

メカトロ実験実習I

第4章 フーリエ変換による周波数分析

担当者：曹 建庭

4. 1 実験目的

本実験では、連続時間や離散時間信号に含まれている各周波数成分を分析するため、フーリエ変換という基本的な周波数分析の方法について MATLAB のシミュレーション実験を通して理解することを目的としている。

4. 2 実験原理と内容

4. 2. 1 フーリエ級数展開

任意の周期信号はいろいろな周波数の三角関数の無限の和として表すことができる。これがフランスの有名な数学者 Fourier(1768～1830)が考え出した、フーリエ級数展開である。

まず周期 T (秒) で繰り返される信号を $x(t)$ とする。フーリエ級数の考え方は、信号 $x(t)$ は T 秒で 1 周期。即ち周波数 $1/T$ (Hz) の成分と、その整数倍の周波数の成分[周波数が $2/T$, $3/T$, $4/T$ … (Hz)]の無限和として表される、となる。これを式で表すと

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + a_2 \cos \frac{4\pi t}{T} + a_3 \cos \frac{6\pi t}{T} + \cdots \\ &\quad \cdots + a_m \cos \frac{2\pi m t}{T} + b_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + b_2 \sin \frac{4\pi t}{T} \\ &\quad + b_3 \sin \frac{6\pi t}{T} + \cdots + b_m \sin \frac{2\pi m t}{T} \\ &= a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{2\pi m t}{T} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{2\pi m t}{T} \end{aligned} \quad (4.1)$$

となる。式(4.1)において、 a_0 は信号 $x(t)$ における **直流成分** の大きさを表す。 $\cos 2\pi t/T$, $\sin 2\pi t/T$ を **基本波成分** と呼ぶ。これは周期 T (秒) 即ち周波数 $1/T$ (Hz) の \cos 波(余弦波)と \sin 波(正弦波)の成分である。 $\cos 2\pi m t/T$, $\sin 2\pi m t/T$ を **高調波成分** とよばれ、周期が T/m (秒), 言い換えると、周波数が m/T (Hz) の \cos 波, \sin 波成分である。係数 a_m , b_m は **フーリエ係数** とよばれ、それぞれ \cos , \sin 波成分の振幅を表す。

フーリエ係数を原信号 $x(t)$ から求める場合には次のようになる。

直流成分の振幅 $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$ また、周波数 $\frac{m}{T}$ (Hz) の成分の振幅

cos 成分 $a_m = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \frac{2\pi mt}{T} dt$ sin 成分 $b_m = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin \frac{2\pi mt}{T} dt$

例題4_1: 三角関数の角度, ラジアン及び周期波形

\sin と \cos は 360° (度) を1周期とする三角関数である。度のかわりにラジアン(rad)を用いると $1^\circ = \pi/180$ (rad) であるから、下表に対応関係を求められる。但し、 $\pi = 3.14159\cdots$ である。

| | | | | | | | | | |
|------|---|-----|---------|-----|-------|-----|----------|-----|--------|
| 度 | 0 | ... | 90 | ... | 180 | ... | 270 | ... | 360 |
| ラジアン | 0 | ... | $\pi/2$ | ... | π | ... | $3\pi/2$ | ... | 2π |

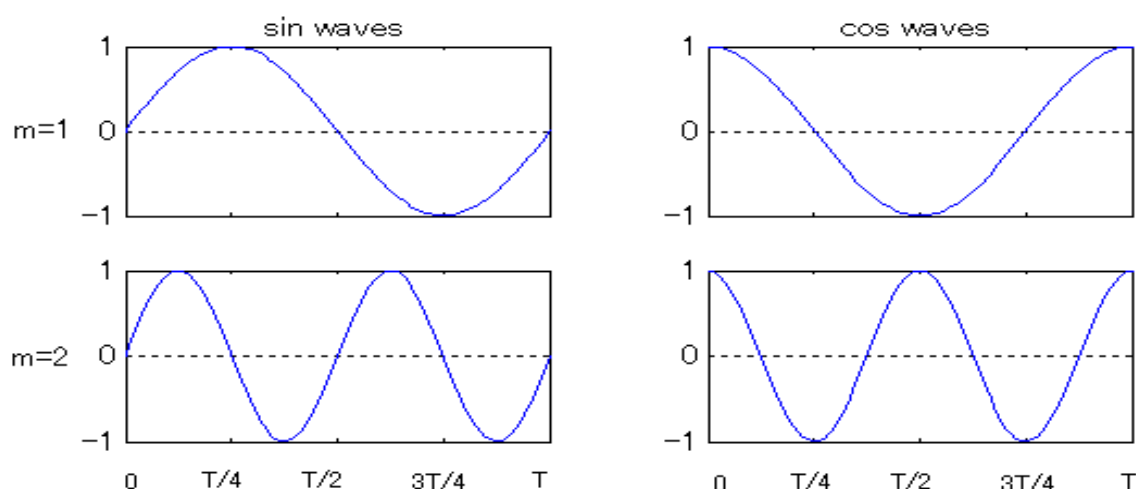
ここで、 $m=1, 2$ の場合、時間 t に対応する $\sin 2\pi mt/T$ と $\cos 2\pi mt/T$ の値、及び波形は次のように求められる。

$m=1$ のとき

| | | | | | | | | | |
|------------------|---|-----|---------|-----|-------|-----|----------|-----|--------|
| t | 0 | ... | $T/4$ | ... | $T/2$ | ... | $3T/4$ | ... | T |
| $2\pi mt/T$ | 0 | ... | $\pi/2$ | ... | π | ... | $3\pi/2$ | ... | 2π |
| $\sin 2\pi mt/T$ | 0 | ... | 1 | ... | 0 | ... | -1 | ... | 0 |
| $\cos 2\pi mt/T$ | 1 | ... | 0 | ... | -1 | ... | 0 | ... | 1 |

$m=2$ のとき

| | | | | | | | | | |
|------------------|---|-----|---------|-----|-------|-----|-----|-----|--------|
| t | 0 | ... | $T/8$ | ... | $T/4$ | ... | ... | ... | T |
| $2\pi mt/T$ | 0 | ... | $\pi/2$ | ... | π | ... | ... | ... | 4π |
| $\sin 2\pi mt/T$ | 0 | ... | 1 | ... | 0 | ... | ... | ... | 0 |
| $\cos 2\pi mt/T$ | 1 | ... | 0 | ... | -1 | ... | ... | ... | 1 |



上記の例題から $\sin 2\pi t/T$ ($\cos 2\pi t/T$) の周期は T (秒) で、 $\sin 4\pi t/T$ ($\cos 4\pi t/T$) の周期は $T/2$ (秒) であることが直感的に分かる。同様に $\sin 2\pi mt/T$ ($\cos 2\pi mt/T$) の周期は T/m (秒) で、周波数は m/T (Hz) となる。

4. 2. 2 振幅, パワー, 位相及びそれらのスペクトル

同じ周波数の \cos と \sin は位相に 90 度のずれがあることを利用して, 式(4. 1)を書き換えると, 次式が得られる。

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(\frac{2\pi m t}{T} - \theta_m\right) \quad (4.2)$$

ここで, $A_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}$ を振幅と言い, その 2 乗 ($|A_m|^2$) を振幅のパワーと言う。また

$\theta_m = \tan^{-1}(b_m / a_m)$ を位相と呼ばれている。

周波数の関数としてのフーリエ係数, すなわち周波数の変化に対するフーリエ係数の変化をスペクトルとよんでいる。周波数対振幅は**振幅スペクトル**で, 周波数対パワーは**パワースペクトル**で, 周波数対位相は**位相スペクトル**である。

各周波数成分を纏めた振幅, パワー, 位相及びスペクトルは同じように複素フーリエ級数からも求められる。

例題 4.2: 周期信号のスペクトル

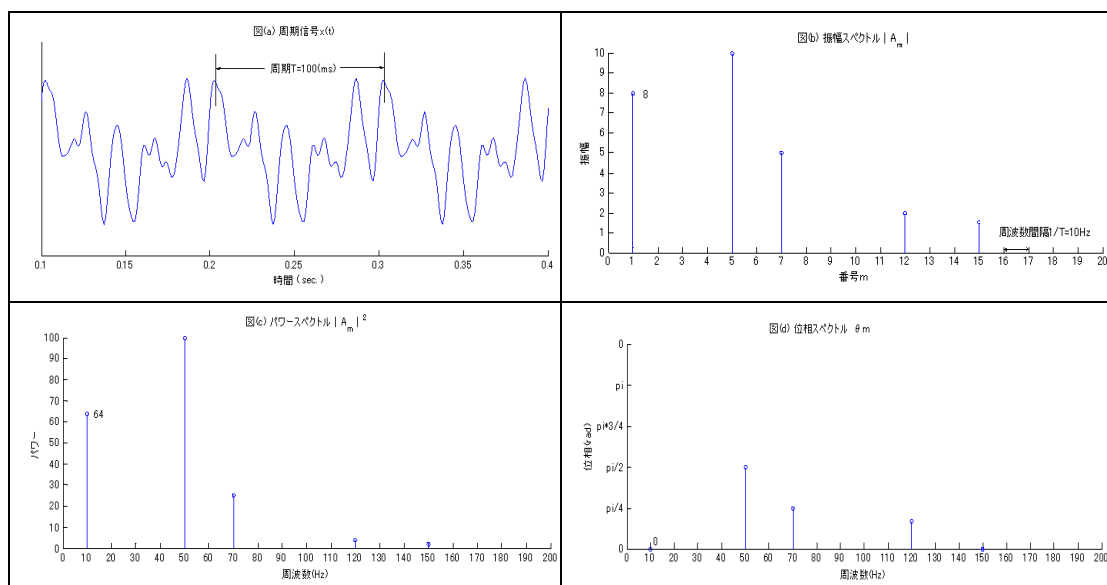
合成信号の周期は $T = 100\text{ms}$ であり, 次式のように表す。

$$\begin{aligned} x(t) = & 8 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} - 0\right) + 10 \cdot \cos\left(\frac{2 \times 5\pi}{T} - \frac{\pi}{2}\right) + 5 \cdot \cos\left(\frac{2 \times 7\pi}{T} - \frac{\pi}{4}\right) \\ & + 2 \cdot \cos\left(\frac{2 \times 12\pi}{T} - \frac{\pi}{6}\right) + 1.5 \cdot \cos\left(\frac{2 \times 15\pi}{T} - 0\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

周期 T (秒) の信号に対し, 振幅スペクトル, パワースペクトル及び位相スペクトルを求めたもの図(a)～図(d)に示せ。

合成信号の周期は $T = 100\text{ms}$ であるため, その周波数の間隔は $1/T = 10\text{Hz}$ である。番号 $m = 1$ から $m = 20$ までに設定すると, 周波数の範囲は $0 \sim 200\text{Hz}$ となる。ここで, 式(4.2)を展開した式(4.3)と比較すれば, 番号 $m = 1$ のとき, すなわち周波数 10Hz であるときに, 式(4.3)の第一項から振幅スペクトル $|A_m| = 8$ で, パワースペクトル $|A_m|^2 = 64$ 及び位相スペクトル $\theta_m = 0$ であることが直感的に分かる。同様に $m = 5, 7, 12, 15$, 周波数が $50, 70, 120, 150\text{Hz}$ の各スペクトルを求め(この部分は課題として解いてもらう。), 図(b)～図(d)に示すようなスペクトルを描くことができる。

例題 4.2 においては, 信号の周期性があるため, 図(b)～図(d)のように, 求められたスペクトルは連続でなく, ある周波数間隔で出現するので, これは線スペクトルと呼ばれている。信号が周期性のない場合(周期 $T \rightarrow \infty$ と看做される)の場合には, フーリエ変換(積分)で求められたスペクトルが線スペクトルでなく, 連続的なスペクトルとなる。



4. 2. 4 離散フーリエ変換(DFT)と高速フーリエ変換(FFT)

フーリエ変換は時間領域の信号を周波数領域におけるスペクトル(spectrum)として観察するための手段としてよく用いられる。離散フーリエ変換は有限長の離散時間信号から、その周波数によって表現される数列に変換する一つの計算方法である。離散時間フーリエ変換は次のように定義される。

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.8)$$

ここで、 $x(n)$ は時間領域の信号である。 N は離散時間信号のサンプル数であり、周波数 $0 \sim 2\pi$ を等分割するための数である。また、インデックス k は周波数を表す整数、フーリエ変換された信号の絶対値 $|X(k)|$ は信号 $x(n)$ の振幅スペクトル(magnitude spectrum)、また角度 $\angle X(k)$ は位相スペクトル(phase spectrum)である。

離散時間フーリエの逆変換は次式のようになる。

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.9)$$

上述した離散時間フーリエ変換とその逆変換は、それぞれ周波数領域における N 個の複素数、時間領域における N 個の数列を作成するための計算方法と考えてもよい。これらの計算法は N が大きくなると演算量の問題が生じてくる。そのため、高速フーリエ変換(FFT)が考案されている。Matlab においては、高速フーリエ変換の計算は関数 `fft()`で行い、その逆変換の計算は関数 `ifft()`で行う。

例題 4.3: 周波数 $f_1=697[\text{Hz}]$, $f_2=1209[\text{Hz}]$ の正弦波信号 $x(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$ をサンプリング周波数 $f_s=8192[\text{Hz}]$ で標本化し、得られた離散信号に対して高速フーリエ変換を行いその振幅特性を示してみよう。また、そのフーリエ変換された信号に対して逆高

速フーリエ変換してみよう。

本例題の Matlab 計算プログラムを次表のようになる。

```
% Investigation of the fft() and ifft()
% Filename: Samp6_3.m
% Jianting Cao, Feb. 28, 2003

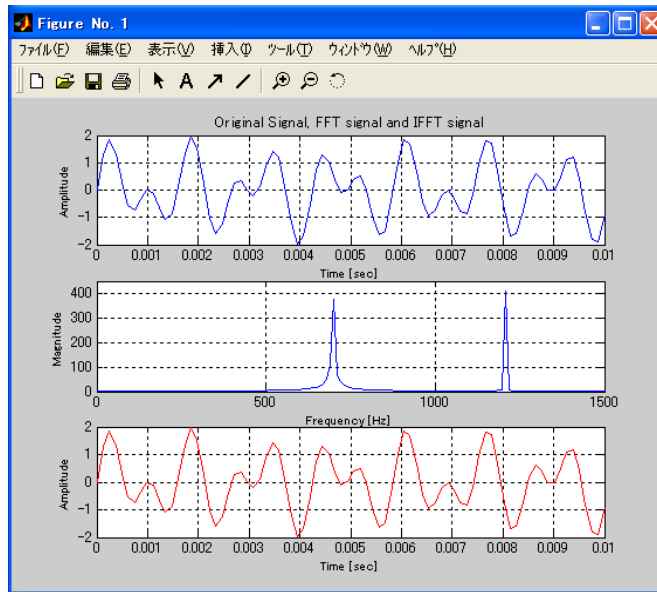
clear all
f1=697;f2=1209; % 周波数の定義
fs=8192; % サンプリング周波数の定義
n=[0:1/fs:0.1]; % サンプル数の定義
x=sin(2*pi*f1*n)+sin(2*pi*f2*n);%合成信号の生成
X=fft(x); % 信号のフーリエ変換の計算
m=abs(X); % 振幅特性の計算
xx=real(ifft(X));% 信号の逆フーリエ変換の計算

t=linspace(0,0.01,82);% 元信号のプロット
subplot(3,1,1);
plot(t,x(1:length(t)));grid;
xlabel('Time [sec]','FontSize',8);
ylabel('Amplitude','FontSize',8);
title('Original Signal, FFT signal and IFFT signal','FontSize',10)

subplot(3,1,2); %フーリエ変換した信号のプロット
f=(0:length(X)-1)*fs/length(X);
plot(f,m);axis([0 1500 0 450]);grid;
xlabel('Frequency [Hz]','FontSize',8);
ylabel('Magnitude','FontSize',8);

subplot(3,1,3); %逆フーリエ変換した信号のプロット
plot(t,xx(1:length(t)),'r-');grid;
xlabel('Time [sec]','FontSize',8);
ylabel('Amplitude','FontSize',8);
```

上記のプログラムを実行すると、次の結果が得られる。

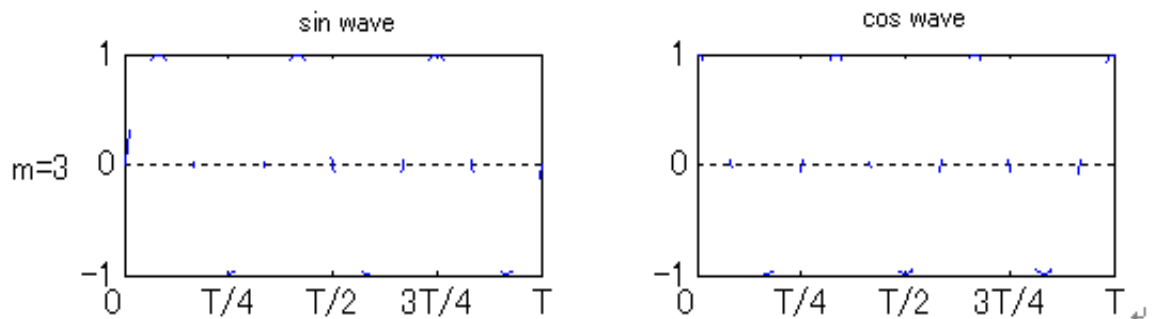


上段の波形は、サンプリング周波数 $f_s=8192$ [Hz]で標本化し得られたものである。中段の波形は、上段の離散信号に対して求められた振幅特性を示している。この波形に現れている二つのピークで示される周波数はそれぞれ f_1 , f_2 と一致していることが分かる。更に下段の波形は、その逆フーリエ変換されたものであり、上段の離散信号と一致していることが示されている。

4. 3 実験課題

4-1. 例題4-1において、 $m=3$ のとき、下表に「？」マックが付けられた所の値を求めよ。また、時間範囲 $t = [0 \quad T]$ の正弦波と余弦波をそれぞれで描いてください。

| t | 0 | \cdot | $T/12$ | \cdot | $T/6$ | \cdots | \cdots | \cdots | T |
|------------------|---|---------|--------|---------|-------|----------|----------|----------|-----|
| $2\pi mt/T$ | ? | \cdot | ? | \cdot | ? | \cdots | \cdots | \cdots | ? |
| $\sin 2\pi mt/T$ | ? | \cdot | ? | \cdot | ? | \cdots | \cdots | \cdots | ? |
| $\cos 2\pi mt/T$ | ? | \cdot | ? | \cdot | ? | \cdots | \cdots | \cdots | ? |



4-2. 例題4-2の続きとして、周波数が10, 50, 70, 120, 150 Hzであるとき(番号 $m=1, 5, 7, 12, 15$)の振幅スペクトル、パワースペクトル及び位相スペクトルをそれぞれ求め、下表に入れてください

い。

| | | | | | |
|--------------------------|----|---------|----|-----|-----|
| 周波数 (Hz) | 10 | 50 | 70 | 120 | 150 |
| 振幅スペクトル $ A_m $ | 8 | | | | |
| パワースペクトル $ A_m ^2$ | 64 | | | | |
| 位相スペクトル θ_m (rad) | 0 | $\pi/2$ | | | |

4-3. プッシュ回線の電話機で発信の際にダイヤルボタンを押す毎に発信される信号音が伴っている。これは Dual Tone Multi Frequency (DTMF) と呼ばれ、一つの標準となっており、1つのボタンにつき2種類の周波数が割り当てられる。例えば、電話機番号のボタン「1」の音は周波数 $f_1=697[\text{Hz}]$, $f_2=1209[\text{Hz}]$ の正弦波信号 $x(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$ を用いて発生させる。各番号のボタンと周波数の対応関係を次表のように示す。

| | 1209 Hz | 1336 Hz | 1477 Hz |
|--------|---------|---------|---------|
| 697 Hz | 1 | 2 | 3 |
| 770 Hz | 4 | 5 | 6 |
| 852 Hz | 7 | 8 | 9 |
| 941 Hz | * | 0 | # |

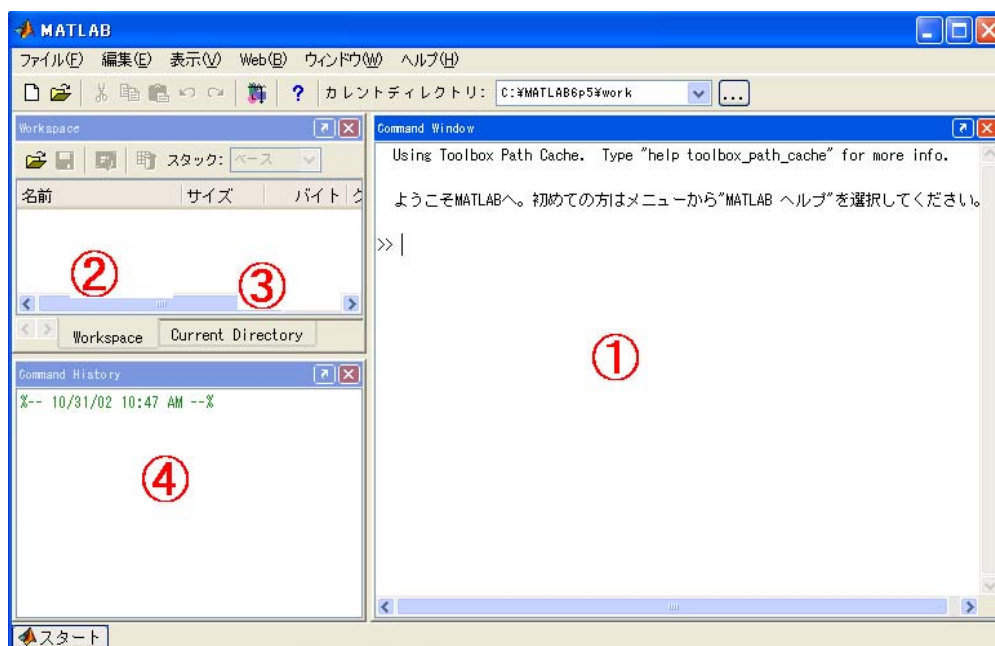
- 1) この表を利用して、各自の学籍番号の最後1桁の数字による合成正弦波を作成せよ。但しサンプリング周波数は $f_s=8192[\text{Hz}]$ とする。
- 2) 合成された正弦波を音声関数 `sound()` で聞いてみて、自分が持っている携帯電話でその数字を押すときの音と一致するかどうかを比べてみよ。
- 3) 次に、その作成した正弦波に対して振幅特性と位相特性[関数 `unwrap(angle(fft(.)))` を利用すること]を求めよ。

付録一： MATLAB の基本操作

1. MATLAB の起動と終了

MATLAB を起動するには、デスクトップのアイコン  をダブルクリックする。MATLAB が

起動されると、次の初期ウィンドウが開かれる。



初期ウィンドウは異なる機能を持つ複数個のサブウィンドウで構成されている。各サブウィンドウの機能は下記の通りである。

- ① Command Window: プロンプト `>>` で始まり、各種コマンド・関数・プログラムを実行するためのサブウィンドウ。
- ② Workspace: 定義された変数の一覧を表示するためのサブウィンドウ。
- ③ Current Directory: フォルダやファイルを閲覧するためのサブウィンドウ。
- ④ Command History: ①で実行したステートメントの履歴を表示するためのサブウィンドウ。
- ⑤ Launch Pad: MATLABに提供されている各種ツールを表示するためのサブウィンドウであるが、初期状態では表示されていない。表示させる場合には、メニューにある `表示(V)` から選択して他のサブウィンドウと切替えて表示させることができる。

初期ウィンドウの左下にある `スタート` というメニューボタンから各種ツール、デモ、ヘルプを起動させることができる。

Matlabを終了するには、Command Window にコマンド `>> quit` とタイプインする。但し、Matlabを終了させる前に、必要な変数を必ずファイルに保存して下さい。

2. ファイルの保存と削除

本実験終了前に、フォルダ `WORK` にあるすべてのファイルを各自が用意した USB や CDR に保存する。そのままに置かれると、ファイルが無くなる可能性があるので、十分に注意してください。

また、ファイルの保存を確認した上で、フォルダ **WORK** にあるすべてのファイルを削除する。

付録二：連続信号のサンプリング

1. アナログ信号からデジタル信号への変換

音声、振動及び脳波などの信号は、計測により、連続時間(アナログ)信号として記録されている。これらの信号をデジタル装置で処理するためには、アナログ信号からデジタル信号への変換(A/D 変換)が必ず必要となる。A/D 変換はアナログ信号の時間変化に対する標本化(サンプリング)と振幅変化に対する量子化の二つの操作(演算)から成る。

サンプリングの操作は一定の時間間隔で連続時間信号を取り出していくことにより実現される。例えば、連続な時間 t に変動している信号 $x(t)$ に対してある一定の間隔でデータの値を取り出すようなスイッチを用いると、次式で表現されるような離散的な信号(数列)が得られる。

$$y[nTs] = S\{x(t)\} \quad (\text{A. 1})$$

ここで、 T_s [sec] はサンプリング周期、 $f_s = 1/T_s$ [Hz] はサンプリング周波数、 n はサンプル数、 $S\{\cdot\}$ は標本化を行うような演算子とそれぞれ定義できる。

一方、量子化の操作とは、標本化によりある時点でのアナログ信号の値を取り出し、その値を離散値で表現することである。例えば、電圧 0～10 V のアナログ値を 16 bit のデジタルの数列で表現すると、計 $2^{16} = 65536$ の値を表現することができる。つまりアナログ電圧 0 V がデジタルの 0 に対応し、電圧 10 V がデジタルの 2^{16} に相当する。このときの分解能は $10/2^{16} = 0.15$ mV となる。

上記二つの操作により、アナログ信号はデジタル信号へ変換することができるが、逆にデジタル信号からアナログ信号へ再変換するとき、元のアナログ信号が再構築できるかと言う問題が生じてくる。量子化の操作では bit 数によって量子化誤差が生じるが、元のアナログ信号の再構築には影響がない。しかし、標本化の操作においては、どのような時間間隔で信号の標本を取り出すかについては標本化定理に従わないと、元のアナログ信号が正しく再構築されない。

2. Shannon の標本化定理

連続信号 $x(t)$ に含まれる最大の周波数成分 f_{\max} [Hz] の 2 倍以上のサンプリング周波数 f_s [Hz] :

$$f_s \geq 2f_{\max} \quad (\text{A.2})$$

または標本化の時間間隔を次式のようにして標本(サンプル)を取り出すと、

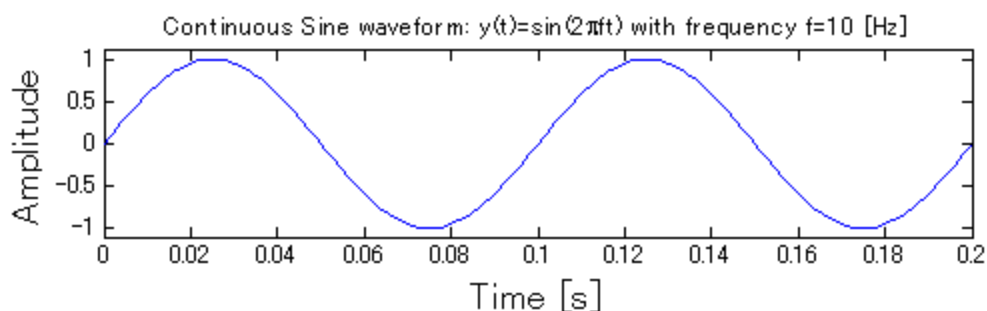
$$T_s \leq \frac{1}{2f_{\max}} \quad (\text{A.3})$$

元の連続信号 $x(t)$ は離散数列から正しく(誤差が無く)再構築される。ここで、周波数 $2f_{\max}$ はナイキスト(Nyquist)周波数と呼ばれる。

標本化定理はデジタル信号処理、デジタル制御、デジタル通信、デジタル音声処理などによく登場する一つの基礎定理である。例えば、音の信号に対する人間の聴覚で感知できる上限は 20 [kHz] と言われているが、その上限周波数の 2 倍以上の周波数 44.1 [kHz] で標本化されているのが一般に市販されている音楽用のデジタル CD に用いられている。

例題: 周波数 $f=10$ [Hz] の連続正弦波信号 $y(t) = \sin(2\pi ft)$ に対する $t=0.2$ [秒] の波形を下図

のように示す。



この正弦波に対して時間間隔(サンプリング周期) $T_s=5, 10, 60$ [ms]を用いてそれぞれ標本化し、その結果について検討してみよう。

連続信号から離散信号への変換は式(A.1)で表される。この式を利用して上記の正弦波信号に対するサンプリングすると、次式が得られる。

$$y[nT_s] = S\{\sin(2\pi ft)\} = \sin(2\pi f n T_s) \quad (\text{A. 4})$$

この例題では、周波数は $f=10$ [Hz]で、サンプリング周期 ($T_s=1/f_s$ [sec])は $T_s=5, 10, 60$ [ms]である。時間 $t=0.2$ [秒]の間に T_s でサンプルを採り出すと、サンプル数はそれぞれ $n=t/T_s=40, 20, 3$ [個]となる。

上述のパラメータ f, n, T_s を式(A.4)に代入すると、離散信号 y が求められる。これを実行するような Matlab プログラムは次表のようになる。

```
% Investigation of the Shannon sampling theorem
% filename: Samp6_1_2.m
% Jianting Cao, Feb. 22, 2003

clear all
f=10; % 正弦波周波数
t=0.2; % 表示する時間(秒)
Ts=[5 10 60]/1000; % 標本化する周期(秒)[Ts <= 1/2f = 50 ms]
n=[1:t/min(Ts)]; % サンプル数の計算
y=[]; % yの定義

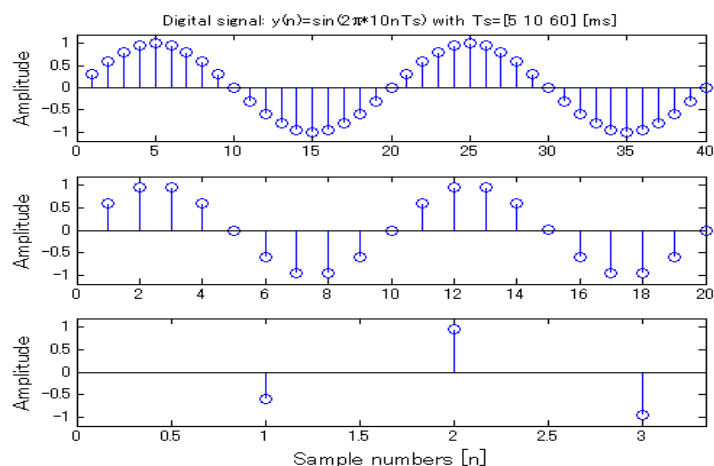
% 各サンプリング時間に対する計算とプロット
for i=1:3
    y(i,:)=sin(2*pi*f*n*Ts(i));
    subplot(3,1,i);
    stem(y(i,:))
    axis([0 t/Ts(i) -1.2 1.2]);
```

```

ylabel('Amplitude','FontSize',12);
if i==1; title('Digital signal: y(n)=sin(2\pi*10nTs) with Ts=[5 10 60]
[ms]','FontSize',10);end
if i==3; xlabel('Sample numbers [n]','FontSize',12);end
end
% ビットマップファイルへ出力
print -dbitmap Samp6_1_2

```

このプログラムを実行すると、次の波形が得られる。



上段の図の場合、サンプリング周期は $T_s=5$ [ms]であり、これを式(4.6)で定義されたナイキスト周期 $T_s^* \leq \frac{1}{2f_{\max}} = \frac{1}{2 \cdot 10} = 50$ [ms]と比較すると、明らかに $T_s < T_s^*$ であることが分かる。

つまり、サンプリング周期 $T_s=5$ [ms]で標本化することは標本化定理を満たしており、この場合には、連続信号に含まれている周波数成分が全く失われることなく再構築が可能である、ということが分かる。また、最上段図に示されるように隣同士のサンプル値(○の中心)を直線で繋げた波形と、元の連続時間で表現される正弦波形とを比較すれば、形がほぼ一致することからこのことが直感的にも推察される。

次に、中段の図の場合、サンプリング周期は $T_s=10$ [ms]であり、上段の図の場合と同様に $T_s < T_s^*$ であるため、元の連続信号が再構築することが出来る。しかし、この場合はサンプル数が十分でないため、誤差が多少生じることが波形からも明らかである。

下段の図では、サンプリング周期は $T_s=60$ [ms]であり、 $T_s > T_s^*$ であるため、標本化定理を満たさないことが分かる。つまりこの場合波形から推察できるように、離散数列から元の連続信号への再構築ができないことを示している。