

自动控制理论（甲）第八周作业答案与评分标准

作业题目

3-24

已知状态空间模型: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$; $y = [1 \quad 0] \mathbf{x}$;

$u(t) = 1(t)$ 。初始条件为 $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 0$ 。请给出 $\Phi(t)$, $\mathbf{x}(t)$ 以及 $y(t)$ 。 (10 分)

参考答案:

$$(1) \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-4t} & 2e^{-2t} - 2e^{-4t} \\ -e^{-2t} + e^{-4t} & 2e^{-2t} - e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 3e^{-2t} + \frac{9}{2}e^{-4t} \\ \frac{3}{4} - 3e^{-2t} + \frac{9}{4}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad y(t) = c\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} - 3e^{-2t} + \frac{9}{2}e^{-4t}$$

4-1

试用劳斯判据判定下列特征方程所代表的系统的稳定性。如果系统不稳定, 求特征方程在 s 平面右半平面根的个数。 (10 分)

$$(2) \quad s^5 + s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 2s + 1 = 0$$

参考答案:

不稳定, 2

4-2

已知单位负反馈系统的开环传递函数如下, 试用劳斯判据判定系统的稳定性。(10 分)

$$(2) \quad G(s) = \frac{5s+1}{s^3(s+1)(s+2)}$$

参考答案:

(2) [1 3 2 0 5 1] 不稳定

4-3

设单位负反馈系统的开环传递函数如下，试确定使系统稳定的 K 的取值范围。

$$\textcircled{2} \quad G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(0.2s+1)} \quad (10 \text{ 分})$$

参考答案：

$$\textcircled{2} \quad K > 4/3$$

4-5 设单位负反馈系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+1.5)(s+2)}$$

若希望所有特征方程根都具有小于-1 的实部，试确定 K 的最大值。 (10 分)

参考答案：

$$\text{闭环特征方程：} (s+1)(s+1.5)(s+2) + K = 0$$

$$\text{令 } s=z-1: z^3 + 1.5z^2 + 0.5z + K = 0$$

劳斯阵列：

$$\begin{array}{c|cc} z^3 & 1 & 0.5 \\ z^2 & 1.5 & K \\ z^1 & 0.75 - K & 0 \\ z^0 & K & \end{array}$$

新系统稳定的 K 的最大值为 0.75，原系统特征根具有小于-1 的实部的 K 的最大值为 0.75。

4-6

已知系统如图 4-18 所示，试判定系统的稳定性，并计算系统的给定稳态误差和扰动稳态误差。 (10 分)

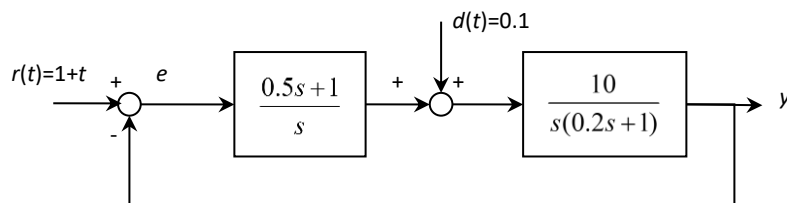


图 4-18 题 4-6 图

参考答案：

$$\text{闭环特征方程：} 0.2s^3 + s^2 + 5s + 10 = 0$$

系统稳定。

$$R(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$e_{sr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + \frac{0.5s+1}{s} \frac{10}{s(0.2s+1)}} R(s) = 0$$

$$D(s) = \frac{0.1}{s}$$

$$e_{sd} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s \frac{10}{s(0.2s+1)}}{1 + \frac{0.5s+1}{s} \frac{10}{s(0.2s+1)}} D(s) = 0$$

4-8

设单位反馈系统开环传递函数 $G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+25)}$ ，试应用劳斯判据确定

K 为多大时，将使系统振荡，并求出振荡频率。（10 分）

参考答案：

闭环特征方程： $s^4 + 12s^3 + 69s^2 + 198s + 200 + K = 0$

劳斯阵列：

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 69 & 200+K \\ s^3 & 12 & 198 & 0 \\ s^2 & 52.5 & 200+K & \\ s^1 & 7995-12K & 0 & \\ s^0 & 200K & & \end{array}$$

K=666.25 时系统振荡。

由 $52.5s^2 + (200 + 666.25) = 0$ 得一对虚根为 $\pm j\sqrt{16.5}$ ，振荡频率为 $\sqrt{16.5}$ 。

4-10

单位反馈系统开环传递函数 $G(s) = \frac{K(2s+1)(s+1)}{s^2(Ts+1)}$ ， $K>0, T>0$ 。确定当闭环稳定时，T、K

应满足的条件。（15 分）

参考答案：

闭环特征方程： $Ts^3 + (2K+1)s^2 + 3Ks + K = 0$

劳斯阵列：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & T & 3K \\ s^2 & 2K+1 & K \\ s^1 & 3K(2K+1)-TK & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

系统稳定应满足：

$$\begin{cases} T > 0 \\ 2K+1 > 0 \\ 3K(2K+1)-TK > 0 \\ K > 0 \end{cases}$$

整理得：

$$\begin{cases} K > 0 \\ T < 6K+3 \end{cases}$$

4-16

已知单位负反馈系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{K(s+30)}{(s+1)(s^2+20s+116)}$$

试确定使系统稳定的 K 的最大值，并选择合适的 K ，使得系统对单位阶跃输入的稳态误差小于 0.1。（15 分）

参考答案：

$$\text{闭环特征方程： } s^3 + 21s^2 + (136 + K)s + 116 + 30K = 0$$

劳斯阵列：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 136+K \\ s^2 & 21 & 116+30K \\ s^1 & 2740-9K & 0 \\ s^0 & 116+30K & \end{array}$$

K 最大为 $\frac{2740}{9}$ 。

$K_p = \frac{30K}{116}$ ，对单位阶跃输入的稳态误差： $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{116}{116+30K}$ ，在系统稳定的范围

内 $K > 34.8$ 。