LP rounding based 近似算法

- 许多组合优化问题都可以用线性整数规划表示
- 但仅有极少数可由 LP 直接求解
- 大多数问题是 NP-难的，近似算法是一类重要的求解方法

I：问题的实例（极小化问题）

A：近似算法（多项式时间）

A(I)：算法 A 的目标函数值

OPT(I)：最优目标函数值

- 若 $\exists\, r \geq 1$，对 $\forall I$，有：

$$A(I) \leq r \cdot OPT(I) \quad \cdots\cdots \quad ①$$

则 A 称为该问题的 r-近似算法

而 $\rho = \inf\{ r \mid r \text{ 满足①式} \}$ 为近似比

近似比的等价定义：

$$\rho = \sup_{I} \left\{ \frac{A(I)}{OPT(I)} \right\}$$

对极大化问题：

r-近似：$\forall I,\quad OPT(I) \le r \cdot A(I)$

$$\rho = \sup_{I} \left\{ \frac{OPT(I)}{A(I)} \right\}$$

一般地，

$$\rho = \sup_{I} \left\{ \frac{OPT(I)}{A(I)}, \frac{A(I)}{OPT(I)} \right\}$$

如何证明给定算法 A 的近似比呢？

以极小化问题为例.

1) $\forall I,\quad A(I) \le r \cdot \underline{OPT(I)}$ 如何估计？

$$\begin{cases} OPT(I) \ge LB(I) \\ A(I) \le r \cdot LB(I) \end{cases}$$

2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists I_\varepsilon$，使得：

$$A(I_\varepsilon) \ge (r-\varepsilon) \cdot OPT(I_\varepsilon)$$

构造 I_ε

我们希望设计近似比尽量小的近似算法。那么，在 $P \neq NP$ 等假设下，什么样的近似是最好可能的？

PTAS (Polynomial Time Approximation Scheme)

$\{A_\varepsilon\}$: $\forall \varepsilon > 0$, $\forall I$,

$$A_\varepsilon(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot OPT(I)$$

其运行时间为 $|I|^{O(f(\frac{1}{\varepsilon}))}$

EPTAS: $|I|^{O(1)} \cdot f(\frac{1}{\varepsilon})$

FPTAS: $|I|^{O(1)} \cdot (\frac{1}{\varepsilon})^{O(1)}$

负面结果 (To sharpen the results)

基于复杂性假设: $\begin{cases} P \neq NP \\ NP \neq ZPP \\ \vdots \\ UGC \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{NO FPTAS} \\ \text{NO EPTAS} \\ \text{NO PTAS} \\ \text{NO } (r-\varepsilon)\text{-近似} \\ \cdots \end{cases}$$

回到 LP-rounding based 算法

(IP)

$$\min c^T x$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0 \quad x \in Z^+$$

$\Downarrow$ 松弛

(LP)

$$\min c^T x$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

得到 x_{LP}^*

$$\begin{array}{ccc} x_{LP}^* & \xrightarrow{\text{rounding}} & x_{IP} \\ \downarrow & & \downarrow \\ c_{LP}^* & \text{目标函数值} & c_{IP} \end{array}$$

<u>近似比</u> $\rho \leq \dfrac{c_{IP}}{c_{IP}^*} \leq \boxed{\dfrac{c_{IP}}{c_{LP}^*}}$

注意. $\dfrac{c_{IP}}{c_{LP}^*} \geq \boxed{\dfrac{c_{IP}^*}{c_{LP}^*}}$

"Integrality Gap" 整数间隙. 不能太大

背包问题

$$\max\ w = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

s.t. $\sum_{i=1}^{n} s_i x_i \le C,\quad i=1,2,\cdots,n$

$\cancel{x_i \in \{0,1\}}$

$x_i \ge 0,\ x_i \le 1$

不妨设 $\frac{p_1}{s_1} \ge \frac{p_2}{s_2} \ge \cdots \ge \frac{p_n}{s_n}$

LP的一个最优解为 $(1,\cdots,1,\alpha,0,\cdots,0)$

其中 $0<\alpha\le 1$, $\sum_{i=1}^{k} s_i + \alpha \cdot s_{k+1} = C$

Integrality Gap = 2

① $\frac{w_{LP}^*}{w_{IP}^*} \le 2$

IP的两个可行解：

1) 前 k 个物品

2) 第 k+1 个物品

② 考虑例子 $\{(\frac{C}{2}, C), (\frac{C+1}{2}, C)\}$

$$w_{LP}^* = C + \frac{C}{C+1}\cdot C$$

$$w_{IP}^* = C$$

$\Rightarrow$ 二者之比为 $\frac{2C}{C+1} \to 2$

顶点覆盖问题

$$\min\ C=\sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

s.t. $x_i+x_j \geq 1,\quad (i,j)\in E$

$\cancel{x_i\in\{0,1\}}\quad i=1,2,\cdots,n$

$x_i \geq 0$

结论：上述LP的基本可行解是半整的，即 $x_i=\{0,\frac{1}{2},1\}$

证明：若∃基本可行解 X，其不是半整的。

$$V_+=\{i\mid \tfrac{1}{2}<x_i<1\}$$

$$V_-=\{i\mid 0<x_i<\tfrac{1}{2}\}$$

$\boxed{V_+\cup V_- \text{ 非空}}$

对 $\varepsilon>0$，构造两个解

$$y_i=\begin{cases}x_i+\varepsilon, & i\in V_+\\ x_i-\varepsilon, & i\in V_-\\ x_i, & \text{else}\end{cases}\qquad z_i=\begin{cases}x_i-\varepsilon, & i\in V_+\\ x_i+\varepsilon, & i\in V_-\\ x_i, & \text{else}\end{cases}$$

$x=\frac{1}{2}(y+z)$，$\varepsilon>0$ 足够小

保证 y,z 可行

Integrality Gap $=$?

Ref.

$$\boxed{IG = 2 - \frac{2}{\chi^f(G)}}$$

分数色数

Integrality gap of the vertex cover linear programming relaxation

Mohit Singh

Operations Research Letters 47, 288-290, 2019