Worst-Out 证明

极小化问题

$$\frac{G(E,\mathcal{F},c)}{OPT(E,\mathcal{F},c)} \le \max_{F\subseteq E} \frac{|F|-\rho^*(F)}{|F|-r^*(F)}$$

$c(e_1) \geq c(e_2) \geq \cdots \geq c(e_n)$

G_n: worst-out 的解

O_n: 最优解

$E_j = \{e_1, \cdots, e_j\}$

$G_j = G_n \cap E_j$

$O_j = O_n \cap E_j$

$G_j \cup (E \setminus E_j)$ 含有E的基

但 $G_j \cup (E\setminus E_j) \setminus \{e\}$ 不含E的基，$\forall e \in G_j$

$\Longrightarrow E \setminus \{G_j \cup (E\setminus E_j\} \in \mathcal{F}^*$

$\Longrightarrow E_j \setminus G_j \in \mathcal{F}^*$ 为 $(E,\mathcal{F}^*)$ 在 E_j 上的基

$\Longrightarrow |E_j| - |G_j| \geq \rho^*(E_j)$

又因为

$$O_n \subseteq E \setminus (E_j \setminus O_j)$$

且 O_n 是一个基

所以 $E_j \setminus O_j \in \mathcal{F}^*$

从而 $|E_j| - |O_j| \le r^*(E_j)$

即: $|G_j| \le |E_j| - \rho^*(E_j)$

$$|O_j| \ge |E_j| - r^*(E_j)$$

令 $\lambda = \max\limits_{F \subseteq E} \dfrac{|F| - \rho^*(F)}{|F| - r^*(F)}$

有 $|G_j| \le \lambda |O_j|$

$$C(G_n) = \sum_{j=1}^{n} (|G_j| - |G_{j-1}|) c(e_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |G_j| (c(e_j) - c(e_{j+1}))$$

$$\le \lambda \sum_{j=1}^{n} |O_j| (c(e_j) - c(e_{j+1}))$$

$$= \lambda C(O_n)$$

例子:

$$c(e) = \begin{cases} 1, & e \in F \\ 0, & e \notin F \end{cases}$$

F是使λ取到的集合

设 B_1 是 F 上的关于 $(E, \mathcal{F}^*)$ 的基，且 $|B_1| = \rho^*(F)$

对 e_j 排序使得前 $|B_1|$ 个元素来自 B_1

$e_1, e_2, \cdots, e_{|B_1|}, \cdots\cdots, e_n$

Worst-out 的解:

$$G(E, \mathcal{F}, c) = |F| - |B_1| = |F| - \rho^*(F)$$

最优解:

$$OPT(E, \mathcal{F}, c) = |F| - r^*(F)$$