

第二讲

线性规划的单纯形法

线性规划 (LP) 基本模型

$$\max \quad z = c^T x$$

$$s. t. \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

线性规划的基本原理

极点 γ :

对于凸集中的点 γ , γ 不是凸集中任意两个不同点的严格凸组合

$$\max \quad z = c^T x$$



$$s.t. \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

z 的极大值一定能在极点处取得



假设 $r(A) = m$ (行满秩)

$$A = (A_B \quad A_N)$$

基矩阵 非基矩阵

$$x = (x_B \quad x_N)$$

基变量 非基变量

$$\begin{cases} x_B = A_B^{-1}b \geq 0 \\ x_N = 0 \end{cases} \quad \text{基可行解}$$

基本定理： 线性规划的基可行解是其极点，
反之亦然

基本定理： 线性规划的基可行解是其极点，
反之亦然

证明：

极点 \Rightarrow 基可行解：

基本定理： 线性规划的基可行解是其极点，
反之亦然

证明：

极点 \Rightarrow 基可行解：

若 x 不是基可行解，则 $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$
 a_1, \dots, a_k

$$x_i > 0, i = 1, \dots, k$$

线性相关

基本定理： 线性规划的基可行解是其极点，
反之亦然

证明：

极点 \Rightarrow 基可行解：

若 x 不是基可行解，则 $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$
 a_1, \dots, a_k

$$x_i > 0, i = 1, \dots, k$$

线性相关

则存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 不全为零，使得 $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$

基本定理： 线性规划的基可行解是其极点，
反之亦然

证明：

极点 \Rightarrow 基可行解：

若 x 不是基可行解，则 $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$
 a_1, \dots, a_k

$$x_i > 0, i = 1, \dots, k$$

线性相关

则存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 不全为零，使得 $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$

取 $x' = x + \varepsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$

$x'' = x - \varepsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$

基本定理： 线性规划的基可行解是其极点，
反之亦然

证明：

极点 \Rightarrow 基可行解：

若 x 不是基可行解，则 $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$
 a_1, \dots, a_k

$$x_i > 0, i = 1, \dots, k$$

线性相关

则存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 不全为零，使得 $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$

取 $x' = x + \varepsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$

$$x'' = x - \varepsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$$

$$x \neq x' \neq x'' \neq x$$

基本定理：线性规划的基可行解是其极点， 反之亦然

证明：

极点 \Rightarrow 基可行解：

若 x 不是基可行解，则 $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$
 a_1, \dots, a_k

$$x_i > 0, i = 1, \dots, k$$

线性相关

则存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 不全为零，使得 $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$

取 $x' = x + \varepsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$

$$x'' = x - \varepsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$$

$$x \neq x' \neq x'' \neq x$$

$$\begin{aligned} Ax' &= Ax + \varepsilon(A(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)^T) \\ &= Ax + \varepsilon(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = Ax = b \end{aligned}$$

$$Ax'' = Ax' = Ax = b$$

基本定理：线性规划的基可行解是其极点， 反之亦然

证明：

极点 \Rightarrow 基可行解：

若 x 不是基可行解，则 $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$
 a_1, \dots, a_k

$$x_i > 0, i = 1, \dots, k$$

线性相关

则存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 不全为零，使得 $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$

取 $x' = x + \varepsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$

$$x'' = x - \varepsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$$

$$x \neq x' \neq x'' \neq x$$

$$\begin{aligned} Ax' &= Ax + \varepsilon(A(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)^T) \\ &= Ax + \varepsilon(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = Ax = b \end{aligned}$$

$$Ax'' = Ax' = Ax = b$$

x 是 x' 和 x'' 凸组合中的点，不是极点，矛盾。

基可行解 \Rightarrow 极点:

基可行解 \Rightarrow 极点:

若 x 不是极点, 则可在可行域中找到到不同的两点

$$x' = (x'_1, \dots, x'_n)^T, \quad x'' = (x''_1, \dots, x''_n)^T$$

使得 $x = \lambda x' + (1 - \lambda)x''$ $0 < \lambda < 1$;

基可行解 \Rightarrow 极点:

若 x 不是极点, 则可在可行域中找到到不同的两点

$$x' = (x'_1, \dots, x'_n)^T, \quad x'' = (x''_1, \dots, x''_n)^T$$

使得 $x = \lambda x' + (1 - \lambda)x''$ $0 < \lambda < 1$;

$$x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

a_1, \dots, a_k 

$$x_i > 0, i = 1, \dots, k$$

$$j > k, x'_j = x''_j = x_j = 0$$

基可行解 \Rightarrow 极点:

若 x 不是极点, 则可在可行域中找到到不同的两点

$$x' = (x'_1, \dots, x'_n)^T, \quad x'' = (x''_1, \dots, x''_n)^T$$

使得 $x = \lambda x' + (1 - \lambda)x''$ $0 < \lambda < 1$;

$$x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

$$a_1, \dots, a_k$$

$$x_i > 0, i = 1, \dots, k$$

$$j > k, x'_j = x''_j = x_j = 0$$

由于 x' 和 x'' 是可行解, 所以有 $\sum_{j=1}^k a_j x'_j = b, \sum_{j=1}^k a_j x''_j = b$,
二者相减, 得 $\sum_{j=1}^k a_j (x'_j - x''_j) = 0$;

基可行解 \Rightarrow 极点:

若 x 不是极点, 则可在可行域中找到到不同的两点

$$x' = (x'_1, \dots, x'_n)^T, \quad x'' = (x''_1, \dots, x''_n)^T$$

使得 $x = \lambda x' + (1 - \lambda)x''$ $0 < \lambda < 1$;

$$x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

$$a_1, \dots, a_k$$

$$x_i > 0, i = 1, \dots, k$$

$$j > k, x'_j = x''_j = x_j = 0$$

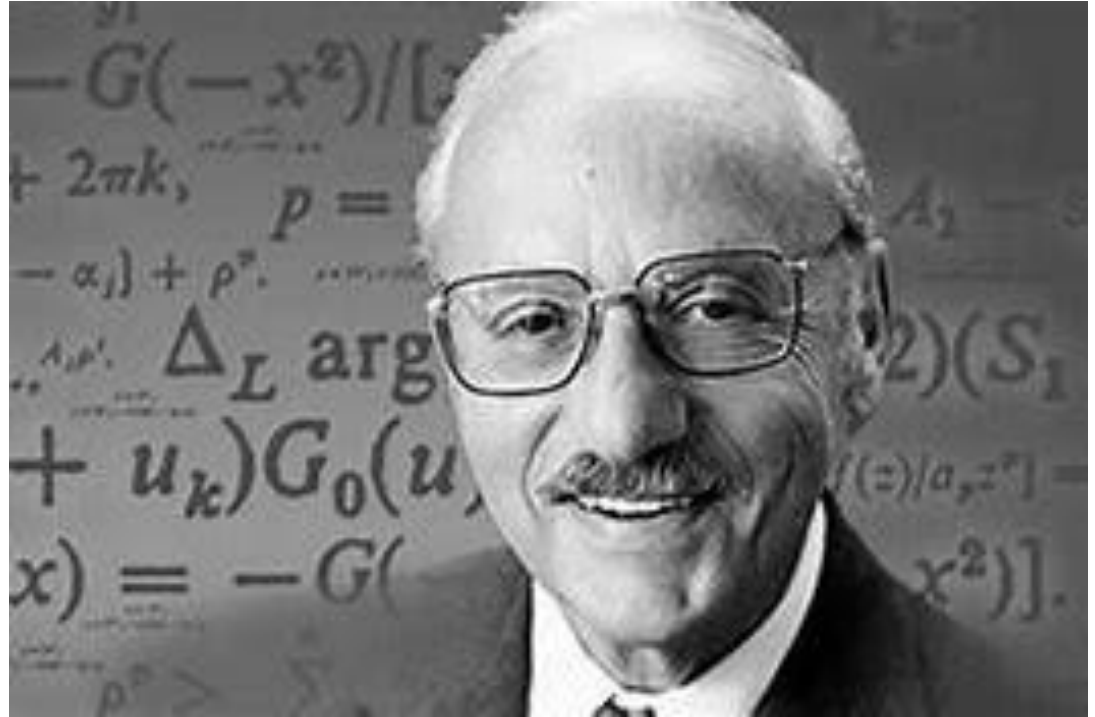
由于 x' 和 x'' 是可行解, 所以有 $\sum_{j=1}^k a_j x'_j = b, \sum_{j=1}^k a_j x''_j = b$,
二者相减, 得 $\sum_{j=1}^k a_j (x'_j - x''_j) = 0$;

x' 和 x'' 不相等, 所以 $x'_j - x''_j$ 不全为零, a_1, \dots, a_k 线性相关;

故 $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ 不是基可行解。

单纯形法 (Simplex Method 1947)

George Dantzig
(1914-2004)



单纯形法

例:

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

单纯形法

例:

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



标准
形式

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

单纯形法

例:

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



标准
形式

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

构造初始基本可行解 $x^{(0)} = (0, 0, 3, 1)^T$, $z = 0$

单纯形法

例:

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



标准
形式

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

构造初始基本可行解 $x^{(0)} = (0, 0, 3, 1)^T$, $z = 0$

典则形式: 用非基变量表示基变量与目标函数

单纯形法

例:

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



标准
形式

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

构造初始基本可行解 $x^{(0)} = (0, 0, 3, 1)^T$, $z = 0$

典则形式: 用非基变量表示基变量与目标函数

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 1 - x_2 \\ z = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

单纯形法

例:

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



标准
形式

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

构造初始基本可行解 $x^{(0)} = (0, 0, 3, 1)^T$, $z = 0$

典则形式: 用非基变量表示基变量与目标函数

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_1 - x_2 & x_2 \text{ 入基} \\ x_4 = 1 - x_2 & x_1 \text{ 不变} \\ z = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

单纯形法

例:

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



标准
形式

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

构造初始基本可行解 $x^{(0)} = (0, 0, 3, 1)^T$, $z = 0$

典则形式: 用非基变量表示基变量与目标函数

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_3 = 3 - x_1 - x_2 & x_2 \text{ 入基} \\ x_4 = 1 - x_2 & x_1 \text{ 不变} \\ z = x_1 + 2x_2 & x_4 \text{ 出基} \end{array} \right. \quad x^{(1)} = (0, 1, 2, 0)^T, \quad z = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_3 = 3 - x_1 - x_2 & x_2 \text{入基} \\ x_4 = 1 - x_2 & x_1 \text{不变} \\ z = x_1 + 2x_2 & x_4 \text{出基} \end{array} \right. \quad x^{(1)} = (0, 1, 2, 0)^T, \quad z = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_3 = 3 - x_1 - x_2 & x_2 \text{入基} \\ x_4 = 1 - x_2 & x_1 \text{不变} \\ z = x_1 + 2x_2 & x_4 \text{出基} \end{array} \right. \quad x^{(1)} = (0, 1, 2, 0)^T, \quad z = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_2 = 1 - x_4 & x_1 \text{入基} \\ x_3 = 2 - x_1 + x_4 & x_2 \text{不变} \\ z = x_1 - 2x_4 + 2 & x_3 \text{出基} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_3 = 3 - x_1 - x_2 & x_2 \text{入基} \\ x_4 = 1 - x_2 & x_1 \text{不变} \\ z = x_1 + 2x_2 & x_4 \text{出基} \end{array} \right. \quad x^{(1)} = (0, 1, 2, 0)^T, \quad z = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_2 = 1 - x_4 & x_1 \text{入基} \\ x_3 = 2 - x_1 + x_4 & x_2 \text{不变} \\ z = x_1 - 2x_4 + 2 & x_3 \text{出基} \end{array} \right. \quad x^{(2)} = (2, 1, 0, 0)^T, \quad z = 4$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_3 = 3 - x_1 - x_2 & x_2 \text{入基} \\ x_4 = 1 - x_2 & x_1 \text{不变} \\ z = x_1 + 2x_2 & x_4 \text{出基} \end{array} \right. \quad x^{(1)} = (0, 1, 2, 0)^T, \quad z = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_2 = 1 - x_4 & x_1 \text{入基} \\ x_3 = 2 - x_1 + x_4 & x_2 \text{不变} \\ z = x_1 - 2x_4 + 2 & x_3 \text{出基} \end{array} \right. \quad x^{(2)} = (2, 1, 0, 0)^T, \quad z = 4$$

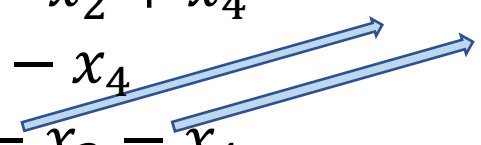
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 - x_2 + x_4 \\ x_2 = 1 - x_4 \\ z = 4 - x_3 - x_4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_3 = 3 - x_1 - x_2 & x_2 \text{入基} \\ x_4 = 1 - x_2 & x_1 \text{不变} \\ z = x_1 + 2x_2 & x_4 \text{出基} \end{array} \right. \quad x^{(1)} = (0, 1, 2, 0)^T, \quad z = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_2 = 1 - x_4 & x_1 \text{入基} \\ x_3 = 2 - x_1 + x_4 & x_2 \text{不变} \\ z = x_1 - 2x_4 + 2 & x_3 \text{出基} \end{array} \right. \quad x^{(2)} = (2, 1, 0, 0)^T, \quad z = 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 - x_2 + x_4 \\ x_2 = 1 - x_4 \\ z = 4 - x_3 - x_4 \end{array} \right.$$

检验数均小于等于零,
此时达到最优解



$$\left\{ \begin{array}{ll} x_3 = 3 - x_1 - x_2 & x_2 \text{入基} \\ x_4 = 1 - x_2 & x_1 \text{不变} \\ z = x_1 + 2x_2 & x_4 \text{出基} \end{array} \right. \quad x^{(1)} = (0, 1, 2, 0)^T, \quad z = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_2 = 1 - x_4 & x_1 \text{入基} \\ x_3 = 2 - x_1 + x_4 & x_2 \text{不变} \\ z = x_1 - 2x_4 + 2 & x_3 \text{出基} \end{array} \right. \quad x^{(2)} = (2, 1, 0, 0)^T, \quad z = 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 - x_2 + x_4 \\ x_2 = 1 - x_4 \\ z = 4 - x_3 - x_4 \end{array} \right.$$

检验数均小于等于零，
此时达到最优解

$$x^{(*)} = (2, 1, 0, 0)^T, \quad z = 4$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \quad A = (A_B \quad A_N)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \quad A = (A_B \quad A_N)$$

$$x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nx_N$$

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T A_B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1}A_N)x_N$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \quad A = (A_B \quad A_N)$$

典
则
形
式

$$\begin{cases} x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nx_N \\ c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T A_B^{-1}b + \underbrace{(c_N^T - c_B^T A_B^{-1}A_N)}_{\text{检验数}} x_N \end{cases}$$

检验数

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \quad A = (A_B \quad A_N)$$

典
则
形
式

$$\begin{cases} x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nx_N \\ c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T A_B^{-1}b + \underbrace{(c_N^T - c_B^T A_B^{-1}A_N)}_{\text{检验数}} x_N \end{cases}$$

$$\bar{A} = A_B^{-1}A_N = (\bar{a}_{ij})_{m \times (n-m)}$$

检验数

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \quad A = (A_B \quad A_N)$$

典
则
形
式

$$\begin{cases} x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nx_N \\ c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T A_B^{-1}b + \underbrace{(c_N^T - c_B^T A_B^{-1}A_N)}_{\text{检验数}} x_N \end{cases}$$

$$\bar{A} = A_B^{-1}A_N = (\bar{a}_{ij})_{m \times (n-m)}$$

检验数

非基变量 $x_j (j = m + 1, \dots, n)$ 的检验数 $\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i \bar{a}_{ij}$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \quad A = (A_B \quad A_N)$$

典则形式

$$\begin{cases} x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nx_N \\ c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T A_B^{-1}b + \underbrace{(c_N^T - c_B^T A_B^{-1}A_N)}_{\text{检验数}} x_N \end{cases}$$

$$\bar{A} = A_B^{-1}A_N = (\bar{a}_{ij})_{m \times (n-m)}$$

检验数

非基变量 $x_j (j = m + 1, \dots, n)$ 的检验数 $\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i \bar{a}_{ij}$

若 $\sigma_j \leq 0 (j = m + 1, \dots, n)$, 则 $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ 为最优解;

若 $\exists \sigma_j > 0$ 且 $\bar{a}_{ij} \leq 0, \forall i = 1, \dots, m$, 则最优值无限大。

	c_B	c_N	
x_B	A_B	A_N	b



检验数

目标值相反数

	0	$c_N - c_B^T A_B^{-1} A_N$	$-c_B^T A_B^{-1} b$
x_B	$I_{m \times m}$	$A_B^{-1} A_N$	$A_B^{-1} b$

	c_B	c_N	
x_B	A_B	A_N	b



	检验数		目标值相反数
	0	$c_N - c_B^T A_B^{-1} A_N$	$-c_B^T A_B^{-1} b$
x_B	$I_{m \times m}$	$A_B^{-1} A_N$	$A_B^{-1} b$

$$x_i + \bar{a}_{ij}x_j = \bar{b}_i$$

$$\min_{\bar{a}_{ij} > 0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} \text{ 对应的 } i \text{ 出基}$$

例:

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$s. t. \quad x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



标准
形式

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

$$s. t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

	1	2	0	0	
x_3	1	1	1	0	3
x_4	0	1	0	1	1

例:

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

$$s. t. \quad x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



标准
形式

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

$$s. t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

	1	2	0	0	
x_3	1	1	1	0	3
x_4	0	1	0	1	1



	1	0	0	-2	-2
x_3	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	1

例:

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



标准
形式

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

	1	2	0	0	
x_3	1	1	1	0	3
x_4	0	1	0	1	1



	1	0	0	-2	-2
x_3	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	1



	0	0	-1	-1	-4
x_1	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	1

例:

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



标准
形式

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

	1	2	0	0	
x_3	1	1	1	0	3
x_4	0	1	0	1	1



	1	0	0	-2	-2
x_3	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	1



	0	0	-1	-1	-4
x_1	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	1



$$x^{(*)} = (2, 1, 0, 0)^T, \quad z = 4$$

练习题：求解问题

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & z = -x_2 + 2x_3 \\ \text{s. t.} & x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ & x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ & x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ & x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5 \end{array} \right.$$

初始可行解-两阶段法

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m \bar{x}_i \\ \text{s.t.} & Ax + \bar{x} = b \\ & x, \bar{x} \geq 0 \end{array}$$

初始可行解-两阶段法

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m \bar{x}_i \\ \text{s.t.} & Ax + \bar{x} = b \\ & x, \bar{x} \geq 0 \end{array}$$

- 若 $\min \sum_{i=1}^m \bar{x}_i = 0$, 则后者得到的解是原问题的一个可行解
- 若 $\min \sum_{i=1}^m \bar{x}_i > 0$, 则原问题无解