第五讲

线性整数规划

最大权匹配

给定一个无向赋权图$G = (V, E)$，求权重最大的边集M，使得其中的任意两条边不存在公共顶点

$$x_e = \begin{cases} 1 & if\ e \epsilon M \\ 0 & else \end{cases}$$

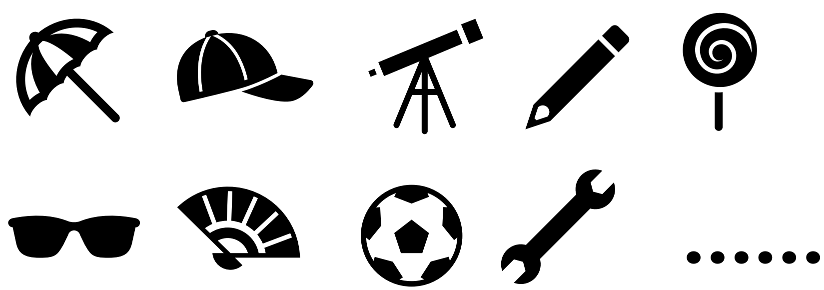
$$max \quad \sum_{e \epsilon E} w_e x_e$$

$$s.t. \quad \sum_{u \epsilon e} x_e \leq 1 \qquad u \epsilon V$$

$$x_e \in \{0,1\} \qquad \forall\ e \epsilon E$$

背包问题

假如这个暑假你计划进行一次旅行，在出发之前要决定带一些物品，背包容量是有限的，要在n件物品当中挑选出一些基本的必要的物品随身携带。每件物品有各自的价值和体积。你的目标是在不超过背包容量限制的情况下带上最多价值的物品（每个物品是不可分的，只能选择带或者不带）。



背包问题

(假设物品是一维的)

$$x_i = \begin{cases} 1 & if\ i\ is\ in\ the\ knapsack \\ 0 & else \end{cases}$$

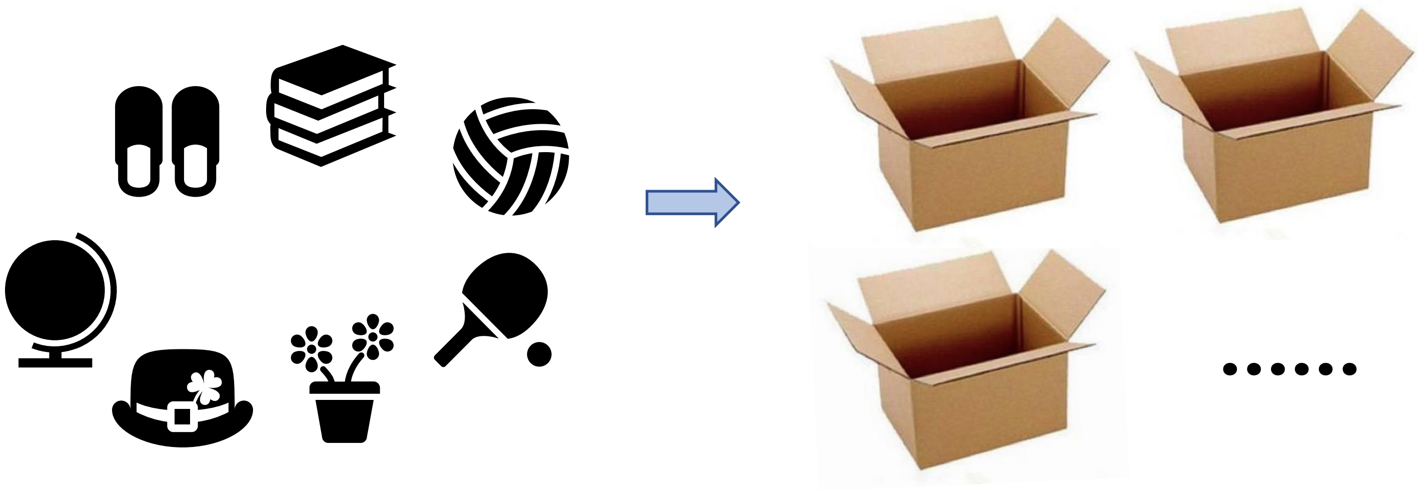
$$max \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$s.t. \qquad \sum_{i=1}^{n} s_i x_i \le C$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad \forall\ i$$

装箱问题

假设你是活跃在毕业季的一份子，你有一些行李（n件物品）需要打包寄回家。某家快递公司只提供了一种用来打包行李的需要自费的纸箱，容量是一定的。每件物品有自己的体积，你的目标是将n件物品（每个物品是不可分的）全部装下且使所使用箱子数尽可能少。



一维装箱问题

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{if there exists an item in bin } i \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if the item } j \text{ is in bin } i \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} y_i$$

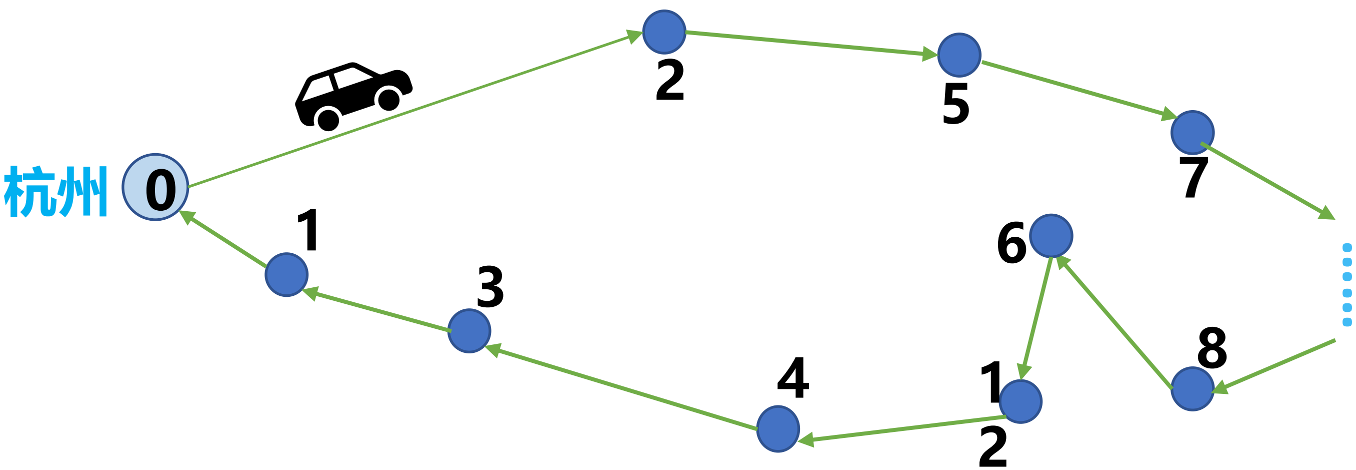
$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \le C \cdot y_i \qquad \forall\, i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall\, j$$

$$y_i, x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall\, i, j$$

旅行商问题

假如这个暑假你还计划了一次旅行：从杭州出发，游玩1,2,3,4,...n 这n个城市后，再回到杭州。n + 1个城市中的任意两个之间均有边可达，且每条边都有相应的路费。你的目标是从杭州出发走完n个城市后回到杭州，且使得所花的路费尽可能少。



旅行商问题

$$G = (V, E)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E \\ 0 & else \end{cases}$$

u_i:
顶点i的辅助变量

$$min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=0}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 0, \ldots, n$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 0, \ldots, n$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad 1 \leq i \neq j \leq n$$

最小（权）顶点覆盖问题

$G = (V, E)$

求$V' \subseteq V$使得所有E中的边均有点在V'中，且$\sum_{v \in V'} w(v)$最小。

$$x_i = \begin{cases} 1 & v_i \in V' \\ 0 & else \end{cases}$$

$$min \quad \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

$$s.t. \quad x_i + x_j \geq 1 \quad \forall (i, j) \in E$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall\, i \in [\mathrm{n}]$$

求解线性整数规划问题

线性规划松弛：将整数变量松弛成连续变量

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

$$s.t. \quad x_i + x_j \geq 1 \quad \forall (i,j) \in E$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall\, i \in [\mathrm{n}]$$

如何得到整数规划的解？ 舍入（rounding）技术？

求解线性整数规划问题

如果线性规划松弛得到的就是整数解，那么。。。

似乎Hopeless，因为绝大多数整数规划问题都是NP-困难的

什么条件下，LP总是得到整数解呢？

看一下约束条件 $Ax = b$

只需要保证基可行解为整数 $A_B x = b$

求解线性整数规划问题

设b是整数向量，考虑系数矩阵A

一个方阵称为幺模矩阵（uni-modular）, 若其行列式值为±1

矩阵A称为全幺模矩阵（TUD）, 若其任何一个非奇异子方阵都是幺模的

若A是全幺模矩阵，则 $Ax = b$的基本可行解都是整数解

若A是全幺模矩阵，则 $[A\ I]$也是

全幺模矩阵的几个例子

- 有向图的关联矩阵
- 二部图的关联矩阵

设整数矩阵A的元素为0或± 1，如果A中的每列非零元素至多有两个，而且A的行可以分成两个子集I和J，使得：

- 如果一列中有两个非零元素符号相同，则它们所在行分别属于I和J，
- 如果一列中有两个非零元素符号不同，则它们所在行同时属于I或J，

则A是全幺模矩阵

一般线性整数规划的基本算法

Gomory割平面法:

基变量　　　　非基变量

松弛后求解对应的线性规划$x_i + \sum_{k=m+1}^{n} a_{ik} x_k = b_i$，若存在$b_i$非整，则改造约束为

$x_i + \sum_{k=m+1}^{n} \lfloor a_{ik} \rfloor x_k \le \lfloor b_i \rfloor$,

保证有限步内终止（割出整数解点的凸包）

一般线性整数规划的基本算法

分枝定界法：

$$\min \quad c^T x$$

$$s.t. \quad Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

$x_i = \bar{b}_i$
$> 0,$
非整

一般线性整数规划的基本算法

分枝定界法：

$$\min \quad c^T x$$

$$s.t. \quad Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

$x_i = \bar{b}_i > 0$, 非整

$x_i \leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor$

$x_i \geq \lfloor \bar{b}_i \rfloor + 1$ 初始下界：OPT_{LP}

一般线性整数规划的基本算法

分枝定界法：

$$\min \quad c^T x$$

$$s.t. \quad Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

$x_i = \bar{b}_i > 0$, 非整

$x_i \leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor$ 初始上界：$+\infty$

$x_i \geq \lfloor \bar{b}_i \rfloor + 1$ 初始下界：OPT_{LP}

一般线性整数规划的基本算法

分枝定界法：

$$\min \quad c^T x$$

$$s.t. \quad Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

$x_i = \bar{b}_i > 0$, 非整

$x_i \leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor$ 初始上界：$+\infty$

$x_i \geq \lfloor \bar{b}_i \rfloor + 1$ 初始下界：OPT_{LP}

分枝过程中更新两界：

上界： 当前最好的整数解的目标函数值

下界： 当前分枝中最好的分数解的目标函数值

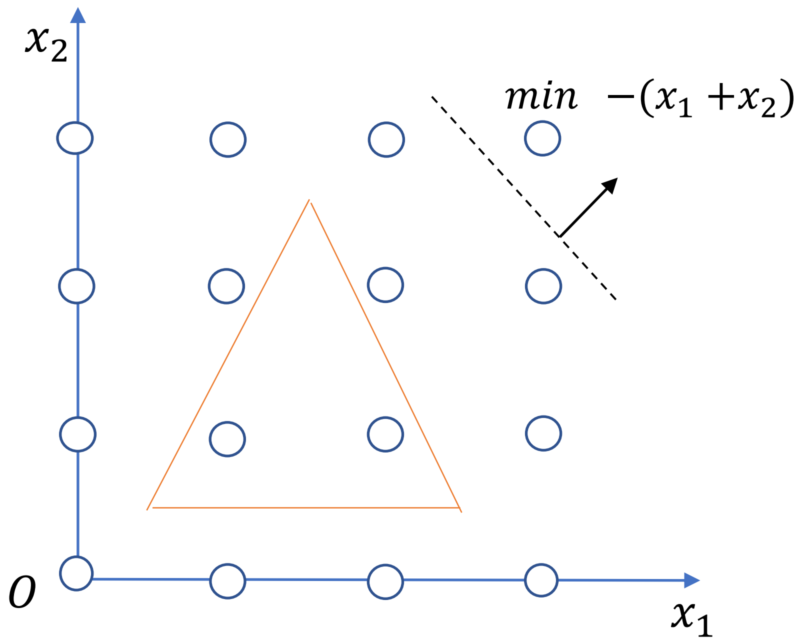
若某枝为整数解，则记为明枝；若某枝目标函数值大于等于上界，则记为枯枝；其余为活枝

分枝定界法：

$$
(P_0)\quad \begin{aligned} \min \quad & z = -(x_1 + x_2) \\ s.t. \quad & -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\ & 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\ & -2x_2 \le -1 \\ & x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{aligned}
$$

LP松弛

$$
(P_0')\quad \begin{aligned} \min \quad & z = -(x_1 + x_2) \\ s.t. \quad & -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\ & 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\ & -2x_2 \le -1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}
$$



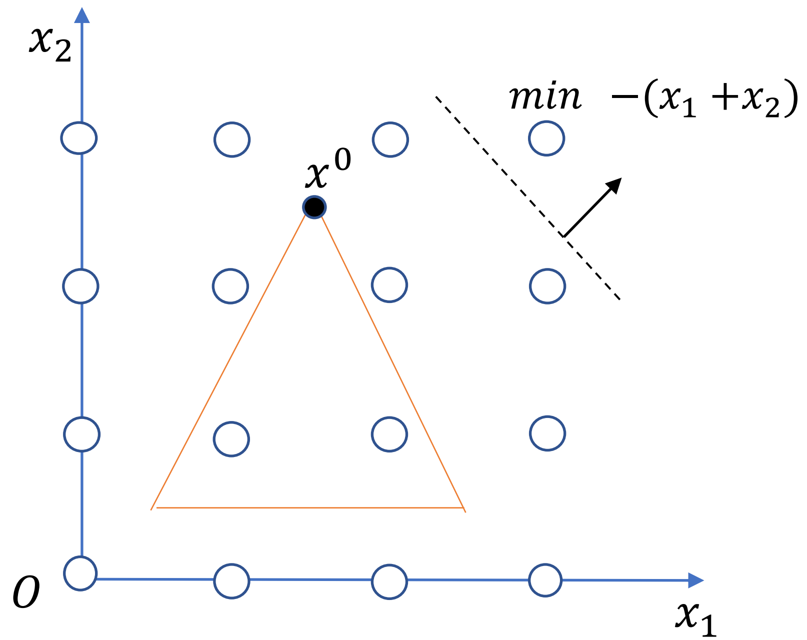
(P_0)的可行域如图所示

分枝定界法:

$$
(P_0)\quad
\begin{aligned}
\min \quad & z = -(x_1 + x_2) \\
s.t. \quad & -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\
& 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\
& -2x_2 \le -1 \\
& x_1, x_2 \ge 0, \text{整数}
\end{aligned}
$$

LP松弛

$$
(P_0')\quad
\begin{aligned}
\min \quad & z = -(x_1 + x_2) \\
s.t. \quad & -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\
& 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\
& -2x_2 \le -1 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

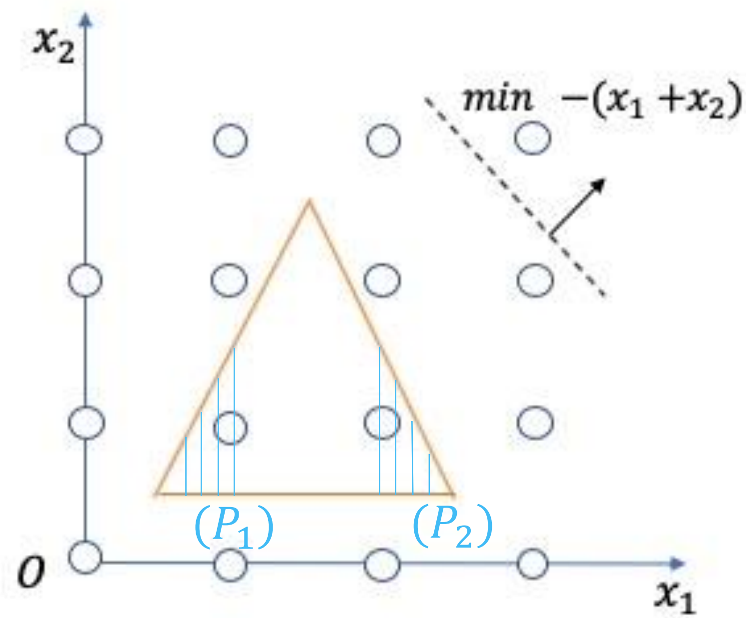


(P_0') 的可行域如图所示，最优解为 $x^0 = (1.5, 2.5)$，最优值为 $z_0 = -4$，是 (P_0) 的一个下界；

$x_1^0 = 1.5$，是非整数分量，引进两个约束，$x_1 \le 1$和$x_1 \ge 2$

$$
(P_1)\quad
\begin{aligned}
\min \quad & z = -(x_1 + x_2) \\
s.t. \quad & -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\
& 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\
& -2x_2 \le -1 \\
& x_1 \le 1 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

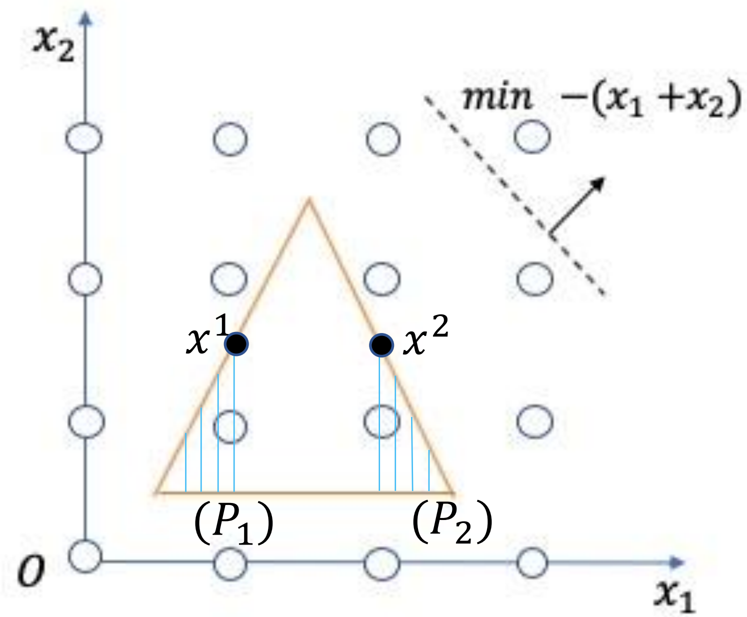
$$
(P_2)\quad
\begin{aligned}
\min \quad & z = -(x_1 + x_2) \\
s.t. \quad & -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\
& 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\
& -2x_2 \le -1 \\
& x_1 \ge 2 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



$x_1^0 = 1.5$，是非整数分量，引进两个约束，$x_1 \le 1$和$x_1 \ge 2$

$$
(P_1)\quad
\begin{aligned}
\min \quad & z = -(x_1 + x_2) \\
s.t. \quad & -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\
& 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\
& -2x_2 \le -1 \\
& x_1 \le 1 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

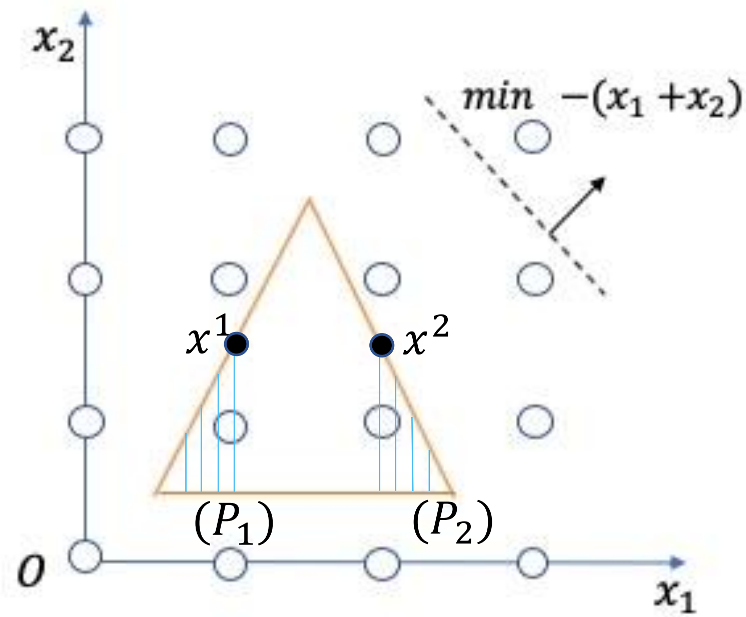
$$
(P_2)\quad
\begin{aligned}
\min \quad & z = -(x_1 + x_2) \\
s.t. \quad & -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\
& 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\
& -2x_2 \le -1 \\
& x_1 \ge 2 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



$x_1^0 = 1.5$，是非整数分量，引进两个约束，$x_1 \le 1$和$x_1 \ge 2$

$$
\begin{aligned}
(P_1)\quad & \min \quad z = -(x_1 + x_2) \\
& s.t. \quad -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\
& \qquad 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\
& \qquad -2x_2 \le -1 \\
& \qquad x_1 \le 1 \\
& \qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(P_2)\quad & \min \quad z = -(x_1 + x_2) \\
& s.t. \quad -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\
& \qquad 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\
& \qquad -2x_2 \le -1 \\
& \qquad x_1 \ge 2 \\
& \qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



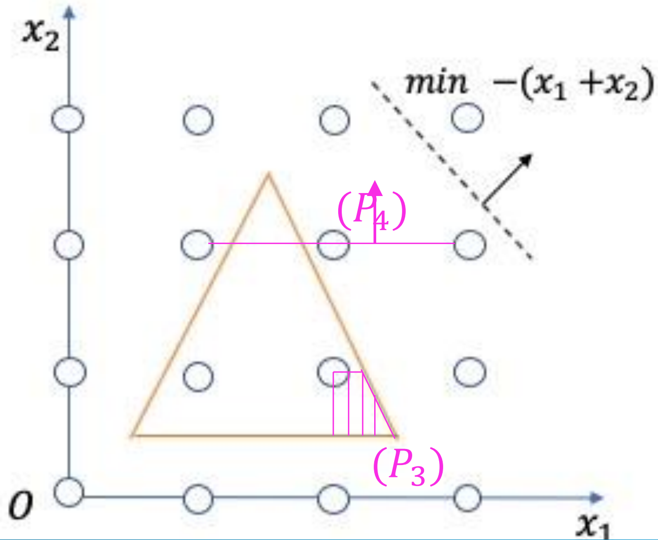
(P_1) 最优解为 $x^1 = (1,1.5)$，最优值为$z_1 = -2.5$;
(P_2) 最优解为 $x^2 = (2,1.5)$，最优值为$z_2 = -3.5$;

下界更新为-3.5

$x_2^2 = 1.5$，是非整数分量，(P_2)继续分枝为(P_3) (P_4)，引进两个约束，$x_2 \le 1$和$x_2 \ge 2$

$$
(P_3)\quad
\begin{aligned}
min \quad & z = -(x_1 + x_2) \\
s.t. \quad & -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\
& 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\
& -2x_2 \le -1 \\
& x_1 \ge 2 \\
& x_2 \le 1 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

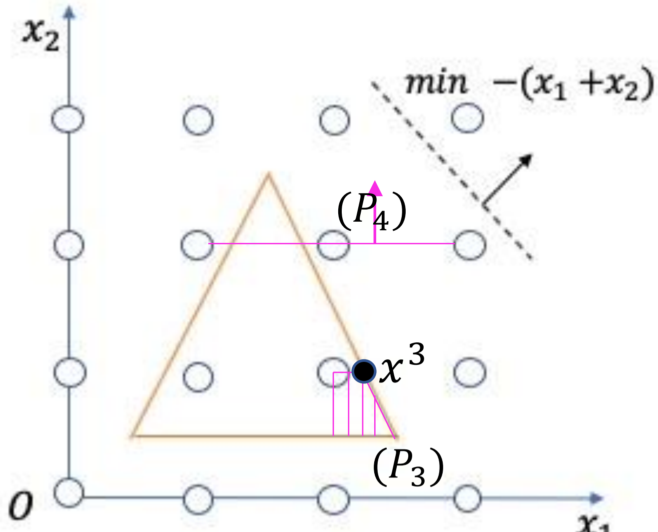
$$
(P_4)\quad
\begin{aligned}
min \quad & z = -(x_1 + x_2) \\
s.t. \quad & -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\
& 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\
& -2x_2 \le -1 \\
& x_1 \ge 2 \\
& x_2 \ge 2 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



$x_2^2=1.5$，是非整数分量，(P_2)继续分枝为(P_3) (P_4)，引进两个约束，$x_2 \le 1$和$x_2 \ge 2$

$$
(P_3)\quad
\begin{aligned}
\min\quad & z = -(x_1 + x_2) \\
s.t.\quad & -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\
& 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\
& -2x_2 \le -1 \\
& x_1 \ge 2 \\
& x_2 \le 1 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

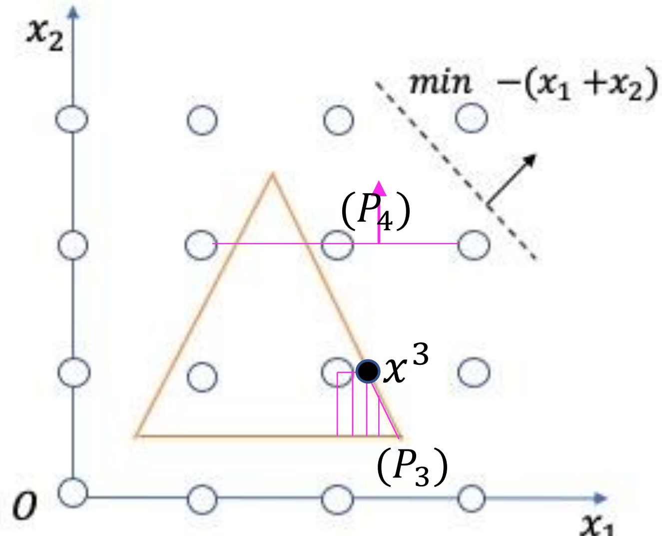
$$
(P_4)\quad
\begin{aligned}
\min\quad & z = -(x_1 + x_2) \\
s.t.\quad & -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\
& 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\
& -2x_2 \le -1 \\
& x_1 \ge 2 \\
& x_2 \ge 2 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



$x_2^2 = 1.5$，是非整数分量，(P_2)继续分枝为(P_3) (P_4)，引进两个约束，$x_2 \le 1$和$x_2 \ge 2$

$$(P_3)\quad \begin{aligned} min \quad & z = -(x_1 + x_2) \\ s.t. \quad & -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\ & 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\ & -2x_2 \le -1 \\ & x_1 \ge 2 \\ & x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$(P_4)\quad \begin{aligned} min \quad & z = -(x_1 + x_2) \\ s.t. \quad & -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\ & 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\ & -2x_2 \le -1 \\ & x_1 \ge 2 \\ & x_2 \ge 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

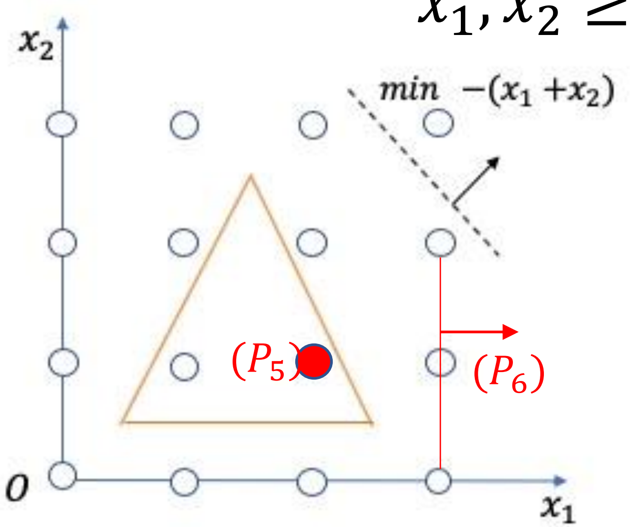


(P_3)最优解为$x^3 = (2.25,1)$，
最优值为$z_3 = -3.25$;
(P_4)无解;

$x_1^3=2.25$，是非整数分量，(P_3)继续分枝为(P_5) (P_6)，引进两个约束，$x_1\le 2$和$x_1\ge 3$

$$
(P_5)\quad
\begin{aligned}
\min\quad & z=-(x_1+x_2)\\
s.t.\quad & -4x_1+2x_2\le -1\\
& 4x_1+2x_2\le 11\\
& -2x_2\le -1\\
& x_1\ge 2\\
& x_2\le 1\\
& {\color{red}x_1\le 2}\\
& x_1,x_2\ge 0
\end{aligned}
$$

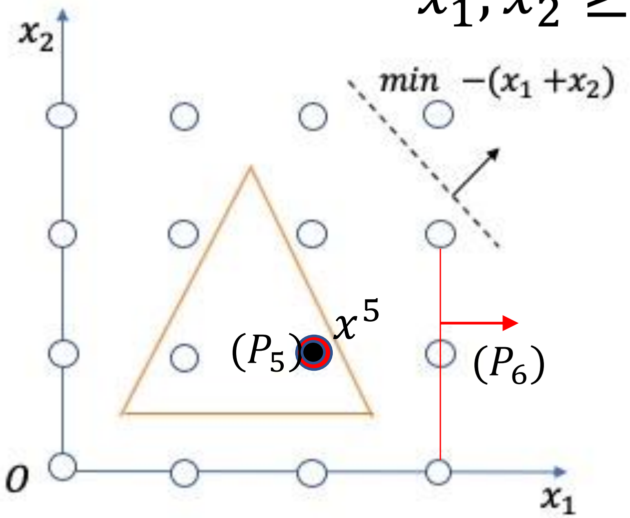
$$
(P_6)\quad
\begin{aligned}
\min\quad & z=-(x_1+x_2)\\
s.t.\quad & -4x_1+2x_2\le -1\\
& 4x_1+2x_2\le 11\\
& -2x_2\le -1\\
& x_1\ge 2\\
& x_2\le 1\\
& {\color{red}x_1\ge 3}\\
& x_1,x_2\ge 0
\end{aligned}
$$



$x_1^3=2.25$，是非整数分量，(P_3)继续分枝为(P_5) (P_6)，引进两个约束，$x_1\le 2$和$x_1\ge 3$

$$
(P_5)\quad
\begin{aligned}
\min\quad & z=-(x_1+x_2)\\
s.t.\quad & -4x_1+2x_2\le -1\\
& 4x_1+2x_2\le 11\\
& -2x_2\le -1\\
& x_1\ge 2\\
& x_2\le 1\\
& x_1\le 2\\
& x_1,x_2\ge 0
\end{aligned}
$$

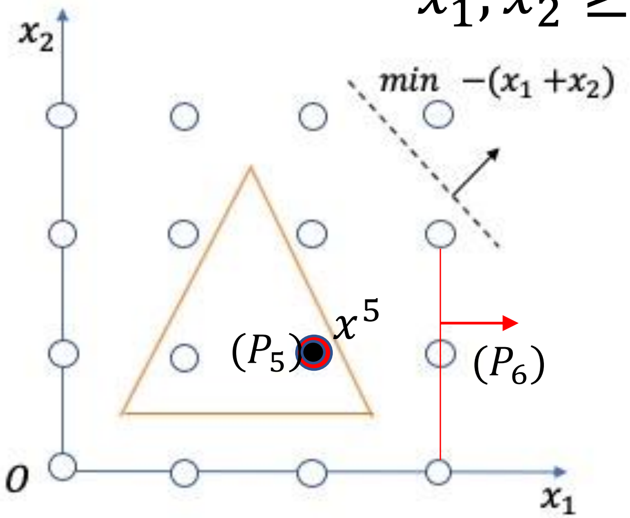
$$
(P_6)\quad
\begin{aligned}
\min\quad & z=-(x_1+x_2)\\
s.t.\quad & -4x_1+2x_2\le -1\\
& 4x_1+2x_2\le 11\\
& -2x_2\le -1\\
& x_1\ge 2\\
& x_2\le 1\\
& x_1\ge 3\\
& x_1,x_2\ge 0
\end{aligned}
$$



$x_1^3 = 2.25$，是非整数分量，(P_3)继续分枝为(P_5) (P_6)，引进两个约束，$x_1 \le 2$和$x_1 \ge 3$

$$(P_5)\quad \begin{aligned} \min \quad & z = -(x_1 + x_2) \\ s.t. \quad & -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\ & 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\ & -2x_2 \le -1 \\ & x_1 \ge 2 \\ & x_2 \le 1 \\ & x_1 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$(P_6)\quad \begin{aligned} \min \quad & z = -(x_1 + x_2) \\ s.t. \quad & -4x_1 + 2x_2 \le -1 \\ & 4x_1 + 2x_2 \le 11 \\ & -2x_2 \le -1 \\ & x_1 \ge 2 \\ & x_2 \le 1 \\ & x_1 \ge 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



(P_5)最优解为$x^5 = (2,1)$，
最优值为$z_5 = -3$;
(P_6)无解;

当初我们选取了(P_2)继续分枝为(P_3) (P_4)，最后找到了一个整点(2,1)，沿着(P_1)分枝的路还未曾涉足

但经过分析不难发现，沿着(P_1)分枝的路没有必要走，因为(P_1)的最优值$z_1 = -2.5 > z_5 = -3$;(P_1)被(P_5)剪枝

由于没有其余的活点，故(P_5)的解(2,1)即为原问题(P_0)的最优解