第八讲 贪心算法

回顾前面提到的组合优化问题：

(1) 最小生成树（最大权森林）
(2) 最短路径问题
(3) 背包问题
(4) 顶点覆盖、集合覆盖
(5) 旅行商问题
(6) 装箱问题

$\Rightarrow$

E: 基础元素集

c: $E \to R^+$

$\mathcal{F} \subseteq 2^E$

在 $\mathcal{F}$ 中寻找一个元素 X

使其权重最大或最小

其中: $\boxed{c(X) = \sum_{e \in X} c(e)}$

独立系统

定义：一个集合系统 $(E, \mathcal{F})$ 称为独立系统，若

(M1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(M2) 若 $Y \subseteq X \in \mathcal{F}$，则 $Y \in \mathcal{F}$ （关于包含封闭）

独立集：$\mathcal{F}$ 中的元素

基：极大独立集

相关集：$2^E \setminus \mathcal{F}$ 中的元素

圈：极小相关集

对 $X \subseteq E$，包含在 X 中的极大独立集称为 X 的基

- $B \in \mathcal{F}$，$B \subseteq X$
- X 中 $\nexists$ 独立集 $\supset B$

更多的定义

设 $(E,\mathcal{F})$ 为一独立系统，对 $X \subseteq E$，定义 X 的秩

$$r(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X,\ Y \in \mathcal{F}\}$$

（X 中最大独立集所含元素个数）

X 的下秩

$$\rho(X) = \min\{|Y|,\ Y\text{是}X\text{中的基}\}$$

（X 中最小的极大独立集所含元素个数）

$(E,\mathcal{F})$ 的秩商定义为：

$$q(E,\mathcal{F}) = \min_{X \subseteq E} \frac{\rho(X)}{r(X)}$$

$$q(E,\mathcal{F}) \le 1$$

两个基本优化问题

极大化问题

Input: 独立系统 $(E, \mathcal{F})$

$c: E \to R^+$

Output: 独立集 $X \in \mathcal{F}$，使得 $c(X)$ 最大

（权重最大的独立集）

极小化问题

Input: 独立系统 $(E, \mathcal{F})$

$c: E \to R^+$

Output: 基 B，使得 $c(B)$ 最小

（权重最小的极大独立集）

若干组合优化问题(I)

<1> 最小生成树问题

Input: 连通无向图 $G=(V,E)$

$C: E(G) \longrightarrow R^+$

Output: 权重最小的生成树

独立系统: $E = E(G)$

$C: E \longrightarrow R^+$

$\mathcal{F} = \{F \subseteq E \mid F \text{是森林}\}$

<2> 最短路问题

Input: 有向(或无向图) $G=(V,E)$

$C: E(G) \longrightarrow R^+$

$s, t \in V(G)$

Output: 一条 $s-t$ 最短路

独立系统: $E = E(G)$

$C: E \longrightarrow R^+$

$\mathcal{F} = \{F \subseteq E \mid F \text{是一条 } s-t \text{ 路的边子集}\}$

若干组合优化问题(Ⅲ)

(3) 顶点覆盖问题

Input: 无向图 $G=(V,E)$

$w: V \to R^+$

Output: 权重最小的顶点覆盖

独立系统: $E = V$

$w: E \to R^+$

$\mathcal{F} = \{ U \subseteq V \mid U$ 是 G 的某个极小顶点覆盖的子集 $\}$

(4) 最大权匹配问题

Input: 无向图 $G=(V,E)$

$c: E(G) \to R^+$

Output: 权重最大的边集，其任意两边无公共顶点

独立系统: $E = E(G)$

$c: E \to R^+$

$\mathcal{F} = \{ M \subseteq E \mid M$ 中的边无公共顶点 $\}$

若干组合优化问题(III)

(5) 装箱问题

Input: $\{a_1, \cdots, a_n\}$, $0 < a_i \le 1$,

若干单位容量的箱子

Output: Packing 使用最少数目的箱子

换一种说法：

设单个箱子的可行"装填方案"

为 M 个， $\underbrace{\{t_1, \cdots, t_M\}}_{\text{pattern}}$

任一个装箱的解由若干patterns

组成，使得每一个item一定出现

在某个选中的pattern中，该解

记作 configuration

独立系统： $E = \{t_1, \cdots, t_M\}$

$c(t_i) = 1$, $i = 1, \cdots, M$

$\mathcal{F} = \{ P \mid P$是某个configuration的子集$\}$

课堂练习

写出下列问题的独立系统：

(6) 背包问题

(7) 旅行商问题

若干组合优化问题（IV）

(6) 背包问题

Input: 背包容量 C，n 个物品

$\{(S_i, V_i), i=1,\cdots,n\}$

Output: 物品子集 $I \subseteq \{1,2,\cdots,n\}$

使得 $\sum_{i\in I} S_i \le C$，$\sum_{i\in I} V_i$ 最大

独立系统：$E=\{1,2,\cdots,n\}$

$C: i\in E \longrightarrow V_i$

$\mathcal{F}=\{ I \subseteq \{1,2,\cdots,n\} \mid \sum_{i\in I} S_i \le C\}$

(7) TSP

Input: 无向图 $G=(V,E)$

$c: E(G) \to R^+$

Output: 权重最小的哈密顿圈

独立系统：$E=E(G)$

$c: E \to R^+$

$\mathcal{F}=\{ F\subseteq E \mid F$ 是某个 H-圈的子集 $\}$