拟阵（Matroid）

定义：满足下列条件的独立系统$(E,\mathcal{F})$称为拟阵：

(M_1) $\phi\in\mathcal{F}$

(M_2) 若 $Y\subseteq X\in\mathcal{F}$，则$Y\in\mathcal{F}$

(M_3) 若 $X,Y\in\mathcal{F}$，且$|X|>|Y|$
则存在$e\in X\setminus Y$，使得
$Y\cup\{e\}\in\mathcal{F}$

更多等价定义

(M_3')：若 $X,Y\in\mathcal{F}$，$|X|=|Y+1|$
则 $\exists\, e\in X\setminus Y$，$Y\cup\{e\}\in\mathcal{F}$

(M_3'') 对 $\forall F\subseteq E$，F上的基有相同的元素个数

$(M_3'')\Rightarrow(M_3)$：对 $X,Y\in\mathcal{F}$，$|X|>|Y|$
Y不可能是$X\cup Y$的基，故
Y可以从$X\setminus Y$中扩充

拟阵(Matroid)

由 (M_3'') 知:

- △ 拟阵的秩商为 1
- △ 拟阵的贪心算法 Best-In 是最优的

Worst-Out 也是最优的

定理: 拟阵的对偶也是拟阵

且对 $F \subseteq E$, 有:

$$r^*(F) = |F| + r(E \setminus F) - r(E)$$

r^*, r 分别是 $(E, \mathcal{F}^*)$ 和 $(E, \mathcal{F})$ 的秩函数

拟阵的例子

(1) $E=\{$某个矩阵的所有列向量$\}$

$\mathcal{F}=\{F\subseteq E \mid F$中的向量线性无关$\}$

(2) E: 有限个元素的集合

k: 非负整数

$\mathcal{F}=\{F\subseteq E \mid |F|\leq k\}$

(3) E: 无向图$G=(V,E)$的边集

$\mathcal{F}=\{F\subseteq E \mid (V(G),F)$是森林$\}$

(3)的证明:

设F_1和F_2为两个森林, $|F_1|>|F_2|$

若$\forall e\in F_1\setminus F_2$, $F_2\cup\{e\}$含有圈

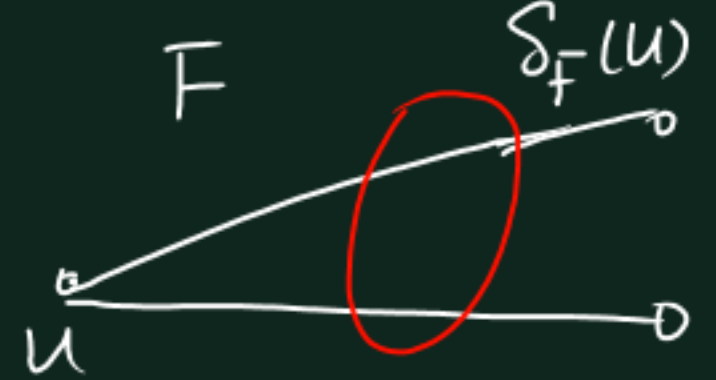
知$e=\{u,v\}$的两个顶点在F_2中属于同一分支. 所以F_2的分支数$\leq F_1$的分支数, 矛盾

(4) 给定无向图 $G=(V, E)$ 及其一个顶点独立集 S（S中的任两点不相邻），下面的独立系统是拟阵：

$E = E(G)$，$k_u \in \mathbb{Z}^+$，$u \in S$

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq E \mid |\delta_F(u)| \le k_u,\ u \in S\}$$

$\delta_F(u)$ 为 F 上 u 关联的边集



设 $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$，$|F_1| > |F_2|$

$$S' = \{u \in S \mid |\delta_{F_2}(u)| = k_u\}$$

注意：$\forall u \in S'$，$|\delta_{F_1}(u)| \le k_u$

在 $F_1 \setminus F_2$ 中必存在边 $e \notin \delta(u)$，$u \in S'$

知 $F_2 \cup \{e\} \in \mathcal{F}$

拟阵的交

定义：设 $(E, \mathcal{F}_1)$ 和 $(E, \mathcal{F}_2)$ 为两独立系统，二者的交为 $(E, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$

仍是独立系统

拟阵的交是拟阵吗？

命题：任何一个独立系统 $(E, \mathcal{F})$ 为有限多个拟阵的交

证明：设 C_i 为 $(E, \mathcal{F})$ 上的任一圈

令 $\mathcal{F}_i = \{ F \subseteq E \mid C_i \setminus F \neq \phi \}$

则 $(E, \mathcal{F}_i)$ 为拟阵

则 $\mathcal{F} = \bigcap_i \mathcal{F}_i$

$$\mathcal{F}_i = \{ F \subseteq E \mid C_i \setminus F \neq \phi \}$$

设 $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_i$

$$|F_1| = |F_2| + 1$$

△ 若 $\exists e \in F_1 \setminus F_2$，且 $e \notin C_i$

那么 $F_2 \cup \{e\} \in \mathcal{F}_i$

△ 若 $F_1 \setminus F_2 \subseteq C_i$

且 $|F_1 \setminus F_2| \geq 2$

则 $\forall e \in F_1 \setminus F_2$

$F_2 \cup \{e\} \in \mathcal{F}_i$

△ 若 $F_1 \setminus F_2 \subseteq C_i$

且 $|F_1 \setminus F_2| = 1$

那么 $F_2 \supset F_1$

$\{e\} = F_1 \setminus F_2$，$F_1 \cup \{e\} = F_2$