偏微分方程

预备知识

初值条件

三类边界条件

叠加定理

$$L[u_1] = f_1, L[u_2] = f_2 \to L[u_1 + u_2] = f_1 + f_2$$

二阶线性方程分类和化简

目的：消去混合偏导数

初始二阶线性方程： $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$

- **特征方程**

  $a(\frac{dy}{dx})^2-2b\frac{dy}{dx}+c=0$ 记$\triangle=b^2-ac$

双曲线型($\triangle>0$)

- **解出$\xi(x,y)=C_1$和$\eta(x,y)=C_2$**
- **令$\xi=s+t\quad\eta=s-t$解出s，t**
- **代入原线性方程，可消去混合偏导数**

抛物线型($\triangle=0$)

- **解出$\xi(x,y)=C$**
- **任取与ξ线性无关的$\eta(x,y)$**
- **代入原线性方程即可**

椭圆型($\triangle<0$)

- **解出$\xi(x,y)=s(x,y)+it(x,y)=C$和$\eta(x,y)=s(x,y)-it(x,y)=C$**
- **用s，t代入原方程即可**

傅里叶级数

常微分方程(可参考老师发的习题解答)

- **一阶线性微分方程**
- **常系数二阶线性方程**
- **欧拉方程**
- **幂级数解法**
- **广义幂级数解法**
- **Bessel方程解法**
- **Legendre方程解法**

行波法

行波法过程

- **变量替换**

- **积分**
- **初值条件代入得到特解**

无界弦的自由振动

- **方程形式**

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \quad (-\infty<x<+\infty, t>0) \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \quad (-\infty<x<+\infty) \\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \quad (-\infty<x<+\infty) \end{cases}$$

- **方法**

  变量替换，最后得到混合偏导数为0的式子，再积分

- **公式**

  达朗贝尔公式

  $u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha$

- **变式**

  若初值为$t>\tau$,则作变换$t'=t-\tau>0$

  方程变为：

$$\begin{cases} u_{t't'}=a^2u_{xx} \quad (-\infty<x<+\infty, t'>0) \\ u|_{t'=0}=\varphi(x) \quad (-\infty<x<+\infty) \\ u_{t'}|_{t'=0}=\psi(x) \quad (-\infty<x<+\infty) \end{cases}$$

半无界弦自由振动

- **方程形式**
  - **奇延拓**

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (0<x<+\infty, t>0) \\ u|_{t=0}=\varphi(x) & (0<x<+\infty) \\ u_t|_{t=0}=\psi(x) & (0<x<+\infty) \\ u|_{x=0}=0 \end{cases}$$

  - **偶延拓**

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (0<x<+\infty, t>0) \\ u|_{t=0}=\varphi(x) & (0<x<+\infty) \\ u_t|_{t=0}=\psi(x) & (0<x<+\infty) \\ u_x|_{x=0}=0 \end{cases}$$

- **方法：反射法**
  - **作延拓**

    - **代入方程**
    - **套用达朗贝尔公式**
    - **把x限制在x>0**

- **变形**
    - $u|_{x=0}=l$

      令$v=u-l$
    - $u_x|_{x=0}=l$

      令$v=u-lx$

无界弦强迫振动

- **方程形式**

  $$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) \quad (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u|_{t=0}=\varphi(x) \quad (-\infty<x<+\infty)\\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \quad (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

- **方法**

  叠加原理进行分解，一部分用达朗贝尔公式，另一部分用齐次化原理

- **齐次化原理(*)**

  设u满足

  $$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) \quad (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u|_{t=0}=0 \quad (-\infty<x<+\infty)\\ u_t|_{t=0}=0 \quad (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

  设 $w=w(x,t,\tau)$ w满足

  $$\begin{cases}w_{tt}=a^2w_{xx} \quad (-\infty<x<+\infty,t>\tau)\\ w|_{t=\tau}=0 \quad (-\infty<x<+\infty)\\ w_t|_{t=\tau}=f(x,\tau) \quad (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

  则$u(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$

- **公式**

  Kirchoff公式

  $u=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{2a}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi$

分离变量法

有界弦自由振动及一维热传导

- **方程形式**
  - **有界弦自由振动**

    $$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

  - **一维热传导**

    $$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \quad (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

- **方法（以有界弦自由振动为例）**
  - **分解**

    $u(x,t) = X(x)T(t)$

    $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2T(t)} = -\lambda$

  - **解本征值问题**

    若$\lambda \leq 0$，则只有零解，所以$\lambda > 0$

    $X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$

    由边界值条件可得$c_1 = 0$且$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$

    $X_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi}{l}x$

    同理解出$T_n(t) = a_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi a}{l}t$

  - **叠加、傅里叶级数法确定系数**

    代入初始时刻，求解傅里叶级数

- **变式**
  - **方程内含有一阶偏导数**

    分解方法相同，只不过求解本征值问题时二阶微分方程略复杂

非齐次方程齐次边界条件

- **方程形式**

  $$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t), \quad (0 < x < l, t > 0) \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 \\ v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

- **方法：**
  - **法一：本征族展开法**
    - **确定本征族（以上面的方程为例）**

      $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\frac{n\pi}{l}x$

        - **求$f_n(t)$**

          $f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$ 再利用傅里叶级数求解

        - **柯西公式求解$c_n(t)$**

          $c_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

    - **法二：先齐次化后求解**

      适合常系数非齐次方程,齐次边界条件，零初值情况。

        - **齐次化**

          $$\begin{cases}w_{tt}=a^2w_{xx}, \quad (0<x<l,t>\tau)\\ w|_{x=0}=w|_{x=l}=0\\ w|_{t=\tau}=0, \quad w_t|_{t=\tau}=f(x,\tau)\end{cases}$$

        - **按有界弦自由振动方法求解$w(x,t,\tau)$**

        - **对$w(x,t,\tau)$在0-t上积分即可求得v**

- **变式**

    - **方程和初值都不齐次**

      利用叠加定理分解为两个方程

非齐次边界条件的处理

- **方程形式**

  $$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), \quad (0<x<l,t>0)\\ u|_{x=0}=\mu(t), \quad u|_{x=l}=\nu(t)\\ u|_{t=0}=\varphi(x), \quad u_t|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

- **方法**

  设$v(x,t)=u(x,t)-p(x,t)$

  其中$p(x,t)=\mu(t)+\frac{x}{l}(\nu(t)-\mu(t))$

- **特例（$\mu(t)=A,\nu(t)=B$）**

  令$u(x,t)=v(x,t)+p(x)$

  其中$\begin{cases}a^2p''(x)+f(x)=0\\ p(0)=A,p(l)=B\end{cases}$

  代入方程可同时把方程和边值齐次化

周期边界条件和自然边界条件——圆内温度分布

- **方程形式及边界条件**

  $$\begin{cases}\Delta u=0 \quad (x,y)\in\Omega:x^2+y^2<1\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y) \quad \partial\Omega:x^2+y^2=1\end{cases}$$

- **解法**
  - **极坐标变化**

    $x=rcos\theta \quad y=rsin\theta$

    $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \ \ u(1,\theta)=\varphi(\theta)$
  - **分离变量**

    $u(r,\theta)=R(r)\phi(\theta)$

    $-\frac{r^2R''+rR'}{R}=\frac{\phi''}{\phi}=-\lambda$
  - **求出通解**

    $\phi(\theta)=c_1\cos\sqrt{\lambda}\theta+c_2\sin\sqrt{\lambda}\theta$

    由周期性条件$\phi(\theta+2\pi)=\phi(\theta)$可得$\lambda=n^2$

    用求解欧拉方程方法求解R
  - **用傅里叶级数方法求出系数**
- **公式**

  $u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\tau)+r^2}\mathrm{d}\tau$

分离变量后含有ν阶Bessel方程——柱域问题

- **方程形式**

  分离变量后出现ν阶Bessel方程

  ν阶Bessel方程：$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$

  常见形式：柱域问题

  $$\begin{cases}\Delta u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}=0\\ u|_{r=a}=0, \quad u|_{z=h}=0\\ u|_{z=0}=f(r,\theta)=1-r^2(\text{ 特例 } a=1).\end{cases}$$

  柱体$V:0\leq r\leq a, 0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq z\leq h.$
- **解法**
  - **分离变量**

    $u(r,\theta,h)=R(r)\phi(\theta)H(h)$

    $\frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}=-\frac{H''}{H}=\lambda,$

    $\frac{r^2R''+rR'}{R}-\lambda r^2=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\mu.$

    由圆盘问题中的讨论可知$\mu=n^2$

    可得：$r^2R''+rR'-(\lambda r^2+n^2)R=0$ (1)
  - **求解分量**

- **构造ν阶Bessel方程**

  令$\lambda = -\beta^2$,$x = \beta r$,$R(r) = y(x)$

  代入（1）式可得$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$

- **ν阶Bessel方程通解**

  $y = C_1J_\nu(x) + C_2Y_\nu(x)$ 并且由x=0时y有界，得到$C_2 = 0$

- **求解系数**

  - **Bessel函数的展开**

    $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_nJ_\nu(\beta x)$ 则$C_n = \frac{2}{l^2J_{\nu+1}^2(\beta l)}\int_0^l rf(r)J_\nu(\beta r)dr$

- **变式**

  - **原方程非齐次——齐次化原理**

Legendre方程求解

Legendre方程：$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$

- **解法**

  - **先解n阶Legendre方程**

    n阶Legendre方程：$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$

    设$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_kx^k$

    代入，得到$a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k$

    可设$y = a_0y_0(x) + a_1y_1(x)$

    若n为整数，则y_0或y_1为n次多项式，记为$P_n(x)$,另一个记为$Q_n(x)$

  - **得通解、本征值、本征函数**

  通解:$y = C_1P_n(x) + C_2Q_n(x)$

  本征值:$\lambda_n = n(n+1)$

  本征函数：$\{P_n(x)\}$

积分变换法

Fourier变换及性质

- **变换公式**
- **性质**

  - **线性性质**

    $F[a_1f_1 + a_2f_2] = a_1F[f_1] + a_2F[f_2]$

- **微分性质**

  $F[f'(x)] = i\lambda F[f]$

- **卷积性质**

  $F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2]$
  $F[f_1 \cdot f_2] = \frac{1}{2\pi} F[f_1] * F[f_2]$

- **平移性质**

  $F[f(x-a)] = e^{-i\lambda a} F[f], a \in R$
  $F[e^{i\lambda a} f(x)] = F[f](\lambda - a)$

- **伸缩性质**

  $F[f(kx)] = \frac{1}{|k|} F[f](\frac{x}{k})$

- **乘子性质**

  $F[xf(x)] = i(F[f])'$

- **对称性质**

  $F^{-1}[f] = \frac{1}{2\pi} F[f](-\lambda)$

Fourier变换求解偏微分方程

- **适用条件**

  有定义在R上的变量

- **方法**

  1. **选取定义在R上变量做Fourier变换**
  2. **利用微分性质消去导数，化为常微分方程**
  3. **求解常微分方程**
  4. **求傅里叶逆变换（常用卷积性质）**

Green函数法

- **求解问题**

  Poisson方程边值问题

  $$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \end{cases}$$

- **基础回顾**

  - **高斯公式**

    $$\int_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) d\Omega$$
    $$= \int_{\partial\Omega} \left[P\cos\left(\vec{n}^0, x\right) + Q\cos\left(\vec{n}^0, y\right) + R\cos\left(\vec{n}^0, z\right)\right] dS$$

- **Green公式**

  $\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) dS$

• 求解过程

- **固定M**

  $M(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega$, 记 $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$.

- **求出基本解**

  三维情况：$v = \frac{1}{4\pi r}$

  二维情况：$v = \frac{1}{2\pi} ln\frac{1}{r}$

- **求解Green函数**

  取g为：

  $$g : \begin{cases} \Delta g = 0, \quad (x,y,z) \in \Omega \\ g|_{\partial\Omega} = -\frac{1}{4\pi r} \end{cases}$$ （**三维**）

  $$g : \begin{cases} \Delta g = 0, \quad (x,y) \in \Omega \\ g|_{\partial\Omega} = -\frac{1}{2\pi} ln\frac{1}{r} \end{cases}$$ （**二维**）

  求得G：

  $G = g + \frac{1}{4\pi r}$ （**三维**） $G = g + \frac{1}{2\pi} ln\frac{1}{r}$ （**二维**）

- **求出解**

  $u(\xi,\eta,\zeta) = -\int_\Omega G f d\Omega - \oint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial}{\partial \vec{n}} G dS$

• 求解两类格林函数

- **半空间**

  - $\Omega = R^3_+ = \{(x,y,z) \mid z > 0\}$

    取对称点$M'(\xi,\eta,-\zeta)$ $r' = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}$

    $g = -\frac{1}{4\pi r'}$

  - $\Omega = \{(x,y) \mid y > 0\}$

    取对称点$M'(\xi,-\eta)$ $r' = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}$

    $g = -\frac{1}{2\pi} ln\frac{1}{r'}$

    变式： $\Omega = \{(x,y) \mid x > 0, y > 0\}$

    上半平面格林函数为

    $G_1 = \frac{1}{2\pi} ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} - \frac{1}{2\pi} ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}}$

    用$-x$替代x，得到G_2

    $G = G_1 - G_2$

- **球域**
  - $\Omega = B_a = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < a^2\right\}$

    取球对称点M' ($|OM| \cdot |OM'| = a^2$)

    $g = \frac{a}{4\pi\rho r'}$ 其中$\rho = |OM|$