TSP Path

问题：在度量赋权完全图 $G=(V,E)$ 中求得一条最短哈密顿路

MST 构造算法

(1) 求 G 的 MST，得 T^*

(2) 求 T^* 奇度点（除两点外）的最小权完美匹配 M^*

(3) $T^* \cup M^*$ 给 short-cut 得到 P

分析最优路线 P^*，收缩成只含 T^* 奇度点的路

其长度 $\geq C(M_1) + C(M_2)$

均是去掉两个端点后的完美匹配

$\Longrightarrow C(M^*) \leq \frac{1}{2} C(P^*) \Longrightarrow \frac{3}{2}$-近似

如何求这样的匹配M^*呢？

(1) 枚举所有可能的点对 (v_i, v_j)

起始

$O(n^2)$个匹配中选最好的.

(2) 引入两个虚拟顶点 A 和 B, 连接到所有 T^* 的奇度点, 权重为0 (小于所有的 $c(e)$)

求最小权完美匹配即得.

TSP Path

固定所求H-路的一个端点 s

修正MST松弛算法的第二步

在 T^* 中定义"误"点

- $V \setminus \{s\}$ 中的奇度点，
- s，若其为偶度点

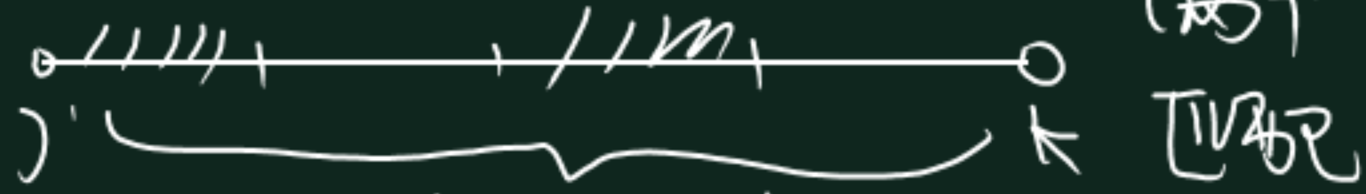
2. 在误点中求除一个顶点外的最小权完美匹配 M^*

注：若 s 是误点，且未被匹配，则 $T^* \cup M^*$ 无奇度点，删去与 s 关联的任一边

分析最优解 P_s^*

T^* 上第一个奇度点、　　最后一个奇度点

① s 不是误点（s 奇度）



② S 是误点（S 在 T^* 中为偶度点）

M_1: $(s, j), \cdots$

M_2 $(j, l), \cdots$

$$C(M_1) + C(M_2) \leq C(P_s^*)$$

$$C(M_1) \geq C(M^*) \qquad C(M_2) \geq C(M^*)$$

TSP Path

固定两端点的最短 H-路 (s-t路)

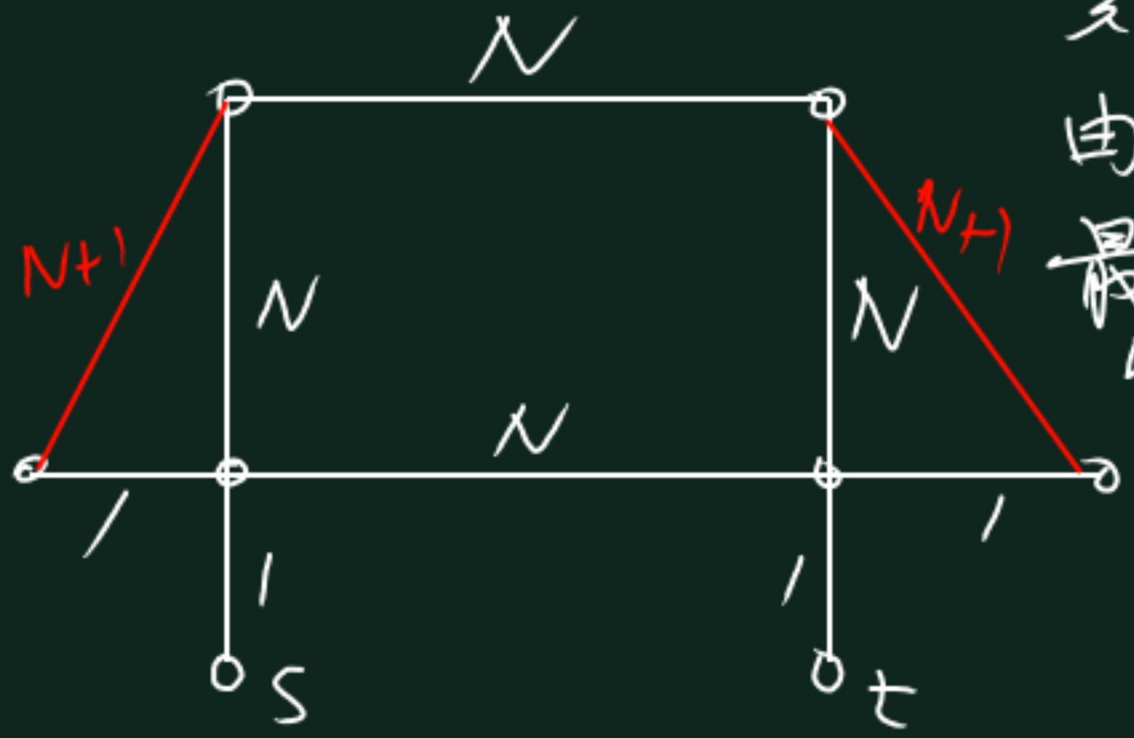
T^*中的误点包括

① $V\setminus\{s,t\}$的奇度点

② $\{s,t\}$中的偶度点

2. 在误点中求最小权完美匹配 M^*

先看一个例子:



其余边权由该图上的最短路长确定.

$c(P^*_{st}) = 3N+6$

$C(P_{st}) = 5N+6$

不再是3/2!

分析: 5/3-近似

思路: $C(T^*)+C(P^*_{st}) \geq 3C(M^*)$

$\Rightarrow C(M^*) \leq \frac{2}{3}C(P^*_{st})$

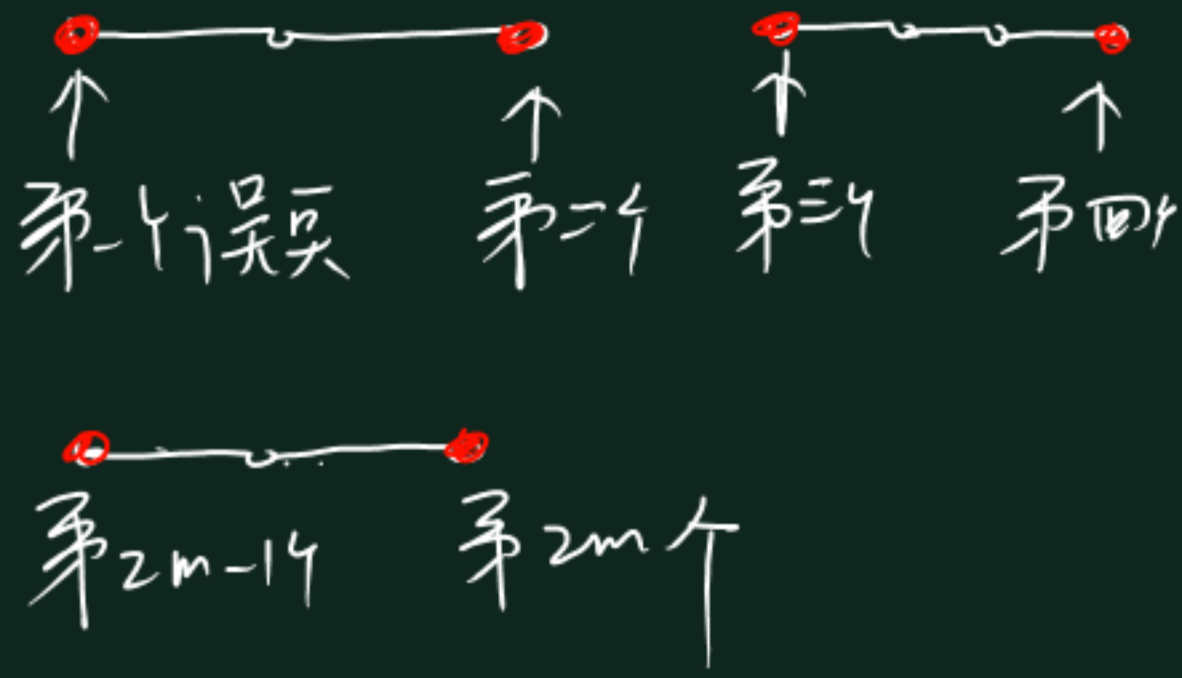
将 T^* 与 P^*_{st} 并在一起得到 Q

T^* 中的奇度点在 Q 中仍是奇度点

共 2m 个误点

将 P^*_{st} 中的点按顺序标号

E_1:



$C(E_1) \geq C(M^*)$

Q\E 是欧拉图

经 short-cut 后成为仅含误点的 H-圈，对应两个匹配

M_1, M_2

有：$C(T^*) + C(P_{st}^*)$

$$\geq C(E_1) + C(M_1) + C(M_2)$$

$$\geq 3C(M^*)$$

$\Longrightarrow$

$$C(P_{st}) \leq C(T^*) + C(M^*)$$
$$\leq 5/3 \cdot C(P_{st}^*)$$

研究进展

$\frac{5}{3}$ Hoogeveen 1991

$\downarrow$

$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ An et al. 2012

$\downarrow$

$\frac{8}{5}$ Sebö 2013

$\downarrow$

$\frac{3}{2}$ Zenklusen 2019

作业：考虑下面的问题，试给出算法并分析

(开放题目)

给定赋权完全图 $G=(V,E)$，$c: E\to R^+$

$e_0\in E$，

(1) 求包含边 e_0 的最小权 H-圈

(2) 求包含边 e_0 的最小权 H-路