算法博弈论

均衡解的计算

对均衡效率损失的定量分析

算法机制设计

“算法机制设计”由Nisan和Ronen在1999年提出

第十四讲

算法机制设计

Algorithmic Mechanism Design

机制设计

在信息不完全及决策交互式的条件下，设计机制（规则或制度）来达到既定目标

- 设计者发布机制
- 玩家各自选择策略
- 得到一个均衡或结局

Cake Cutting

假如你去参加一个朋友的生日聚会，共n个人。聚会上，有人建议找一个公平的方案将蛋糕切成n份，使每个人都对自己拿到的那一份感到满意。

每个人对任一部分蛋糕的“价值”(大小)可能有不同见解，但均认同基本的算术运算。

分蛋糕结果是“公平”的：如果每个参与者服从了既定规则后，都能保证所获蛋糕至少为蛋糕的$\frac{1}{n}$.

Cake Cutting

$n = 2$：

A将整块蛋糕切成二块；B先选，A后选。

$n = 3$：

A将整块蛋糕切成三块；B先选，C再选，A后选；
这样是公平的吗?

Cake Cutting

$n = 2$：

A将整块蛋糕切成二块；B先选，A后选；

$n = 3$：

A将整块蛋糕切成二块；B先选，A后选；

A、B分别将自己得到的蛋糕切成三块；C从A、B两组中各取他认为价值最大的一块。

$n > 3$：

假设前 $n-1$ 个人都已经满意了；这$n-1$ 个人分别将自己得到的蛋糕切成n块，第n个人从$n-1$ 组中各取他认为价值最大的一块。

Cake Cutting

假如你去参加一个朋友的生日聚会，共n个人。聚会上，有人建议找一个公平的方案将蛋糕切成n份，使每个人都对自己拿到的那一份感到满意且不会嫉妒别人。

每个人对任一部分蛋糕的“价值”(大小) 可能有不同见解，但均认同基本的算术运算。

分蛋糕结果是“无嫉妒”的：如果每个参与者服从了既定规则后，都能保证自己得到的蛋糕不少于其他任何一个参与者得到的蛋糕。

Cake Cutting

2个人的“无嫉妒”蛋糕切分问题:
A将整块蛋糕切成二块; B先选, A后选。

3个人的“无嫉妒”蛋糕切分问题:
A 将整块蛋糕切成二块; B先选, A后选;
A、B分别将自己得到的蛋糕切成三块; C从A、B两组中各取他认为价值最大的一块;
还可行吗?

此时C有可能嫉妒A或者B。

Cake Cutting

2个人的“无嫉妒”蛋糕切分问题：

A将整块蛋糕切成二块；B先选，A后选。

3个人的“无嫉妒”蛋糕切分问题：

第一阶段：

- A把蛋糕按照自己的“价值观”切成三块；
- B观察最大的两块蛋糕，若认为一样大，则不需要做什么；否则修剪最大的一块蛋糕，使得修剪后的部分（记为T）和次大的蛋糕价值是相同的；切掉的那一小块（记为S）放在第二阶段处理；
- C,B,A依次挑选这三块蛋糕（若C 没选T，则B一定要选T）。

由以上规则可知第一阶段是无嫉妒的；且可以看到无论S在第二阶段被分给选T的人多少，A都不会嫉妒这个人。

Cake Cutting

3个人的“无嫉妒”蛋糕切分问题:

第二阶段:

- 第一阶段B或C中没有选T的那个人按照自己的“价值观”切S成三块;
- 第一阶段B或C中选了T的那个人先选，之后A选，最后切蛋糕的人选。

由以上规则可知第二阶段是无嫉妒的：第一位选择的人不会嫉妒别人；A不会嫉妒第一阶段拿了T的人，且他在第三个人之前选，所以A也不会嫉妒第三个人；第三个人是切蛋糕的人，自然也不会嫉妒别人。

如果A在第一阶段不嫉妒B，在第二阶段不嫉妒B，那么A在全过程中不嫉妒B；即上述规则下参与者之间互不嫉妒，结果是无嫉妒的。

拍卖

英式拍卖

在拍卖过程中，拍卖标的物的竞价按照竞价阶梯由低至高、依次递增，当到达拍卖截止时间时，出价最高者成为竞买的赢家（即由竞买人变成买受人）

荷式拍卖

在拍卖过程中，拍卖标的物的竞价由高到低依次递减直到第一个竞买人应价（达到或超过底价）时击槌成交的一种拍卖，亦称“减价拍卖”

密封式拍卖

将所有的报价同时封存于信封中，报价最高的人将赢得拍卖的一种拍卖形式

拍卖

密封式拍卖

将所有的报价同时封存于信封中，报价最高的人将赢得拍卖的一种拍卖形式

- 一价拍卖：胜者支付的是自己的投标价
- 二价拍卖：胜者支付的是第二高的投标价

私有信息：拍卖商品对每一个报价人都具有不同的潜在价值

二价拍卖

定义（Vickery的二价拍卖）：令获胜者为报价最高的参与者 i ，其报价为w_i，他需要支付报价第二高的费用$p^* = \max_{j \neq i} w_j$.

在二价拍卖的机制下，任何理性的参与者都不会谎报自己的报价。

性质（Vickery）：对每一个参与者的报价 $w_1, \ldots, w_n$，以及可能谎报价$w_1', \ldots, w_n'$，若参与者i的报价是w_i，其效用为u_i；若参与者i的报价是w_i'，其效用为u_i'；那么，$u_i \geq u_i'$.

设施选址博弈

输入：

- 公有信息：网络上有n个局中人
- 私有信息：每个局中人有私有的位置x_i
  位置组合$x = (x_1, \dots, x_n)$

输出：一个设施位置y

机制：$f(x) = y$

局中人的费用函数：

- $cost(y, x_i) = |y - x_i|$

社会目标函数：

- $sc(y, x) = min \sum_i cost(y, x_i)$
- $mc(y, x) = min\, max_i cost(y, x_i)$

设施选址博弈

- 近似比： $sc(f(x),x) \le \rho \cdot sc(opt(x),x)$

$$mc(f(x),x) \le \rho \cdot mc(opt(x),x)$$

- 防策略操纵性(Strategy-proofness)：

对任意策略组合$x \in \mathbb{R}^n$, 任意$i \in N$,任意$x_i' \in \mathbb{R}$,都有

$$cost(f(x),x_i) \le cost(f(x_i',x_{-i}),x_i),$$

其中$x_{-i} = (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$：$N\backslash\{i\}$中每个局中人的策略。

设施选址博弈

当网络为**一条线**时，以$sc(y,x)$为目标的优化问题可找到最优的设施位置。

算法：

$y^* = med(x)$, 这里$med(x)$表示$x_1, \dots, x_n$这串数的中位数

上述算法做机制是防策略操纵的，且y^*是最优的。

设施选址博弈

当网络为**一条线**时，以$mc(y,x)$为目标的优化问题容易找到最优的设施位置

算法：

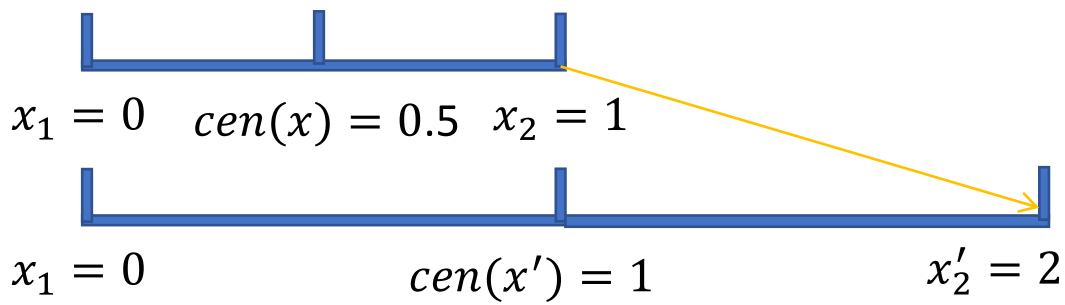
令 $l(x) = \min\{x_1, \dots, x_n\}$, $r(x) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$,

$\mathrm{cen}(x) = \frac{l(x)+r(x)}{2}$；则$y^* = \mathrm{cen}(x)$

上述算法得到的y^*是最优的，但用其做机制则不是防策略操纵的。

$$x = (x_1 = 0, x_2 = 1)$$

$$x' = (x_1 = 0, x_2' = 2)$$



设施选址博弈

当网络为**一条线**时，以$mc(y,x)$为目标的博弈可找到近似比为2的防策略操纵机制。

机制： $f(x) = l(x)$

任何一个防策略操纵机制的近似比至少是2.

证明: 对任意防策略操纵的机制M. 考虑例子{0,1}，即两个局中人分别在0和1处. 机制M输出的设施位置为y. 不妨设0<y<1，否则机制M的近似比至少是2.

再考虑另一个例子{0,y}, 那么机制M输出的位置同样是y. 否则, y处的局中人会撒谎到位置1，使得机制在{0,1}的情形下输出y. 于是, 机制M的近似比不会小于2.

厌恶型设施选址博弈

假设当地政府想要在一个区域建一个垃圾站，每位居民都希望垃圾站距离自己越远越好，每人都向政府提供一个自己的地址，政府根据大家提供的位置信息制定一个机制使所有居民距离垃圾站的距离之和越大越好。

当网络为**一条线段**时，不妨设$I = [0,1]$，两点之间距离定义为$d(x, y) = |x - y|$

观察：若n个人位置都在[0,1]之间，则最优解一定出在0或者1这两个端点上。

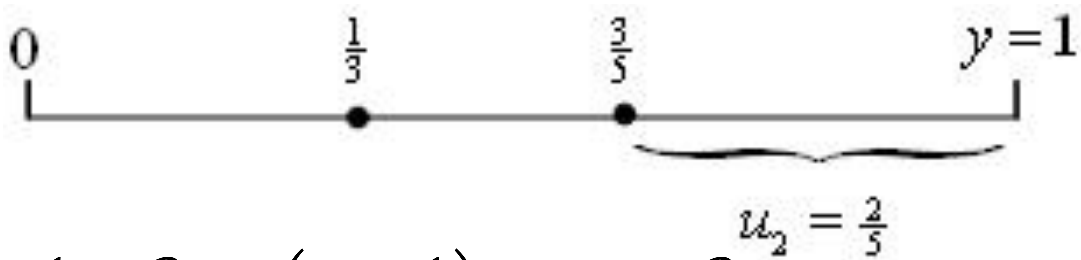
机制：$f(x) = \begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sum_{i=1}^{n}(1 - x_i) \\ 1, & otherwise \end{cases}$

不是防策略操纵的

厌恶型设施选址博弈

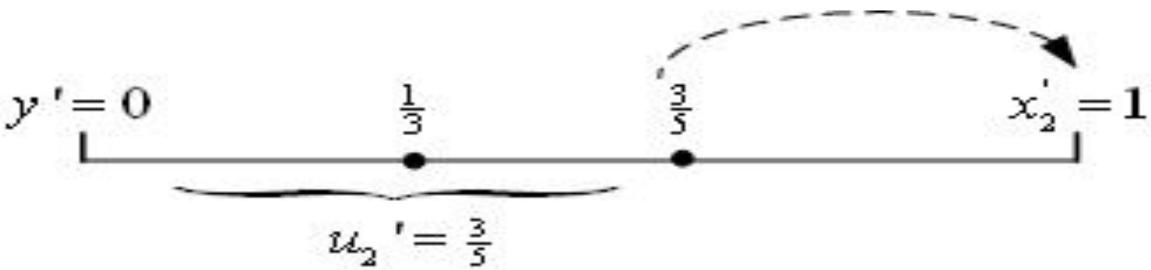
上述机制不是防策略操纵的

$N = \{1,2\}$; $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{3}{5}$



$$\frac{1}{3} + \frac{3}{5} < \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{3}{5}\right) \quad \Longrightarrow y = 1, u_2 = \frac{2}{5}$$

若局中人谎报自己的位置在1点，$x_2' = 1$



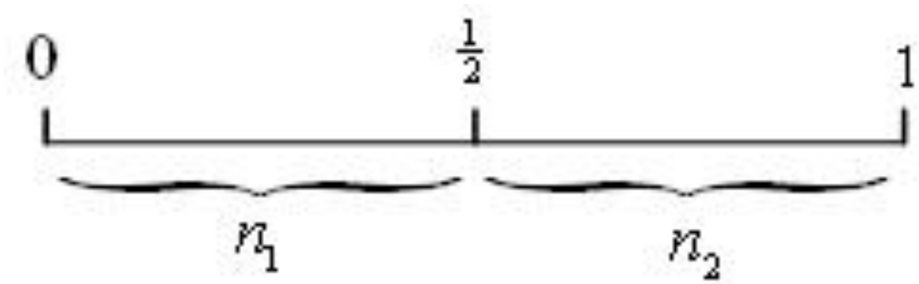
$$\frac{1}{3} + 1 > \left(1 - \frac{1}{3}\right) + (1 - 1) \quad \Longrightarrow y' = 0, u_2' = \frac{3}{5}$$

厌恶型设施选址博弈

“多数”机制：

令n_1表示处于$[0,\frac{1}{2}]$之间局中人的数量；n_2表示处于$(\frac{1}{2},1]$之间局中人的数量；

$$f(x)=\begin{cases}0, & n_1 \le n_2 \\ 1, & otherwise\end{cases}$$



上述机制是3近似的，且是防策略操纵的。

厌恶型设施选址博弈

证明：不妨设$n_1 \leq n_2$，最坏情况分析：

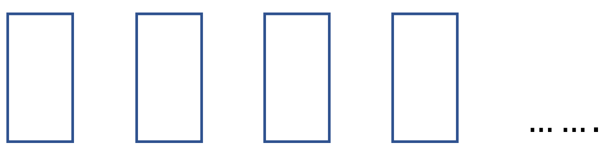
- 机制解选在0点，而最优解选在1点；
- n_1个局中人在0点，n_2个局中人在距离$\frac{1}{2}$非常近的位置；n_1和n_2几乎相等；

近似比为: $(n_1 + \frac{n_2}{2})/(\frac{n_2}{2}) \to 3$

装箱问题

- 一组物品

- 单位尺寸的箱子



- 用最少数目的箱子装下这些物品

装箱方法

- Next Fit
- First Fit
- Best Fit
- Harmonic Fit

装箱方法

- Next Fit Decreasing (NFD)
- First Fit Decreasing (FFD)
- Best Fit Decreasing (BFD)

已知的结果

- $NF(I) \le 2\,OPT(I) - 1$
- $FF(I) \le 1.7\,OPT(I)$
- $FFD(I) \le 1.5\,OPT(I)$ (除非 P=NP，否则已最好)
- $FFD(I) \le (11/9)OPT(I) + 6/9$

更好的结果

- 近似方案 $A(I) \le (1+\epsilon)OPT(I) + 1$

- 近似方法 $A(I) \le OPT(I) + O(\log OPT(I))$

- 最具挑战性的难题：是否存在这样的近似算法，其所用箱子数目只比最优解多常数个（如至多1个）？

装箱博弈模型

- 每个箱子的费用为1
- 同一箱子的物品要分摊该箱子的费用
- 每个物品希望自己分摊的费用尽可能少
- 关键: 费用分摊机制
- 稳定装箱: 没有物品可以移到或愿意移到其它的箱子中
  – 纳什均衡

约定-机制的规范

- 保证纳什均衡的存在
- 收支平衡
- 每个物品的分摊费用非负
- 匿名性
- PoA (Price of Anarchy) 比较小

公平机制

- 按比例分摊

如：若箱中包含两个物品 3/5 和 1/5, 那么大的支付 3/4，而小的付 1/4.

PoA 大约为1.64 (不超过 22/15, 若所有的物品不超过 1/2).

- 同等分摊

上例中，两个物品各付 0.5

PoA 接近1.7.

稳定装箱

讨论两个机制均衡的求解:

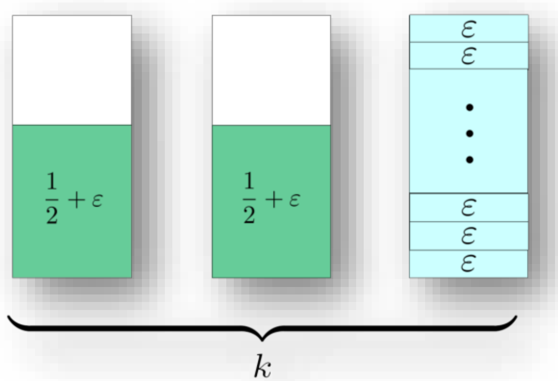
- 按比例分摊
- 同等分摊

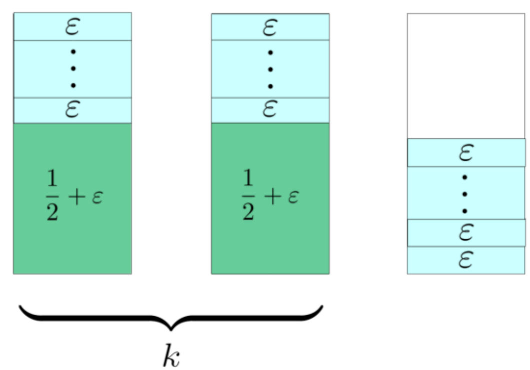
差异机制

- Large-Pay-Public

  如：若箱中包含两个物品 3/5 和 1/5, 那么大的支付 4/5，而小的付 1/5.

  PoA = 1.5

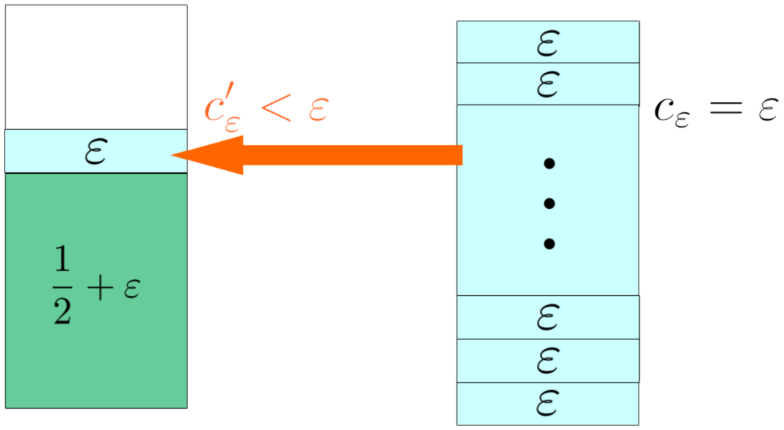




- 如果小物品的支付无折扣的话, PoA=1.5是最好可能的

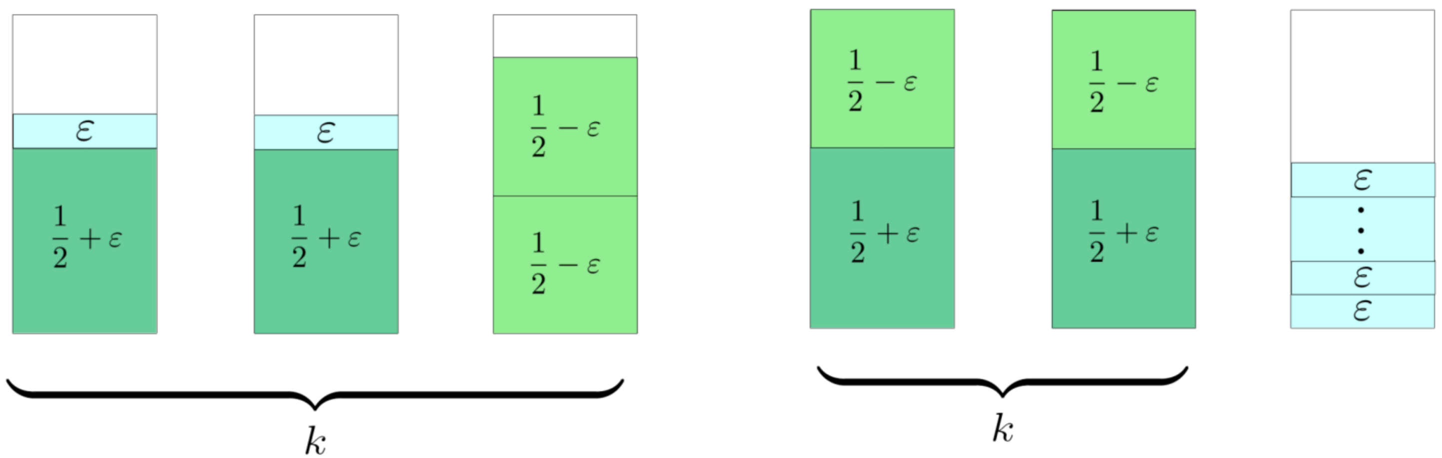
差异机制

➢ 小物品应该获得折扣使得他们愿意与大物品在一起.



差异机制

- 小物品若装入拥有大物品且更满的箱子中应该得到更多的折扣



差异机制

- 大物品所在的箱子越满，那么大物品分摊的费用应该越低

- 否则，该大物品可能会”逃避”，从未引起装箱的不稳定

- 我们的打折函数为 $f(x)=1-(2/3)x$

改进的机制

- 折扣函数保证了大物品和小物品的利益，诱使双方愿意在一起

- 没有大物品的箱子仍使用按比例分配的原则

PoA 不超过 $22/15 \approx 1.467$

作业

- 复习每一讲，主要内容都有可能综合出现在期末练习中。