第四讲 Primal-Dual Method

（原始-对偶方法）

再回首

强对偶定理

- 可行 $\longrightarrow$ 最优（对偶可行） Simplex
- 最优（对偶可行） $\longrightarrow$ 可行 Dual-Simplex

互补松弛

设 x, y 分别是 (P) 和 (D) 的可行解，那么

x, y 最优 $\Longleftrightarrow$

$$y^T(Ax-b)=0$$
$$(y^TA-c^T)x=0$$

思路：设法寻找满足互补松弛条件的一对 x, y.

从 (D) 的一个可行解 y 出发，去找符合条件的 x.

(1) y 是 (D) 的可行解

(2) 检查

$$\begin{cases} y^T(Ax-b)=0 \\ (y^TA-c^T)x=0 \end{cases}$$ 有解吗？

Yes, ✓ ; No, y 不是最优解

$$(P)\quad \min\ c^T x \quad \text{s.t.}\ \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$(D)\quad \max\ y^T b \quad y^T A \leq c^T$$

$$(\ y^T A_j \leq c_j,\ j=1,\cdots,n)$$

设y是(D)的一个可行解

找x:

$$\begin{cases} Ax = b \\ (A^T y - c)^T x = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

引入指标集

$$J = \{\, j \mid y^T A_j = c_j \,\}$$

允许指标集

$$x_j = 0,\quad j \notin J$$

$$(RP)\quad \min \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j\in J} a_{ij} x_j + \bar{x}_i = b_i \quad i=1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geq 0,\ j \in J$$

$$\bar{x}_i \geq 0,\ i=1,2,\cdots,m$$

? DRP

$$\text{(RP)}\quad \min \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j\in J} a_{ij} x_j + \bar{x}_i = b_i$$

$$x_j \geq 0,\ j\in J$$

$$\bar{x}_i \geq 0,\ i=1,\cdots,m$$

$$\text{(DRP)}\quad \text{Max}\ \tilde{y}^T b$$

$$\tilde{y}^T A_j \leq 0 \quad j\in J$$

$$\tilde{y}_i \leq 1,\quad i=1,2,\cdots,m$$

设: $\tilde{y}$ 是其最优解

$$J=\{\, j \mid y^T A_j = c_j \,\}$$ ⟵ 关于(D)

若 $\tilde{y}^T b = 0$,

否则, $\tilde{y}^T b > 0$, y不是(D)的最优解

改进y: $y' = y + \underbrace{\theta}_{\text{步长}>0}\,\underbrace{\tilde{y}}_{\text{方向}}$

$$y'^T b = y^T b + \theta \tilde{y}^T b > y^T b$$

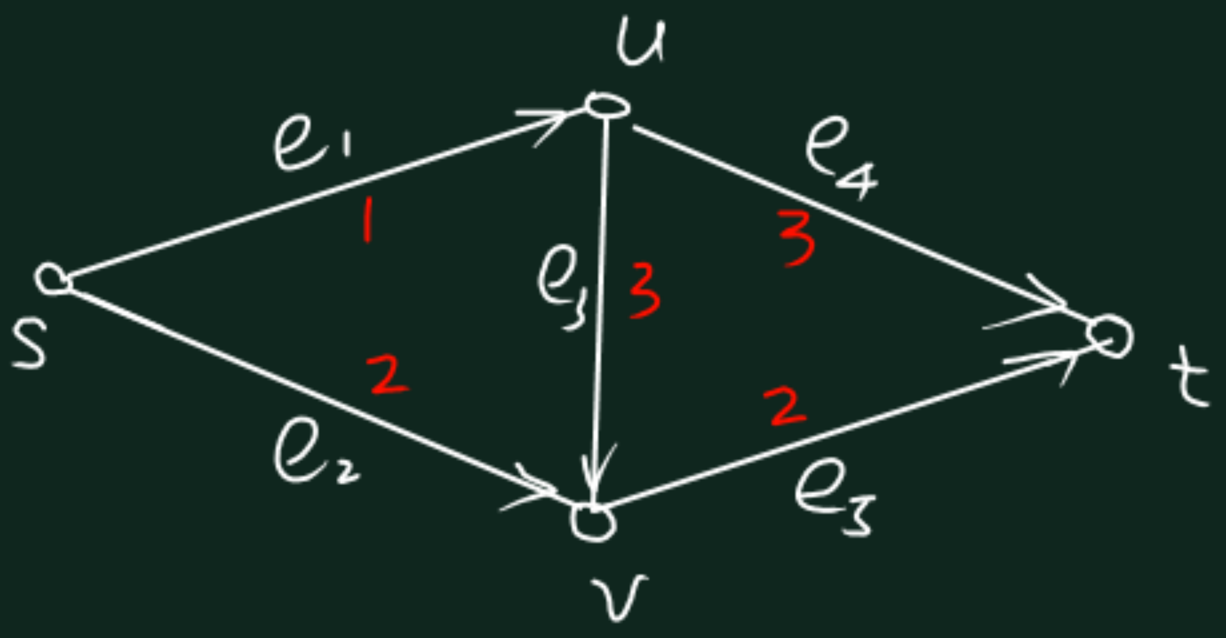
$$y'^T A_j = y^T A_j + \theta \tilde{y}^T A_j \leq \begin{cases} c_j, & j\in J \\ c_j & j\notin J \end{cases}$$

$$\boxed{\theta = ?}$$

$$\theta = \min_{j:\, \tilde{y}^T A_j > 0} \left\{ \frac{c_j - y^T A_j}{\tilde{y}^T A_j} \right\} > 0$$

最短路问题

有向图



$$Af = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow s \\ \rightarrow t \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$f \geq 0$$

关联矩阵

$$A = \begin{array}{c} \\ s \\ t \\ u \\ v \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

最短路是一条费用最小的 s-t 路 P

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}, \quad f_i = \begin{cases} 0, & e_i \notin P \\ 1, & e_i \in P \end{cases}$$

最短路的流模型

$$\min \sum_{e \in E} c_e f_e$$

s.t.

$$Af = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} s \\ t \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$f \geq 0$$

(P)

(D) ?

最短路的流模型

(P)

$$\min \sum_{e\in E} c_e f_e$$

$$\text{s.t.}\quad A'f = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$f \geq 0$$

$$\boxed{e=(i,j) \qquad i \xrightarrow{\ e\ } j}$$

(D)

$$\max\ y_s$$

$$\text{s.t.}\quad y_i - y_j \leq c_{ij},\quad (i,j)\in E$$

$$y_t = 0$$

$$J = \left\{ (i,j) \,\middle|\, y_i - y_j = c_{ij} \right\}$$

(RP)

$$\min \sum_{i=1}^{n-1} \bar{x}_i$$

$$A'f + \bar{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$f_e = 0,\quad e=(i,j)\notin J$$

$$f_e \geq 0,\quad e\in J$$

$$\bar{X} \geq 0$$

(DRP)

$$\max\ y_s$$

$$\text{s.t.}\quad y_i - y_j \leq 0,\quad (i,j)\in J$$

$$y_i \leq 1 \qquad i\in V$$

$$y_t = 0$$

(D) $\max \ y_s$

s.t. $y_i - y_j \le c_{ij}$ $\quad (i,j)\in E$

$y_t = 0$

得到(D)的可行解 y，有：

$J = \{(i,j) \mid y_i - y_j = c_{ij}\}$

(DRP) $\max \ y_s$

s.t. $\boxed{y_i - y_j \le 0}$ $\quad (i,j)\in J$

$y_i \le 1$ $\quad i=1,2,\cdots,n$

$y_t = 0$

观察 (DRP)，其最优值 $y_s^* \le 1$

($y_s^* = 0$ or 1)

影响 y_i 取值的约束：

$y_i \le y_j$, $(i,j)\in J$

只需要关注 J 中的边

- 若 $(j,t)\in J$， $y_j \le y_t = 0$
- 若在 J 中有 i 到 t 的路，$\tilde{y}_i$ 取 0
- 若在 J 中无 i 到 t 的路，$\tilde{y}_i$ 可取 1

$\bar{y}_i = y_i + \theta \tilde{y}_i$, $\theta = \min\limits_{\substack{\tilde{y}_i - \tilde{y}_j > 0 \\ (i,j)\notin J}} \{ c_{ij} - (y_i - y_j) \}$

(D)的可行解改进:

$$\bar{y}_s = y_s + \theta \tilde{y}_s$$
$$= y_s + \theta$$

看一下 J 的变化

若 $(i,j) \in J$, $y_i - y_j = c_{ij}$

$$\bar{y}_i - \bar{y}_j = (y_i - y_j) + \theta \underbrace{(\hat{y}_i - \hat{y}_j)}_{=0}$$
$$= y_i - y_j$$

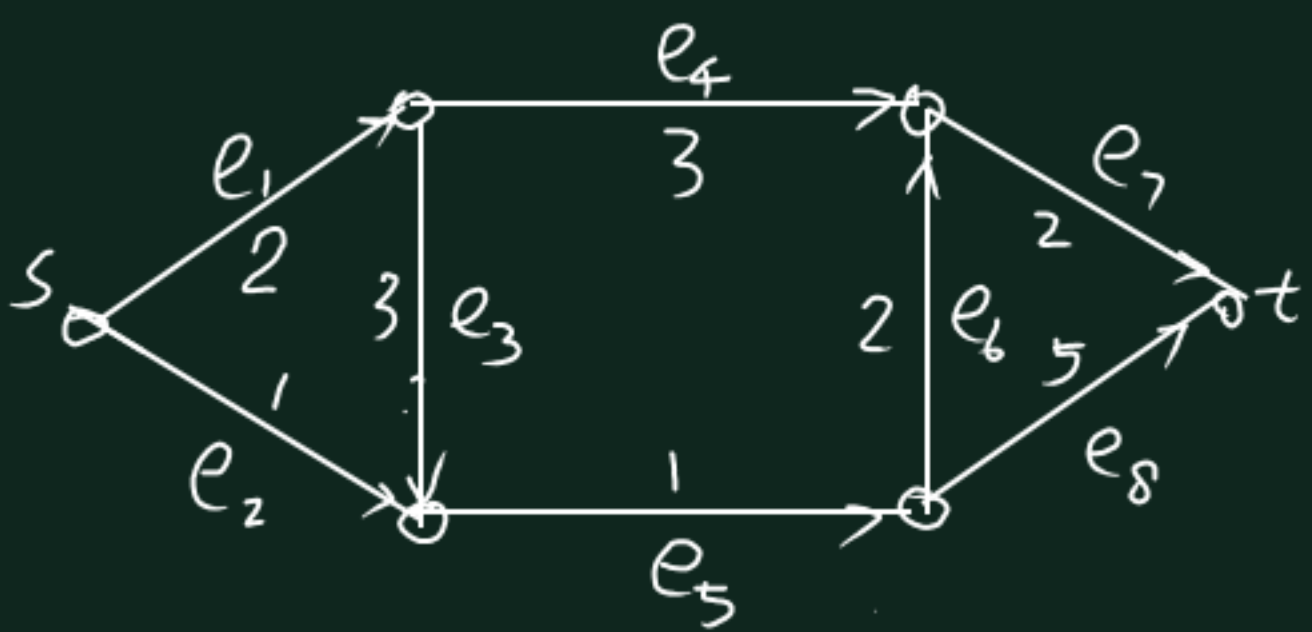
(i,j) 一旦属于 J, 就永远属于 J

该算法在 $O(m)$ 步终止

$O(n)$

原始-对偶算法 $\Longrightarrow$

不断扩展 $\boxed{\text{可到达 } t}$ 的顶点集, 直到 s 进入该集合



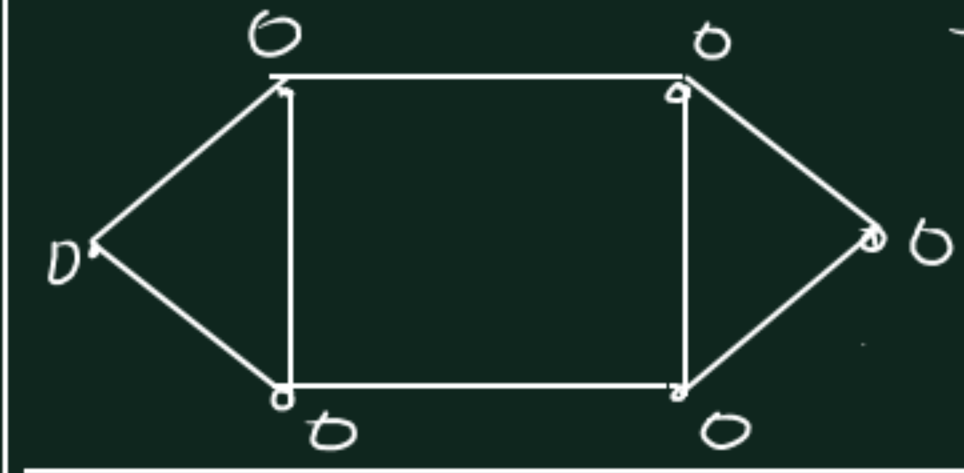
$$\max\ y_s$$

$$\text{s.t.}\quad y_i - y_j \le c_{ij}, \quad (i,j) \in E$$

(D) $$y_t = 0$$

初值: $y_i = 0$ for all i

$$y = (0,0,0,0,0)^T$$



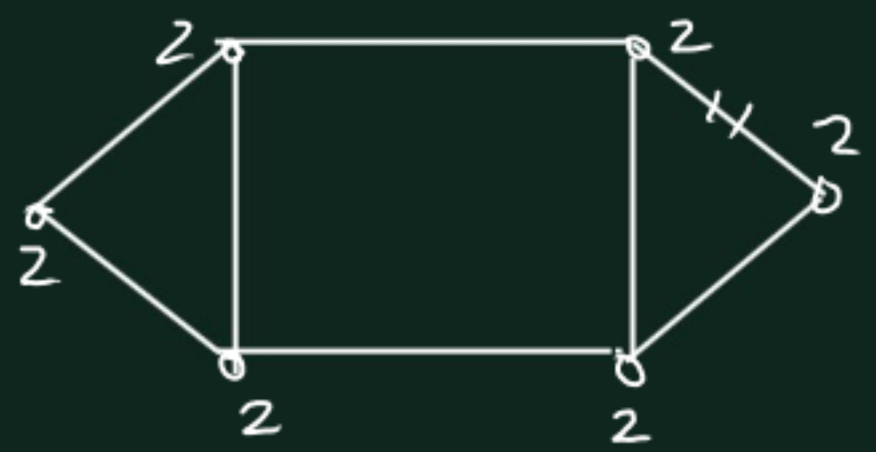
$J = \Phi$ DRP:

$\tilde{y} = (1,1,1,1,1)^T$

$\Rightarrow$

$\theta = 2$ for e_7

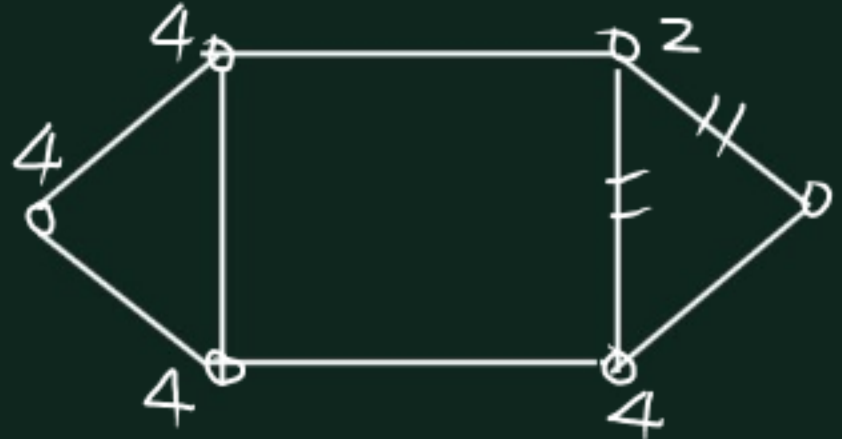
D: $y = (2,2,2,2,2)^T$ $J = \{e_7\}$, DRP



$\Rightarrow$ $\tilde{y} = (1,1,1,0,1)^T$

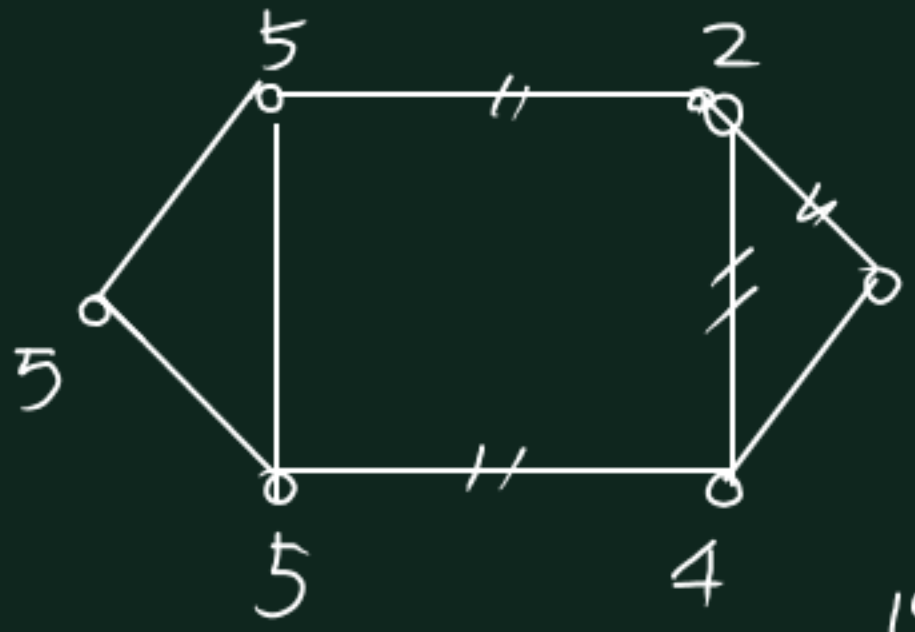
$\theta = 2$ for e_6

D: $y = (4,4,4,2,4)^T$ $J = \{e_7, e_6\}$



$\Rightarrow$ $\tilde{y} = (1,1,1,0,0)^T$

$\theta = 1$ for e_4, e_5



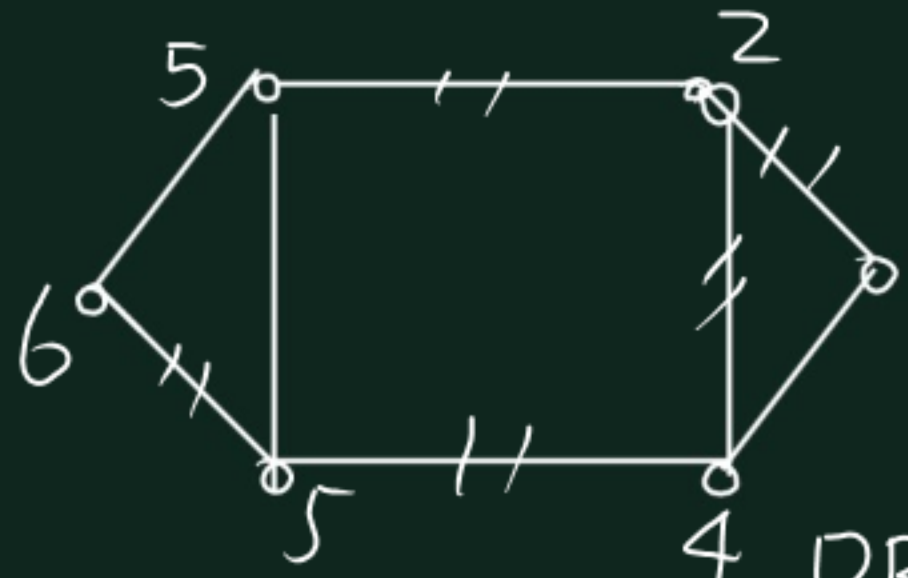
D:

$y = (5, 5, 5, 2, 4)^T$

$J = (e_7, e_6, e_5, e_4)$

$\theta = 1$ for e_2

DRP: $\tilde{y} = (1, 0, 0, 0, 0)^T$



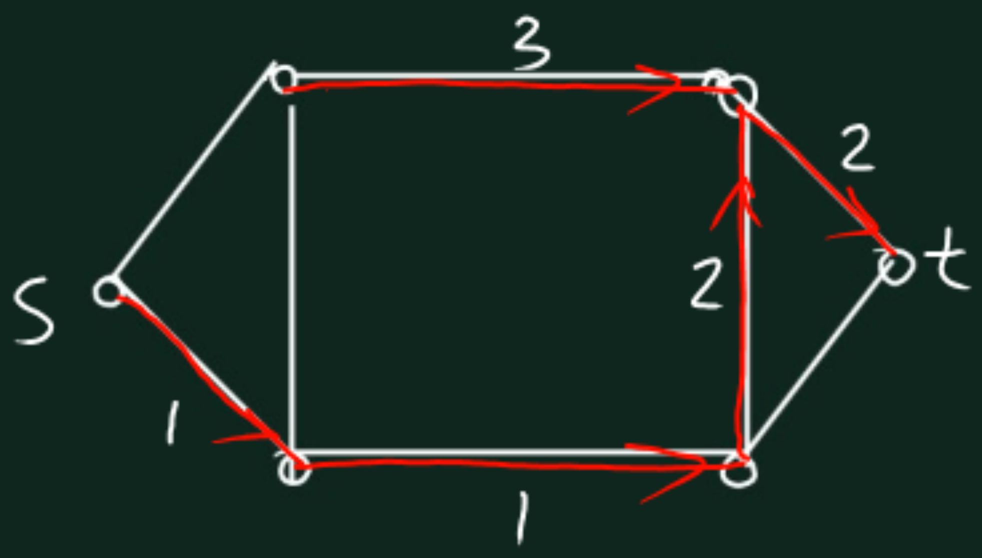
D:

$y = (6, 5, 5, 2, 4)^T$

$J = \{e_7, e_6, e_5, e_4, e_2\}$

DRP:

$\tilde{y} = (0, 0, 0, 0, 0)^T$



$y_s^* = 6$