第三讲

线性规划对偶理论

	$\boldsymbol{c_B}$ $\boldsymbol{c_N}$	
x_B	$\boldsymbol{A_B}$ $\boldsymbol{A_N}$	b

$\Downarrow$

检验数

目标值相反数

	$\mathbf{0}$ $\boldsymbol{c_N} - c_B^T A_B^{-1} A_N$	$-c_B^T A_B^{-1} b$
x_B	$\boldsymbol{I_{m\times m}}$ $A_B^{-1}\boldsymbol{A_N}$	$A_B^{-1} b$

对偶理论

$$
(P)\quad
\begin{aligned}
\max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\
s.t. \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\
& 5x_1 + 2x_2 \le 26 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

对偶理论

$$(P)\quad \begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ s.t. \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ & 5x_1 + 2x_2 \le 26 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$(D)\quad \begin{aligned} \min \quad & z = 24y_1 + 26y_2 \\ s.t. \quad & 2y_1 + 5y_2 \ge 4 \\ & 3y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

对偶理论

原始 (P)			对偶 (D)	
max	$c^T x$		min	$y^T b$
$s.t.$	$a_i^T x \leq b_i$	$i = 1, \dots, p$	$s.t.$	$y_i \geq 0$
	$a_i^T x \geq b_i$	$i = p+1, \dots, l$		$y_i \leq 0$
	$a_i^T x = b_i$	$i = l, \dots, m$		$y_i \lesseqgtr 0$
	$x_j \geq 0$	$j = 1, \dots, q$		$A_j^T y \geq c_j$
	$x_j \leq 0$	$j = q+1, \dots, h$		$A_j^T y \leq c_j$
	$x_j \lesseqgtr 0$	$j = h, \dots, n$		$A_j^T y = c_j$

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ s.t. & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \min & y^T b \\ s.t. & y^T A \ge c^{\mathsf{T}} \\ & y \ge 0 \end{array}$$

设(D)是(P)的对偶问题，那么(P)也是(D)的对偶。

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ s.t. & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \min & y^T b \\ s.t. & y^T A \ge c^T \\ & y \ge 0 \end{array}$$

➤ （弱对偶定理）

- 若(P)和(D)均有有限可行解，(P)问题任一可行解的目标函数值总是不大于(D)问题的任一可行解的目标函数值

- 设x和y分别是(P)和(D)的可行解，若二者的目标函数值相等，则它们分别是各自问题的最优解

- 若(P)有无限最优解，则(D)不可行；若(D)有无限最优解，则(P)不可行

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ s.t. & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \min & y^T b \\ s.t. & y^T A \ge c^T \\ & y \ge 0 \end{array}$$

➢ (强对偶定理)

若(P)（或(D)）有有限最优解，则(D)（或(P)）也有有限最优解，且目标函数值相等

$$(P)\quad \begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned} \qquad\qquad (D)\quad \begin{aligned} \min \quad & y^T b \\ s.t. \quad & y^T A \ge c^T \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

- （强对偶定理）

若(P)（或(D)）有有限最优解，则(D)（或(P)）也有有限最优解，且目标函数值相等

- （互补松弛定理）

若 x^*, y^* 分别是$(P), (D)$的可行解，则

$$x^*, y^* \text{ 最优} \iff \begin{cases} ({y^*}^T A - c^T)x^* = 0 \\ {y^*}^T (Ax^* - b) = 0 \end{cases}$$