\xi(B) = P(\xi \in B)$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  ( $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ).

### ② Функция распределения случайной величины

**Определение.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $\xi$  — случайная величина (вектор) на нем. Функцией распределения  $\xi$  называется  $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$  ( $F_\xi(\vec{x}) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n)$ ).

### ③ Дискретность и непрерывность

**Определение.** Случайная величина называется дискретной, если ее распределение дискретно.

**Определение.** Случайная величина называется абсолютно непрерывной, если ее распределение абсолютно непрерывно, то есть  $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(y) dy$ ,  $p_\xi(y) \geq 0$  — плотность случайной величины  $\xi$ .

**Определение.** Случайная величина называется сингулярной, если её распределение сингулярно.

### ④ Сигма-алгебра, порожденная случайной величиной

**Определение.** Пусть  $\xi = \xi(\omega)$  — случайная величина (вектор) на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , тогда  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{F}_\xi$ , порожденной случайной величиной  $\xi$ , называется  $\mathcal{F}_\xi = \{\xi^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ } (\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))\}$ .

**Определение.** Пусть  $\xi, \eta$  — случайные величины. Тогда  $\eta$  является  $\mathcal{F}_\xi$ -измеримой, если  $\mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi$ .

**Пример.** Пусть  $f$  — борелевская,  $\eta = f(\xi)$ . Тогда  $\eta$  —  $\mathcal{F}_\xi$ -измерима.

▲  $\{\eta \in B\} \in \mathcal{F}_\xi$ , где  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , значит  $\{\eta \in B\} = \{\xi \in f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \in \mathcal{F}_\xi$  ■

**Теорема.** [б/д] Случайная величина  $\eta$  —  $\mathcal{F}_\xi$ -измерима, тогда и только тогда, когда существует борелевская  $\varphi$ , такая что  $\forall \omega \in \Omega \hookrightarrow \eta(\omega) = \varphi(\xi(\omega))$  почти наверное, то есть  $P(\eta = \varphi(\xi)) = 1$ .

## Независимость случайных величин

**Определение.** Системы множеств  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  независимы, если  $\forall A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G} \hookrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

**Определение.** Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — случайные величины, тогда  $\xi$  и  $\eta$  независимы, если  $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = P(\xi \in B_1) \cdot P(\eta \in B_2)$ .

**Определение.** Случайные величины  $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$  независимы (в совокупности), если для любого конечного набора индексов  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \hookrightarrow P(\xi_{\alpha_1} \in B_1, \dots, \xi_{\alpha_n} \in B_n) = \prod_{i=1}^n P(\xi_{\alpha_i} \in B_i)$ ,  $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i = 1, \dots, n$ .

**Теорема** (Критерий независимости в терминах функции распределения). Случайные величины  $\{\xi_i\}_{i=1}^n$  независимы в совокупности тогда, и только тогда, когда  $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \hookrightarrow P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i \leq x_i)$ .

▲  $\Rightarrow$ . Возьмем в качестве  $B_i = (-\infty, x_i]$ .

$\Leftarrow$ . Не доказываем. ■

**Теорема.** Пусть  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  — независимые в совокупности случайные векторы,  $\xi_i$  имеет размерность  $n_i$ . Пусть  $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{k_i}$  — борелевские функции. Тогда величины  $f_1(\xi_1), \dots, f_n(\xi_n)$  — независимые в совокупности.

▲ Обозначим  $\eta_i = f_i(\xi_i) \Rightarrow \eta_i$  —  $\mathcal{F}_{\xi_i}$ -измеримая. По условию  $\{\mathcal{F}_{\xi_i}\}_{i=1}^n$  — независимые  $\sigma$ -алгебры, следовательно  $\{\mathcal{F}_{\eta_i}\}$  независимы, т.к.  $\forall i : \mathcal{F}_{\eta_i} \subset \mathcal{F}_{\xi_i}$ , значит по определению  $\{\eta_i\}$  независимы в совокупности. ■

## 3 Глава 3.

### Интеграл Лебега

**Определение.** Пусть  $A \in \mathcal{F}$ . Тогда индикатор множества  $A$ :

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \in \bar{A}. \end{cases}$$

**Определение.** Случайная величина  $\xi$  называется простой, если существует разбиение  $\Omega = \sum_{i=1}^n A_i$ , такое что  $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i I_{A_i}(\omega)$ .

**Определение.** Пусть  $\xi$  — случайная величина, тогда введем обозначения  $\xi_+ = \max(\xi, 0)$ ,  $\xi_- = \max(-\xi, 0)$ .  $\xi = \xi_+ - \xi_-$ .

**Лемма.**  $[b/d] \forall \xi \geq 0$  существует набор простых случайных величин  $\xi_n: \xi_n \uparrow \xi$  ( $\xi_n$  — простая, если  $\xi_n = \sum_{i=1}^k c_i I_{A_i}$ ).

**Определение.** Пусть  $\xi$  — простая случайная величина, то есть  $\xi = \sum_{i=1}^k c_i I_{A_i}$ , тогда матожидание  $E\xi = \sum_{i=1}^k c_i P(A_i)$ , где  $\bigsqcup_{i=1}^k A_i = \Omega$ .

**Определение.** Пусть  $\xi \geq 0$ , тогда матожидание  $E\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n$ , где  $\xi_n \uparrow \xi$ ,  $\xi_n$  — простые неотрицательные случайные величины, также справедливо равенство  $E\xi = \sup_{\eta \leq \xi} E\eta$ , где  $\eta$  — простые неотрицательные случайные величины.

**Определение.** Пусть  $\xi$  — произвольные случайные величины. Пусть  $\xi_+ = \max(\xi, 0)$ ,  $\xi_- = \max(-\xi, 0) \Rightarrow \xi = \xi_+ - \xi_-$ , тогда матожидание

$$E\xi = \begin{array}{|c|c|c|} \hline E\xi_- \setminus E\xi_+ & < +\infty & = +\infty \\ \hline < +\infty & E\xi_+ - E\xi_- & +\infty \\ \hline = +\infty & -\infty & \nexists \\ \hline \end{array}$$

**Следствие.**  $E\xi$  — конечно  $\Leftrightarrow E|\xi|$  — конечно.

▲  $|\xi| = \xi_+ + \xi_-$ .  $E|\xi|$  — конечно  $\Leftrightarrow E\xi_+, E\xi_-$  — конечны  $\Leftrightarrow E\xi$  — конечно. ■

**Утверждение.** Таким образом, матожидание случайной величины — это интеграл Лебега по мере  $P$ , то есть:

$$E\xi = \int_{\Omega} \xi dP = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega).$$

Для множества  $A$ :

$$E(\xi \cdot I_A) = \int_A \xi dP.$$

**Пример:** Для случайной величины  $\xi \sim \text{Cauchy}(\theta)$  матожидание  $E\xi = +\infty$ , то есть матожидание не определено.

### Свойства матожидания (9 штук)

**Свойство 1.** Пусть  $\xi$  — случайная величина,  $E\xi$  — конечно, тогда  $\forall c \in \mathbb{R} \hookrightarrow E(c\xi)$  — конечно и  $E(c\xi) = cE\xi$ .

▲

1. Для простых случайных величин свойство очевидно — выносим константу  $c$  за сумму.
2. Пусть  $\xi \geq 0$ ,  $\xi_n \uparrow \xi$  — последовательность простых неотрицательных случайных величин,  $c \geq 0$ . Тогда  $c\xi_n \uparrow c\xi \Rightarrow E(c\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(c\xi_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} E(\xi_n) = cE\xi$ .
3. В общем случае  $\xi = \xi_+ - \xi_-$ , тогда  $(c\xi)_+ = c\xi_+$ ,  $(c\xi)_- = c\xi_- \Rightarrow E(c\xi) = E(c\xi)_+ - E(c\xi)_- = cE\xi$ . Если  $c < 0$ , то  $(c\xi)_+ = -c\xi_-$  и  $(c\xi)_- = -c\xi_+$ .

■

**Свойство 2.** Если  $\xi \leq \eta$ ,  $E\xi, E\eta$  — конечны, то  $E\xi \leq E\eta$ .

▲

1. Для простых случайных величин — очевидно.
2. Для неотрицательных  $\xi, \eta$   $E\xi = \sup_{\mu \leq \xi} E\mu$ , где  $\mu$  — простая случайная величина.  

$$\sup_{\mu \leq \xi} E\mu \leq \sup_{\mu \leq \eta} E\mu = E\eta.$$
3. Пусть  $\xi, \eta$  — произвольные, тогда  $\xi_+ \leq \eta_+$  и  $\xi_- \geq \eta_-$ .  $E\xi = E\xi_+ - E\xi_- \leq E\eta_+ - E\eta_- = E\eta$ .

■

**Свойство 3.** Если  $E\xi$  — конечно, то  $|E\xi| \leq E|\xi|$ .

▲  $|\xi| = \xi_+ + \xi_- \Rightarrow E|\xi|$  — конечно.  $\underbrace{-E\xi_+ - E\xi_-}_{-E|\xi|} \leq \underbrace{E\xi_+ - E\xi_-}_{E\xi} \leq \underbrace{E\xi_+ + E\xi_-}_{E|\xi|}$ . ■

**Свойство 4** (Аддитивность). Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — случайные величины,  $E\xi$  и  $E\eta$  — конечные, тогда  $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$ .

▲

1. Для простых случайных величин — очевидно.
2. Пусть  $\xi, \eta \geq 0$ , возьмем  $\xi_n \uparrow \xi$ ,  $\eta_n \uparrow \eta$  — простые и положительные. Тогда  $\xi_n + \eta_n \uparrow \xi + \eta \Rightarrow E(\xi + \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(\xi_n + \eta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n + \lim_{n \rightarrow \infty} E\eta_n = E\xi + E\eta$ .

3. Пусть  $\xi, \eta$  — произвольные, тогда  $(\xi + \eta)_+ \leq \xi_+ + \eta_+$ . Пусть  $\delta = (\xi_+ + \eta_+) - (\xi + \eta)_+ \Rightarrow E\delta + E(\xi + \eta)_+ = E\xi_+ + E\eta_+ \Rightarrow E(\xi + \eta)_+ = E\xi_+ + E\eta_+ - E\delta$ . Аналогично,  $E(\xi + \eta)_- = E\xi_- + E\eta_- - E\delta$ . Тогда  $E(\xi + \eta) = E(\xi + \eta)_+ - E(\xi + \eta)_- = E\xi_+ + E\eta_+ - E\delta - E\xi_- - E\eta_- + E\delta = E\xi + E\eta$ . Рассмотрим  $(\xi + \eta)_- = (\xi + \eta)_+ - (\xi + \eta) = \xi_+ + \eta_+ - \delta - (\xi + \eta) = \xi_- + \eta_- - \delta$ .

■

**Свойство 5.** 1. Пусть  $|\xi| \leq \eta$ ,  $E\eta$  — конечное, тогда  $E\xi$  — конечная.

2. Пусть  $\xi \leq \eta$ ,  $E\eta$  — конечное, тогда  $E\xi < +\infty$ .

Пусть  $\xi \geq \eta$ ,  $E\eta$  — конечное, тогда  $E\xi > -\infty$ .

3. Если  $E\xi$  — конечное и  $A \in \mathcal{F}$ , то  $E(\xi \cdot I_A)$  — конечное.

▲

1.  $\xi_-, \xi_+ \leq \eta \Rightarrow 0 \leq E\xi_+ = \sup_{0 \leq \mu \leq \xi_+} E\mu \leq E\eta < +\infty \Rightarrow E\xi_+, E\xi_- < +\infty \Rightarrow E\xi$  — конечное.
2.  $\xi_+ \leq \eta_+ < +\infty \Rightarrow$  по первому пункту  $E\xi_+ < +\infty \Rightarrow E\xi < +\infty$ .
3.  $(\xi \cdot I_A)_+ = I_A \cdot \xi_+ < \xi_+ \Rightarrow E(\xi \cdot I_A)_+ —$  конечное. Аналогично  $E(\xi \cdot I_A)_- —$  конечное  $\Rightarrow E(\xi \cdot I_A) —$  конечное.

■

**Определение.** Событие  $A$  происходит почти наверное, если  $P(A) = 1$ .

**Свойство 6.** Если  $\xi = 0$  почти наверное, то  $E\xi = 0$ .

▲

1. Пусть  $\xi$  — простая случайная величина, то есть  $\xi = \sum_{k=1}^n x_k I_{A_k}$ , где  $\{x_k\}$  различные,  $\{A_k\}$  — разбиение  $\Omega$ ,  $A_k = \{\xi = x_k\}$ . Тогда если  $x_k \neq 0$ , то  $A_k = \{\xi = x_k\} \subseteq \{\xi \neq 0\} \Rightarrow P(A_k) \leq P(\xi \neq 0) = 0 \Rightarrow E\xi = \sum_{k=1}^n x_k P(A_k) = 0$ .
2. Если  $\xi \geq 0$ , то  $E\xi = \sup_{\xi \geq \eta} E\eta$ , где  $\eta$  — простые  $\Rightarrow E\xi \geq 0$ . Но  $0 \leq \eta \leq \xi = 0$  почти наверное  $\Rightarrow E\eta = 0 \Rightarrow E\xi = 0$ .
3. Пусть  $\xi$  — произвольные  $\Rightarrow \xi_+ = 0$  почти наверное,  $\xi_- = 0$  почти наверное и  $E\xi = E\xi_+ - E\xi_- = 0$ .

■

**Следствие.** (Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.)

$$P(A) = 0, A \in \mathcal{F} \Rightarrow \int_A \xi dP = 0.$$

▲  $\xi \cdot I_A = 0$  п.н.  $\Rightarrow 0 = E(\xi \cdot I_A) = \int_A \xi dP$ . ■

**Свойство 7.** Если  $\xi = \eta$  почти наверное и  $E|\eta| < +\infty$ , то  $E|\xi| < +\infty$  и  $E\xi = E\eta$ .

▲ Пусть  $A = \{\xi \neq \eta\}$ , тогда  $I_A = 0$  почти наверное, следовательно  $\xi \cdot I_A = 0$  почти наверное и  $\eta \cdot I_A = 0$  почти наверное. Так как  $\xi = \xi \cdot I_A + \xi \cdot I_{\bar{A}}$ , то  $\xi = \xi \cdot I_A + \eta \cdot I_{\bar{A}}$ , потому что на  $\bar{A}$  выполняется  $\xi = \eta$ . Из свойства 6 имеем  $E\xi = E(\xi \cdot I_A) + E(\eta \cdot I_{\bar{A}}) = E(\eta \cdot I_A) + E(\eta \cdot I_{\bar{A}}) = E\eta$ . ■

**Свойство 8.** Пусть  $\xi \geq 0$  и  $E\xi = 0$ , тогда  $\xi = 0$  почти наверное.

▲ Рассмотрим события  $A = \{\xi > 0\}$  и  $A_n = \{\xi > \frac{1}{n}\}$ , следовательно,  $A_n \uparrow A$ . Имеем  $P(A_n) = EI_{A_n}$ , так как  $n\xi > 1$  на  $A_n$ , то  $EI_{A_n} \leq E(n\xi \cdot I_A) \leq nE\xi = 0$ , значит,  $P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0$ . ■

**Свойство 9.** Пусть  $E\xi$  и  $E\eta$  конечны,  $\forall A \in \mathcal{F} \hookrightarrow E(\xi \cdot I_A) \leq E(\eta \cdot I_A)$ . Тогда  $\xi \leq \eta$  почти наверное.

▲ Рассмотрим событие  $B = \{\xi > \eta\}$ . Из условия и построения  $B$  получаем, что  $E(\eta \cdot I_B) \leq E(\xi \cdot I_B) \leq E(\eta \cdot I_B)$ , следовательно,  $E(\xi \cdot I_B) = E(\eta \cdot I_B)$ , значит  $E((\xi - \eta) \cdot I_B) = 0$ . Так как  $(\xi - \eta) \cdot I_B \geq 0$ , то по свойству 8  $(\xi - \eta) \cdot I_B = 0$  почти наверное, следовательно  $I_B = 0$  почти наверное, потому что  $\xi - \eta > 0$  на  $B$ . ■

**Теорема** (о математическом ожидании произведения случайных величин). Пусть  $\xi \perp \eta$ , причем  $E\xi$  и  $E\eta$  конечны, тогда  $E\xi\eta$  конечно и  $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$ .

▲

1. Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — простые случайные величины, то есть  $\xi$  принимает значения  $\{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\eta$  принимает значения  $\{y_1, \dots, y_n\}$ . Тогда по линейности

$$\begin{aligned} E\xi\eta &= \sum_{k,j=1}^n x_k y_j P(\xi = x_k, \eta = y_j) = \sum_{k,j=1}^n x_k y_j P(\xi = x_k) \cdot P(\eta = y_j) = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k P(\xi = x_k) \sum_{j=1}^n y_j P(\eta = y_j) = E\xi \cdot E\eta. \end{aligned}$$

2. Рассмотрим  $\xi_n \uparrow \xi$ ,

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{n \cdot 2^n - 1} \frac{k}{2^n} I\left(\frac{k}{2^n} \leq \xi \leq \frac{k+1}{2^n}\right) + nI(\xi > n),$$

следовательно,  $\xi_n = \varphi_n(\xi)$ , значит,  $\xi_n$  —  $\mathcal{F}_\xi$ -измеримая.

Пусть  $\xi, \eta \geq 0$ . Существует последовательность  $\mathcal{F}_\xi$ -измеримых ( $\mathcal{F}_\eta$ -измеримых) простых неотрицательных простых функций  $\xi_n \uparrow \xi$  ( $\eta_n \uparrow \eta$ ). Так как  $\xi \perp \eta$ , то  $\xi_n = \varphi_n(\xi) \perp \varphi_n(\eta) = \eta_n$ . Следовательно,  $\xi_n \cdot \eta_n \uparrow \xi \cdot \eta$ , а по определению математического ожидания  $E\xi\eta = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(\xi_n \eta_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E\xi_n \cdot E\eta_n = E\xi \cdot E\eta$ .

3. Пусть теперь  $\xi$  и  $\eta$  — произвольные случайные величины.  $\xi^+$  и  $\xi^-$  — функции от  $\xi$ ,  $\eta^+$  и  $\eta^-$  — функции от  $\eta$ , следовательно,  $\xi^+ \perp \eta^+$  и  $\xi^- \perp \eta^-$ , отсюда  $(\xi\eta)^+ = \xi^+\eta^+ + \xi^-\eta^-$  значит,  $E(\xi\eta)^+ = E\xi^+\eta^+ + E\xi^-\eta^- = E\xi^+E\eta^+ + E\xi^-E\eta^-$ , аналогично  $E(\xi\eta)^- = E\xi^+\eta^- + E\xi^-\eta^+ = E\xi^+E\eta^- + E\xi^-E\eta^+$ . Осталось заметить, что  $E\xi\eta = E(\xi\eta)^+ - E(\xi\eta)^- = E\xi^+E\eta^+ + E\xi^-E\eta^- - E\xi^+E\eta^- - E\xi^-E\eta^+ = (E\xi^+ - E\xi^-)(E\eta^+ - E\eta^-) = E\xi \cdot E\eta$ .

■

Пусть  $\xi = \sum_{i=1}^n x_i \cdot I(\xi = x_i)$  — простая случайная величина. Тогда  $Eg(\xi) = \sum_{i=1}^n g(x_i) \cdot P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta F_\xi(x_i)$ , где  $\Delta F_\xi(x_i) = F_\xi(x_i) - F_\xi(x_i - 0)$ .

**Теорема** (о замене переменной в интеграле Лебега). [б/д] Пусть

1.  $(\Omega, \mathcal{F})$  и  $(E, \mathcal{E})$  — два измеримых пространства;
2.  $X : \Omega \rightarrow E$  —  $\mathcal{F}$ -измеримая функция, то есть  $\forall B \in \mathcal{E} \hookrightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ ;
3.  $P$  — вероятностная мера на  $(\Omega, \mathcal{F})$ ;
4.  $P_X$  — вероятностная мера на  $(E, \mathcal{E})$ , заданная по правилу  $P_X(A) = P(\omega : X(\omega) \in A)$  для  $A \in \mathcal{E}$ .

Тогда для любой  $\mathcal{E}$ -измеримой функции  $g(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$ , то есть  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow g^{-1}(B) \in \mathcal{E}$ , верно,

$$\int_A g(x) P_X(dx) = \int_{X^{-1}(A)} g(X(\omega)) P(d\omega).$$

**Следствие (1).** Пусть  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$ , в таком случае вероятностная мера  $P_\xi$  однозначно восстанавливается по  $F_\xi$ , следовательно, по теореме  $Eg(\xi) = \int g(\xi) dP = \int g(x) P_\xi(dx) = \int g(x) dF_\xi(x)$ .

**Следствие (2).** Пусть  $\xi$  — абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью  $p_\xi(x)$ , тогда  $dF_\xi(x) = p_\xi(x) dx$ , следовательно  $Eg(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) p_\xi(x) dx$ .

## Прямое произведение вероятностных пространств и формула свертки

**Определение.** Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  и  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  — два вероятностных пространства. Тогда  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — их прямое произведение, если

1.  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ , то есть  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ ;
2.  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ , то есть  $\mathcal{F} = \sigma\{\{B_1 \times B_2\} | B_1 \in \mathcal{F}_1, B_2 \in \mathcal{F}_2\}$ ;

3.  $P = P_1 \otimes P_2$ , то есть  $P$  — продолжение вероятностной меры  $P_1 \times P_2$ , заданное на прямоугольнике  $B_1 \times B_2$ ,  $B_1 \in \mathcal{F}_1$ ,  $B_2 \in \mathcal{F}_2$  по правилу  $P(B_1 \times B_2) = P_1(B_1) \cdot P_2(B_2)$ . Так как  $\{B_1 \times B_2\}$  — полукольцо, то  $P$  существует и единственна по теореме Каратеодори.

**Теорема (Фубини).** [б/д] Пусть

1.  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — прямое произведение вероятностных пространств  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  и  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ .
2.  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $\int_{\Omega} |\xi(\omega_1, \omega_2)| dP < +\infty$ .

Тогда интегралы

$$\int_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1) \text{ и } \int_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) P_2(d\omega_2)$$

1. определены почти наверное относительно  $P_2$  и  $P_1$  соответственно;
2. являются измеримыми случайными величинами относительно  $\mathcal{F}_2$  и  $\mathcal{F}_1$ .
- 3.

$$\int_{\Omega} \xi(\omega_1, \omega_2) dP = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1) P_2(d\omega_2) = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) P_2(d\omega_2) P_1(d\omega_1).$$

Из всего этого следует, что двойной интеграл равен повторному.

**Утверждение.** Пусть  $\xi \perp \eta$  — случайные величины, тогда  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), P_{(\xi, \eta)}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_{\xi}) \otimes (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_{\eta})$ .

▲ Достаточно проверить свойство прямого произведения:

1.  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ;
2.  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  по определению борелевской  $\sigma$ -алгебры в  $\mathbb{R}^2$ ;
3.  $P_{(\xi, \eta)}(B_1 \times B_2) = P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = P(\xi \in B_1) \cdot P(\eta \in B_2) = P_{\xi}(B_1) \cdot P_{\eta}(B_2)$ . ■

**Лемма (о свертке).** Пусть случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы с функциями распределения  $F_{\xi}$  и  $F_{\eta}$ . Тогда

1. Выполняется равенство:

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} F_{\xi}(z-x) dF_{\eta}(x) = \int_{\mathbb{R}} F_{\eta}(z-x) dF_{\xi}(x).$$



2. Если  $\xi$  и  $\eta$  имеют плотности распределения  $f_\xi$  и  $f_\eta$  соответственно, то  $\xi + \eta$  имеет плотность распределения

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(z-x)f_\eta(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_\eta(z-x)f_\xi(x) dx$$

▲ Заметим,  $F_{\xi+\eta}(z) = P(\xi + \eta \leq z) = EI(\xi + \eta \leq z)$ , а по теореме о замене переменных в интеграле Лебега это равно  $\int_{\mathbb{R}^2} I(x+y \leq z)P_\xi(dx)P_\eta(dy)$ , полученный двойной интеграл по Фубини можно записать как повторный:

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} I(x+y \leq z)P_\xi(dx) \right) P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{-\infty}^{z-y} P_\xi(dx) \right) P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-y) dF_\eta(y).$$

Перейдем ко второму пункту доказательства:

$$\begin{aligned} F_{\xi+\eta}(z) &= \int_{\mathbb{R}^2} I(x+y \leq z)P_\xi(dx)P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x+y \leq z)f_\xi(x)f_\eta(y) dx dy \stackrel{t=x+y}{=} \\ &\stackrel{t=x+y}{=} \int_{\mathbb{R}^2} I(t \leq z)f_\xi(x)f_\eta(t-x) dx dt = \int_{-\infty}^z \left( \int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)f_\eta(t-x) dx \right) dt. \end{aligned}$$

Следовательно, по определению плотности,  $f_{\xi+\eta}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)f_\eta(t-x) dx$ . ■

## Дисперсия и ковариация

**Определение.** Дисперсией случайной величины  $\xi$  называется  $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$ , если  $E\xi < +\infty$ . Очевидно,  $D\xi \geq 0$ .

**Определение.** Ковариацией двух случайных величин называется  $\text{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))$ . Легко заметить, что  $\text{cov}(\xi, \xi) = D\xi$ .

**Определение.** Если  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$ , то случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  называются некоррелированными.

**Определение.** Величина  $\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$  называется коэффициентом корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  при условии, что  $D\xi$  и  $D\eta$  не равны нулю и конечны.

### Свойства ковариации и дисперсии (7 штук)

**Свойство 1.**  $\text{cov}(a\xi + b\zeta, \eta) = a \text{cov}(\xi, \eta) + b \text{cov}(\zeta, \eta)$ . Ковариация билинейна.

**Свойство 2.**  $\text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta \Rightarrow D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$ .

▲  $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E\xi\eta - E((E\xi) \cdot \eta) - E((E\eta) \cdot \xi) + E\xi \cdot E\eta = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$  ■

**Свойство 3.** Пусть  $c \in \mathbb{R}$ , тогда  $D(c\xi) = c^2 D\xi$ ,  $D(\xi + c) = D\xi$ ,  $Dc = 0$ .

▲  $D(c\xi) = E c^2 \xi^2 - (E c \xi)^2 = c^2 E \xi^2 - c^2 (E \xi)^2 = c^2 D\xi$ ;  
 $D(c + \xi) = E(c + \xi - E(c + \xi))^2 = E(c + \xi - c - E\xi)^2 = D\xi$ ;  
 $Dc = E(c - Ec)^2 = E(c - c)^2 = 0$ . ■

**Свойство 4** (Неравенство Коши-Буняковского).  $|E\xi\eta|^2 \leq E\xi^2 \cdot E\eta^2$

▲ Рассмотрим для  $\lambda \in \mathbb{R}$  функцию  $f(\lambda) = E(\xi - \lambda\eta)^2 \geq 0$ . Имеем  $f(\lambda) = E\xi^2 + 2\lambda E\xi\eta + \lambda^2 E\eta^2 \geq 0$ . Для выполнения неравенства дискриминант полученного многочлена должен быть меньше нуля:  $D = 4E\xi\eta - 4E\xi^2 E\eta^2 \leq 0$ , откуда следует неравенство. ■

**Свойство 5.**  $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$ , причем  $\rho(\xi, \eta) = \pm 1 \Leftrightarrow \xi = a\eta + b$  почти наверное.

▲

1. Рассмотрим случайные величины  $\xi_1 = \xi - E\xi$  и  $\eta_1 = \eta - E\eta$ , следовательно  $\rho(\xi_1, \eta_1) = \frac{E\xi_1\eta_1}{\sqrt{E\xi_1^2 \cdot E\eta_1^2}} \leq 1$  по неравенству Коши-Буняковского.

2. Пусть  $\rho(\xi_1, \eta_1) = 1$ . Из  $\frac{E\xi_1\eta_1}{\sqrt{E\xi_1^2 \cdot E\eta_1^2}} = 1$  получим:  $(E\xi_1\eta_1)^2 = E\xi_1^2 \cdot E\eta_1^2$ .

Рассмотрим для  $\lambda \in \mathbb{R}$  функцию  $f(\lambda) = E(\xi_1 - \lambda\eta_1)^2 = E\xi_1^2 + 2\lambda E\xi_1\eta_1 + \lambda^2 E\eta_1^2 \geq 0$ , учитывая полученное ранее:  $\frac{D}{4} = (E\xi_1\eta_1)^2 - E\xi_1^2 E\eta_1^2 = 0$ , следовательно,  $\exists! \lambda_0 : f(\lambda_0) = 0$ , то есть  $E(\xi_1 + \lambda_0\eta_1)^2 = 0$ , откуда  $(\xi_1 + \lambda_0\eta_1)^2 = 0$  почти наверное, а, значит, и  $\xi_1 + \lambda_0\eta_1 = 0$  почти наверное. Теперь можно заключить, что  $\xi = E\xi - \lambda_0(\eta - E\eta)$ . ■

**Свойство 6.** Если  $\xi \perp \eta$ , то  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$ , обратное неверное.

▲  $\text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$ , но так как  $\xi \perp \eta$ , то  $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$ , следовательно,  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$ . ■

**Лемма.** Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — попарно некоррелированные случайные величины (например, независимые в совокупности),  $D\xi_1 + \dots + D\xi_n < +\infty$ , тогда  $D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + \dots + D\xi_n$ .

▲

$$D\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i, \sum_{j=1}^n \xi_j\right) = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j).$$

По условию, если  $i \neq j$ , то  $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ , следовательно

$$D\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n D\xi_i.$$

■

## Многомерный случай

**Определение.** Пусть  $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  — случайный вектор, тогда его математическим ожиданием называется вектор из математических ожиданий его компонент, то есть  $E\vec{\xi} = (E\xi_1, \dots, E\xi_n)$ .

**Определение.** Матрицей ковариаций случайного вектора  $\vec{\xi}$  называется

$$\text{Var } \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \text{cov}(\xi_1, \xi_1) & \cdots & \text{cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\xi_n, \xi_1) & \cdots & \text{cov}(\xi_n, \xi_n) \end{pmatrix} = \|\text{cov}(\xi_i, \xi_j)\|_{i,j=1}^n.$$

**Лемма.** Матрица ковариаций случайного вектора — симметрическая и неотрицательно определенная<sup>1</sup>.

▲ Матрица  $\text{Var } \vec{\xi} = \|\text{cov}(\xi_i, \xi_j)\|_{i,j=1}^n$  — симметрическая, так как  $r_{ij} \equiv \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \text{cov}(\xi_j, \xi_i) \equiv r_{ji}$ . Пусть  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , тогда

$$\begin{aligned} \vec{x}^T \text{Var } \vec{\xi} \vec{x} &= (\vec{x}, \text{Var } \vec{\xi} \vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(x_i \xi_i, x_j \xi_j) = \\ &= \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i, \sum_{j=1}^n x_j \xi_j\right) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i, \sum_{i=1}^n x_i \xi_i\right) = D\left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i\right) \geq 0. \end{aligned}$$

■

## Неравенства (3 штуки)

**Лемма (Неравенство Маркова).** Пусть  $\xi \geq 0$  — случайная величина,  $E\xi < +\infty$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}$ .

<sup>1</sup>Матрица  $A$  неотрицательно определена, если  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$

▲  $P(\xi \geq \varepsilon) = EI(\xi \geq \varepsilon)$ . На множестве  $\xi \geq \varepsilon$  случайная величина  $\frac{\xi}{\varepsilon} \geq 1$ , следовательно  $EI(\xi \geq \varepsilon) \leq E\left(\frac{\xi}{\varepsilon} \cdot I(\xi \geq \varepsilon)\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot E\xi$ . ■

**Лемма** (Неравенство Чебышёва). Пусть  $\xi$  — случайная величина такая, что  $D\xi < +\infty$ , тогда  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$ .

▲  $P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) = P(|\xi - E\xi|^2 \geq \varepsilon^2)$ . Из неравенства Маркова имеем, что  $P(|\xi - E\xi|^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$ . ■

**Лемма** (Неравенство Йенсена). Пусть  $g(x)$  — борелевская выпуклая вниз (вверх) функция и  $E\xi < +\infty$ . Тогда  $Eg(\xi) \geq g(E\xi)$  ( $Eg(\xi) \leq g(E\xi)$ ).

▲ Так как  $g(x)$  выпукла вниз, то  $\forall x_0 \in \mathbb{R} : g(x) \geq g(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0)$ . Положим  $x = \xi$  и  $x_0 = E\xi$ , тогда  $g(\xi) \geq g(E\xi) + \lambda(E\xi)(\xi - E\xi)$ , считая математическое ожидание от обеих частей неравенства, получаем  $Eg(\xi) \geq g(E\xi) + 0$ . ■

**Теорема** (ЗБЧ в форме Чебышёва). Пусть

1.  $\{\xi_i\}_{i=1}^{+\infty}$  — попарно некоррелированные случайные величины, причем  $\forall n \hookrightarrow D\xi_n \leq C$ .

2. Обозначим  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ .

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

То же самое:  $\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0$  при  $n \rightarrow +\infty$

▲ По неравенству Чебышёва

$$P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} \leq \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

■

**Следствие.** Пусть  $\{\xi_n\}_{i=1}^{+\infty}$  — независимые случайные величины такие, что:

1.  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow D\xi_n \leq C$ ,

2.  $E\xi_n = a$ .

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

То же самое:  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

## 4 Глава 4.

### Условные математические ожидания (УМО)

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство;  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  — случайная величина;  $\mathcal{F}_\xi = \{\xi^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная  $\xi$ .

**Определение.**  $\xi$  называется  $\mathcal{G}$ -измеримой, если:

1.  $\mathcal{G}$  — под $\sigma$ -алгебра  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}$ ;
2.  $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{G}$ .

**Определение.** Пусть  $\xi$  — случайная величина на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $\mathcal{G}$  — под $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}$ .

Условным математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  относительно  $\mathcal{G}$  называется случайная величина  $E(\xi|\mathcal{G})$ , обладающая следующими свойствами:

1.  $E(\xi|\mathcal{G})$  является  $\mathcal{G}$ -измеримой случайной величиной;
2.  $\forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow E(\xi \cdot I_A) = E(E(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_A)$  или, что тоже самое,  $\int_A \xi dP = \int_A E(\xi|\mathcal{G}) dP$ .

Обозначаем  $E(\xi|\eta) \equiv E(\xi|\mathcal{F}_\eta)$ , если такая  $\eta$  существует.

**Определение.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство. Функция множеств  $\nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  — заряд (мера со знаком), если  $\nu$  —  $\sigma$ -аддитивна на  $\mathcal{F}$ , то есть  $\nu\left(\bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \nu(A_i)$  для  $\{A_i\}_{i=1}^{+\infty} \in \mathcal{F}$ , ряд в правой части сходится абсолютно и  $\sup_{A \in \mathcal{F}} |\nu(A)| < +\infty$ .

Любой заряд можно разложить в разность двух мер.

**Определение.** Заряд  $\nu$  называется абсолютно непрерывным относительно меры  $P$  (не обязательно вероятностной), если  $\forall A \in \mathcal{F} \hookrightarrow (P(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0)$ .

**Теорема (Радона-Никодима).** [б/д] Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $\nu$  — заряд на  $\mathcal{F}$ , абсолютно непрерывный относительно меры  $P$ .

Тогда существует и единственна почти наверное случайная величина  $\eta$  на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  такая, что  $E\eta < +\infty$  и  $\nu(A) = \int_A \eta dP = E\eta \cdot I_A$ .

**Утверждение.** Вероятностная мера  $P(A) = \int_A p(x)dx$ , то есть плотность — это производная Радона-Никодима  $P_\xi$  по мере Лебега на  $\mathbb{R}$ .

**Лемма** (о существовании УМО). Пусть  $\xi$  — случайная величина с  $E|\xi| < +\infty$ . Тогда  $\forall \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  (под $\sigma$ -алгебра)  $\hookrightarrow E(\xi|\mathcal{G})$  существует и единственна почти наверное.

▲ Рассмотрим вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ . Положим, что  $\forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow Q(A) = \int_A \xi d\mathbf{P} = \mathbf{E}(\xi \cdot I_A)$ , следовательно,  $Q(A)$  — заряд на  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ , абсолютно непрерывный относительно меры  $\mathbf{P}$ . Тогда по теореме Радона-Никодима существует и единственна почти наверное случайная величина  $\eta$  на  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$  с  $\mathbf{E}\eta < +\infty$  такая, что  $Q(A) = \int_A \eta d\mathbf{P}$ . Значит,  $\eta$  — УМО. Действительно,  $\eta$   $\mathcal{G}$ -измерима и  $\forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow \int_A \eta d\mathbf{P} = \int_A \xi d\mathbf{P} \Rightarrow \eta = \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})$ . ■

**Теорема.** Пусть  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{G}$  порождена разбиением  $\Omega$  на  $\{D_n\}_{n=1}^{+\infty}$ , причем,  $\mathbf{P}(D_n) > 0$ ,  $\mathbf{E}\xi < +\infty$ .

$$\text{Тогда } \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{E}(\xi \cdot I(\omega \in D_n))}{\mathbf{P}(D_n)} \cdot I(\omega \in D_n).$$

▲ Пусть  $\eta$   $\mathcal{G}$ -измерима. Покажем, что  $\eta = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n I_{D_n}(\omega)$ . Пусть  $\eta \neq \text{const}$  на  $D_n$ , тогда  $\exists a \neq b : \{\omega : \eta(\omega) = a\} \cap D_n \neq \emptyset$  и  $\{\omega : \eta(\omega) = b\} \cap D_n \neq \emptyset$ , следовательно,  $\{\omega : \eta(\omega) = a\} \cap D_n = D_n$  и  $\{\omega : \eta(\omega) = b\} \cap D_n = D_n$ , иначе  $\{\omega : \eta(\omega) = a\} \notin \mathcal{G}$ , то есть  $\eta$  не  $\mathcal{G}$ -измерима. Получили противоречие.

Найдем  $c_n : \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n I_{D_n}$ , так как  $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})$   $\mathcal{G}$ -измерима по определению.

$$\mathbf{E}(\xi \cdot I_{D_n}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_{D_n}) = \mathbf{E}\left(\sum_{m=1}^{+\infty} c_m I_{D_m} I_{D_n}\right) = \mathbf{E}(c_n I_{D_n}) = c_n \mathbf{P}(D_n).$$

$$\text{Следовательно, } c_n = \frac{\mathbf{E}(\xi \cdot I_{D_n})}{\mathbf{P}(D_n)}.$$

**Утверждение.**  $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})$  — усреднение  $\xi$  по  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{G}$ .

## Свойства УМО (9 штук)

Все матожидания ниже существуют, то есть  $\mathbf{E}|\xi| < +\infty, \mathbf{E}|\eta| < +\infty$ .

**Свойство МО :** если  $\forall A \in \mathcal{F} \hookrightarrow \mathbf{E}(\xi \cdot I_A) = \mathbf{E}(\eta \cdot I_A)$ , то  $\xi = \eta$  почти наверное на  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

**Свойство 1.** Если  $\xi$  —  $\mathcal{G}$ -измерима, то  $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \xi$  почти наверное.

▲  $\xi$  удовлетворяет свойствам УМО: первому по условиям, а второму, поскольку  $\int_A \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) d\mathbf{P} = \int_A \xi d\mathbf{P}$ . Следовательно,  $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \xi$  почти наверное. ■

**Свойство 2** (формула полной вероятности).  $\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})) = \mathbf{E}\xi$ .

▲ Так как  $\Omega \in \mathcal{G}$ , то по интегральному свойству  $\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_\Omega) = \mathbf{E}(\xi \cdot I_\Omega) = \mathbf{E}\xi$ . ■

**Свойство 3** (линейность).  $E(\alpha\xi + \beta\eta|\mathcal{G}) = \alpha E(\xi|\mathcal{G}) + \beta E(\eta|\mathcal{G})$ .

▲  $\alpha E(\xi|\mathcal{G}) + \beta E(\eta|\mathcal{G})$   $\mathcal{G}$ -измерима. Осталось проверить интегральное свойство:

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow \int_A (\alpha E(\xi|\mathcal{G}) + \beta E(\eta|\mathcal{G})) dP &= \alpha \int_A E(\xi|\mathcal{G}) dP + \beta \int_A E(\eta|\mathcal{G}) dP = \\ &= \alpha \int_A \xi dP + \beta \int_A \eta dP = \int_A (\alpha\xi + \beta\eta) dP = \int_A E(\alpha\xi + \beta\eta|\mathcal{G}) dP \end{aligned}$$

Объяснение последнего равенства: для случайной величины  $\alpha E(\xi|\mathcal{G}) + \beta E(\eta|\mathcal{G})$  выполняются два свойства УМО, значит поскольку УМО существует и единственно, то нашли образец который подходит:  $\alpha E(\xi|\mathcal{G}) + \beta E(\eta|\mathcal{G})$ , то есть он является УМО:  $E(\alpha\xi + \beta\eta|\mathcal{G}) = \alpha E(\xi|\mathcal{G}) + \beta E(\eta|\mathcal{G})$ . ■

**Свойство 4.** Пусть  $\xi$  не зависит от  $\mathcal{G}$ , то есть  $\mathcal{F}_\xi \perp \mathcal{G}$ . Тогда  $E(\xi|\mathcal{G}) = E\xi$  почти наверное.

▲ Пусть  $\xi \perp \mathcal{G}$ , что равносильно  $\forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow \xi \perp I_A$ .  $E\xi$  — константа, следовательно, она измерима относительно  $\mathcal{G}$ , так как  $\mathcal{F}_{E\xi} = \{\Omega, \emptyset\}$ . Интегральное свойство УМО:  $E(\xi \cdot I_A) = \boxed{E(E(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_A)} = E\xi \cdot P(A) = \boxed{E(E(\xi) \cdot I_A)}$ , следовательно,  $E\xi = E(\xi|\mathcal{G})$ . ■

**Свойство 5.** (Свойство монотонности.) Пусть  $\xi \leq \eta$  почти наверное, тогда  $E(\xi|\mathcal{G}) \leq E(\eta|\mathcal{G})$  почти наверное.

▲  $\xi \leq \eta$  почти наверное, следовательно,  $\forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow \int_A \xi dP \leq \int_A \eta dP$ , что равносильно  $\int_A E(\xi|\mathcal{G}) dP \leq \int_A E(\eta|\mathcal{G}) dP$ , а из свойств математического ожидания вытекает, что  $E(\xi|\mathcal{G}) \leq E(\eta|\mathcal{G})$  почти наверное. ■

**Свойство 6.**  $|E(\xi|\mathcal{G})| \leq E(|\xi||\mathcal{G})$  п.н.

▲  $-|\xi| \leq \xi \leq |\xi|$  из свойства монотонности. ■

**Свойство 7** (телескопическое свойство). Пусть  $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ , тогда

1.  $E(E(\xi|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(\xi|\mathcal{G}_1)$  почти наверное,
2.  $E(E(\xi|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = E(\xi|\mathcal{G}_1)$  почти наверное.

▲  $E(\xi|\mathcal{G}_1)$   $\mathcal{G}_2$ -измерима, следовательно, по первому свойству

$$E(E(\xi|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(\xi|\mathcal{G}_1).$$

Пусть  $A \in \mathcal{G}_1$ , следовательно,  $A \in \mathcal{G}_2$ .

$$E(E(\xi|\mathcal{G}_1) \cdot I_A) = E(\xi \cdot I_A) = E(E(\xi|\mathcal{G}_2) \cdot I_A) = E(E(E(\xi|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) \cdot I_A).$$

По свойству математического ожидания  $E(\xi|\mathcal{G}_1) = E(E(\xi|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)$ . ■

**Свойство 8.** [б/д] Пусть  $\forall n > 1 \hookrightarrow |\xi_n| \leq \eta$ ,  $E\eta < +\infty$  и  $\xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi$ . Тогда  $\forall \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \hookrightarrow E(\xi_n|\mathcal{G}) \xrightarrow{n.n.} E(\xi|\mathcal{G})$ .

**Свойство 9.** Пусть  $\eta$  —  $\mathcal{G}$ -измерима,  $E|\xi\eta| < +\infty$ ,  $E|\xi| < +\infty$ . Тогда  $E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta E(\xi|\mathcal{G})$  почти наверное.

▲ Пусть  $\eta = I_B$ , где  $B \in \mathcal{G}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{G} \hookrightarrow E(E(\xi\eta|\mathcal{G}) \cdot I_A) &= E(\xi\eta \cdot I_A) = E(\xi I_B I_A) = \\ &= E(\xi I_{A \cap B}) = E(E(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_{A \cap B}) = E(\eta E(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_A). \end{aligned}$$

Следовательно,  $E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta E(\xi|\mathcal{G})$  почти наверное по свойству математического ожидания.

Так как доказали для индикаторов, то доказали и для любой простой функции. Теперь пусть  $\eta$  — произвольная случайная величина. Возьмем последовательно простых  $\mathcal{F}_\eta$ -измеримых случайных величин  $\eta_n : |\eta_n| \leq |\eta|$  и  $\eta_n \xrightarrow{n.n.} \eta$ . По свойству 8  $E(\xi\eta|\mathcal{G}) \xrightarrow{n.n.} E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta E(\xi|\mathcal{G})$ , то есть  $E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta E(\xi|\mathcal{G})$  почти наверное. ■

**Теорема** (о наилучшем квадратичном прогнозе). Пусть  $\xi$  — случайная величина,  $\mathcal{G}$  — под-алгебра  $\mathcal{F}$ . Обозначим  $\mathcal{A}_\mathcal{G} = \{\eta - \text{сл. вел.} | \eta - \mathcal{G}\text{-измеримая сл. вел.}\}$ . Тогда  $\inf_{\eta \in \mathcal{A}_\mathcal{G}} E(\xi - \eta)^2 = E(\xi - E(\xi|\mathcal{G}))^2$ .

▲ Пусть  $\eta \in \mathcal{A}_\mathcal{G}$ , тогда

$$\begin{aligned} E(\xi - \eta)^2 &= E(\xi - E(\xi|\mathcal{G}) + E(\xi|\mathcal{G}) - \eta)^2 = \\ &= E(\xi - E(\xi|\mathcal{G}))^2 + E(E(\xi|\mathcal{G}) - \eta)^2 + 2E((\xi - E(\xi|\mathcal{G}))(E(\xi|\mathcal{G}) - \eta)). \end{aligned}$$

Пусть  $\varkappa \equiv \xi - E(\xi|\mathcal{G})$ ,  $\psi \equiv E(\xi|\mathcal{G}) - \eta$ . Рассмотрим  $E(\varkappa\psi)$ , по свойству 2 это равно  $E(E(\varkappa\psi|\mathcal{G}))$ , а по свойству 9, это можно переписать, как  $E(\psi E(\varkappa|\mathcal{G}))$ . Но  $E(\varkappa|\mathcal{G}) = E((\xi - E(\xi|\mathcal{G}))|\mathcal{G}) = 0$ , следовательно,  $E(\varkappa\psi) = 0$ . Значит  $E(\xi - \eta)^2 = E(\xi - E(\xi|\mathcal{G}))^2 + E(E(\xi|\mathcal{G}) - \eta)^2 \geq E(\xi - E(\xi|\mathcal{G}))^2$ . Равенство достигается, если  $E(E(\xi|\mathcal{G}) - \eta)^2 = 0 \Rightarrow E(\xi|\mathcal{G}) = \eta$  п.н. ■

## Условные распределения

**Определение.** Пусть  $A \in \mathcal{F}$ , тогда по определению  $P(A|\mathcal{G}) = E(I_A|\mathcal{G})$ ,  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ . Если  $\xi, \eta$  — случайные величины на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , то  $E(\xi|\eta) = E(\xi|\mathcal{F}_\eta)$ .

**Определение.** Величиной  $E(\xi|\eta = y)$  называется такая борелевская функция  $\varphi(y)$ , что  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow E(\xi \cdot I(\eta \in B)) = \int_B \varphi(y) P_\eta(dy)$ .

**Лемма.** Если  $E\xi < +\infty$ , то  $E(\xi|\eta = y)$  существует и единственно почти наверное относительно  $P_\eta$ .



▲ Рассмотрим  $\psi(B) = E(\xi \cdot I(\eta \in B))$  — заряд на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_\eta)$ , потому что  $\psi(B)$   $\sigma$ -аддитивна по свойству интеграла Лебега и конечна, так как  $E(\xi) < +\infty$ .  $\psi$  абсолютно непрерывна относительно  $P_\eta$ , так как если  $P_\eta(B) = 0$ , то  $I(\eta \in B) = 0$  почти наверное, следовательно,  $E(\xi \cdot I(\eta \in B)) = 0$ , а, значит, выполнены условия теоремы Радона-Никодима, то есть существует и единственна почти наверное случайная величина  $\varphi$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_\eta)$  (борелевская функция) такая, что  $\psi(B) = \int_B \varphi(y) P_\eta(dy)$ . ■

**Лемма.**  $E(\xi|\eta = y) = \varphi(y)$  тогда и только тогда, когда  $E(\xi|\eta) = \varphi(\eta)$  почти наверное.

▲ Пусть  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , тогда  $E(E(\xi|\eta) \cdot I(\eta \in B)) = E(\xi \cdot I(\eta \in B)) = \int_B \varphi(y) P_\eta(dy)$ .

По теореме о замене переменных в интеграле Лебега это можно переписать, как  $\int_{\{\eta \in B\}} \varphi(\eta) dP = E(\varphi(\eta) \cdot I(\eta \in B))$ , что равносильно условию  $E(\xi|\eta) = \varphi(\eta)$  почти наверное по Свойству. Обратно аналогично, по тем же равенствам. ■

**Следствие.** Пусть  $\xi$  —  $\mathcal{F}_\eta$ -измеримая случайная величина, тогда существует борелевская функция  $\psi(x)$  такая, что  $\xi = \psi(\eta)$  почти наверное.

▲ Так как  $\xi$  —  $\mathcal{F}_\eta$ -измеримая, то по свойству 1  $\xi = E(\xi|\eta)$  почти наверное. С другой стороны, так как существует единственная  $\psi(x) : \psi(x) = E(\xi|\eta = x)$ , то  $\xi = E(\xi|\eta) = \psi(\eta)$ . ■

**Определение.** Условным распределением случайной величины  $\xi$  при условии  $\eta = y$  называется вероятностная мера  $P(\xi \in B|\eta = y) = E(I(\xi \in B)|\eta = y)$ . Является мерой на  $\mathcal{B}(R)$ .

**Определение.** Условной плотностью случайной величины  $\xi$  относительно  $\eta$  называется плотность условного распределения  $P(\xi \in B|\eta = y)$ , то есть борелевская функция  $f_{\xi|\eta}(x|y)$  такая, что  $P(\xi \in B|\eta = y) = \int_B f_{\xi|\eta}(x|y) dx$ .

**Теорема** (о свойстве условной плотности). Пусть существует условная плотность случайной величины  $\xi$  относительно случайной величины  $\eta$  —  $f_{\xi|\eta}(x|y)$ . Тогда для любой борелевской функции  $g(x)$  такой, что  $E|g(\xi)|$  существует, выполнено  $E(g(\xi)|\eta = y) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{\xi|\eta}(x|y) dx$  относительно  $P_\eta$  почти наверное.

▲ Пусть также  $g(x) = I_A(x)$ ,  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_{\xi|\eta}(x|y) dx &= \int_{\mathbb{R}} I_A(x) \cdot f_{\xi|\eta}(x|y) dx = \int_A f_{\xi|\eta}(x|y) dx = \\ &= P(\xi \in A|\eta = y) = E(I(\xi \in A)|\eta = y) = E(g(\xi)|\eta = y). \end{aligned}$$

Так как доказали для индикаторов, то доказали и для всех простых функций  $g(x)$ . Далее с помощью теоремы Лебега для условных математических ожиданий доказываем для всех  $g(x)$ .  $(E(\xi_n|\eta) \xrightarrow{п.н.} E(\xi|\eta))$ , где  $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$ ,  $\xi_n$  — простые). ■

**Теорема** (Достаточное условие существования условной плотности.). Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — случайные величины такие, что существует их совместная плотность  $f_{(\xi,\eta)}(x, y)$ . Пусть  $f_\eta(y)$  — плотность случайной величины  $\eta$ .

Тогда функция

$$\varphi(x, y) = \frac{f_{(\xi,\eta)}(x, y)}{f_\eta(y)} \cdot I(f_\eta(y) > 0)$$

есть условная плотность  $f_{\xi|\eta}(x|y)$ .

▲ Для любых  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  выполнено

$$P(\xi \in B, \eta \in A) = \int_{B \times A} f_{(\xi,\eta)}(x, y) dx dy = \int_A \left( \int_B \frac{f_{(\xi,\eta)}(x, y)}{f_\eta(y)} dx \right) f_\eta(y) dy,$$

с другой стороны

$$P(\xi \in B, \eta \in A) = E(I(\xi \in B, \eta \in A)) = \int_{\{\eta \in A\}} I(\xi \in B) dP.$$

Далее по интегральному свойству получаем, что

$$P(\xi \in B, \eta \in A) = \int_{\{\eta \in A\}} E(I(\xi \in B)|\eta) dP,$$

заменяя переменные, окончательно имеем следующее:

$$\begin{aligned} P(\xi \in B, \eta \in A) &= \int_A E(I(\xi \in B|\eta = y)) P_\eta(dy) = \\ &= \int_A P(\xi \in B|\eta = y) P_\eta(dy) = \int_A P(\xi \in B|\eta = y) f_\eta(y) dy. \end{aligned}$$

■

## Алгоритм подсчета УМО

1. Найти совместную плотность  $f_{(\xi,\eta)}(x, y)$ , затем  $f_\eta(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(\xi,\eta)}(x, y) dx$ , тогда

$$\text{условная плотность } f_{\xi|\eta}(x|y) = \frac{f_{(\xi,\eta)}(x, y)}{f_\eta(y)}.$$

2. Вычислить  $\varphi(y) = E(g(\xi)|\eta = y) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{\xi|\eta}(x|y) dx$ .

3. Тогда  $E(g(x)|\eta) = \varphi(\eta)$ .

## 5 Глава 5.

### Виды сходимости случайных величин

**Определение.**  $\xi_n$  и  $\xi$  — случайные величины.

1.  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,
2.  $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$ , если  $P(\omega : \xi_n \rightarrow \xi) = 1$ ,
3.  $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$ , если  $E|\xi_n|^p < +\infty$ ,  $E|\xi|^p < +\infty$  и  $E|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  ( $p > 0$ ),
4.  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ , если для любой непрерывной ограниченной функции  $f(x)$  выполнено  $Ef(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Ef(\xi)$ .

**Теорема (Александрова).**  $[б/д] \xi_n \xrightarrow{d} \xi$  тогда только тогда, когда  $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{в основном} F_{\xi}(x)$ , то есть  $F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_{\xi}(x)$  во всех точках непрерывности функции распределения  $F_{\xi}(x)$ .

**Лемма** (критерий сходимости почти наверное).  $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$  тогда и только тогда, когда  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(\omega : \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

▲ Пусть  $A_k^\varepsilon = \{\omega : |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\}$ ,  $A^\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon = \{\omega : \forall n \exists k \geq n : |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\}$ .

Тогда  $\{\omega : \xi_n(\omega) \not\rightarrow \xi(\omega)\} = \bigcup_{m=1}^{+\infty} A_m^{\frac{1}{m}} = \{\omega : \exists m \forall n \exists k \geq n : |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \frac{1}{m}\}$ .

Следовательно, по непрерывности вермеры:

$$\begin{aligned} P(\omega : \xi_n(\omega) \not\rightarrow \xi(\omega)) = 0 &\Leftrightarrow P\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} A_m^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} : P\left(A_m^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : P(A^\varepsilon) = 0, \end{aligned}$$

так как всегда существует  $m$ , что  $\frac{1}{m} \geq \varepsilon \geq \frac{1}{m+1}$ , то есть  $A_m^{\frac{1}{m+1}} \supseteq A^\varepsilon \supseteq A_m^{\frac{1}{m}}$ . Но  $\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon \downarrow A^\varepsilon$ , следовательно,

$$\begin{aligned} 0 = P(A^\varepsilon) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon\right) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : P(\omega : \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

■

**Теорема** (взаимоотношения различных видов сходимости).

$$\begin{array}{c} n.н. \\ \nearrow \\ L_p \nearrow P \longrightarrow d \end{array}$$

▲ (п.н.  $\Rightarrow$  P)  $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : P(\omega : \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon) \rightarrow 0$ , но

$$\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\} \subset \{\omega : \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\},$$

следовательно,  $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq P(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ .

( $L_p \Rightarrow$  P)  $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^p \geq \varepsilon^p)$ , а по неравенству Маркова это меньше или равно  $\frac{E|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^p}{\varepsilon^p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

(P  $\Rightarrow$  d) Пусть  $f(x)$  — ограниченная непрерывная функция, тогда  $\exists C \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow |f(x)| \leq C$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ , возьмем  $N \in \mathbb{R} : P(|\xi| > N) \leq \frac{\varepsilon}{4C}$ . На отрезке  $[-N, N]$  функция  $f(x)$  равномерно непрерывна, следовательно,

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in [-N, N] \hookrightarrow (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Рассмотрим разбиение  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\omega : |\xi(\omega)| < N, |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leq \delta\}, \\ A_2 &= \{\omega : |\xi(\omega)| > N, |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leq \delta\}, \\ A_3 &= \{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \delta\}. \end{aligned}$$

Оценим

$$|Ef(\xi_n) - Ef(\xi)| \leq E|f(\xi_n) - f(\xi)| = E[|f(\xi) - f(\xi_n)| \cdot (I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3})] \leq$$

Пусть  $\omega \in A_1$ , тогда, так как  $|\xi_n - \xi| \leq \delta$ , то  $|x - y| \leq \delta$ , а значит  $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , следовательно,  $E[|f(\xi_n) - f(\xi)| \cdot I_{A_1}] \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot EI_{A_1} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot P(A_1) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Если же  $\omega \in A_2, A_3$ , то  $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq 2C$  так как  $f$  ограничена.

Значит,  $\boxed{\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C \cdot P(A_2) + 2C \cdot P(A_3)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C \cdot P(|\xi| > N) + 2C \cdot P(|\xi_n - \xi| > \delta) \xrightarrow{0, \text{ т.к. } \xi_n \xrightarrow{P} \xi} C_1 \varepsilon$ , где  $P(|\xi| > N) \leq \frac{\varepsilon}{4C}$ . Следовательно, в силу произвольности  $\varepsilon$ ,  $Ef(\xi_n) \rightarrow Ef(\xi)$ , то есть  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ . ■

## Контрпримеры

**Пример** (п.н.  $\not\Rightarrow L_p$ , а значит,  $P \not\Rightarrow L_p$  и  $d \not\Rightarrow L_p$ ). Рассмотрим  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ ,  $P$  — мера Лебега на  $[0, 1]$ . Пусть  $\xi_n = e^n \cdot I_{[0, \frac{1}{n}]}$ , тогда  $\forall \omega \in (0, 1) \exists n : \omega > \frac{1}{n} \Rightarrow \forall k \geq n \xi_k(\omega) = 0$  (значит имеется сходимость п.н.), следовательно  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi = 0$ , но  $E|\xi_n - \xi|^p = e^{np} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$ , значит сходимости в  $L_p$  нет.

**Пример** ( $L_p \not\Rightarrow$  п.н.,  $P \not\Rightarrow$  п.н.,  $d \not\Rightarrow$  п.н.). Рассмотрим  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ ,  $P$  — мера Лебега на  $[0, 1]$ . Возьмем  $\xi_{2^n+i} = I\left(\omega \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)\right)$ ,  $i = 0, \dots, 2^n - 1$ ;  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Тогда  $\xi_k \xrightarrow{L_p} 0$  при  $k \rightarrow +\infty$ , так как  $E|\xi_k - 0|^p = \frac{1}{2^n} \cdot 1^p \rightarrow 0$ , где  $n = [\log_2 k]$ . Но  $\forall \omega$  из  $[0, 1] \exists$  бесконечно много  $\xi_i$  таких, что  $\xi_i(\omega) = 1$  и  $\xi_i(\omega) = 0$ , следовательно,  $\forall \omega \hookrightarrow \xi_i(\omega) \rightarrow 0$ , ровно как и к 1, в смысле почти наверное.

**Пример** ( $d \not\Rightarrow P$ ). Пусть  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ ,  $P(\omega_i) = \frac{1}{2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \hookrightarrow \xi_n(\omega_1) = 0, \xi_n(\omega_2) = 1$ . Тогда  $\xi_n \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{2}\right)$ .  $\xi(\omega_1) = 1, \xi(\omega_2) = 0$ , значит,  $\xi \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{2}\right)$ , следовательно, по теореме Александрова  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ , но  $P(|\xi_n - \xi| > 0.5) = 1$ , значит,  $\xi_n \not\xrightarrow{P} \xi$ .

**Определение.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}$  фундаментальна почти наверное, если  $P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| \rightarrow 0) = 1$  при  $n, m \rightarrow +\infty$ .

**Лемма** (критерий фундаментальности почти наверное). *[б/д] Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}$  фундаментальна почти наверное тогда и только тогда, когда  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(\omega : \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi_n(\omega)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .*

**Теорема** (критерий Коши сходимость почти наверное). *Последовательно случайных величин  $\{\xi_n\}$  сходится почти наверное тогда и только тогда, когда  $\{\xi_n\}$  фундаментальна почти наверное.*

▲ ( $\Rightarrow$ ) Пусть  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ , тогда, если  $\omega \in \{\omega : \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)\}$ , то по критерию Коши для числовых последовательностей  $\omega \in \{\omega : \{\xi_n\} \text{ — фундаментальная}\}$ , следовательно,  $P(\omega : \{\xi_n(\omega)\} \text{ — фундаментальная}) \geq P(\omega : \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)) = 1$ .

( $\Leftarrow$ ) Обозначим  $A = \{\omega : \{\xi_n\} \text{ — фундаментальная}\}$ . Построим такую случайную величину  $\xi$ , что  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ . По критерию Коши для любого  $\omega \in A$  у последовательности  $\{\xi_n(\omega)\}$  существует предел  $\xi(\omega)$ . Положим по определению  $\xi(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n(\omega) \cdot I_A(\omega)$ . Тогда  $\xi_n \cdot I_A \rightarrow \xi$  во всех точках, то есть  $\xi$  — случайная величина, как предел случайных величин, и  $P(\omega : \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)) = P(A) = 1$ . ■

**Определение.** Пусть  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — последовательность событий, тогда событием  $\{A_n \text{ бесконечно часто (б.ч.)}\}$  называется событие  $\{\omega : \forall n \exists k \geq n : \omega \in A_k\}$ , то

есть все такие  $\omega$ , что  $\omega$  принадлежит бесконечному числу элементов из  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .  
 $\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k$ .

**Лемма** (Бореля-Кантелли). 1. Если  $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < +\infty$ , то  $P(A_n \text{ б.ч.}) = 0$ .

2. Если  $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty$  и  $\{A_k\}$  независимы в совокупности, то  $P(A_n \text{ б.ч.}) = 1$ .

▲

1.  $P(A_n \text{ б.ч.}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) \stackrel{=}{=} \square$ . Известно, что  $\bigcup_{k \geq n} A_k \downarrow \{A_n \text{ б.ч.}\}$ , следовательно, по непрерывности вероятностной меры имеем  $\square \stackrel{=}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq n} P(A_k) = 0$  т.к. ряд сходится.

2. Заметим, что  $P(A_n \text{ б.ч.}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) =$  /по непрерывности вермеры/  $= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) =$  /по законам де Моргана/  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - P\left(\bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right)\right)$ , (надо доказать, что  $P$  в скобках стремится к нулю). Покажем это:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right) &= \text{/непрерывность вермеры/} = \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N P(\overline{A_k}) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N [1 - P(A_k)] \leq 1 - x \leq e^{-x} \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N \exp(-P(A_k)) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp\left(-\sum_{k=n}^N P(A_k)\right) = \exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)\right) = 0. \end{aligned}$$

В последнем равенстве сумма равна бесконечности, так как это сумма хвоста расходящегося ряда.

Значит, продолжая равенство выше, получаем что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 0) = 1$ .

■

**Определение.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}$  фундаментальна по вероятности, если

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(\omega : |\xi_k - \xi_n| > \varepsilon) \xrightarrow{n, k \rightarrow \infty} 0.$$

**Теорема** (Рисса). Если последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}$  фундаментальна (или сходится) по вероятности, то из нее можно выделить подпоследовательность  $\{\xi_{n_k}\}$  фундаментальную (сходящуюся) почти наверное.

▲ Т.к. фундаментальность п.н.  $\Leftrightarrow$  сходимости п.н., то докажем, что можно выделить подпоследовательность  $\{\xi_{n_k}\}$ , сходящуюся почти наверное. Пусть  $n_1 = 1$ . По индукции определим  $n_k$ , как наименьшее  $n > n_{k-1}$  такое, что  $\forall s \geq n, t \geq n \hookrightarrow P(|\xi_t - \xi_s| > 2^{-k}) < 2^{-k}$ . Тогда  $\sum_{k=1}^{\infty} P(|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| > 2^{-k}) < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < +\infty$ , следовательно, по лемме Бореля-Кантелли  $P(|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| > 2^{-k} \text{ б.ч.}) = 0$ , значит, почти наверное  $\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| < +\infty$ . Пусть  $\mathcal{N} = \left\{ \omega : \sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_{n_{k+1}}(\omega) - \xi_{n_k}(\omega)| = +\infty \right\}$ , тогда  $P(\mathcal{N}) = 0$ . Положим  $\xi(\omega) = \left( \xi_{n_1}(\omega) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\xi_{n_{k+1}}(\omega) - \xi_{n_k}(\omega)) \right) \cdot I(\omega \in \mathcal{N})$ , где ряд в скобках сходится на  $\omega \in \Omega/\mathcal{N}$ . Получаем,  $\sum_{j=1}^k (\xi_{n_{j+1}} - \xi_{n_j}) + \xi_{n_1} = \xi_{n_{k+1}} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ .

Пусть теперь  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ , тогда

$$P(|\xi_m - \xi_n| \geq \varepsilon) \leq P\left(|\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|\xi_m - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно, из сходимости по вероятности следует фундаментальность по вероятности, а дальше все тоже самое (из фундаментальности следует, что можно выделить сходящуюся подпоследовательность). ■

**Теорема** (критерий Коши сходимости по вероятности).  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$  тогда и только тогда, когда  $\{\xi_n\}$  фундаментальна по вероятности.

▲ ( $\Rightarrow$ ) Следует из теоремы Рисса.

( $\Leftarrow$ ) Если  $\{\xi_n\}$  фундаментальна по вероятности, то по теореме Рисса существует подпоследовательность  $\{\xi_{n_k}\}$  такая, что  $\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ , то есть из связи между разными видами сходимости:  $\xi_{n_k} \xrightarrow{P} \xi$ . Тогда  $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq P(|\xi_n - \xi_{n_k}| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P(|\xi_{n_k} - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . ■

**Теорема** (Неравенство Колмогорова). Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — независимые случайные величины такие, что

$$1. E\xi_i = 0, E\xi_i^2 < +\infty.$$

$$2. \text{ Обозначим } S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

$$\text{Тогда } \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{ES_n^2}{\varepsilon^2}.$$

▲ Обозначим  $A = \{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\}$ . Разобьем  $A$  на несколько непересекающихся событий, то есть  $A_k = \{|S_k| \geq \varepsilon\}$  и  $\forall i \leq k-1 \hookrightarrow |S_i| \leq \varepsilon$ , следовательно,

$A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n^2 \cdot I_{A_k}) &= \mathbb{E}\left((S_k + \underbrace{\xi_{k+1} + \dots + \xi_n}_{\overline{S_k}})^2 \cdot I_{A_k}\right) = \\ &= \mathbb{E}(S_k^2 \cdot I_{A_k}) + \mathbb{E}(\overline{S_k}^2 \cdot I_{A_k}) + 2\mathbb{E}(S_k \overline{S_k} \cdot I_{A_k}) = (*). \end{aligned}$$

Докажем, что  $\mathbb{E}(S_k \overline{S_k} I_{A_k}) = 0$ ,  $I_{A_k}$  зависит от  $(S_1, \dots, S_k)$  и не зависит от  $(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ . Следовательно,  $S_k \cdot I_{A_k} \perp \overline{S_k}$ , так как  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\} \perp \{\xi_{k+1}, \dots, \xi_n\}$ , а, значит,  $\mathbb{E}(S_k \cdot I_{A_k} \cdot \overline{S_k}) = \mathbb{E}(S_k \cdot I_{A_k}) \cdot \mathbb{E}\overline{S_k} = 0$ . Отсюда

$$(*) = \mathbb{E}(S_k^2 \cdot I_{A_k}) + \mathbb{E}(\overline{S_k}^2 \cdot I_{A_k}) \geq \mathbb{E}(S_k^2 \cdot I_{A_k}) \geq \varepsilon^2 \cdot \mathbb{E}I_{A_k} = \varepsilon^2 \cdot \mathbb{P}(A_k).$$

В итоге,

$$\mathbb{E}S_n^2 \geq \mathbb{E}(S_n^2 \cdot I_A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(S_n^2 \cdot I_{A_k}) \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \cdot \varepsilon^2 = \mathbb{P}(A) \cdot \varepsilon^2.$$

■

**Теорема** (Колмогорова-Хинчина о сходимости ряда). Пусть  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  — последовательность независимых случайных величин такая, что  $\mathbb{E}\xi_n = 0$  и  $\mathbb{E}\xi_n^2 < +\infty$ .

Тогда, если  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\xi_n^2 < +\infty$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$  сходится почти наверное.

▲ Обозначим  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ . По критерию Коши  $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \text{ сходится п.н.} \right\}$  равносильно тому, что  $\{S_n \text{ фундаментально п.н.}\}$ , а это в свою по критерию фундаментальности равносильно тому, что

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\sup_{k \geq n} |S_k - S_n| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Докажем это. Очевидно, что

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k \geq n} |S_k - S_n| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} \{|S_k - S_n| \geq \varepsilon\}\right) =$$

а из непрерывности вероятностной меры следует, что

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^N \{|S_k - S_n| \geq \varepsilon\}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\max_{n \leq k \leq N} |S_k - S_n| \geq \varepsilon\right) \leq$$



А по неравенству Колмогорова:

$$\leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(S_N - S_n)^2}{\varepsilon^2} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \sum_{k=n+1}^N \xi_k^2 =$$

. Так как  $\xi_k$  независимы, то

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^N \mathbb{E} \xi_k^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k>n} \mathbb{E} \xi_k^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

■

**Лемма (Тёплица).** Пусть  $x_n \rightarrow x$  — числовая последовательность, числа  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  таковы, что  $\forall n \hookrightarrow a_n \geq 0$  и  $b_n = \sum_{k=1}^n a_k \uparrow +\infty$ .

Тогда  $\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n a_i x_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ .

▲ Пусть  $\varepsilon > 0$ . Выберем  $n_0$  так, что  $\forall n > n_0 \hookrightarrow |x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Выберем  $n_1 > n_0$  такое, что  $\frac{1}{b_{n_1}} \sum_{k=1}^{n_0} a_k |x_k - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , тогда

$$\begin{aligned} \forall n > n_1 \hookrightarrow \left| \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k x_k - x \right| &= \left| \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k x_k - \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k x \right| \leq \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k |x_k - x| = \\ &= \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n_0} a_k |x_k - x| + \frac{1}{b_n} \sum_{k=n_0+1}^n a_k |x_k - x| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{b_n} \sum_{k=n_0+1}^n a_k \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

■

**Лемма (Кронекера).** Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  сходится,  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  такова, что  $a_n \geq 0$ ,

$$b_n = \sum_{k=1}^n a_k \uparrow +\infty.$$

Тогда  $\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k x_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

▲ Пусть  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ , тогда  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ . Воспользуемся методом суммирования Абеля:

$$\sum_{j=1}^n b_j x_j = \sum_{j=1}^n b_j (S_j - S_{j-1}) = b_n S_n - \sum_{j=1}^n S_{j-1} (b_j - b_{j-1}) = b_n S_n - \sum_{j=1}^n S_{j-1} a_j.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k x_k = S_n - \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n S_{j-1} a_j \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

$\nearrow S \text{ по Тёплицу}$

■

**Теорема** (УЗБЧ в форме Колмогорова-Хинчина). Пусть

1. случайные величины  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  независимы и  $\forall n \hookrightarrow D\xi_n < +\infty$ ;
2. числа  $\{b_n\}_{n \geq 1}$ ,  $b_1 > 0$  и  $b_n \uparrow +\infty$ , такие что  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{b_n^2} < +\infty$ ;
3. обозначим  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ .

Тогда  $\frac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{н.н.}} 0$ .

▲ Преобразуем:

$$\frac{S_n - ES_n}{b_n} = \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\xi_i - E\xi_i}{b_i}.$$

Обозначим  $\eta_i = \frac{\xi_i - E\xi_i}{b_i}$ . Случайные величины  $\eta_i$  независимы и  $E\eta_i = 0$ . Значит,

$$\sum_{i=1}^{\infty} E\eta_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(\xi_i - E\xi_i)^2}{b_i^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D\xi_i}{b_i^2} < +\infty.$$

Следовательно, по теореме Колмогорова-Хинчина о сходимости ряда  $\sum_{i=1}^n \eta_i$  сходится почти наверное. По лемме Кронекера последовательность

$$\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\xi_i - E\xi_i}{b_i}$$

сходится к нулю для всех  $\omega$ , для которых сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i - E\xi_i}{b_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \text{ — сходится п.н.}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\xi_i - E\xi_i}{b_i} = \frac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0.$$

■

**Лемма.** Пусть  $\xi \geq 0$ ,  $E\xi < +\infty$ , тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) \leq E\xi \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n).$$

▲

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(k \leq \xi \leq k+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k P(k \leq \xi \leq k+1) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(k \leq \xi \leq k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} E(k \cdot I(k \leq \xi \leq k+1)) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E(\lfloor \xi \rfloor \cdot I(k \leq \xi \leq k+1)) \leq \sum_{k=0}^{\infty} E(\xi \cdot I(k \leq \xi \leq k+1)) = \\ &= E\left(\xi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} I(k \leq \xi \leq k+1)\right) = E\xi. \end{aligned}$$

Верхнее неравенство доказывается аналогично. ■

**Определение.** Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  одинаково распределены, если  $\forall x \hookrightarrow F_{\xi}(x) = F_{\eta}(x)$ . Обозначают  $\xi \stackrel{d}{=} \eta$ .

**Утверждение.** Если  $\xi \stackrel{d}{=} \eta$ , то  $\forall g(x) \hookrightarrow Eg(\xi) = Eg(\eta)$ .

$$\blacktriangle \quad Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_{\xi}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_{\eta}(x) = Eg(\eta). \quad \blacksquare$$

**Теорема** (УЗБЧ в форме Колмогорова). Пусть  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что  $E|\xi_1| < +\infty$ .

Тогда

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.н.} E\xi_1.$$

▲ Поскольку  $E|\xi_1| < +\infty$ , то по предыдущей лемме  $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_1| \geq n) < +\infty$ .

Так как  $\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi_n$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| \geq n) < +\infty$ , следовательно, по лемме Бореля-Кантелли  $P(\{|\xi_n| \geq n\} \text{ б.ч.}) = 0$ . То есть с вероятностью 1 случается конечное число  $\{|\xi_n| \geq n\}$ . Обозначим  $\tilde{\xi}_n \equiv \xi_n \cdot I\{|\xi_n| \leq n\}$ . Тогда с вероятностью 1  $\xi_n = \tilde{\xi}_n$  кроме конечного числа  $\xi_n$ . Пусть  $E\xi_i = 0$ , если это не так, то  $\eta_i = \xi_i - E\xi_i$ . Получаем, что

$$P\left(\frac{\xi_n + \dots + \xi_n}{n} \rightarrow 0\right) = P\left(\frac{\tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_n}{n} \rightarrow 0\right).$$

Рассмотрим

$$\mathbb{E}\tilde{\xi}_n = \mathbb{E}\left(\xi_n \cdot I(|\xi_n| \leq n)\right) = \mathbb{E}\left(\xi_1 \cdot I(|\xi_1| \leq n)\right) \rightarrow \mathbb{E}\xi_1 = 0$$

по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, поскольку

$$\left|\xi_1 \cdot I(|\xi_1| \leq n)\right| \leq \xi_1 \quad \text{и} \quad \xi_1 \cdot I(|\xi_1| \leq n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \xi_1.$$

По лемме Тёплица

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\tilde{\xi}_i \rightarrow \mathbb{E}\xi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\xi}_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tilde{\xi}_i - \mathbb{E}\tilde{\xi}_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0.$$

Обозначим  $\bar{\xi}_n = \tilde{\xi}_n - \mathbb{E}\tilde{\xi}_n$ . По лемме Кронекера, если сходится  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\xi}_k}{k}$  на каком-то  $\omega$ , то  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{\bar{\xi}_k}{k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  на том же  $\omega$ . Проверим, что  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\xi}_k}{k}$  сходится почти наверное. По теореме Колмогорова-Хинчина достаточно показать, что  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(\bar{\xi}_k)^2}{k^2} < +\infty$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(\bar{\xi}_k)^2}{k^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(\tilde{\xi}_k - \mathbb{E}\tilde{\xi}_k)^2}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(\tilde{\xi}_k)^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \mathbb{E}(\xi_k^2 \cdot I(|\xi_k| \leq k)) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \mathbb{E}(\xi_1^2 \cdot I(|\xi_1| \leq k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \mathbb{E}\left(\xi_1^2 \cdot \sum_{n=1}^k I(n-1 < |\xi_1| \leq n)\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_1^2 \cdot I(n-1 < |\xi_1| \leq n)) \cdot \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\leq 2/n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cdot \mathbb{E}(\xi_1^2 \cdot I(n-1 < |\xi_1| \leq n)) \leq \end{aligned}$$

Так как  $|\xi_1| \leq n$ , то заменим одну  $\xi$  на  $n$ :

$$\begin{aligned} &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|\xi_1| \cdot I(n-1 < |\xi_1| \leq n) \stackrel{\text{по т. Бешпо-Леви}}{=} 2\mathbb{E}|\xi_1| \sum_{n=1}^{\infty} I(n-1 < |\xi_1| \leq n) = \\ &= 2\mathbb{E}|\xi_1| < +\infty. \end{aligned}$$

■

**Теорема (Бешпо-Леви).** Пусть  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  — случайные величины,  $\forall n \hookrightarrow \xi_n \geq 0$ .

Тогда  $\mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\xi_n$ .

▲ Пусть  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ , тогда  $S_n \uparrow S = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ . По теореме о монотонной сходимости

$E \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ , следовательно,

$$E \sum_{k=1}^n \xi_k = \sum_{k=1}^n E \xi_k \uparrow E \sum_{k=1}^{\infty} E \xi_k.$$

■

**Теорема** (о монотонной сходимости). [б/д] Пусть  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}, \xi, \eta$  — случайные величины, тогда

1. Если  $\xi_n \uparrow \xi$  почти наверное и  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \xi_n \geq \eta, E\eta > -\infty$ , то  $E\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n$ .
2. Если  $\xi_n \downarrow \xi$  почти наверное и  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \xi_n \leq \eta, E\eta < +\infty$ , то  $E\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n$ .

**Лемма** (Фату). Пусть  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  и  $\eta$  — случайные величины,  $E|\eta| < +\infty$ , тогда

1. Если  $\forall n \hookrightarrow \xi_n \geq \eta$ , то  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \geq E \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ .
2. Если  $\forall n \hookrightarrow \xi_n \leq \eta$ , то  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq E \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ .
3. Если  $\forall n \hookrightarrow |\xi_n| < \eta$ , то  $E \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq E \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ .

▲ (1) Обозначим  $\psi_n = \inf_{k \geq n} \xi_k$ . Очевидно,  $\psi_n \uparrow \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ . Кроме того  $\psi_n \geq \eta$ , следовательно, по теореме о монотонной сходимости  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\psi_n = E \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ . Рассмотрим

$$E \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E\psi_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\psi_n \stackrel{\text{т.к. } \psi_n \leq \xi_n}{\leq} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n.$$

Второе равенство — в силу существования предела существует и нижний предел.

(2) Следует из пункта (1) заменой  $\xi'_n = -\xi_n$ .

(3) Следует из (1) и (2). ■

**Теорема** (Лебега о мажорируемой сходимости). Пусть  $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi, |\xi| \leq \eta, E\eta < +\infty$ .

Тогда  $E\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E\xi$  и  $E|\xi_n - \xi| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  (не требуем независимости!).

▲ Заметим, что  $\xi \stackrel{п.н.}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ . По пункту (3) леммы Фату

$$E\xi = E \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq E \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = E\xi \Rightarrow E\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n.$$

Конечность  $E\xi$  следует из того, что  $|\xi| < \eta$  почти наверное, следовательно, так как  $E\eta < +\infty$ , то  $E|\xi| \leq E|\eta| < +\infty$ .

Докажем  $L_1$ -сходимость. Возьмем  $\psi_n = |\xi_n - \xi|$ . Тогда  $|\psi_n| \leq 2\eta$  почти наверное и  $\psi_n \xrightarrow{п.н.} 0$ , следовательно,  $E\psi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  по теореме Лебега. ■

## Сходимость в $L_2$

Введем пространство  $L_2 = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{\xi : E\xi^2 < +\infty\}$ . Это минимальное пространство, так как  $E(a\xi + b\eta)^2 \leq 2a^2E\xi^2 + 2b^2E\eta^2$ .

Основное неравенство:  $(x + y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$ .

Норма  $\|\xi\| = \sqrt{E\xi^2}$ ; скалярное произведение  $(\xi, \eta) = E\xi\eta$ .

**Лемма.** Пусть  $\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$ ,  $\forall n \hookrightarrow \xi_n \in L_2$ . Тогда

1.  $\xi \in L_2$ ,
2.  $E\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E\xi$ ,
3.  $E\xi_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E\xi^2$ ,
4. если  $\eta_n \xrightarrow{L_2} \eta$ ,  $\forall n \hookrightarrow \eta_n \in L_2$ , то  $(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\xi, \eta)$ .

▲ Докажем первый пункт леммы:

$$E\xi^2 = E(\xi - \xi_n + \xi_n)^2 \leq \underbrace{2E(\xi - \xi_n)^2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{2E\xi_n^2}_{< +\infty} < +\infty.$$

Перейдем ко второму пункту. Если  $E\xi^2 < +\infty$ , то  $E|\xi| = E|\xi| \cdot 1$ , а по неравенству Коши-Буняковского это меньше или равно, чем  $\sqrt{E\xi^2 \cdot E1^2} < +\infty$ . Осталось заметить, что  $|E(\xi_n - \xi)| \leq E|\xi_n - \xi| \leq \sqrt{E(\xi_n - \xi)^2 \cdot E1^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Пункт 3.

$$\begin{aligned} E(\xi_n^2 - \xi^2) &= E(\xi_n + \xi)(\xi_n - \xi) \leq \sqrt{E(\xi_n + \xi)^2 \cdot E(\xi_n - \xi)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\left( \underbrace{2E(\xi_n - \xi)^2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{8E\xi^2}_{=\text{const}} \right) \cdot \underbrace{E(\xi_n^2 - \xi^2)}_{\rightarrow 0}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Остается доказать четвертый пункт леммы:

$$\begin{aligned} E(\xi_n \eta_n - \xi \eta) &= E(\xi_n \eta_n - \xi_n \eta) + E(\xi_n \eta - \xi \eta) \leq \\ &\leq \sqrt{E\xi_n^2 \cdot E(\eta_n - \eta)^2} + \sqrt{E\eta^2 \cdot E(\xi_n - \xi)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

■

## 6 Глава 6.

### Случайные блуждания и закон повторного логарифма

Пусть  $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что  $E\xi_n = 0$ ,  $E\xi_n^2 = \sigma^2$ .

**Определение.** Случайная величина  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$  называется случайным блужданием.

Известно (из Ц.П.Т.), что  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty$ , а  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty$  (Можно получить с помощью теоремы Муавра-Лапласа). С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E \xi_n^2}{n \ln^2 n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{n \ln^2 n} < +\infty.$$

Следовательно, по теореме Колмогорова-Хинчина о сходимости ряда почти наверное  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\sqrt{n} \ln n}$  сходится почти наверное, значит, по лемме Кронекера,

$$\frac{1}{\sqrt{n} \ln n} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \ln k \frac{\xi_k}{\sqrt{k} \ln k} = \frac{S_n}{\sqrt{n} \ln n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0.$$

Значит  $S_n$  не выходит за  $\varepsilon \sqrt{n}$  начиная с некоторого момента п.н.

**Теорема.** (Теорема Муавра-Лапласа)

$$\sup_{-\infty \leq a < b \leq +\infty} \left| P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) - \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Определение.** Функция  $\varphi^* = \varphi^*(n)$ ,  $n > 1$  называется верхней для  $S_n$ , если  $S_n(\omega) < \varphi^*(n)$  почти наверное для всех  $n$ , начиная с некоторого  $n_0(\omega)$ .

**Определение.** Функция  $\varphi_* = \varphi_*(n)$ ,  $n > 1$  называется нижней для  $S_n$ , если  $S_n(\omega) > \varphi_*(n)$  почти наверное для бесконечно многих  $n$  (бесконечно часто).

То есть  $\forall \varepsilon \varphi^*(n) = \varepsilon \sqrt{n} \ln n$  — верхняя для произвольного случайного блуждания,  $\varphi_*(n) = \varepsilon \sqrt{n}$  — нижняя. Пусть некая функция  $\varphi(n)$  — «точная асимптотика», возьмем  $\varphi_\varepsilon^* = (1 + \varepsilon)\varphi$ ;  $\varphi_{*\varepsilon} = (1 - \varepsilon)\varphi$  для  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} \leq 1 \right\} &= \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} \frac{S_m}{\varphi(m)} \leq 1 \right\} = \\ &= \left\{ \forall \varepsilon > 0 \text{ и некоторого } n_\varepsilon \hookrightarrow \sup_{m \geq n_\varepsilon} \frac{S_m}{\varphi(m)} \leq 1 + \varepsilon \right\} = \\ &= \left\{ \forall \varepsilon > 0 \quad \forall m \geq n_\varepsilon \hookrightarrow S_m \leq (1 + \varepsilon)\varphi(m) \right\} \Leftrightarrow (1 + \varepsilon)\varphi(m) \text{ — верхняя.} \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} \geq 1 \right\} &= \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} \frac{S_m}{\varphi(m)} \geq 1 \right\} = \\ &= \left\{ \forall \varepsilon > 0 \text{ и для беск. многих } n_\varepsilon \hookrightarrow S_m \geq (1 - \varepsilon)\varphi(m) \right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - \varepsilon)\varphi(m) \text{ — нижняя.} \end{aligned}$$

Отметим,  $\forall \varepsilon > 0 : \varphi_\varepsilon^* = (1 + \varepsilon)\varphi$  — верхняя  $\Leftrightarrow \mathbb{P} \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} \leq 1 \right) = 1$ .

Аналогично,  $\forall \varepsilon > 0 : \varphi_\varepsilon^* = (1 + \varepsilon)\varphi$  — нижняя  $\Leftrightarrow \mathbb{P} \left( \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} \geq 1 \right) = 1$ .

**Теорема** (закон повторного логарифма (ЗПЛ)). [б/д] Пусть  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $\mathbb{E}\xi_1 = 0, \mathbb{E}\xi_1^2 = \sigma^2, 0 < \sigma^2 < +\infty$ .

Тогда

$$\mathbb{P} \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} = 1 \right) = 1, \varphi(n) = \sqrt{2\sigma^2 n \ln \ln n}.$$

*Замечание.* Применяя ЗПЛ к  $S_n$ , получаем, что  $\mathbb{P} \left( \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} = -1 \right) = 1$ .

За нижнюю ветку  $S_n$  выходит бесконечно часто (см. Рис. 1), а за верхнюю лишь конечное число раз (почти наверное не выходит).

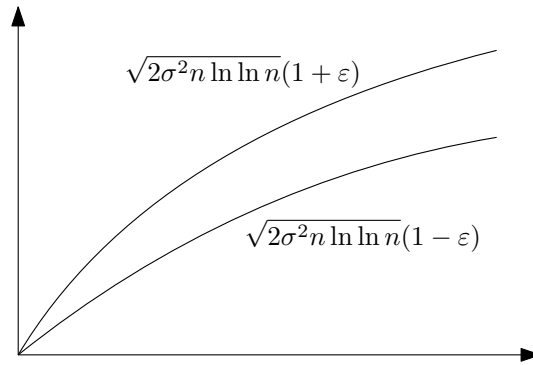


Рис. 1: Поведение верхней и нижней функции случайного блуждания

## 7 Глава 7.

### Характеристические функции

**Определение.** Характеристической функцией случайной величины  $\xi$  называется  $\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi}, t \in \mathbb{R}$ . (Формально это преобразование Фурье случайной величины  $\xi$ ).

**Определение.** Пусть  $F(x)$  — функция распределения, тогда ее характеристическая функция  $\varphi_F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x)$ .

Если  $F_\xi(x)$  — функция распределения случайной величины  $\xi$ , то характеристические функции  $\xi$  и  $F_\xi$  совпадают.



Чтобы считать интеграл Лебега от комплекснозначной функции, будем пользоваться формулой Эйлера:  $\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \mathbb{E}\cos(t\xi) + i\mathbb{E}\sin(t\xi)$ .

**Определение.** Пусть  $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  — случайный вектор. Его характеристической функцией называется  $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = \mathbb{E}e^{i(\vec{t}, \vec{\xi})}$ ,  $t \in \mathbb{R}^n$ .

**Определение.** Пусть  $F(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  — функция распределения в  $\mathbb{R}^n$ , тогда его характеристической функцией называется  $\varphi_F(\vec{t}) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(\vec{t}, \vec{x})} dF(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .

## Свойства характеристических функций

Свойство №0. Харфункция существует всегда.

**Свойство 1.** Пусть  $\varphi(t)$  — характеристическая функция случайной величины  $\xi$ , тогда  $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$ .

▲  $|\varphi(t)| = |\mathbb{E}e^{it\xi}| \leq \mathbb{E}|e^{it\xi}| = 1 = \varphi(0)$ . ( $\cos t\xi + i\sin t\xi$ , модуль этого комплексного числа равен единице). ■

**Свойство 2.** Пусть  $\varphi(t)$  — характеристическая функция случайной величины  $\xi$ , а  $\eta = a\xi + b$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$ , тогда  $\varphi_\eta(t) = e^{itb} \cdot \varphi_\xi(at)$ .

▲  $\varphi_\eta(t) = \mathbb{E}e^{it\eta} = \mathbb{E}e^{it(a\xi+b)} = e^{itb}\mathbb{E}e^{ita\xi} = e^{itb} \cdot \varphi_\xi(at)$  ( $e^{itb} = \text{const}$ , значит можем вытащить за матожидание). ■

**Свойство 3.** Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — независимые случайные величины,  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \Rightarrow \varphi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(t)$ .

▲  $\varphi_{S_n}(t) = \mathbb{E}e^{it \sum_{k=1}^n \xi_k} = \mathbb{E} \prod_{k=1}^n e^{it\xi_k} =$   
 $/e^{it\xi_k}$  — борелевская функция от независимой случайной величины. /  
 $= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}e^{it\xi_k} = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t)$ . ■

**Свойство 4.** Пусть  $\varphi(t)$  — характеристическая функция, тогда  $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$

▲  $\varphi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \overline{\mathbb{E}e^{-it\xi}} = \overline{\mathbb{E}e^{-it\xi}} = \overline{\varphi(-t)}$ . ■

**Свойство 5.** Пусть  $\varphi(t)$  — характеристическая функция случайной величины  $\xi$ , тогда  $\varphi(t)$  равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

▲ Рассмотрим  $|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = |Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}| = |Ee^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1)| \leq E|e^{it\xi}| \cdot |e^{ih\xi} - 1| = E|e^{ih\xi} - 1|$ . При  $h \rightarrow 0$  выполнено  $e^{ih\xi} - 1 \xrightarrow{п.н.} 0$  по теореме о наследовании сходимости.  $\forall h : |e^{ih\xi} - 1| \leq |e^{ih\xi}| + 1 = 2$ ,  $E2 < +\infty$ . Следовательно, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости,  $E|e^{ih\xi} - 1| \rightarrow E0 = 0$ . Значит,  $\varphi(t)$  равномерно непрерывна. ■

**Теорема** (единственности (д-во позже)). Пусть  $F$  и  $G$  — функции распределения, такие что  $\varphi_{F(x)} = \varphi_{G(x)} \Rightarrow \forall x F(x) = G(x)$ .

**Свойство 6.** Пусть  $\varphi_\xi(t)$  — характеристическая функция случайной величины  $\xi$ .  $\varphi(t)$  принимает действительные значения  $\Leftrightarrow \xi$  имеет симметричное распределение.

▲ ( $\Leftarrow$ ) Пусть распределение  $\xi$  — симметрично, тогда  $E(\sin(t\xi)) = E(\sin(t(-\xi))) = -E(\sin(t\xi)) = 0$ . Значит  $\varphi_\xi(t) = E \cos t\xi + iE \sin t\xi = E \cos t\xi \in \mathbb{R}$ .

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $\varphi_\xi(t) \in \mathbb{R} \forall t$ . Тогда по свойствам 2 и 4  $\varphi_\xi(t) = \overline{\varphi_\xi(-t)} = \varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t) \Rightarrow \xi$  и  $-\xi$  имеют одинаковую характеристическую функцию  $\Rightarrow \xi \stackrel{d}{=} -\xi$  по теореме единственности. ■

**Свойство 7.**

**Теорема** (о производных х.ф.). Пусть  $E|\xi|^n < +\infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $\forall k \leq n \exists \varphi_\xi^{(k)}(t)$ , причём

$$1. \varphi_\xi^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx} dF(x)$$

$$2. E\xi^k = \frac{\varphi_\xi^{(k)}(0)}{i^k}$$

$$3. \varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t), \text{ где}$$

$$|\varepsilon_n(t)| \leq 3E|\xi|^n, \quad \varepsilon_n(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0.$$

▲

1. Рассмотрим  $\frac{\varphi_\xi(t+h) - \varphi_\xi(t)}{h} = \frac{Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}}{h} = \frac{Ee^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1)}{h}$ . при  $h \rightarrow 0 \frac{e^{ih\xi} - 1}{h} \xrightarrow{п.н.} i\xi$ , кроме того,  $\left| \frac{e^{ih\xi} - 1}{h} \right| \leq |\xi|$  почти наверное, так как хорда меньше дуги. По теореме о мажорируемой сходимости  $\lim_{h \rightarrow 0} E \frac{e^{ih\xi} - 1}{h} e^{it\xi} = \varphi'_\xi(t) = E(i\xi \cdot e^{it\xi}) = \int_{\mathbb{R}} ix e^{itx} dF_\xi(x)$ . Доказательство формулы для  $\varphi^{(k)}$  аналогично.

2. Из пункта 1,  $E\xi^n = \int_{\mathbb{R}} x^n dF_\xi(x) = \frac{1}{i^n} \int_{\mathbb{R}} (ix)^n e^{i0x} dF(x) = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{i^n}$ .

3. Ряд Тейлора  $e^{i\eta} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(i\eta)^k}{k!} + \frac{(i\eta)^n}{n!}(\cos \theta_1 y + i \sin \theta_2 y)$ ,  $|\theta_1| \leq 1$ ,  $|\theta_2| \leq 1$ , тогда  $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = E \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it\xi)^k}{k!} + \frac{(it\xi)^n}{n!}(\cos \theta_1 t\xi + i \sin \theta_2 t\xi) \right] = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t)$ , где  $\varepsilon_n(t) = E(\xi^n \cdot [\cos \theta_1 t\xi + i \sin(\theta_2 t\xi) - 1]) \Rightarrow \varepsilon_n(t) \leq 3E|\xi|^n$ ;  
 $|\xi^n[\cos(\theta_1 t\xi) + i \sin(\theta_2 t\xi) - 1]| \leq 3|\xi|^n$  и  $\xi^n(\cos(\theta_1 t\xi) - 1 + \underbrace{\sin(\theta_2 t\xi)}_{\xrightarrow{0}}) \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$  при  $t \rightarrow 0 \Rightarrow$  по теореме Лебега о мажорируемой сходимости,  $\varepsilon_n(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ .

■

**Свойство 8** (б/д). Если существует и конечна  $\varphi^{(2n)}(0)$ , то  $E|\xi|^{2n} < +\infty$ .

**Теорема** (о разложении х.ф. в ряд). Пусть  $\xi$  случайная величина, такая что  $E|\xi|^n < +\infty \forall n$ .

Если для некоторого  $T > 0 \hookrightarrow \overline{\lim}_n \left( E \frac{|\xi|^n}{n!} \right) < \frac{1}{T}$ , то  $\forall t : |t| < T$  выполнено

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} E\xi^n.$$

▲ Пусть  $t_0$  такое, что  $|t_0| < T$ , тогда  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} E \left( \frac{|\xi|^n \cdot |t_0|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{|t_0|}{T} < 1$ , следовательно, по признаку Коши-Адамара сходимости рядов, ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E|\xi|^n \cdot |t_0|^n}{n!}$  сходится.

$$\text{Рассмотрим } |t| \leq |t_0| : \varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \underbrace{\frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t)}_{R_n(t)} \quad (*).$$

$R_n(t) \leq 3 \cdot \frac{|t|^n}{n!} \cdot E|\xi|^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  по условию теоремы. Устремляя  $n \rightarrow +\infty$  в (\*), получаем  $\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k$ . В силу произвольности  $|t_0| < T$ , разложение верно  $\forall t \in (-T, T)$ .

■

**Пример.** (Харфунция нормального распределения)

Пусть  $\xi \sim N(0; 1) \Rightarrow \varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ . Мы знаем, что  $E\xi^m = \begin{cases} (m-1)!!, & m:2 \\ 0, & m \not:2 \end{cases}$

$$E|\xi|^m = \begin{cases} (m-1)!!, & m:2 \\ (m-1)!! \sqrt{\frac{2}{\pi}}, & m \not:2 \end{cases} \Rightarrow \text{по предыдущей теореме:}$$

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{(2n)!} (2n-1)!! = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( -\frac{t^2}{2} \right)^n \frac{1}{n!} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Условие теоремы:  $\left( \frac{E|\xi|^m}{m!} \right)^{\frac{1}{m}} \leq \left( \frac{(m-1)!!}{m!} \right)^{\frac{1}{m}} = \left( \frac{1}{m!!} \right)^{\frac{1}{m}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left( \frac{m}{2e} \right)^{\frac{m}{2}} \right)^{\frac{1}{m}} \sim \frac{C}{\sqrt{m}} \rightarrow 0 \Rightarrow T = +\infty$ . (В приближении воспользовались формулой Стирлинга.)

**Теорема** (формула обращения (б/д)). Пусть  $\varphi(t)$  характеристическая функция функции распределения  $F$ . Тогда

1. Для  $\forall a < b$  (точки непрерывности)  $F$  выполнено  $F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \varphi(t) dt$
2. Если  $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < +\infty$ , то у функции распределения  $F(x)$  существует плотность  $f(x)$  и  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-tx} \varphi(t) dt$ .

**Теорема** (единственности). Пусть  $F$  и  $G$  — функции распределения, такие что  $\varphi_{F(x)} = \varphi_{G(x)} \Rightarrow \forall x F(x) = G(x)$ .

▲ Пусть  $a < b \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим  $f_\varepsilon(x)$  (шапочка). Докажем, что  $\forall \varepsilon > 0 \int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon(x) df(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dG(x)$ . Рассмотрим отрезок  $[-n, n]$  такой, что  $[a, b + \varepsilon] \subset [-n, n]$ . По теореме Вейерштрасса-Стоуна (приближение любой функции тригонометрическими полиномами),  $f_\varepsilon(x)$  сколь угодно точно приближается тригонометрическими многочленами от  $\frac{\pi x}{n}$ , так как  $f_\varepsilon(x)$  непрерывна и периодична на  $[-n, n]$  с периодом  $2n$  на  $\mathbb{R}$ .

$\Rightarrow \forall n \exists f_\varepsilon^n(x) = \sum_{k \in K} a_k \cdot e^{\frac{ik\pi x}{n}}$ ,  $a_k \in \mathbb{R}$ ,  $K$  — конечное подмножество  $\mathbb{Z}$ , такое, что  $\forall x \in [-n, n] : |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)| < \frac{1}{n}$ .  $f_\varepsilon^n$  — периодическая с периодом  $2n$  на  $\mathbb{R}$ . Поскольку  $|f_\varepsilon(x)| < 2$  и  $\forall x \in [-n, n] : |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)| < \frac{1}{n}$ , то  $|f_\varepsilon^n(x)| \leq 2 \forall x$ . По условию,  $\forall t \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dG(x) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dG(x)$ .

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dF(x) - \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dG(x) \right| \leq \left| \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dF(x) - \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dF(x) \right| + \\ & + \left| \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dF(x) - \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dG(x) \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dG(x) - \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dG(x) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{n} \int_{[-n, n]} dF(x) + \frac{1}{n} \int_{[-n, n]} dG(x) + \underbrace{(1 - F(n) + F(-n))}_{\rightarrow 0} + \underbrace{(1 - G(n) + G(-n))}_{\rightarrow 0} \leq \\ & \leq \frac{2}{n} + o(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dG(x). \end{aligned}$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0 f_\varepsilon(x) \rightarrow I_{[a, b]}(x)$ , при этом  $|f_\varepsilon(x)| \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$ . По теореме Лебега о мажорировании сходимости (рассматриваем  $f_\varepsilon(x)$  как набор случайных величин на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_f) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ).  $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dF(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} I_{[a, b]} dF(x) = F(b) - F(a)$ . Аналогично, для функции распределения  $G \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dG(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} G(b) - G(a) \Rightarrow \forall a < b F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ . Полагая  $a = (-\infty)$ , получаем требуемое. ■

**Теорема** (критерий независимости). Пусть  $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Тогда  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  — независимые в совокупности  $\Leftrightarrow \varphi_{\vec{\xi}(\vec{t})} = \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(t_i) \quad \forall \vec{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ .

$$\blacktriangle (\Rightarrow) \varphi_{\vec{\xi}(\vec{t})} = E e^{i(\vec{t}, \vec{\xi})} = E e^{i \sum_{k=1}^n t_k \xi_k} \stackrel{\text{нез-сть}}{=} \prod_{k=1}^n E e^{i t_k \xi_k} = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k).$$

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $F_k(x)$  — функция распределения случайной величины  $\xi_k$ . Пусть  $G(x_1, \dots, x_n) = F_1(x) \cdot \dots \cdot F_n(x)$  — это функция распределения. Посчитаем её характеристическую функцию:  $\varphi_G(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\vec{t}, \vec{x})} dG(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(\vec{t}, \vec{x})} dF_1(x_1) \cdot \dots \cdot$

$$dF_n(x_n) \text{ (по теореме Фубини)} \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{i t_k x_k} dF_k(x_k) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k) \stackrel{\text{по усл}}{=} \varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) \Rightarrow$$

характеристическая функция  $G$  и  $\vec{\xi}$  совпадают  $\Rightarrow$  по теореме единственности  $F_{\vec{\xi}} = G \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = \prod_{k=1}^n F_{\xi_k}(x_k) \Rightarrow \xi_1, \dots, \xi_n$  независимы в совокупности по критерию независимости в терминах функции распределения.  $\blacksquare$

## Проверка того, что $\varphi$ — характеристическая функция

**Определение.** Функция  $\varphi(t)$  является неотрицательно определённой, если  $\forall n \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}, \sum_{i,j=1}^n \varphi(t_i - t_j) z_i \overline{z_j} \geq 0$ .

**Теорема** (Бохнера-Хинчина). Пусть  $\varphi(t)$  такая, что  $\varphi(0) = 1$  и  $\varphi(t)$  непрерывна в нуле.

Тогда  $\varphi(t)$  — характеристическая функция  $\Leftrightarrow \varphi(t)$  неотрицательно определённая.

$\blacktriangle (\Rightarrow)$   $\varphi(t)$  — характеристическая функция, проверим неотрицательность:

$$\begin{aligned} & \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R} \quad \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \\ & \sum_{j,k=1}^n \varphi(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} = \sum_{j,k=1}^n E e^{i(t_j - t_k) \xi} z_j \overline{z_k} = E \left( \left( \sum_{j=1}^n e^{i t_j \xi} z_j \right) \overline{\left( \sum_{k=1}^n e^{i t_k \xi} z_k \right)} \right) = \\ & = E \sum_{k,k=1}^n e^{i t_j \xi} \cdot z_j \cdot \overline{e^{i t_k \xi} \cdot z_k} = E \left| \sum_{j=1}^n e^{i t_j \xi} z_j \right|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) [б/д]  $\blacksquare$

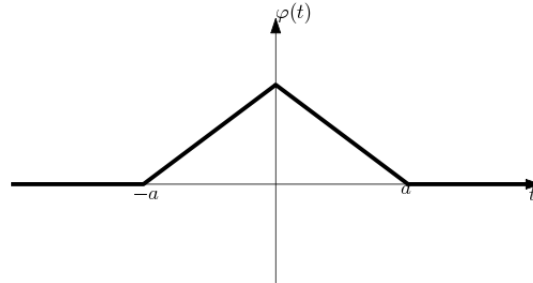
**Следствие.** Если  $\varphi(t) = \psi(t)$  — характеристическая функция,  $\alpha \in (0, 1)$ , то  $\alpha \varphi(t) + (1 - \alpha) \psi(t)$  — характеристическая функция.

$\blacktriangle$  Все три условия из теоремы Бохнера-Хинчина выполнены.  $\blacksquare$

**Теорема** (Пойа(б/д)). Пусть непрерывная, чётная и выпуклая вниз на  $(0; +\infty)$  функция  $\varphi(t)$  такова, что  $\varphi(t) \geq 0$ ,  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ .

Тогда  $\varphi(t)$  — характеристическая функция.

**Пример.** Любая функция вида



является характеристической.

**Теорема** (Марцинкевича(б/д)). Если характеристическая функция  $\varphi(t)$  имеет вид  $\exp(P(t))$ , где  $P(t)$  — полином, то степень этого полинома  $\leq 2$  ( $\deg P(t) \leq 2$ ).

**Пример.**  $e^{-t^n}$  не является характеристической функцией.

**Определение.** Последовательность функций  $F_n(x)$  слабо сходится к  $F(x)$ , если  $\forall f(x)$  — непрерывна и ограничена, то верно  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dF_n(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x)$ .

Обозначение  $F_n \xrightarrow{w} F$ .  $(\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F)$ .

**Теорема** (непрерывности для х.ф.).

1. Пусть  $\{F_n\}_{n \geq 1}$  — последовательность функций распределения на  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi_n(t)_{n \in \mathbb{N}}$  — их х.ф.

Тогда  $F_n \xrightarrow{w} F \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ , где  $\varphi$  — характеристическая функция  $F$ .

2.(б/д) Пусть  $\forall t \in \mathbb{R} \exists \varphi(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t)$ , причём  $\varphi(t)$  непрерывна в нуле.

Тогда  $\exists F$  — функция распределения такая, что  $F_n \xrightarrow{w} F$  и  $\varphi(t)$  — характеристическая функция  $F$ .

▲  $F_n \xrightarrow{w} F$ , значит  $\forall f$  — непрерывной ограниченной функции:  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dF_n(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x)$ . Но функции  $\sin tx$  и  $\cos tx$  непрерывны и ограничены  $\Rightarrow \varphi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} (\cos tx + i \sin tx) dF_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} (\cos tx + i \sin tx) dF(x) = \varphi(t)$ . ■

## Центральная предельная теорема

**Теорема** (ЦПТ в форме Леви). Пусть  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  — независимые одинаково распределённые случайные величины,  $0 < D\xi < +\infty$ . Обозначим  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ .

Тогда  $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} N(0, 1)$ .

▲ Обозначим  $E\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2$ . Рассмотрим случайные величины  $\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma} \Rightarrow E\eta_i = 0; D\eta_i = 1$ . Тогда  $T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{\sqrt{n}}$ . Рассмотрим характеристическую функцию  $\eta_i$ : по свойствам характеристической функции о разложении в ряд  $\varphi(t) \equiv \varphi_{\eta_i}(t) = 1 + it \underbrace{E\eta_j}_0 + \frac{1}{2} \underbrace{E\eta_j^2}_1 \cdot (it)^2 + o(t^2) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2), t \rightarrow 0$ . Отсю-

да,  $\varphi_{T_n}(t) = \varphi_{\sum_{j=1}^n \eta_j}(t) \stackrel{\text{св-ва х.ф. о независимости}}{=} \left( \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^n = \left( 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right)^n \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} e^{-\frac{t^2}{2}} \forall t$ . Но  $e^{-\frac{t^2}{2}}$  — характеристическая функция  $N(0, 1) \Rightarrow$  (по т. непрерывности)

$T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$ . ■

**Теорема (Линдберга).** [б/д] Пусть

1. случайные величины  $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$  независимы, и  $\forall k E\xi_k^2 < +\infty$ .
2. Обозначим  $m_k = E\xi_k; \sigma_k^2 = D\xi_k; S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i; D_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$  и  $F_k(x)$  — функция распределения  $\xi_k$ .
3. Пусть выполнено условие Линдберга:

$$\forall \varepsilon > 0 \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{\{x: |x - m_k| > \varepsilon D_n\}} (x - m_k)^2 dF_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда  $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1), n \rightarrow \infty$ .

## Когда выполнены условия Линдберга?

1. Пусть для некоторого  $\delta > 0$  выполнено условие Ляпунова:

$$\frac{1}{D_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^n E|\xi_k - m_k|^{2+\delta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

тогда выполнено условие Линдберга.

▲ Пусть фиксировано  $\varepsilon > 0$ .

$$\begin{aligned} E|\xi_k - m_k|^{2+\delta} &= \int_{\mathbb{R}} |x - m_k|^{2+\delta} dF_k(x) \geq \\ &\geq \int_{|x - m_k| \geq \varepsilon D_n} |x - m_k|^{2+\delta} dF_k(x) \geq \varepsilon^\delta D_n^\delta \int_{|x - m_k| \geq \varepsilon D_n} |x - m_k|^2 dF_k(x) \\ &\Rightarrow \frac{1}{D_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n E|\xi_k - m_k|^{2+\delta} \geq \frac{\varepsilon^\delta}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{\{x: |x - m_k| > \varepsilon D_n\}} |x - m_k|^2 dF_k(x). \end{aligned}$$

■

2. Из условий теоремы Леви вытекает условие Линдберга.

▲ Пусть  $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$  — независимые одинаково распределённые случайные величины,  $+\infty > D\xi_1 = \sigma^2 > 0$ ,  $E\xi_1 = a \Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{\{x: |x-a| > \varepsilon D_n\}} |x-a|^2 dF_k(x) = \\ & = \frac{1}{n\sigma^2} \sum_{k=1}^n \int_{\{x: |x-a| > \varepsilon D_n\}} |x-a|^2 dF_1(x) = \\ & \frac{1}{\sigma^2} \int_{|x-a| > \varepsilon \sqrt{n}\sigma} |x-a|^2 dF_1(x) \rightarrow 0, \text{ т.к. } \{x: |x-a| > \varepsilon \sqrt{n}\sigma\} \rightarrow \emptyset; \\ & \int_{\mathbb{R}} |x-a|^2 dF_1(x) < +\infty. \end{aligned}$$

■

3. Пусть  $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$  — независимые случайные величины,  $|\xi_k| \leq K$ ;  $D_n \rightarrow +\infty$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{|x-m_k| > \varepsilon D_n} (x-m_k)^2 dF_k(x) = \\ & = E((\xi_k - m_k)^2 \cdot T(|\xi_k - m_k| > \varepsilon D_n)) \leq (2k)^2 EI(|\xi_k - m_k| > \varepsilon D_n) = \\ & = (2k)^2 P(|\xi_k - m_k| > \varepsilon D_n), \end{aligned}$$

то по неравенству Чебышева это не превосходит

$$(2k)^2 \frac{\sigma_k^2}{\varepsilon^2 D_n^2}.$$

Рассмотрим сумму

$$\frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x-m_k| > \varepsilon D_n} |x-m_k|^2 dF_k(x) \leq \frac{(2k)^2}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k^2}{\varepsilon^2 D_n^2} = \frac{(2k)^2}{\varepsilon^2 D_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ т.к. } D_n \rightarrow \infty.$$

*Замечание* (Теорема Феллера.). Условие Линдберга является необходимым и достаточным условием для справедливости ЦПТ. При выполнении условия бесконечной малости слагаемых:

$$\max_{a < x \leq n} P\left(\frac{|\xi_k - m_k|}{D_n} \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$



**Теорема** (Берри-Эссена(б/д)). Пусть  $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$  — независимые одинаково распределённые случайные величины,  $E|\xi_i|^3 < +\infty$ ,  $E\xi_i = a$ ,  $D\xi_i = \sigma^2$ ,  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ;  $T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$ . Тогда

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leq C \cdot \frac{E|\xi_1 a|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}, \text{ где } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < C < 0,48,$$

$$\text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

## 8 Глава 8.

### Гауссовские случайные векторы

**Определение** (1). Случайный вектор  $\vec{\xi} \sim N(\vec{m}, \Sigma)$  — гауссовский, если его характеристическая функция  $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = Ee^{i(\vec{t}, \vec{\xi})} = \exp(i(\vec{m}, \vec{t}) - \frac{1}{2}(\Sigma \vec{t}, \vec{t}))$ ,  $\vec{m} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma \in \text{Mat}_{n \times n}$  — симметричная неотрицательно определённая матрица.

**Определение** (2). Случайный вектор  $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$  — гауссовский, если он представляется в следующем виде:  $\vec{\xi} = A\vec{\eta} + \vec{B}$ , где  $\vec{B} \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \text{Mat}_{n \times m}$  и  $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)^T$  — независимые и  $\sim N(0, 1)$ .

**Определение** (3). Случайный вектор  $\vec{\xi}$  — гауссовский, если  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$  случайная величина  $(\vec{\lambda}, \vec{\xi})$  имеет нормальное распределение.

**Теорема.** Предыдущие 3 определения эквивалентны.

▲

1. Опр 1  $\Rightarrow$  Опр 2. Пусть  $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = Ee^{i(\vec{t}, \vec{\xi})} = e^{i(\vec{t}, \vec{m}) - (R\vec{t}, \vec{t})}$ . Так как матрица  $R$  — симметричная и неотрицательно определённая, то  $\exists S$  — ортогональная, та-

$$\text{кая что } S^T R S = D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & d_k & \\ 0 & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, d_i > 0.$$

$$\text{Определим } \tilde{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \frac{1}{\sqrt{d_k}} & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ в таком случае}$$

$$\tilde{D}^T S^T R S \tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим вектор  $(S\tilde{D})^T \vec{\xi}$  и его характеристическую функцию. Докажем что он доходит с точностью до линейного преобразования. Действительно, рассмотрим характеристическую функцию этого вектора:  $\varphi_{(S\tilde{D})^T \vec{\xi}}(\vec{t}) = \varphi_{\vec{\xi}}((S\tilde{D})^T \vec{t})$ , так как

$$\begin{aligned} \varphi_{(S\tilde{D})^T \vec{\xi}}(\vec{t}) &= E e^{i(\vec{t}, (S\tilde{D})^T \vec{\xi})} = \exp(i((S\tilde{D})^T \vec{t}, \vec{m}) - \frac{1}{2}(R(S\tilde{D})^T \vec{t}, (S\tilde{D})^T \vec{t})) = \\ &= \exp[i(\vec{t}, (S\tilde{D})^T \vec{m}) - \frac{1}{2} \underbrace{(\tilde{D}^T S^T R S \tilde{D} \vec{t}, \vec{t})}_{= \sum_{i=1}^k t_i^2}] = \\ &= \exp[i(\vec{t}, (S\tilde{D})^T \vec{m}) \prod_{i=1}^k \varphi_{\eta_i}(t_i)], \end{aligned}$$

$\eta_i \sim N(0; 1)$  и независимы по теореме единственности и теореме независимости в терминах характеристической функции  $\Rightarrow$  вектор  $\vec{\eta} = (S\tilde{D})^T (\vec{\xi} - \vec{m})$  — искомый, так как  $\vec{\xi} = ((S\tilde{D})^T)^{-1} \vec{\eta} + \vec{m}$ .

2. Опр 2  $\Rightarrow$  Опр 3. Если  $\vec{\xi} = A\vec{\eta} + \vec{b}$ , то  $(\vec{\lambda}, \vec{\xi}) = (\vec{\lambda}, A\vec{\eta}) + (\vec{\lambda}, \vec{b}) = \underbrace{\lambda^T A \eta}_{\text{сл. вел.}} + \underbrace{\lambda^T b}_{\text{число}}$  —

линейная комбинация независимых нормально распределённых случайных величин.  $\Rightarrow$  то есть имеем нормальное распределение.

3. Опр 3  $\Rightarrow$  Опр 1. Пусть  $(\xi; \lambda)$  — нормально распределённая случайная величина, тогда её характеристическая функция  $E e^{i(\xi, \lambda)t} = e^{iE(\xi, \lambda)t - \frac{D(\xi, \lambda)t^2}{2}}$ . Подставим  $t = 1 \Rightarrow E e^{i(\xi, \lambda)} = e^{i \sum_{k=1}^n \lambda_k E \xi_k - \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^n \lambda_k \lambda_l \text{cov}(\xi_k, \xi_l)} = \exp(i(\vec{\lambda}, E\vec{\xi}) - \frac{1}{2}(R\vec{t}, \vec{t}))$ ,  $R = \text{Var } \vec{\xi}$ .

■

## Свойства гауссовских векторов

**Свойство 1.** Если  $\xi \sim N(a, \Sigma)$ , то  $\vec{a} = \begin{pmatrix} E\xi_1 \\ \vdots \\ E\xi_n \end{pmatrix}$  — вектор средних,  $\Sigma$  — матрица ковариаций.

▲ Аналогично пункту 3 предыдущей теоремы. ■

**Свойство 2.** Пусть  $\vec{\xi} \sim N(a, \Sigma)$ , тогда  $\xi_i$  независимы  $\Leftrightarrow \Sigma$  — диагональна.

▲ Заметим, что характеристическая функция  $\xi_j$  равна  $\varphi_{\xi_j}(t_j) = e^{et_j a_j - \frac{1}{2} \sigma_{jj}^2 t_j^2}$ , нужно подставить  $\vec{t} = (0 \dots 0, t, 0 \dots 0)$ . Тогда  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  независимы в совокупности  $\Leftrightarrow \varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(t_i) = e^{i(\vec{a}, \vec{t}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sigma_{jj}^2 t_j^2} \Leftrightarrow \Sigma$  — диагональна. ■

**Свойство 3** (Коши). Гауссовские вектора — нормальные случайные величины.

▲ Следует из определения 3 для  $\lambda_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  (спроецируем гауссовский вектор на одну из компонент). ■

**Свойство 4.**  $\vec{\xi}$  — гауссовский  $\Rightarrow$  любое его линейное преобразование — гауссовский вектор.

▲ Пусть  $\vec{\chi} = B\vec{\xi} + \vec{c}$ . По второму определению гауссовского вектора,  $\vec{\chi} = B(A\vec{\eta} + \vec{b}) + \vec{c} = BA\vec{\eta} + B\vec{b} + \vec{c}$ , отсюда  $\vec{\chi}$  — гауссовский по определению 2. ■

**Свойство 5.** Пусть  $\vec{\xi}$  — гауссовский. Тогда его компоненты независимые  $\Leftrightarrow$  они некоррелированы.

▲  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  — попарно некоррелированы  $\Leftrightarrow \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0, \forall i \neq j \Leftrightarrow \Sigma$  — диагонально  $\Leftrightarrow$  по свойству 2 компоненты  $\vec{\xi}$  независимы в совокупности. ■

**Свойство 6** (Явный вид плотности многомерного нормального распределения, б/д). Если  $\vec{\xi} \sim N(\vec{m}, \Sigma)$  и  $\text{const}(\Sigma) = n$ , то  $\vec{\xi}$  имеет плотность в  $\mathbb{R}^n$ .

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{m}), (\vec{x} - \vec{m}))\right), x \in \mathbb{R}^n.$$

## Многомерная ЦПТ

**Теорема** (Многомерная ЦПТ). Пусть  $\{\vec{x}_i\}_{i \geq 1}$  — независимые одинаково распределенные случайные вектора,  $E\vec{x}_i = \vec{a}$ ,  $\text{Var } \vec{x}_i = \Sigma$ .

Тогда  $\sqrt{n} \left( \frac{\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n}{n} - \vec{a} \right) \xrightarrow{d} N(\vec{0}, \Sigma), n \rightarrow +\infty$ .

*Замечание.* Сходимость векторов по распределению вводится аналогично обычной сходимости случайной величины по распределению, то есть  $\forall f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно ограниченных  $Ef(\vec{x}_n) \rightarrow Ef(\vec{x})$ .