Unrelated Machine Scheduling

问题描述：

给定
$$\begin{cases} J: \text{工件集合}, 1, \dots, n \\ M: \text{机器集合}, 1, \dots, m \\ P_{ij}: \text{工件 } j \text{ 在机器 } i \text{ 上的运行时间} \end{cases}$$

将 J 中的工件分配到 M 的机器上，使得机器的最大负载（完工时间）最小。

$$\boxed{C_{max} = \max_{i \in M} \sum_{j \to i} P_{ij}}$$

IP 模型

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & j \to i \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$\min \ t$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in M} x_{ij} = 1, \quad j \in J$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} P_{ij} \leq t, \quad i \in M$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in M, j \in J$$

"IG" = ? 考虑仅有一个工件的例子

$$P_{i1} = m, \text{ 则 } \begin{cases} t^*_{IP} = m \\ t^*_{LP} = 1 \end{cases}$$

$$IG \geq m$$

猜一个目标函数值 T，令

$$\boxed{x_{ij}=0,\ 若\ p_{ij}>T,\ i\in M,\ j\in J}$$

$\boxed{是否可行？}$

$$\begin{cases} \sum x_{ij}=1, & j\in J \\ \sum x_{ij}p_{ij}\le T, & i\in M \\ x_{ij}\ge 0 \end{cases}$$

记为 $LP(T)$ $\begin{cases} 可行，T\downarrow \\ 不可行，T\uparrow \end{cases}$

$T\in[\hat{T}/m, \hat{T}]$

$\hat{T}$：将工件 j 分配到 p_{ij} 最小的机器上得到的最大负载

当 input 均为整数时，需要猜 $O(\log \hat{T})$ 步数

$LP(T)$ 可在多项式时间求得最优的 T^*.

那么，如何 rounding 呢？

先分析一下有多少个分数工件

$$\begin{cases} \sum_i x_{ij} = 1 & j=1,\cdots,n \\ \sum_j x_{ij} p_{ij} \le T & i=1,\cdots,m \end{cases}$$

LP(T) 的基本可行解（极点）X

中正分量个数 $\le \underline{n+m}$

约束方程个数

设 X 对应的整数工件数为 n_1

分数工件数为 n_2

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = n \\ n_1 + 2n_2 \le n+m \end{cases} \Longrightarrow n_2 \le m$$

至少对应两个分数变量

最多只有 m 个工件是拆分的！

注意：每个工件 j，只要 $x_{ij} > 0$

那么 $p_{ij} \le T^*$

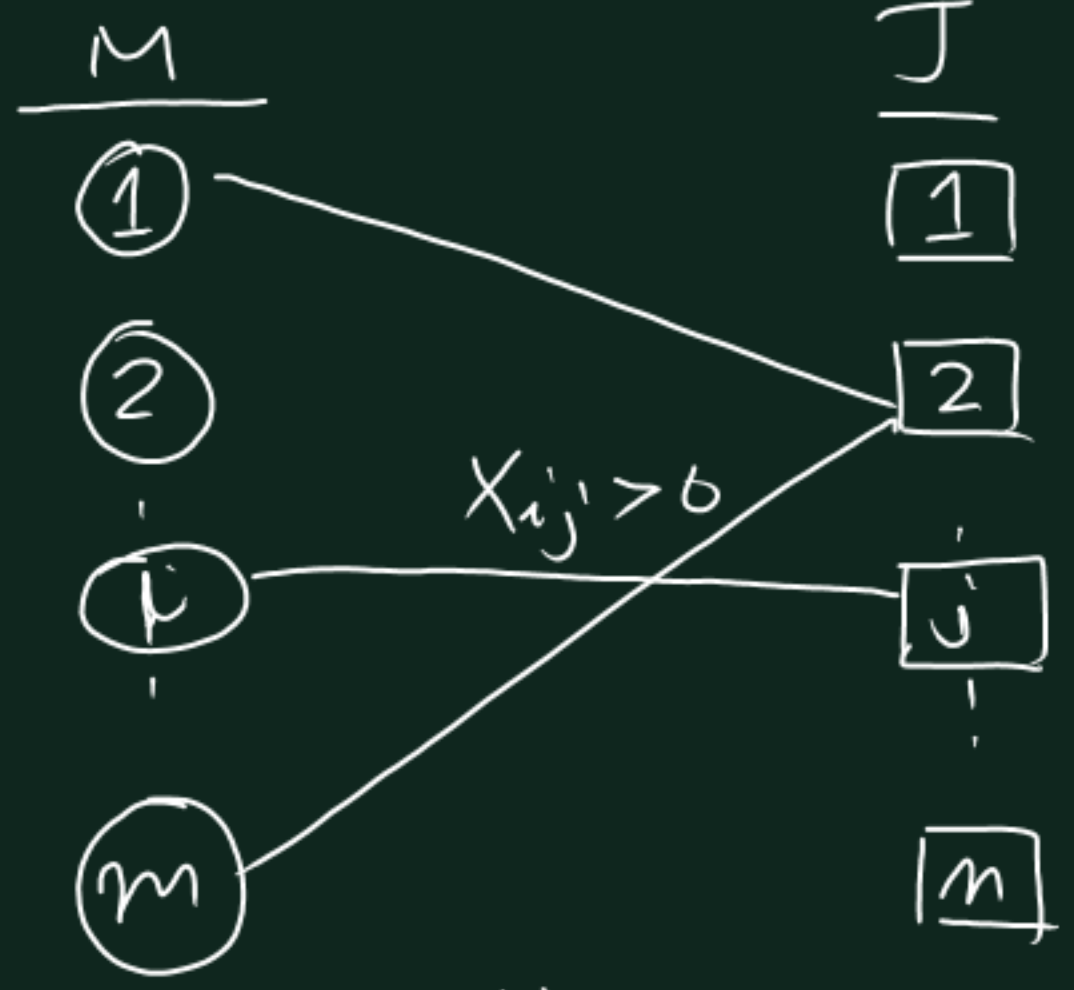
如果能够将这（至多）m 个拆分工件

匹配到 $x_{ij} > 0$ 的机器上，则可得到

$C_{max} \le 2T^*$

这样的匹配存在吗？如何构造？

考察 (J, M, E) 二部图 G



$(i,j)\in E \iff x_{ij}>0$

H：把G中整工件的顶点及其唯一关联边去掉而得的子图

G有 $n+m$ 个顶点，至多 $n+m$ 条边

G若连通，则为一棵伪树

G若不连通，则其任一连通分支为一棵伪树。G为伪森林

H是伪森林

匹配方案

注意 H 是伪森林，其每一个连通分支为一棵伪树

若伪树不是一个圈，其叶子点一定是"机器"顶点 i，分配与其邻接的工件 j 到该机器，删去 i, j 及 j 关联边。

得到的仍是伪森林

如此操作，或者所有工件均已分配，或者剩下的伪树都是圈。后者很容易得到完美匹配

所有拆分的工件重新得到了完整分配。每个机器至多被分配一个这样的工件。

$$C_{max} \le T^* + T^* = 2T^*$$