다음과 같은 형태의 문제를 QUBO 라 부른다.

$n \times n$ 크기의 실수 행렬 Q가 주어졌을 때, (i번째 row, j번째 column 의 값을 $q_{i,j}$ 라고 표시)

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} q_{i,j}x_ix_j$$

위 수식의 값을 최소로 만드는 n-bit 는 무엇인가?

에를 들어,

$Q = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ -7 & 3 & 0 \end{Bmatrix}$라고 주어지면,

$$x_0 - 5x_1 + 4x_0x_1 - 7x_0x_2 + 3x_1x_2$$

를 최소로 만드는 3-bit $x_0x_1x_2$ 가 뭐인지를 찾으라는 문제이다.

이때, Q 가 주어졌을 때 classic 환경에서는 optimal 을 찾는 효율적인 알고리즘이 없다는거다.

누군가가 QUBO를 효율적으로 찾는 방법 A를 제안했을 때, 어떻게 평가할 수 있을까?

당연히, 문제가 주어졌을 때, optimal solution을 확정지을 수는 없다.

그 방법이 있다면 QUBO를 겨우 "효율적"으로 푸는 방법을 애초에 찾을 필요가 없음.

다만, A를 평가할 데이터 셋은 만들 수 있을지도 모름.

예를 들어, optimal 이 1011인 QUBO문제는 다음과 같이 만들 수 있다.

$$y = -x_0 + x_1 - x_2 - x_3$$

물론 2차항이 없는 아주 쉽게 풀 수 있는 형태의 QUBO이기 때문에 방법 A를 평가하기에는 부족함. 즉, 만들어진 문제가 랜덤하게 만들어진 QUBO와 비슷한 난이도여야 함.
(구별불가해야 함)

다른 설명으로, 다항식의 해를 효율적으로 찾는 방법을 누군가가 제안했다고 가정해보자.

정확성을 측정하려면,

{$x^2 + 4x + 4 = 0$, (+2, -2)} 와 같이 {다항식, (해 집합)} 데이터가 많이 있어야 한다.

이는 쉽게 해결할 수 있다. 예를 들어 50개의 해를 모두 알고 있는 50차 다항식은 다음과 같이 만들 수 있음

$$a\prod_{i=0}^{49}(x - s_i) = 0$$

그리고 minor embedding 기법 평가 데이터 셋도 비슷하게 생각해볼 수 있음.

정리하면,

임의의 n-bit x^*가 optimal이 되는 QUBO를 만드는 방법이 있을까? 단, x^*를 비밀로 감췄을 때, 이를 찾는게 어려워야 함.

$x = b_0 b_1 \cdots b_{n-1}$ 이 해인 QUBO 문제 만드는 방법

Step 1. 임의의 양수 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 을 뽑고,

For $i = 0,1, \dots n-1$,

만약 $b_i = 0$이면 $a_i x_i$를 목적함수에 더해줌

$b_i = 1$이면 $-a_i x_i$를 목적함수에 더해줌

Step 2.

For $i = 0,1, \dots, n-1, j = 0,1, \dots n-1, i \neq j$

가령 $b_i = 0, b_j = 0$일 때,

1) 임의의 양수 r을 뽑고 목적함수에 $r(1-x_i)x_j$ 을 더해줌
- $(1-x_i)x_j$는 $x_i, x_j = 0,1$ 일 때에만 1임
2) 임의의 양수 r을 뽑고 목적함수에 $rx_i(1-x_j)$ 을 더해줌
- $rx_i(1-x_j)$는 $x_i, x_j = 1,0$ 일 때에만 1임
3) 임의의 양수 r을 뽑고 목적함수에 $rx_i x_j$ 을 더해줌
- $rx_i x_j$는 $x_i, x_j = 1,1$ 일 때에만 1임

이렇게 만들어진 QUBO의 optimal은 $b_0 b_1 \cdots b_{n-1}$ 임

여기서 의문: 이렇게 만들어진 QUBO 가 random 하게 생성한 QUBO 와 indistinguishable 할까?