Primal-Dual 近似算法

$$(P)\quad \begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i=1,2,\cdots,m \\ & \boxed{x_j \geq 0} \quad j=1,\cdots,n \end{aligned}$$

整数松弛

$$(D)\quad \begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \quad j=1,2,\cdots,n \\ & y_i \geq 0 \quad i=1,\cdots,m \end{aligned}$$

回忆互补松弛条件: $\boxed{x,\ y \text{ 可行}}$

① $\forall\ 1\leq j\leq n$, $x_j=0$ 或 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

② $\forall\ 1\leq i\leq m$, $y_i=0$ 或 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

要求 $\boxed{x_j \text{ 取整数}}$, 上述条件需 $\boxed{\text{放松}}$

① $\alpha\geq 1$, $\forall\ 1\leq j\leq n$, $x_j=0$ 或

$$\boxed{c_j/\alpha \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j}$$

② $\beta\geq 1$, $\forall\ 1\leq i\leq m$, $y_i=0$ 或

$$\boxed{b_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \beta\cdot b_i}$$

松弛后的条件: $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$

$\forall\ 1 \leq j \leq n$, $x_j = 0$ 或 $\frac{c_j}{\alpha} \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j$

$\forall\ 1 \leq i \leq m$, $y_i = 0$ 或 $b_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \beta \cdot b_i$

若 x、y 可行并满足上述条件, 则

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\leq \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j \\
&= \alpha \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \\
&\leq \alpha \cdot \beta \cdot \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\
&\leq \alpha \beta \cdot OPT_D \\
&\leq \boxed{\alpha \beta} \cdot OPT_{IP}
\end{aligned}$$

该方法思路:

确定尽可能小的 α, β 使得构造出来的可行解 X (整数)、y 满足 "互补松弛条件"

对 0-1 整数规划而言

一般从 y 的可行解出发, β 取 1

逐步改进(提升) 对偶解得到原始整数解

Set cover（集合覆盖）问题

E：基本元素集

$U \subseteq 2^E$，$C: U \to Z^+$

$\{S_1, \cdots, S_k\}$

寻找 U 中费用最小的"集合"

使得 E 中所有元素均在其中

即：$\{S_{i_1} \cdots S_{i_l}\} \subseteq U$

$$\bigcup_{p=1}^{l} S_{i_p} = E, \quad \sum_{p=1}^{l} C(S_{i_p}) \text{ 最小}$$

顶点覆盖：

$G=(V,E)$

$|V|=n$

$$\begin{cases} E = E \\ S_i \to v_i \text{ 关联边集} \\ U = \{S_1, \cdots, S_n\} \end{cases}$$

$$\text{Min} \sum_{S \in U} C(S) x_S$$

$$\text{s.t.} \sum_{S: e \in S} x_S \geq 1, \quad e \in E$$

$$x_S \in \{0,1\}$$

松弛后:

$$\min \sum_{S\in U} c(S)x_S$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{S:e\in S} x_S \geq 1, \quad e\in E$$

$$\boxed{x_S \geq 0}, \quad S\in U$$

对偶:

$$\max \sum_{e\in E} y_e$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{e:e\in S} y_e \leq c(S), \quad S\in U$$

$$y_e \geq 0 \quad e\in E$$

f-近似算法

f: $\forall e\in E$ 在 U 中出现的最高频次. $f=\max\limits_{e\in E} \sum\limits_{S:e\in S} 1$

初始条件:

$$\forall S\in U, \quad x_S\neq 0 \Rightarrow \sum_{e:e\in S} y_e = c(S)$$

$$\boxed{x_S=1} \qquad \boxed{\alpha=1}$$

对偶条件:

$$\forall e\in E, \quad y_e\neq 0 \Rightarrow \sum_{S:e\in S} x_S \leq f$$

若成立, 则 $\boxed{f\text{-近似}}$

$$\max \sum_{e\in E} y_e$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{e:e\in S} y_e \le c(S), \quad S\in U$$

$$y_e \ge 0, \quad e\in E$$

初始步：$y=0$，$x=0$（不可行）

迭代步：do 直到所有元素被覆盖

$E'=E$

- 选择未覆盖元 $e\in E'$，提升 y_e，直到某个(些)

约束变紧

$$\boxed{\sum_{e:e\in S} y_e = c(S)}$$

- 对所有约束为紧的集合 S，令 $x_S = 1$
- 这些选中的集合中所有元素并入 F，$\boxed{E' = E\setminus F}$

（已覆盖的元素对应的变量不会再提升，保证对偶可行）

再看原问题

$$\min \sum_{S\in U} c(S)x_S$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{S: e\in S} x_S \geq 1, \quad e\in E$$

$$x_S\in\{0,1\}$$

$$\sum_{S: e\in S} x_S \leq f$$

例子 $E=\{e_1,\cdots,e_{n+1}\}$

$$U=\{\underbrace{\{e_1,e_n\}}_{1},\cdots,\underbrace{\{e_{n-1},e_n\}}_{1},\underbrace{\{e_1,\cdots,e_{n+1}\}}_{1+\varepsilon}\}$$

$\boxed{f=n}$

① $y_n\uparrow =1$，所有 $\{e_i,e_n\}$ 被选中

② $y_{n+1}\uparrow=\varepsilon$ $\{e_1,\cdots,e_{n+1}\}$ 被选中

故费用 $=(n-1)+1+\varepsilon=n+\varepsilon$

而 $OPT=1+\varepsilon$，$\boxed{\text{近似比} \longrightarrow f=n}$

无容量限制选址问题

F：候选设施点集合

开设费用为 f_i，$i \in F$

D：顾客集合

c_{ij} 为 j 到设施 i（若开设）的连接费用 $i \in F$，$j \in D$

目标：选择开设设施，并将顾客分配到某开设设施上，使得总的费用最小

引入变量 $\underset{i \in F}{y_i} = \begin{cases} 1, & \text{设施}i\text{开设} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & j \to i \\ 0, & j \not\to i \end{cases}$$

$$\min \sum_{i \in F} f_i y_i + \sum_{i \in F, j \in D} c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{i \in F} x_{ij} = 1, \quad j \in D$$

$$y_i - x_{ij} \geq 0, \quad i \in F, j \in D$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\}$$

对偶 $\max \sum_{j\in D} v_j$

s.t. $v_j - w_{ij} \le c_{ij}, \quad i\in F, \ j\in D$

$\sum_{j\in D} w_{ij} \le f_i, \quad i\in F$

$w_{ij} \ge 0$

先看一下 LP 的互补松弛条件

(1) $\forall i\in F, j\in D$,

$x_{ij} > 0 \Rightarrow V_i - w_{ij} = c_{ij}$

(2) $\forall i\in F$

$y_i > 0 \Longrightarrow \sum_{j\in D} w_{ij} = f_i$

(3) $\forall i\in F, \ j\in D$

$w_{ij} > 0 \Rightarrow y_i = x_{ij}$

(等价于 $\underline{y_i \ne x_{ij}} \Rightarrow w_{ij} = 0$)

$y_i = 1, \ x_{ij} = 0$

下面的算法保证(3)成立，而放松(1)和(2)

放松"互补松弛条件"

$\forall j \in D$, $\alpha_{ij} > 0$ ($i = \phi(j)$), 则

$$\boxed{\frac{1}{3}} c_{ij} \le v_j - w_{ij} \le c_{ij}$$

$\forall i \in I$, $\boxed{(y_i = 1)}$

$$\boxed{\frac{1}{3}} f_i \le \sum_{j \in D} w_{ij} \le f_i$$

则可以得到 3-近似算法.

其实可以做得更"好"一些

顾客分为 $\begin{cases} \text{直连} \\ \text{旁连} \end{cases}$

对旁连顾客 j (对该设施 i 没有贡献)

$$\frac{1}{3} c_{ij} \le \boxed{v_j - 0} \le c_{ij}$$

对直连顾客 j

$$v_j - w_{ij} = c_{ij}$$

对开设的设施 i

$$\sum_{j \in D} w_{ij} = f_i$$

$$\max \sum_{j\in D} v_j$$

s.t. $v_j - w_{ij} \le c_{ij} \quad i\in F, j\in D$

$\sum_{j\in D} w_{ij} \le f_i \quad i\in F$

$w_{ij} \ge 0$

原始-对偶算法：

第一阶段：初始 $v_j = 0$，$w_{ij} = 0$

所有顾客都未连接到设施

- 等速提升 v_j 直到某个(些) $\boxed{v_j = c_{ij}}$

对这样的 (i,j) (记为紧边)

→ 所有 v_j 一起等速提升，直到某个(些)设施 i 满足

$$\boxed{\sum_{j\in D} w_{ij} = f_i}$$

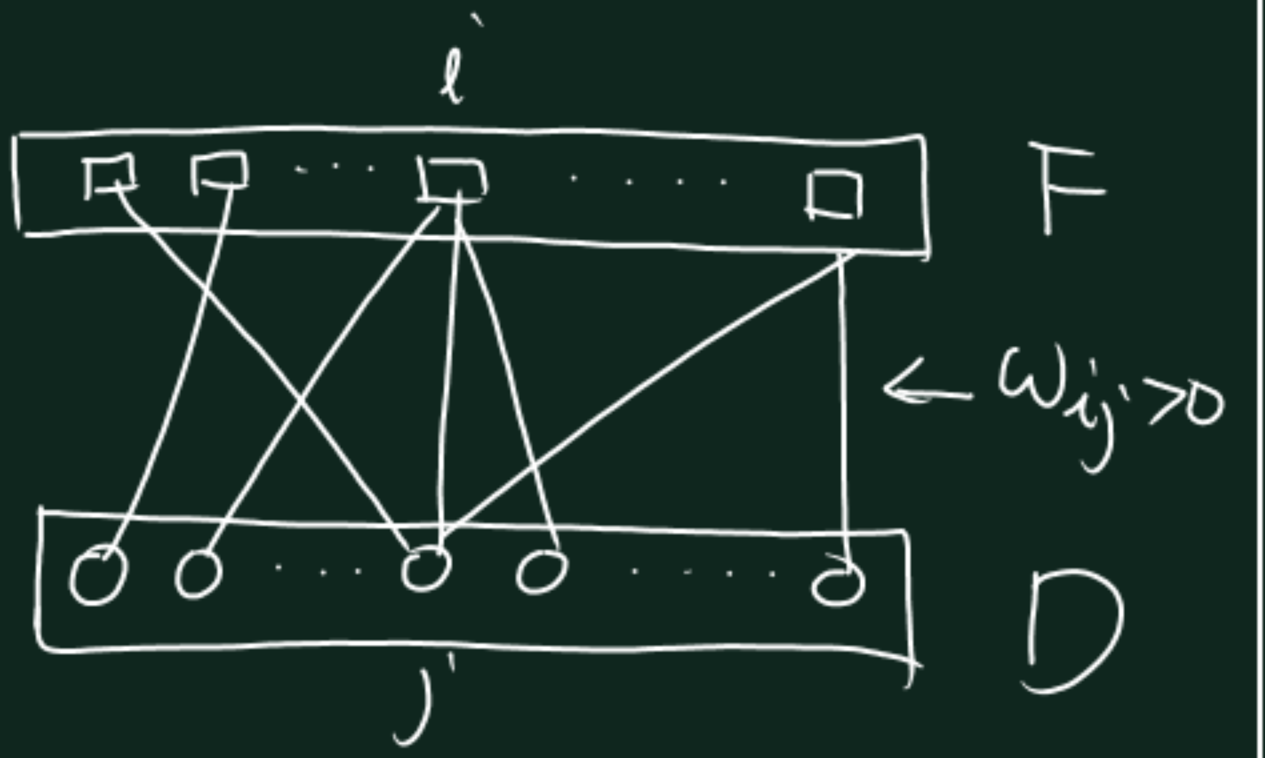
设施 i 称为"暂时开放"

同时，满足 $\boxed{v_j - w_{ij} = c_{ij}}$ 的顾客，称为"连上"

第一阶段结束后，可能会出现某个顾客 j 对若干"暂时开放"的设施支付了 $w_{ij}>0$。我们希望做些调整使得每一位顾客只对其最终连接的设施做贡献。于是有：

第二阶段

图 T



T^2 顶点同 T，边

$$(u,v)\in T^2 \Longleftrightarrow d_T(u,v)\le 2$$

（u,v 或相邻或有一个共同邻点）

H：T^2 由 F_t 导出的子图

F_t："暂时开放"的设施集合

I：H 的极大独立集

也就是说，I 是"暂时开放"设施集合的子集，这些设施在 T 中没有共同的顾客邻点（独立），且不在 I 中的"暂时开放"设施一定与 I 中某个设施有共同的邻点（极大）

I：正式开设的设施，即

$y_i=1,\ i\in I$

下面来分配顾客到 I 中的设施

对任一顾客 j

$$F_j=\{i\in F_t \mid w_{ij}>0\}$$

易知 $F_j\cap I$ 至多有一个设施

(否则 I 不独立

直连

(1) 若 $F_j=\{i\}$，$j \xrightarrow{\text{分配}} i$ $(\phi(j)=i)$

(2) 若 $F_j=\emptyset$，考虑 j 的紧边，若

$\exists\, i'\in I$，(i',j) 是紧边

则 $j \longrightarrow i'$ $(\phi(j)=i')$

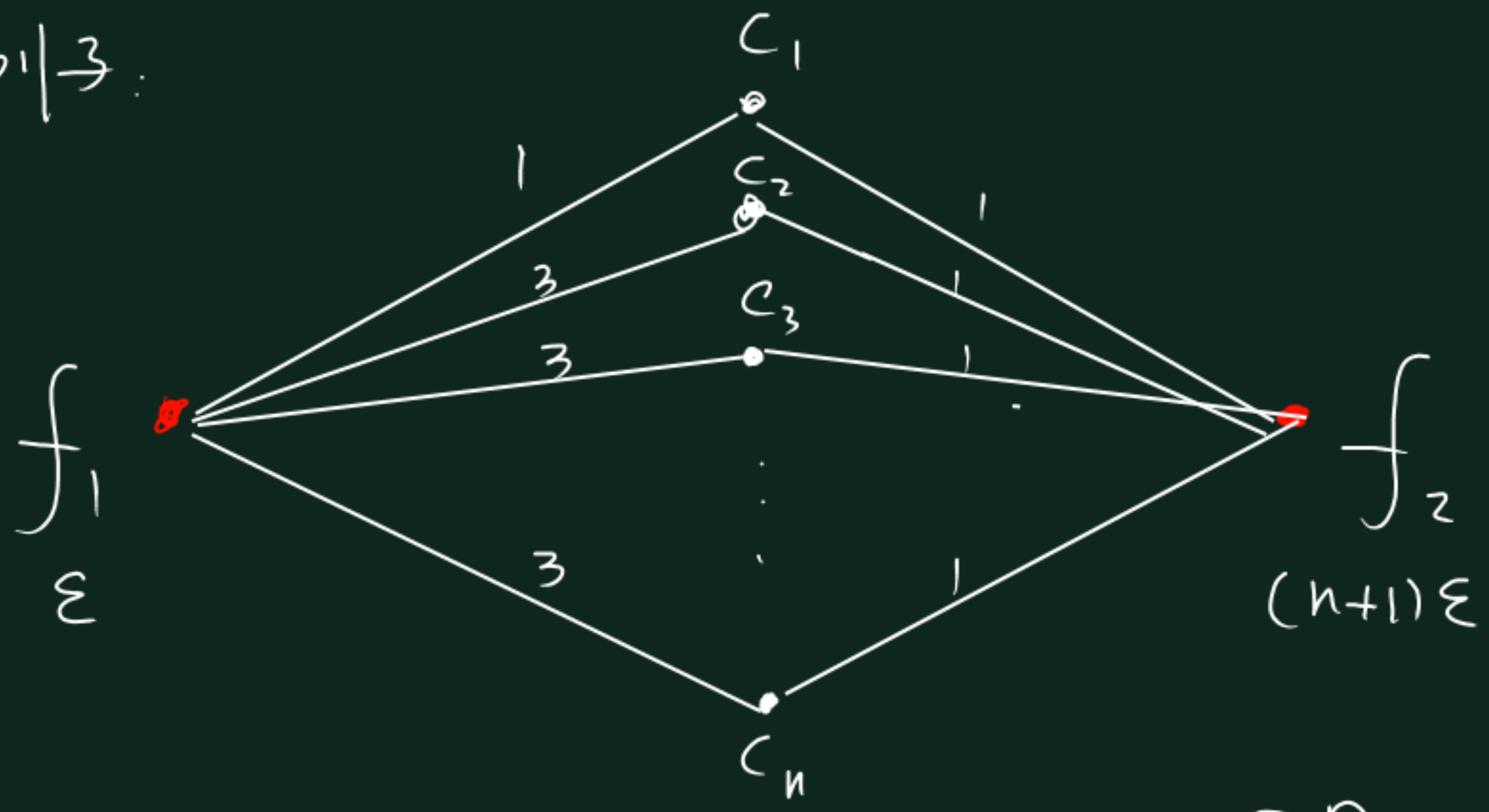
旁连

(3) 否则，j 的所有紧边关联的设施 $\notin I$

设 i' 为 j 第一个连上的设施，设 $i\in I$ 与 i' 在 H 中相邻，$j\longrightarrow i$ $(\phi(j)=i)$

(见引理2中的图)

例3：



$$OPT = (n+1)\varepsilon + n$$

分析：

对顾客 j，$v_j = v_j^f + v_j^c$

$v_j^f \downarrow$ 设施，$v_j^c \downarrow$ 连接

j 没连到 i，$\begin{cases} v_j^f = 0 \\ v_j^c = v_j \end{cases}$

j 直连到 i，$v_j = \underset{\uparrow\, v_j^c}{c_{ij}} + \underset{\uparrow\, v_j^f}{w_{ij}}$

引理1：对 $i \in I$，

$$\boxed{\sum_{j:\,\Phi(j)=i} v_j^f = f_i}$$

证明：i 暂时开设时有

$$\sum_{j:\,(i,j)\text{紧}} w_{ij} = f_i$$

注：没连到 i 的顾客 $w_{ij}=0$

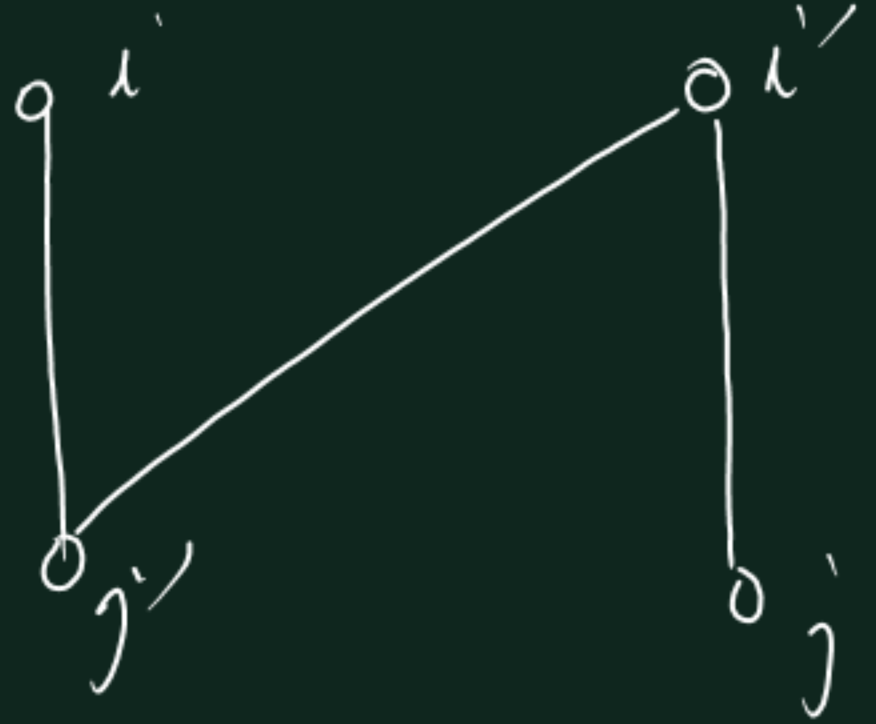
对 i 有贡献的 j $(w_{ij}>0)$

一定是直连

推论: $\sum_{i\in I} f_i = \sum_{j\in D} v_j^f$

引理2: 对间连顾客 j

$\Phi(j)=i$, $\boxed{c_{ij} \le 3 v_j^c}$



定理: 前述原始-对偶算法的近似比为3

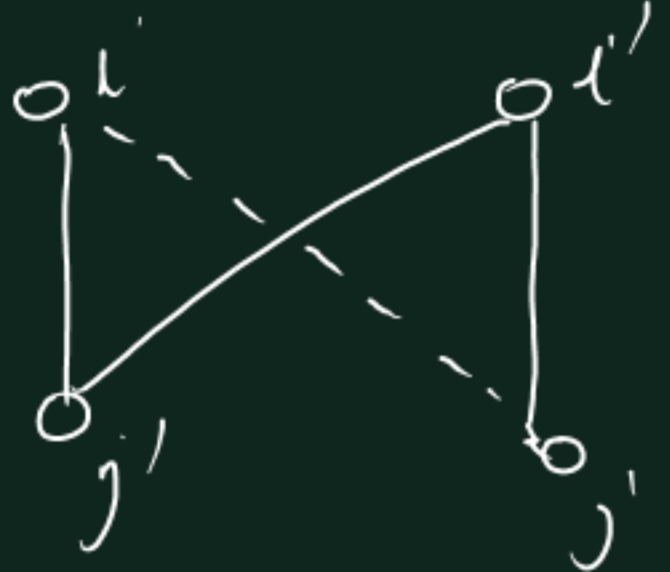
$$\sum_{\substack{i\in F\\ j\in D}} c_{ij} x_{ij} + 3\sum_{i\in F} f_i y_i \le 3\sum_{j\in D} v_j$$

$$\Uparrow$$

$$\sum_{\substack{i\in F\\ j\in D}} c_{ij} x_{ij} \le 3\sum_{j\in D} v_j^c$$

引理2的证明

考虑穷连顾客 j，$\sigma(j) = i$



$c_{ij} \le 3 v_j^c$

利用三角不等式（度量空间下）

j的连接费用

$$\boxed{c_{ij} \le c_{ij'} + c_{i'j'} + c_{i'j}}$$

因为顾客 j' 连上了设施 i 和 i'

顾客 j 连上了设施 i'（图中实线）

故：

$$\boxed{v_{j'}^c \ge c_{ij'}, \quad v_{j'}^c \ge c_{i'j'} \\ v_j^c \ge c_{i'j}}$$

注意 i' 是 j 第一个连上的设施

所以当 v_j 不再提升的时候，

$v_{j'}$ 也不再提升了（设施 i' 已经暂时开放且 j' 对 i' 有贡献 $w_{i'j'} > 0$）

$$\boxed{v_j^c = v_j \ge v_{j'} \ge v_{j'}^c}$$