第一周作业参考答案

题号	7-1(2)	7-2(1)	7-2(4)	7-3(2)	7-4(1)	7-5(1)	7-5(2)	总计
分值	1	1	1	3	2	1	1	10

7-1 试证明：

（2） $Z[(a^k x(k)] = X(\frac{z}{a})$

证明：

（2） $Z[(a^k x(k)] = \sum_{k=1}^{\infty}(a^k x(k))z^{-k}$， 令 $\tilde{z} = \frac{z}{a}$

则：$X(\frac{z}{a}) = X(\tilde{z}) = \sum_{k=1}^{\infty}(x(k))\tilde{z}^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty}(x(k))(\frac{z}{a})^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty}(x(k))a^k z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty}(a^k x(k))z^{-k}$

故，原题得证。

7-2 试求下列函数的 z 变换。

（1） $e(t) = a^t$；

（4） $E(s) = \frac{s+1}{s^2}$。

解：（1） $e(t) = a^t$

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{nT} z^{-n}$$
$$= 1 + a^T z^{-1} + a^{2T} z^{-2} + a^{3T} z^{-3} + \cdots$$

令： $x = a^{-T} z$； 上式 $= 1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + \cdots = \frac{1}{1 - a^T z^{-1}} = \frac{z}{z - a^T}$

附：若是 $e(t) = a^n$；

则答案：$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$

$$= 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \cdots$$

令： $x = a^{-1} z$； 上式 $= 1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + \cdots = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$

（4） $E(s) = \frac{s+1}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$； 取拉氏反变换，得 $e(t) = 1 + t$

再由表 7-2 可得： $E(z) = \frac{z}{(z-1)} + \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{z^2 - z + Tz}{(z-1)^2}$

7-3 用长除法、部分分式法和留数法求下列表达式的 z 反变换。

(2) $X(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z-2)}$。

解：

（1）长除法

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{z}{z^3-4z^2+5z^1-2}$$

$$=0\cdot z^0+0\cdot z^{-1}+z^{-2}+4z^{-3}+11z^{-4}+26z^{-5}+\cdots$$

所以 k	0	1	2	3	4	5	……
x(kT)	0	0	1	4	11	26	……

（2）部分分式法

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{1}{z-2}+\frac{-1}{z-1}+\frac{-1}{(z-1)^2}$$

$$\therefore X(z) = \frac{z}{z-2}+\frac{-z}{z-1}+\frac{-z}{(z-1)^2}$$

$$\therefore \quad x(kT) = -1-k+2^k \qquad k=0,1,2,3\ldots\ldots$$

（3）留数法

$$x(kT) = \operatorname{Re}s\left[\frac{z}{(z-1)^2(z-2)}z^{k-1}\right]$$

$$= (z-2)\frac{z^k}{(z-1)^2(z-2)}\bigg|_{z=2} + \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{z^k}{(z-1)^2(z-2)}\right]\bigg|_{z=1}$$

$$= 2^k - 1 - k$$

7-4 求下列表达式的 Z 反变换，并求其初值和终值。

(1) $F(z) = \dfrac{z(z+0.5)}{(z-1)(z^2-0.5z+0.3125)}$。

解： 用长除法得反变换

$$F(z) = \frac{z(z+0.5)}{(z-1)(z^2-0.5z+0.3125)} = \frac{z^2+0.5z}{z^3-1.5z^2+0.8125z-0.3125}$$

$$=0\cdot z^0+z^{-1}+2z^{-2}+2.1875z^{-3}+1.96875z^{-4}+\cdots$$

所以 k 0 1 2 3 4 5 ......

$f(kT)$ 0 1 2 2.1875 1.96875 ......

k	0	1	2	3	4	5	......
$f(kT)$	0	1	2	2.1875	1.96875	......	

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}\frac{z(z+0.5)}{(z-1)(z^2-0.5z+0.3125)}=0$$

$F(z)$的极点一个在单位圆上，另两个在单位圆内，由终值定理可得：

$$f(\infty)=\lim_{k\to\infty}f(kT)=\lim_{z\to1}[(1-z^{-1})F(z)]=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})\frac{z(z+0.5)}{(z-1)(z^2-0.5z+0.3125)}=1.846$$

7-5 已知 X(z), 求 $x(\infty)$。

(1) $X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}-\dfrac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$，$a$>0； (2) $X(z)=\dfrac{z^2(z^2+z+1)}{(z^2-0.8z+1)(z^2+z+1.3)}$

解：(1) X(z)极点一个在单位圆上，一个在单位圆内，由终值定理得：

$$\begin{aligned}x(\infty)&=\lim_{z\to1}[(1-z^{-1})X(z)]\\&=\lim_{z\to1}[(1-z^{-1})(\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}})]\\&=\lim_{z\to1}[1-\frac{1-z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}}]=1\end{aligned}$$

(2) 由于 X(z)有 4 个极点，且有 2 个极点位于单位圆外，故终值为 不存在或∞