自动控制理论（甲）第五周作业答案与评分标准

作业题目

2.9

图2-85所示为三个储槽组成的系统，其中Q_i为输入变量，h_3为输出变量。试建立该系统下列三种形式的数学模型：①微分方程式；②传递函数；③状态空间模型。其中R_1、R_2、R_3分别为三只阀线性化后的阻力系数，F_1、F_2、F_3为三只储槽的截面积。

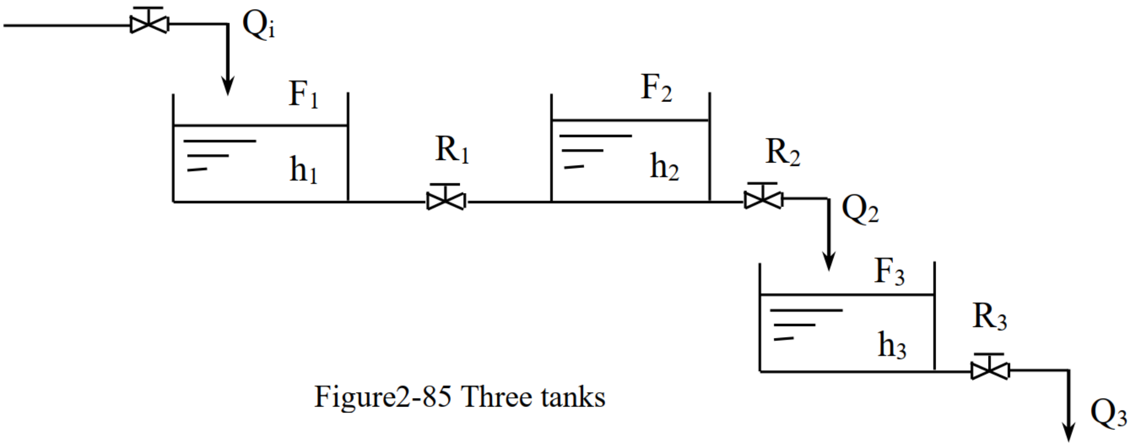

Figure2-85 Three tanks

答案与解析——

第三个水箱的计算有：

$$Q_2 - Q_3 = F_3 \dot{h_3}$$
$$Q_3 = \frac{h_3}{R_3}$$

得到传递函数

$$\frac{h_3(s)}{Q_2(s)} = \frac{R_3}{R_3 F_3 s + 1}$$

对于前两个水箱，计算要复杂一些，有：

$$Q_i - Q_1 = F_1 \dot{h_1}$$
$$Q_1 = \frac{h_1}{R_1} - \frac{h_2}{R_2}$$
$$Q_1 - Q_2 = F_2 \dot{h_2}$$
$$Q_2 = \frac{h_2}{R_2}$$

化简得到传递函数

$$\frac{Q_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{R_1F_1R_2F_2s^2 + R_1F_1s + R_2F_2s + R_2F_1s + 1}$$

最终传递函数有**（20分）**

$$\frac{h_3(s)}{Q_i(s)} = \frac{Q_2(s)}{Q_i(s)} \times \frac{h_3(s)}{Q_2(s)} = \frac{R_3}{a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + 1}$$

其中$a_0=F_1R_1F_2R_2F_3R_3$，$a_1=F_1R_1F_2R_2+F_1R_1F_3R_3+F_2R_2F_3R_3+F_1R_2F_3R_3$，$a_2=F_1R_1+F_2R_2+F_3R_3+F_1R_2$

得到微分方程式**（10分）**

$$a_0\frac{\mathrm{d}^3h_3}{\mathrm{d}t^3}+a_1\frac{\mathrm{d}^2h_3}{\mathrm{d}t^2}+a_2\frac{\mathrm{d}h_3}{\mathrm{d}t}+h_3=R_3Q_i$$

状态空间模型**（20分）**

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+bu=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-\frac{1}{a_0}&-\frac{a_2}{a_0}&-\frac{a_1}{a_0}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{R_3}{a_0}\end{bmatrix}u\\y&=Cx=[1\quad 0\quad 0]x\end{aligned}$$

2.12

图2-88表示弹簧阻尼器系统，图中，f表示粘性摩擦系数，k表示弹簧刚度。试列写输入位移x_1与输出位移x_o之间的微分方程式。（相似系统不需要证明）

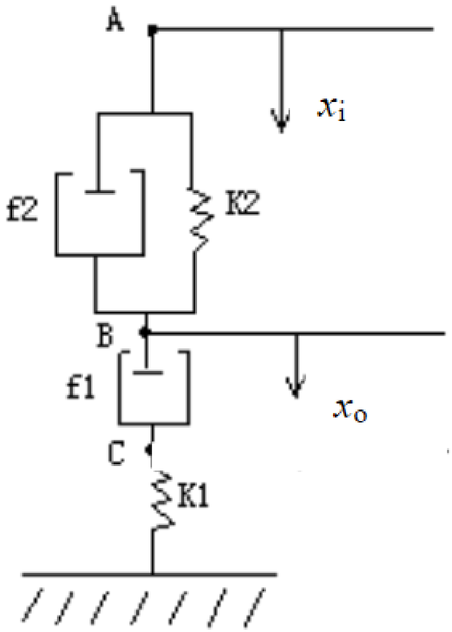

图2-88 弹簧阻尼器系统

答案与解析——

由受力关系，有$F_{f_2}+F_{k_2}=F_B=F_C$

其中$F_{f_2}=f_2(\dot{x}_i-\dot{x}_o)$，$F_{k_2}=k_2(x_i-x_o)$，$F_B=f_1(\dot{x}_c-\dot{x}_o)$，$F_C=k_1x_c$

利用$F_B=F_C$将x_c用x_o表示，代入受力关系后有微分方程式

$$f_1f_2\ddot{x}_o+(f_1k_2+f_1k_1+f_2k_1)\dot{x}_o+k_1k_2x_o=f_1f_2\ddot{x}_i+(f_1k_2+f_2k_1)\dot{x}_i+k_1k_2x_i$$

（30分）

2.33

设弹簧特性由下式描述：

$$F = 12.65y^{1.1}$$

其中，F是弹簧力，y是变形位移。若弹簧在变形位移0.25附近作微小变化，试推导ΔF的线性化方程。

答案与解析——

$$\Delta F = 12.65 \times 1.1 \times y^{0.1}\Delta y = 12.65 \times 1.1 \times 0.25^{0.1}\Delta y = 12.11\Delta y$$

（20分）