贪心算法

极大化问题

Best-In (优胜)法

(1) $c(e_1) \geq c(e_2) \geq \cdots \geq c(e_n)$

(2) Set $F = \phi$

(3) For $i=1$ to n do

oracle

If $\boxed{F \cup \{e_i\} \in \mathcal{F}}$ set

$F = F \cup \{e_i\}$

极小化问题

Worst-out (劣汰法)

(1) $c(e_1) \geq c(e_2) \geq \cdots \geq c(e_n)$

(2) Set $F = E$

(3) For $i=1$ to n do

oracle

If $F \setminus \{e_i\}$ 含"基" 则

$F = F \setminus \{e_i\}$

极大化问题的Best In算法

定理1：（Jenkyns, 1976，Korte and Hausmann, 1978）

设 $(E, \mathcal{F})$ 为一个独立系统，$c: E \to R^+$，记

$G(E, \mathcal{F}, c)$ 为 Best-In 的目标函数值

$OPT(E, \mathcal{F}, c)$ 为最优目标函数值，则

$$\boxed{q(E, \mathcal{F}) \le \frac{G(E, \mathcal{F}, c)}{OPT(E, \mathcal{F}, c)} \le 1}$$，对 $\forall c$ 成立

且 $\exists c$ 使得下界可以达到（tight）.

证明: $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$

$c(e_1)\geq c(e_2)\geq\cdots\geq c(e_n)\geq 0$

G_n: Best-In 的解

O_n: 最优解

$E_j=\{e_1,e_2,\cdots,e_j\}$

$G_j=G_n\cap E_j$

$O_j=O_n\cap E_j$

$j=1,2,\cdots,n$

则: $C(G_n)=\sum_{j=1}^{n}(|G_j|-|G_{j-1}|)c(e_j)$

$c(e_{n+1})=0$

$G_0=\phi$

$=\sum_{j=1}^{n}|G_j|(c(e_j)-c(e_{j+1}))$

G_j: E_j上的极大独立集

$\geq\sum_{j=1}^{n}\rho(E_j)(c(e_j)-c(e_{j+1}))$

$\geq g(E,\mathcal{F})\sum_{j=1}^{n}r(E_j)(c(e_j)-c(e_{j+1}))$

$\geq g(E,\mathcal{F})\sum_{j=1}^{n}|O_j|(c(e_j)-c(e_{j+1}))$

$=g(E,\mathcal{F})\sum_{j=1}^{n}(|O_j|-|O_{j-1}|)c(e_j)$

$=g(E,\mathcal{F})\cdot C(O_n)$

实例: 设$\mathcal{F}\subseteq E$上的两个基B_1,B_2

达到 $|B_1|/|B_2|=g(E,\mathcal{F})$

令 $c(e)=1,\ e\in F;\ c(e)=0,\ e\notin F$

* B_1的元素排在前面……

极小化问题的Worst-Out算法

定理2：（Korte and Monma, 1979）

设 $(E, \mathcal{F})$ 是一个独立系统，

$c: E \to R^+$

设 $G(E,\mathcal{F},c)$ 为 Worst-out 算法的目标函数值，$OPT(E,\mathcal{F},c)$ 为最优值

则

$$1 \le \frac{G(E,\mathcal{F},c)}{OPT(E,\mathcal{F},c)} \le \max_{F\subseteq E} \frac{|F|-\rho^*(F)}{|F|-r^*(F)}$$

对 $\forall c$ 成立，其中 ρ^*, r^* 为对偶独立系统的下秩和秩函数，且 $\exists c$ 使上界是紧的。

? 若将 Best-In 用于极小化问题

Worst-Out 用于极大化问题

考虑下面两个问题

(1) 极小顶点覆盖的最大权问题

权重最大的顶点覆盖 $\bar{V}$，$\bar{V}$ 去掉任何顶点将不再是顶点覆盖

(2) 极大"顶点独立集"的最小权问题

权重最小的"顶点独立集"，增加任何顶点都不再是独立集

独立系统的对偶

定义：独立系统 $(E,\mathcal{F})$ 的对偶 $(E,\mathcal{F}^*)$ 为

$$\mathcal{F}^*=\{F\subseteq E \mid \exists\,(E,\mathcal{F}) \text{ 的基 } B,\text{ 使得 } F\cap B=\phi\}$$

$(E,\mathcal{F}^*)$ 显然也是一个独立系统

结论：$(E,\mathcal{F}^{**})=(E,\mathcal{F})$

证明：

$F\in\mathcal{F}^{**}\iff \exists\,(E,\mathcal{F}^*)$ 的基 B^*，$F\cap B^*=\phi$

$\iff \exists\,(E,\mathcal{F})$ 的基 B，

$$F\cap(E\setminus B)=\phi$$

$\iff \exists\,(E,\mathcal{F})$ 的基 B，$F\subseteq B$

$\iff F\in\mathcal{F}$

课堂讨论

- 背包问题的 Best-In 算法
  - 当所有物品的价值相同
  - 当所有物品的尺寸相同
- 最大权匹配问题的 Best-In 算法

- 最小生成树问题的 Worst-Out 算法

秩商的估计式 (I)

定理 (Hausmann, Jenkyns, Korte, 1980)

设 $(E,\mathcal{F})$ 为一独立系统。若 $\forall A\in\mathcal{F}$ and $e\in E$，$A\cup\{e\}$ 至多含 p 个圈，则 $q(E,\mathcal{F})\geq 1/p$

证明：$\forall F\subseteq E$，J，K 为 F 的两个基，只需证 $\boxed{|J|/|K|\geq 1/p}$

设 $J\setminus K=\{e_1,\cdots,e_t\}$

构造 $\underbrace{\boxed{K_0=K},\ K_1,\ K_2,\cdots,K_t}_{J\cup K\text{ 的独立集}}$

对 $i=0,1,\cdots,t-1$

$K_i\cup\{e_{i+1}\}$ 至多含 $\underline{p\text{ 个圈}}$

含 $K_i\setminus J$ 中的元

故 $\exists\ X\subseteq K_i\setminus J$，$|X|\leq p$ 且

$$\underbrace{(K_i\setminus X)\cup\{e_{i+1}\}}_{\text{记为 }K_{i+1}}\in\mathcal{F}$$

可见 $J\subseteq K_t$，J 是 $F\supseteq J\cup K$ 的基

所以 $\boxed{J=K_t}$

$$|K\setminus J|=\sum_{i=1}^{t}|K_{i-1}\setminus K_i|\leq p\cdot t$$

$$=p|J\setminus K|$$

得证

利用前面的对偶估计式
再次分析如下问题

---

(1) 最小生成树（最大权森林）

(2) 最大权匹配问题