第八周作业参考答案

8-28　已知系统动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 + 2u \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$$

（1）　判断系统的稳定性；

（2）　若可能，设计状态反馈使闭环系统的极点位于－2±j2；

（3）　当系统的状态不可直接量测时，若可能，设计极点均位于－6 处的全维状态观测器。

解：（1）列出系统状态空间模型

$$\boldsymbol{A}_p = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{b}_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{c}_p = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

能控判断矩阵：$\boldsymbol{Q}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$；完全能控

因为原系统的特征多项式

$$\Delta(\boldsymbol{s}) = |\boldsymbol{sI} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{s}+2 & -1 \\ -1 & \boldsymbol{s}+3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{s}^2 + 5\boldsymbol{s} + 5,\quad \boldsymbol{a}_1 = 5;\ \boldsymbol{a}_2 = 5$$

$$\boldsymbol{s}_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-20}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2},$$ 特征根均位于左半 S 平面，故系统稳定。

（2）可以有直接法与标准型法两种方法求得状态反馈控制器 K

期望特征多项式：$\Delta^*(\boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{s}+2+2\boldsymbol{j})(\boldsymbol{s}+2-2\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{s}^2 + 4\boldsymbol{s} + 8$

直接法：

$$\tilde{\Delta}(\boldsymbol{s}) = |\boldsymbol{sI} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{bK})| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{s}+2+\boldsymbol{k}_1 & -1+\boldsymbol{k}_2 \\ 2\boldsymbol{k}_2 - 1 & \boldsymbol{s}+3+2\boldsymbol{k}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{s}^2 + \boldsymbol{s}(5 + 2\boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_1) + 5\boldsymbol{k}_1 + 5\boldsymbol{k}_2 + 5$$

$$\boldsymbol{k}_1 = 2.2;\ \boldsymbol{k}_2 = -1.6\qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2.2 & -1.6 \end{bmatrix}$$

标准型法：

$$\boldsymbol{T}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{T}_c^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_c \boldsymbol{T}^{-1}{}_C = \begin{bmatrix} \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}{}_C$$

$$= \begin{bmatrix} 8-5 & 4-5 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2 & -1.6 \end{bmatrix}$$

（3）能观判断矩阵: $Q_o = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$；完全能观

同样也有直接法与标准型法两种方法求得状态观测器 L

第一种方法：直接法

（1）期望观测器的特征方程

$$\Delta^*(s) = (s+6)^2 = s^2 + 12s + 36$$

（2）闭环观测器的特征方程，此处设 L = [l1 l2]T

$$\tilde{\Delta}(s) = |sI - (A - Lc)| = \begin{vmatrix} s+2+l_1 & -1-l_1 \\ l_2-1 & s+3-l_2 \end{vmatrix}$$

$$= s^2 + s(5 - l_2 + l_1) + 2l_1 - l_2 + 5$$

（3）比较上两式，求 L

$$L = \begin{bmatrix} 24 \\ 17 \end{bmatrix}$$

第二种方法：标准型法

（1）$\Delta(s) = |sI - A| = \begin{vmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+3 \end{vmatrix} = s^2 + 5s + 5$，$a_1 = 5$；$a_2 = 5$

能观标准型: $A_o = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$；设 $L_o = \begin{bmatrix} l_{o1} \\ l_{o2} \end{bmatrix}$

变换阵: $T^{-1}{}_o = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$；$T_o = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

（2）期望观测器的特征方程与上同:

$$\Delta^*(s) = (s+6)^2 = s^2 + 12s + 36 = s^2 + \beta_1 s + \beta_2$$

（3）闭环观测器的特征方程，此处设 L = [l1 l2]T

（4）比较: $L_o = \begin{bmatrix} \beta_2 - \alpha_2 \\ \beta_1 - \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 7 \end{bmatrix}$

（5）求原来的 L

$$L = T_o L_o = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 17 \end{bmatrix}$$

故：两种方法结果都一样

9-11 $\omega = 1.414$，A=2.1

9-16 (2) 平衡点$x_e = 0$，当$x_1^2 + x_2^2 < 1$时，平衡点渐近稳定。