# 自动控制理论（甲）第六周作业答案与评分标准

## 作业题目

**3-1**

采用时域方法与拉氏变换方法求解下列微分方程，假设初始条件为零。（**10** 分）

$$\text{(b)}\quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+4.25x=t+1$$

**参考答案：**

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=L^{-1}\left[\frac{0.18}{s}+\frac{0.2353}{s^2}-\frac{0.18(s+\frac{1}{2})}{s^2+s+4.25}-\frac{0.16\times 2}{s^2+s+4.25}\right]$$

$$=0.18+0.2353t-0.18e^{-0.5t}\cos 2t-0.16e^{-0.5t}\sin 2t$$

**3-5**

设单位负反馈系统开环传递函数$G(s)=\dfrac{4}{s(s+5)}$，求这个系统的单位阶跃响应。**(10** 分**)**

**参考答案：**

系统的闭环传递函数：$\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{G(s)}{1+G(s)}=\dfrac{4}{s(s+5)+4}=\dfrac{4}{s^2+5s+4}=\dfrac{4}{(s+1)(s+4)}$

$$Y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{4}{(s+4)(s+1)}=\frac{1}{s}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+4}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{s+1}\qquad\text{（5 分）}$$

系统的单位阶跃响应：$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=1+\dfrac{1}{3}e^{-4t}-\dfrac{4}{3}e^{-t}$ （**5** 分）

**3-7**

某控制系统的传递函数是$G(s)=\dfrac{10(2s+1)}{(s+1)(s^2+4s+8)}$，求出该系统的单位脉冲响应 $g(t)$与单位阶跃响应 $h(t)$。**(30 分)**

**参考答案：**

（1）因为单位脉冲输入为：$u(t)=\delta(t)$；其拉氏变换为：$U(s)=1$

故单位脉冲响应

$$g(t)=L^{-1}[G(s)]=L^{-1}\{-\frac{2}{s+1}+2[\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2}+\frac{11}{(s+2)^2+2^2}]\}$$
$$=-2e^{-t}+2e^{-2t}\cos 2t+11e^{-2t}\sin 2t$$

或：$g(t)=L^{-1}[G(s)]=L^{-1}\{-\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{2s+26}{s^2+4s+8}\}$

因为$L^{-1}[G(s)]=L^{-1}[\dfrac{s+\alpha_0}{(s+\alpha)^2+\omega^2}]=\dfrac{1}{\omega}\sqrt{\omega^2+(\alpha_0-\alpha)^2}\cdot e^{-\alpha t}\sin(\omega t+\phi)$

此题：$\alpha_0=13,\quad \omega=2,\quad \alpha=2,\quad \phi=tg^{-1}(\dfrac{\omega}{\alpha_0-\alpha})=tg^{-1}\dfrac{2}{11}=10.3^\circ$

故：$g(t)=-2e^{-2t}+11.18e^{-2t}\sin(2t+10.3^\circ)$ （**15 分**）

（2）因为单位阶跃输入为：$u(t)=1(t)$；其拉氏变换为：$U(s)=\dfrac{1}{s}$

$$H(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{10(2s+1)}{(s+1)(s^2+4s+8)}=\frac{1.25}{s}+\frac{2}{s+1}-\frac{3.25s+11}{s^2+4s+8}$$

$$h(t)=L^{-1}[H(s)]=1.25+2e^{-t}-3.25e^{-2t}\cos 2t-2.25e^{-2t}\sin 2t$$

或：$h(t)=L^{-1}[H(s)]=1.25+2e^{-t}-3.95e^{-2t}\sin(2t+55.3^\circ)$。 （**15 分**）

由于输入信号存在导数关系，由线性系统的性质，此题也可先求出单位阶跃响应 $h(t)$，然后对其求导即得单位脉冲响应 $g(t)$。

**3-8**

已知各系统的单位脉冲响应如下，试求系统的传递函数$\Phi(s)$。**(30 分)**

（1）$g(t)=7-5e^{-6t}$；

（3）$g(t)=\dfrac{k}{\omega}\sin\omega t$；

（5）$g(t)=0.02(e^{-0.5t}-e^{-0.2t})$。

**参考答案：**

（1）$\Phi(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=L(7-5e^{-6t})=\dfrac{7}{s}-\dfrac{5}{s+6}=\dfrac{2s+42}{s(s+6)}$

（3）$\Phi(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=L(\dfrac{k}{\omega}\sin\omega t)=\dfrac{k}{s^2+\omega^2}$

（5）$\Phi(s)=L\{0.02(e^{-0.5t}-e^{-0.2t})\}=0.02(\dfrac{1}{s+0.5}-\dfrac{1}{s+0.2})=-\dfrac{0.06}{(2s+1)(5s+1)}$

**3-9**

已知控制系统的单位阶跃响应为

$$h(t)=1+0.2e^{-60t}-1.2e^{-10t}\text{；}$$

试确定系统的阻尼比$\zeta$和自然频率$\omega_n$。**(20 分)**

**参考答案：**

因为：系统的单位脉冲响应 $k(t)$的象函数为系统传递函数 $G(s)$，故可以通过对 $k(t)$求拉氏变换得到系统传递函数 $G(s)$，而 $k(t)$与单位阶跃响应成微分关系：

$$k(t)=h'(t)=-12e^{-60t}+12e^{-10t}=12(e^{-10t}-e^{-60t})$$

故

$$G(s)=L[k(t)]=12\left[\frac{1}{s+10}-\frac{1}{s+60}\right]=\frac{600}{ss^2+70s+600}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

可见：$\omega_n=\sqrt{600}=24.5$；$\zeta={}^{70}\!/_{2\cdot 24.5}=1.43$