第十讲 Steiner树 and TSP

MST-近似 — Steiner树

MST-构造 — TSP

先看 Steiner 树问题：

- 给定 $G=(V,E)$，$w: E \to R^+$
  完全图 （满足度量要求）
  $S \subseteq V$
- 求一个 G 的连通子图 $G'=(S',E')$
  $S \subseteq S'$，且 $\sum_{e \in E'} w(e)$ 最小

G' 必是一棵树，记作 Steiner 树

$S' \setminus S$ 中的点为 Steiner 点

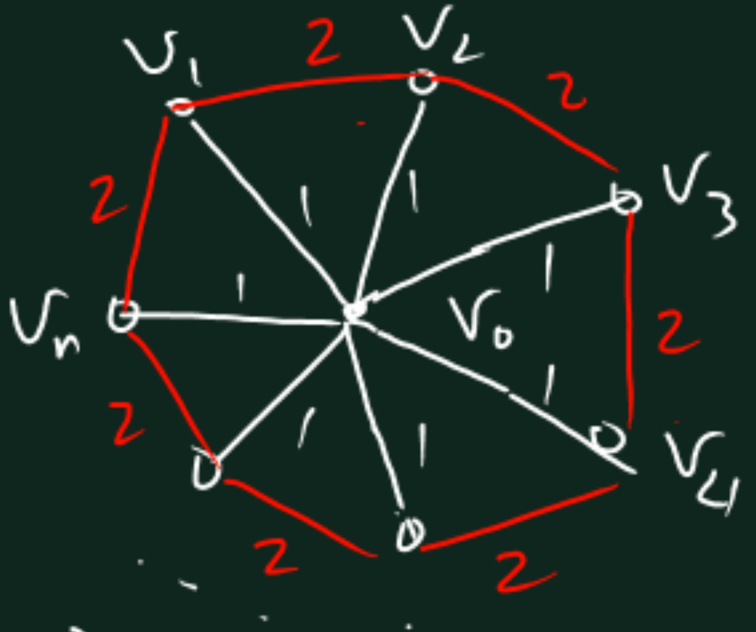
NP-hard

相关问题：欧氏平面上的 Steiner 树问题：用最短的长度将平面上给定的点连起来。

NP-hard

近似算法：用MST近似

分析该算法：



$S=\{v_1,\cdots,v_n\}$

$$\frac{l_{MST}}{l^*_{SMT}}=\frac{2(n-1)}{n}\longrightarrow 2$$

下面证明该算法的近似比就是2

证明：考虑最优解 T^*

将 T^* 的边复制一遍，得到图 $2T^*$，其为欧拉图

从 S 中的一点出发，沿着欧拉回路的方向，跳过所有steiner点，和已访问点，得到一条 S 上的路径 P，那么：

$$l_{MST}\leq l(P)\leq l(2T^*)=2l(T^*)$$

研究进展

$\frac{96}{95}$

负面: No PTAS, if $P \neq NP$

正面: $\frac{11}{6}$-近似, Zelikovsky 1993

⋮

1.59 1999

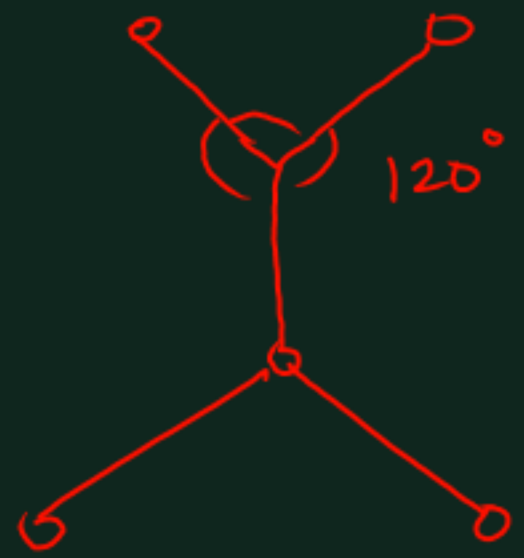
1.55 2000

⋮

$\ln 4 + \varepsilon \approx 1.3863$ Byrka et al.

欧氏平面上的 Steiner 树问题

MST: $\sqrt{3}$-approximation



Gilbert-Pollak 猜想

$\boxed{\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.155}$

一般图 $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$

Arora (1998 JACM)

$(1+\varepsilon)$-近似

TSP

问题：$G=(V,E)$ 完全图

$C: E \to R^+$

求 G 上费用最小的哈密顿圈（TSP 环游）

也就是确定顶点的一个顺序 π

使得 $\sum_{i=1}^{n} C(v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)})$ 最小，$\pi(n+1)=\pi(1)$

若 C 任意 $K=2^{poly(n)}$

则不存在 K-近似算法

反证

考虑哈密顿圈问题

$G_1=(V,E_1)$ 是否含 H-圈？NPC

$\Downarrow$

$G=(V,E)$ 完全图，$C(e)=\begin{cases} 1, & e\in E_1 \\ n\cdot k, & e\notin E_1 \end{cases}$

C_{opt} $= n$ $\Longleftrightarrow$ $C_A \le nk$

C_{opt} $\ge nk+n-1$ $\qquad$ $C_A \ge nk+1$

假设 C 满足三角不等式，即

$$c_{uv} \le c_{uw} + c_{wv}$$

$\boxed{\text{MST 近似算法}}$

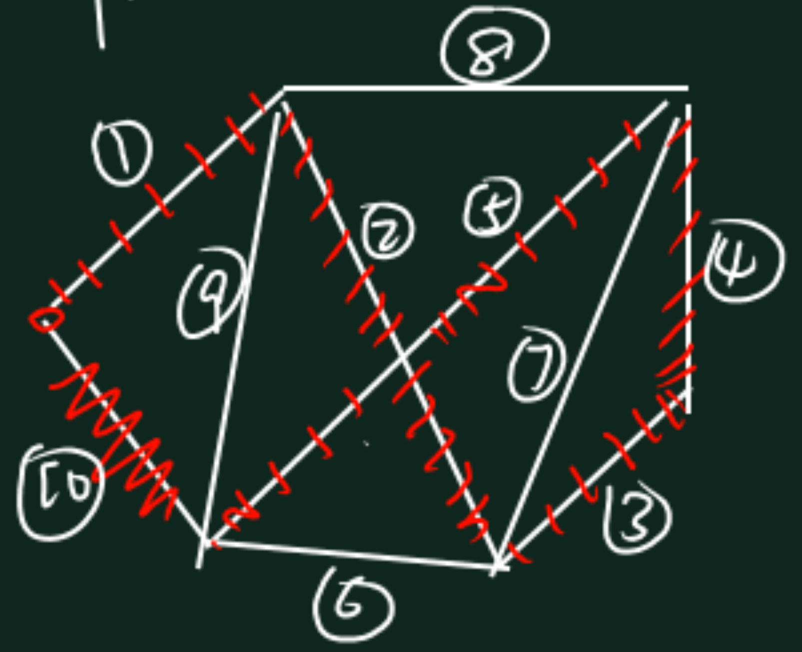
1. 先求G的MST，得 T^*

2. 将 T^* 扩展为欧拉图，得 G_e

3 沿着 G_e 的欧拉回路不重复地构造一个H-圈 H_c

$$G_e \xrightarrow{\text{short-cut}} H_c$$

例：



2. 将 T^* 上的边复制

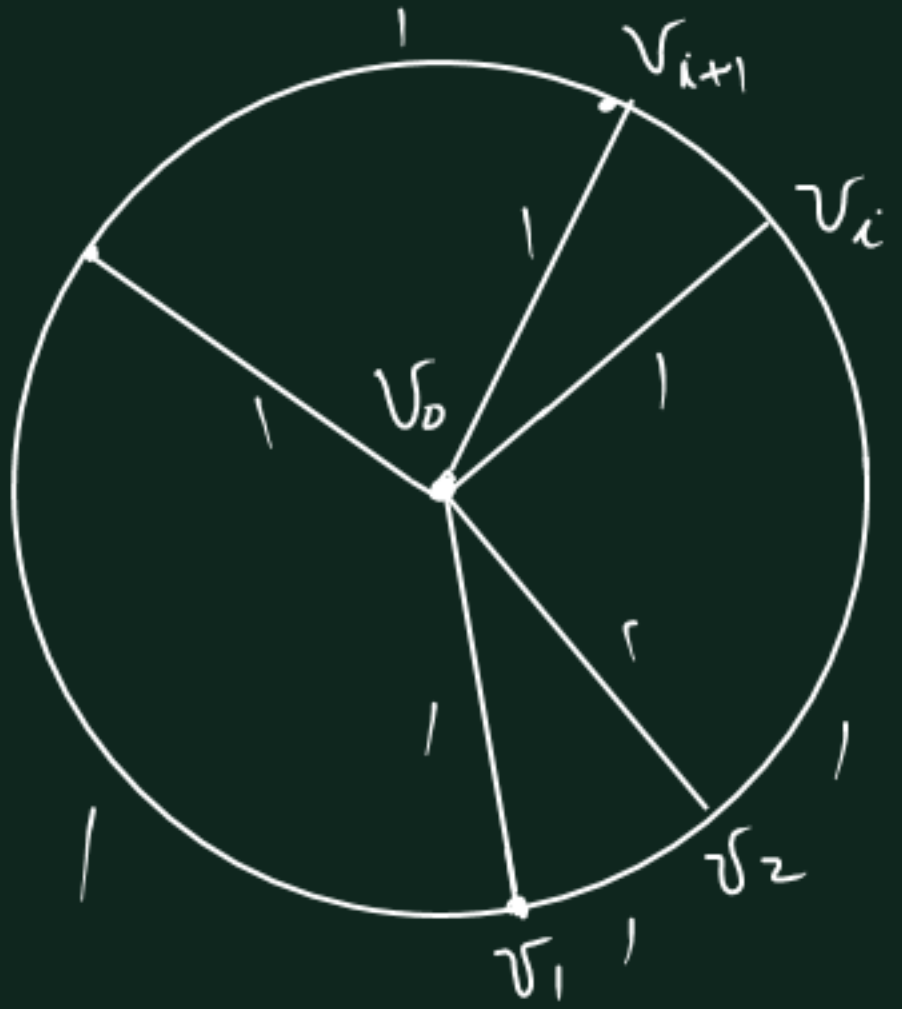
$$G_e = 2T^*$$

知：
$$C(H_c) \le C(G_e) = 2C(T^*) \le 2C(H^*)$$

例子

2n+1 个顶点

T^*: v_0为中心的星图



G_e: $v_0 v_1 v_0 v_3$
$v_0 \cdots v_{2n-1} v_0$
$v_2 v_0 v_4 \cdots$
$v_{2n} v_0$

H_c: $v_0 v_1 v_3$
$\cdots v_{2n-1} v_2$
$\cdots v_{2n} v_0$

其它边费用为2

$C(H_c^*) = 2n+1$

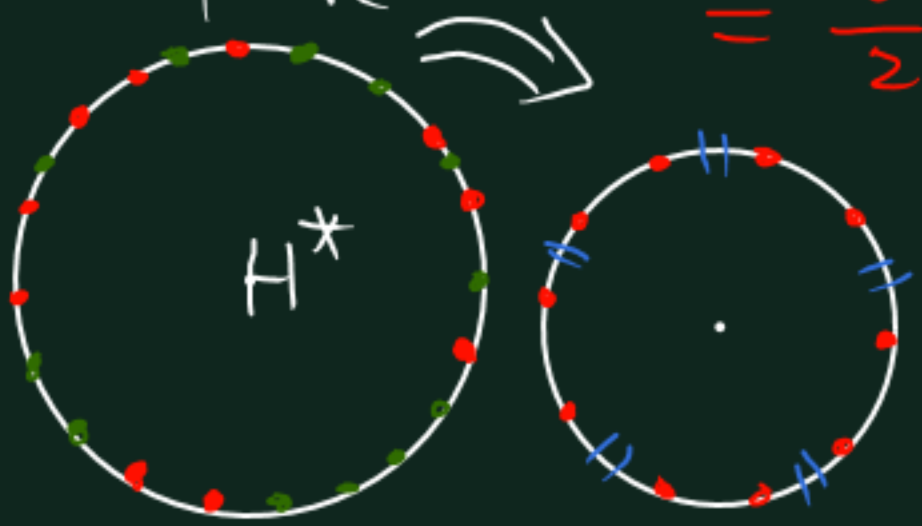
$C(H_c) = 2(2n-1)+2 = 4n$

改进

2. 求T^*中奇度点的最小权完美匹配M^*, $G_e = T^* \cup M^*$

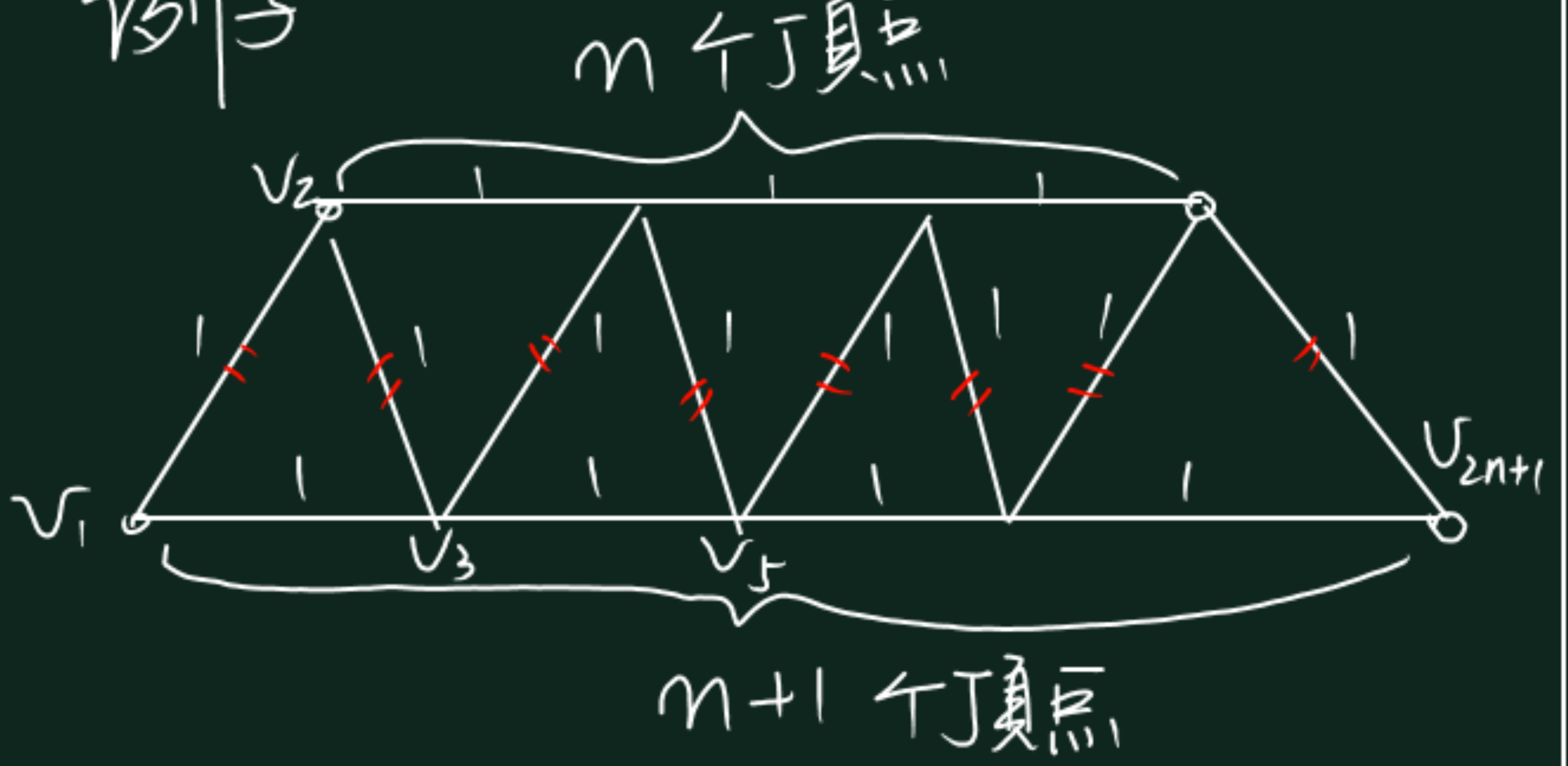
$$C(H_c) \leq C(T^*) + C(M^*)$$
$$\leq C(H_c^*) + \frac{1}{2} C(H_c^*)$$
$$= \frac{3}{2} C(H_c^*)$$

分析 H_c^*



$\geq 2C(M^*)$

例子



其它顶点间的距离由所给边下的最短路长确定

易知: $C(H_c^*) = 2n+1$

T^* 为 $v_1 v_2 \cdots v_{2n+1}$, $C(T^*)=2n$

M^* 为 $v_1 v_{2n+1}$ $C(M^*)=n$

故 $$\frac{C(H_c)}{C(H_c^*)} = \frac{3n}{2n+1} \to \frac{3}{2}$$

Review

上述算法来自 Christofides (1976)

最新进展：<u>2020</u> (88页)

摘要：For some $\varepsilon > 10^{-36}$, we give a $3/2 - \varepsilon$ approximation algorithm for metric TSP

by Karlin, Klein, Gharan