

第六周作业参考答案 习题八：8-12; 8-16; 8-17; 8-19.

8-12 已知系统 (A, b, c) 如下

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \quad -1 \quad 1].$$

要求：① 判别系统的能控性。如果完全能控，请将该系统化为能控规范型；如果不完全能控，请找出其能控子空间；② 判别系统的能观性。如果完全能观，请将该系统化为能观规范型；如果不完全能观，请找出其能观子空间。

8-12 参考答案：

① 按能控性分解

step1: 计算能控性矩阵 Q_c

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}; \quad \text{rank } Q_c = 2 < 3, \quad \text{系统不完全能控};$$

Step2: 构造非奇异变换矩阵 T ，并求出变换后的系统矩阵：

从 Q_c 中选取 2 个线性无关的列，再附加一列线性无关列 $T_2^T = [0 \quad 1 \quad 0]$

(附加的线性无关列不同，则答案可能不同，但 A、B 形式是一定相同的)

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{则} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_c = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{b}_c = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{c}_c = cT = [1 \quad 2 \quad -1]$$

如果选取 $T_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\hat{A}_c = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{b 与上相同}, \quad \hat{c}_c = cT = [1 \quad 2 \quad 1]$$

如果选取 $T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\hat{A}_C = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -4 & -13 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ b 与上相同, } \hat{c}_c = cT = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Step3: 写出分解后的可控、不可控子系统动态方程:

$$\text{可控子系统: } \dot{x}_c = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} x_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x_c$$

$$\text{不可控子系统: } \dot{x}_{\bar{c}} = x_{\bar{c}}$$

$$y_2 = -x_{\bar{c}}$$

② 按能观性分解

step1: 计算能观性矩阵 Q_o

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix}; \text{ rank } Q_o = 2 < 3, \text{ 系统不完全能观;}$$

Step2: 构造非奇异变换矩阵 T^{-1} , 并求出变换后的各矩阵:

从 Q_o 中选取 2 个线性无关的行作为 T_1 , 再附加一线性无关行 $T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{则} \quad T = (T^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_o = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \hat{b}_o = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{c}_o = cT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

如果选取 $T_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $T_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\hat{A}_0 = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \hat{b}_o = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ c 与上相同}$$

Step3: 写出分解后的可观、不可观子系统动态方程:

$$\text{可观子系统: } \dot{x}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x_o + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y_1 = [1 \ 0] \mathbf{x}_o = y$$

不可观子系统: $\dot{\mathbf{x}}_o = [-5 \ 3] \mathbf{x}_o + 2x_o + u$

$$y_2 = 0$$

8-16 设某系统由状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u; \quad y = [2 \ 1] \mathbf{x}$$

表示。要求: ① 设计状态反馈矩阵 \mathbf{K} , 以达到将闭环极点配置在 $\{-3, -6\}$ 的目的; ② 确定在初始状态 $\mathbf{x}(0) = [1 \ -1]^T$ 作用下的状态响应。

8-16 参考答案:

① $\mathbf{K} = [-8 \ -2.5];$

② 状态响应为:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s+6)} \begin{bmatrix} s+8 \\ -s-18 \end{bmatrix}\right\} \\ &= L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{s+8}{(s+3)(s+6)} \\ \frac{-s-18}{(s+3)(s+6)} \end{bmatrix}\right\} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{5/3}{s+3} + \frac{-2/3}{s+6} \\ \frac{-5}{s+3} + \frac{4}{s+6} \end{bmatrix}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{5}{3}e^{-3t} - \frac{2}{3}e^{-6t} \\ -5e^{-3t} + 4e^{-6t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8-17 设受控系统传递函数为 $\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{10}{s^3 + 3s^2 + 2s}$, 要求:

① 设计状态反馈阵, 使闭环系统极点为 $-2, -1 \pm j$;

② 给出系统的闭环传递函数。

8-17 参考答案:

① 能控标准型时 $\mathbf{K} = [-4 \ -4 \ -1]$; 串联分解时 $\mathbf{K} = [-4 \ -3 \ -1]$

② $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4}$

8-19 一个 SISO 系统由状态方程 $\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p u$ 表示, 其中

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_{p1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- ① 确定系统的能控性;
- ② 求出系统的特征值;
- ③ 求出将状态方程变换为能控标准型状态方程的变换矩阵 \mathbf{T}_c ;
- ④ 求出将闭环极点配置为 $\sigma(\mathbf{A}_{cl}) = \{-2, -4, -6\}$ 的状态反馈矩阵 \mathbf{K}_p 。

8-19 参考答案:

- ① 系统完全能控。
- ② 特征值: -1, -2, -3
- ③ 变换矩阵

$$\mathbf{T}_{c1} = \mathbf{M}_{c1} \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 16 \\ 1 & -4 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 16 \\ 1 & -4 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{c1}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & -3 \end{bmatrix}$$

可以验证: $\mathbf{A}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{A}_p \mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{b}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- ④ 期望特征多项式为:

$$\Delta^*(s) = (s+2)(s+4)(s+6) = s^3 + 12s^2 + 44s + 48 = s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0$$

对能控标准型有:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{ci} &= \alpha_{i-1} - \beta_{i-1} \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} k_{c1} &= \alpha_0 - \beta_0 = 6 - 48 = -42 \\ k_{c2} &= \alpha_1 - \beta_1 = 11 - 44 = -33 \\ k_{c3} &= \alpha_2 - \beta_2 = 6 - 12 = -6 \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_c \mathbf{T}_c^{-1} = [-42 \quad -33 \quad -6] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = [-7 \quad 0 \quad 1]$$