《电磁场与电磁波》测验（2020.4.8）

姓名________________________学号__________________

一、(10 分)矢量 $\boldsymbol{x_0}(-ay)+\boldsymbol{y_0}ax$（其中 a 为常量），能否表示某恒定磁场的感应磁场强度 $\boldsymbol{B}$？如果能，则在真空中产生该磁场的电流 $\boldsymbol{J}$ 是什么？如果不能，说明原因。

解：矢量 $\boldsymbol{x_0}(-ay)+\boldsymbol{y_0}ax$ 能表示某恒定磁场 $\boldsymbol{B}$，因为该矢量的散度为 0。在真空中产生此磁场的电流 $\boldsymbol{J}$ 为：

$$\boldsymbol{J}=\nabla\times\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}=\boldsymbol{z_0}\frac{2a}{\mu_0}$$

二、(10 分) 若通过一封闭曲面的电场通量为 0，是否表明该曲面内的电场强度的散度处处为 0，为什么？

解：不能表示曲面内的电场强度处处为 0。根据闭合曲面的电通量公式 $\oint_S \boldsymbol{E}d\boldsymbol{S}$ 可知，这是对整个曲面表面进行积分的过程，描述的是某个曲面的整体性质，不能代表曲面内部点的性质，而电场强度的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ 描述的是空间某一点的性质。根据公式 $\oint_S \boldsymbol{E}d\boldsymbol{S}=\oint_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}d\boldsymbol{V}$ 也可以看出，若 $\oint_S \boldsymbol{E}d\boldsymbol{S}=0$，并不能说明 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$；但若 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}\equiv 0$，则可以得到 $\oint_S \boldsymbol{E}d\boldsymbol{S}=0$。

三、(8 分) 假设无源真空中 ($\mu_0=4\pi\times10^{-7}$) 的磁感应强度 $\mathbf{B}=\mathbf{y_0}10^{-2}\cos(6\pi\times10^8 t)\cos(2\pi z)$ (W/m^2)，试求位移电流密度。

解：由麦克斯韦方程可知

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{B}&=\hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)-\hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)+\hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\\&=\hat{\mathbf{x}}2\pi\times10^{-2}\cos(6\pi\times10^8 t)\sin(2\pi z)\\&=\mu_0\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

位移电流密度为

$$\mathbf{J_d}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\hat{\mathbf{x}}\frac{2\pi}{\mu_0}\times10^{-2}\cos(6\pi\times10^8 t)\sin(2\pi z)$$

代入 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ H/m

得 $\mathbf{J_d}=\hat{\mathbf{x}}5\times10^4\cos(6\pi\times10^8 t)\sin(2\pi z)$

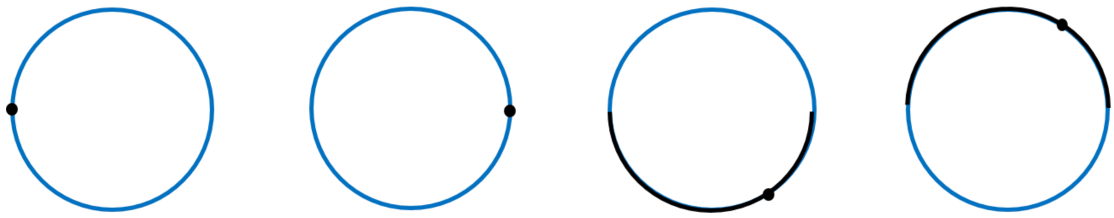
四、（12 分）均匀无耗传输线的特征阻抗为 50 欧姆，坐标原点在终端负载处，负载指向电流源方向为+z 轴。在 z=0 处分别接有四种不同的负载，传输线的工作状态均为纯驻波。若电压节点分别位于：

（1）z=0 处；　（2）z=λ/4 处；　（3）0<z<λ/4 处；　（4）λ/4<z<λ/2 处

试求上述四种情况下终端接的是什么负载。

解：用阻抗原图表示

(1) z=0　　(2) z=λ/4　　(3) 0<z<λ/4　　(4) λ/4<z<λ/2



短路　　开路　　容抗　　感抗

五、（15 分）自由空间中平面波的电场为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{z_0}120\pi e^{j(\omega t+kx)}$，试求：

（1）与之对应的 ***H***；

（2）相应瞬时坡印廷矢量 **S(t)**；

（3）若电场存在于某一均匀的导电介质中，其参量（ε_0，μ_0，σ），且在频率为 9kHz 时其激发的传导电流与位移电流的幅度相等，试求电导率 σ。

解：

（1）对于均匀平面波可得：

$$\boldsymbol{H}=(\frac{-\boldsymbol{x_0}}{\eta_0})\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{x_0}\times\boldsymbol{z_0})\cdot 120\pi e^{j(\omega t+kx)}=\boldsymbol{y_0}e^{j(\omega t+kx)}\quad \text{A/m}$$

或由麦克斯韦方程组：

$$\boldsymbol{H}=\frac{\nabla\times\boldsymbol{E}}{-j\omega\mu_0}=\boldsymbol{y_0}e^{j(\omega t+kx)}\quad \text{A/m}$$

（2）$\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{z_0}120\pi\cos(\omega t+kx)$，$\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{y_0}\cos(\omega t+kx)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(t)&=\boldsymbol{E}(t)\times\boldsymbol{H}^*(t)=[\boldsymbol{z_0}120\pi\cos(\omega t+kx)]\times[\boldsymbol{y_0}\cos(\omega t+kx)]\\&=-\boldsymbol{x_0}120\pi\cos^2(\omega t+kx)\end{aligned}\quad \text{W/m}^2$$

（3）$\sigma=\omega\varepsilon_0=2\pi\times 9\times 10^3\times\frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}=5\times 10^{-7}$　S/m

六、（15 分）已知平面波电场为$\mathbf{E}=(\vec{x}j100+\vec{y}200-\vec{z}j100\sqrt{3})e^{-j\sqrt{3}\pi x-j\pi z}\,(\mathrm{V/m})$，求该平面波的频率、真空波长、极化特性。

解：

$\because \vec{k}\cdot\vec{r}=\sqrt{3}\pi x+\pi z,\quad \vec{r}=\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$

$\therefore \vec{k}=\sqrt{3}\pi\vec{x}+\pi\vec{z},\quad k=|\vec{k}|=\sqrt{(\sqrt{3}\pi)^2+(\pi)^2}=2\pi x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

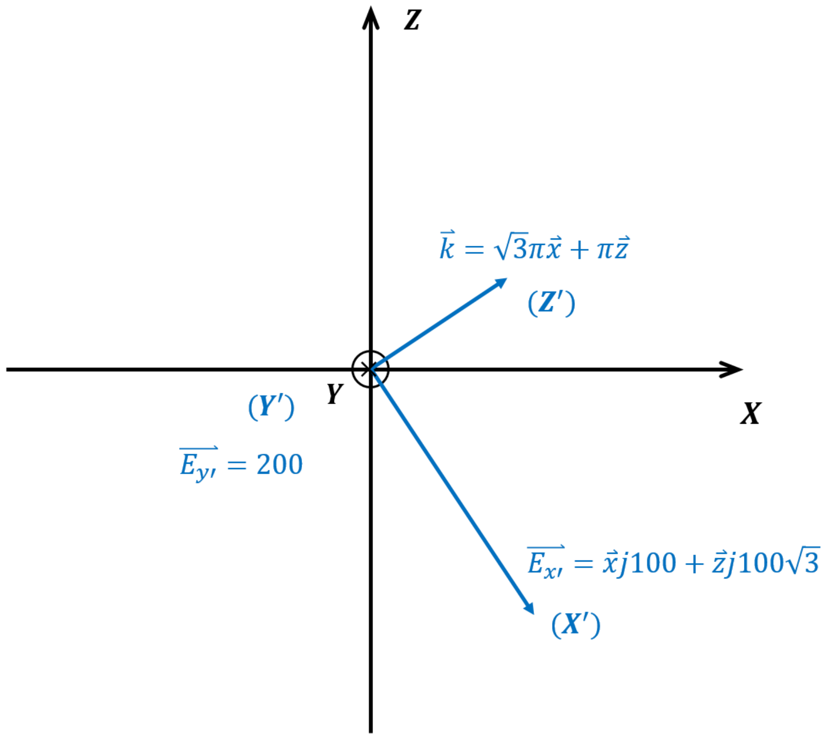
频率：

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{v_p\cdot k}{2\pi}=\frac{c\cdot k}{2\pi}=\frac{3\times10^8\cdot2\pi}{2\pi}Hz=3\times10^8Hz=300MHz$$

波长：

$$\lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\times10^8}{3\times10^8}m=1m$$

极化特性：右旋圆极化



$E_{x'}=200\mathrm{j}$

$E_{y'}=200$

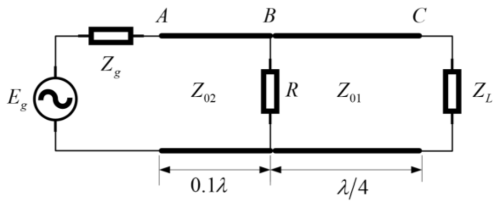
$\frac{E_{y'}}{E_{x'}}=-j$

右旋圆极化波

七、(15 分)传输线如下图所示，已知 $Z_{01}=600\Omega$，$Z_{02}=450\Omega$，$R=900\Omega$，$Z_L=400\Omega$，等效电动势 $E_g=900\text{V}$， $Z_g=450\Omega$， 试求：

（1）画出沿线电压、电流和阻抗的振幅曲线，并求最大值和最小值；

（2）求负载吸收的总功率和 Z_L 吸收的功率。



解：

（1）$\Gamma_L=\dfrac{Z_L-Z_{01}}{Z_L+Z_{01}}=\dfrac{400-600}{400+600}=-0.2$ $\quad \rho=\dfrac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L}=1.5$ BC 段是行驻波，C 处是电压波节点，B 是电压波腹点（根据负载的反射系数可知，C 在圆图实轴的左半径上，为电压波节点）

将 Z_L 通过 BC 段的传输线变换至 B 处（1/4 波长匹配器）：

$$Z_{L\to B}=\frac{Z_{01}{}^2}{Z_L}=900\Omega$$

则从 B 看向负载的输入阻抗为：

$$Z_{inB}=Z_{L\to B}//R=450\Omega=Z_{02}$$

即 AB 段传输行波，从 A 看向负载的输入阻抗为：

$$Z_{inA}=Z_{inB}=450\Omega$$

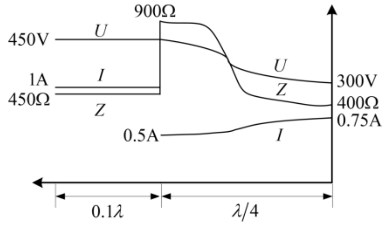
Z_{inA} 和 Z_g 分压：$|U_A|=450\text{V}\quad |I_A|=1\text{A}$

AB 段：$|U_A|=|U_B|=450\text{V}\quad |I_A|=|I_B|=1\text{A}\ Z_{inA}=Z_{inB}=450\Omega$

BC 段：$|U_{\max}|=|U_B|=450\text{V}\quad |I_{\min}|=|I_B|/2=0.5\text{A}\quad R_{\max}=Z_{L\to B}=900\Omega$

$$|U_C|=|U_{\min}|=|U_{\max}|/\rho=300\text{V}\quad |I_C|=|I_{\max}|=\rho|I_{\min}|=0.75\text{A}\quad R_{\min}=Z_L=400\Omega$$

其电压、电流、阻抗沿传输线的分布为：



（2）负载吸收的总功率为：

$$P=\frac{1}{2}|U_A||I_A|=225\text{W}$$

Z_L 吸收的功率为：

$$P_L=\frac{1}{2}|U_{\min}||I_{\max}|=112.5\text{W}$$

八、（15 分） 特征阻抗为 50Ω 的长线，终端负载不匹配，沿线电压波腹 $|U_{\max}|=10\text{V}$，波节 $|U_{\min}|=6\text{V}$，离终端最近的电压波节点与终端之间的距离为 0.12λ：

（1）求负载阻抗 Z_L；

（2）若用短路分支线进行匹配，求短路分支线的并接位置和分支线的最短长度。

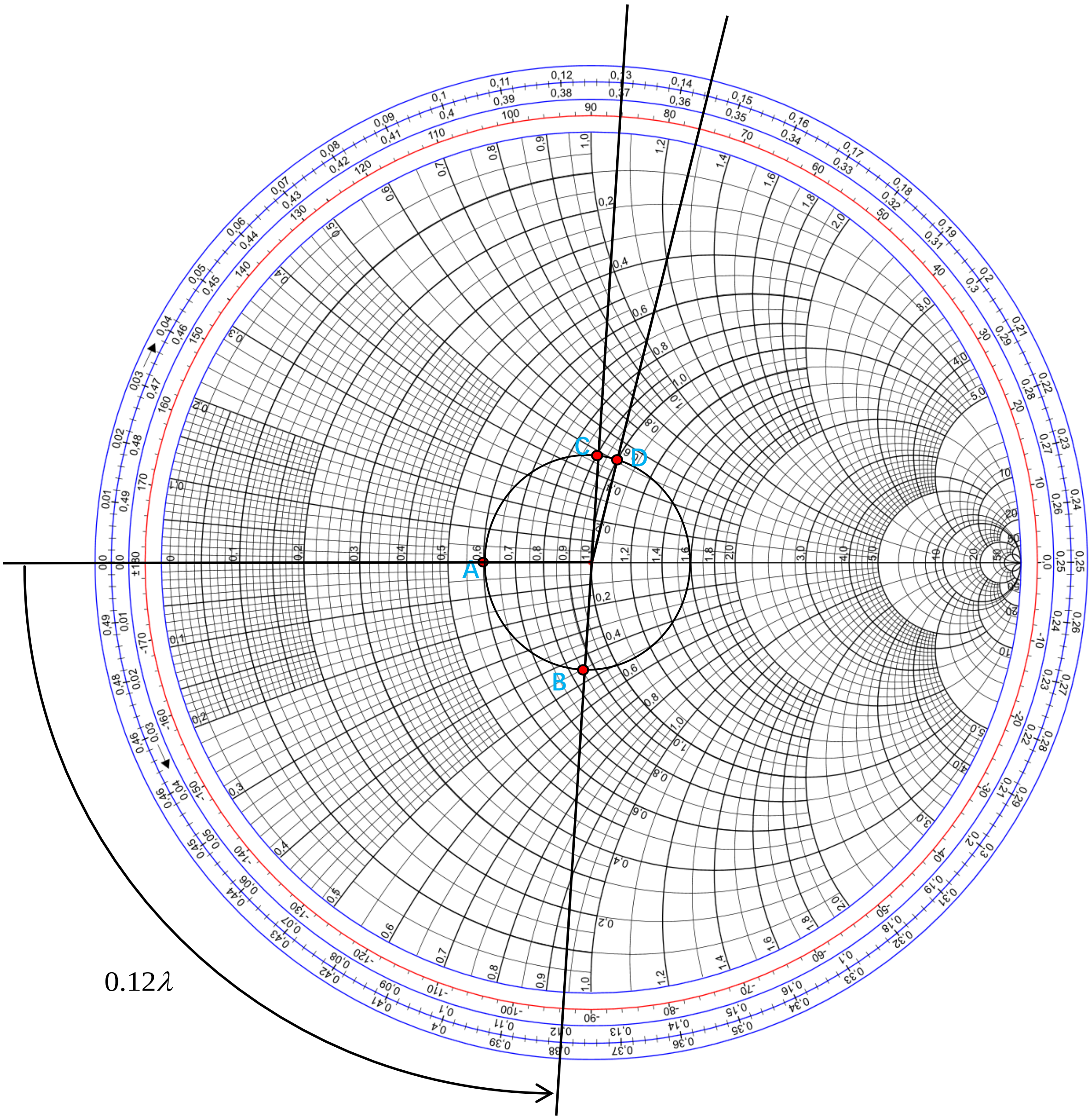
解：

（1） $r_{\min}=\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{|U_{\min}|}{|U_{\max}|}=0.6$ 位于左实轴 A 点，向负载沿等反射圆旋转 0.12λ，得到 B 点处的归一化负载阻抗为 $\overline{Z_L}=0.85-j0.45$，负载为 $Z_L=42.5-j22.5$

（2）C 点归一化负载导纳为 $\overline{Y_L}=0.9-j0.49$，电长度为 0.13λ；C 点沿等反射系数圆交 $g=1$ 的导纳圆于 D 点 $1+j0.52$，电长度为 0.146λ，则短路分支线变换至并接位置的归一化电纳为 $-j0.52$。

负载至并接位置的最短距离： $0.146\lambda-0.13\lambda=0.016\lambda$

分支线的最短长度为： $0.25\lambda-0.075\lambda=0.175\lambda$



A
B
C
D
0.12λ