离散数学 第一章 知识点复习

@gylidian

最后修改时间: 2019/1/10 08:22

命题

命题: 判断结果唯一的`陈述句`

命题的真值: 判断的结果

真值的取值: 真与假

真命题: 真值为真的命题

假命题: 真值为假的命题

> 注意:
>
> 感叹句、
>
> 祈使句、
>
> 疑问句、
>
> 陈述句中的悖论、//我在说谎
>
> 判断结果不唯一确定的 //x+5>3
>
> 都不是命题

命题的分类

简单命题(原子命题): 简单陈述句构成的命题

复合命题: 由简单命题与联结词按一定规则复合而成的命题

命题常项(常元)

命题变项(变元)

命题联结词

1. 否定式 否定联结词 `¬` **非**
2. **合取**式 合取联结词 `∧` **且**
3. **析取**式 析取联结词 `∨` **或**
    1. **相容或**(**可兼或**) 当命题P和Q的真值都为真时，其值也为真
    2. 排斥或 要么 要么

4. 蕴涵式　蕴涵联结词 `→`

   p→q，p是蕴涵式的前件，q为蕴涵式的后件， q 为 p 的必要条件（p被q包含啦）

   前真后假才为假

   当P 则 Q、仅当...则... **Q→P**、P **仅当Q**

   只要P 就Q、如果P 那么Q

   因为P 所以Q

   只有Q 才 P、**除非Q** 才 P、

   否则非 ......、

5. 等价式　等价联结词 `↔`

   p↔q，当且仅当　**p和q同时为真 同时为假**　就是真

   逻辑关系: p与q 互为 充分必要条件

联结词的优先顺序为： `¬` `∧` `∨` `→` `↔`

如果出现的联结词同级，又无括号时，则按从左到右的顺序运算;

若遇有括号时，应该先进行括号中的运算.

命题联结词的扩充

6. ⊕排斥(异或)
7. ↑ 与非
8. ↓ 或非

命题公式

- 单个命题变元是合式公式，并简称为原子命题公式;
- 如果A是合式公式，那么(¬A)也是合式公式;
- 如果A, B都是合式公式，那么 (A∧B), (A∨B), (A→B), (A↔B)都是**合式公式**（也都是重言式)
- 当且仅当**有限次**地应用1), 2), 3)所得到的包含命题变元、联结词和括号的字符串是合式公式

合式公式的层次

> p　　　　　　　　0层
> ¬p　　　　　　　 1层
> ¬p→q　　　　　　2层
> ¬(p→q)↔r　　　　3层
> ((¬p∧q)→r)↔(¬r∨s)　4层

公式的赋值

定义 给公式A中的命题变项 p1, p2, ... , pn指定一组真值称为对A的一个**赋值**或**解释**

成真赋值: 使公式为真的赋值

成假赋值: 使公式为假的赋值

真值表: 公式A在所有赋值下的取值情况列成的表

公式的类型

(1) 若A无成假赋值，则称A为**重言式**(也称**永真式**)

(2) 若A无成真赋值(**不是重言式**)，则称A为**矛盾式**(也称**永假式**)

(3) 若A**不是矛盾式**，则称A为**可满足式**

命题符号化

逻辑等价

真值表相同（任一组赋值 得到的两公式的真值都相同）

A⇔B

✨逻辑等价公式（熟记）

双重否定 A⇔¬¬A

幂等律 A⇔A∨A 、 A⇔A∧A

交换律 A∨B⇔B∨A、 A∧B⇔B∧A

结合律 (A∨B)∨C⇔A∨(B∨C) 、(A∧B)∧C⇔A∧(B∧C)

分配律

A∨ (B∧C)⇔ (A∨B)∧(A∨C) （∨**对** ∧的分配律)

A∧ (B∨C)⇔ (A∧B)∨(A∧C) （∧**对** ∨的分配律)

德摩根律

¬(A∨B)⇔ ¬A∧¬B

¬(A∧B)⇔ ¬A∨¬B

零律 A∨1⇔1 、 A∧0⇔0

同一律 A∧1⇔A 、 A∨0⇔A

排中律 A ∨¬**A** ⇔**1**

矛盾律 A ∧¬**A** ⇔**0**

蕴涵律 A→B⇔¬A∨B

等价律A ↔ B⇔(A→B)∧(B→A)

假言易位律 A→B⇔¬B→¬A

等价否定律A ↔ B ⇔ ¬A ↔ ¬B

归谬律 (A→B)∧(A→¬B) ⇔ ¬A

等值演算与置换规则

等值演算:

由已知的等值式推演出新的等值式的过程

置换规则：若A⇔B, 则F(B)⇔F(A)

等值演算的基础：

(1) 等值关系的性质：自反、对称、传递

(2) 基本的等值式

(3) 置换规则

对偶

在给定的仅使用联结词¬，∧，∨的命题公式A中，若**把∧和∨互换**，**0和1互换**

而得到一个命题公式A*，则称A*是A的对偶式。

显然，A也是A*的对偶式；可见，A*和A互为对偶式且(A*)*=A

设A和B是两个命题公式，若A⇔B，则A*⇔B*

范式

一个**简单析取式** 是 **重言式** 当且仅当 它同时含某个命题变元及它的否定式。 ∨∨∨

一个**简单合取式** 是 **矛盾式** 当且仅当 它同时含某个命题变元及它的否定式。 ∧∧∧

析取、合取范式

1）由有限个简单合取式构成的析取式 称为 **析取范式。**

2）由有限个简单析取式构成的合取式 称为 **合取范式。**

3）析取范式与合取范式统称为范式。

析取范式与合取范式

文字:命题变项及其否定的总称

简单析取式:有限个文字构成的析取式

如 $p, \neg q, p\vee\neg q, p\vee q\vee r, \ldots$

简单合取式:有限个文字构成的合取式

如 $p, \neg q, p\wedge\neg q, p\wedge q\wedge r, \ldots$

析取范式:由有限个简单合取式组成的析取式

$A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_r$, 其中$A_1,A_2,\ldots,A_r$是简单合取式

合取范式:由有限个简单析取式组成的合取式

$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_r$, 其中$A_1,A_2,\ldots,A_r$是简单析取式

一个**文字** 既是 **简单析取式**∨∨∨ 又是 **简单合取式**∧∧∧∧∧

析取范式 是由 一堆简单合取式∧∧∧构成的　∨∨∨∨∨

合取范式 是由 一堆简单析取式∨∨∨构成的　∧∧∧∧∧

任何命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式

求公式A的范式的步骤

(1) **消去****→，⟷**

(2) 否定联结词¬ **的内移或消去**

双重否定 A⇔¬¬A

德摩根律 ¬(A∨B)⇔ ¬A∧¬B, ¬(A∧B)⇔ ¬A∨¬B

(3) 使用分配律　∧对∨分配（析取范式）　∨对∧分配（合取范式）　和　结合律

极小项与极大项

在含有n个命题变项的简单合取式(简单析取式)中，

若每个命题变项均以文字的形式出现且仅出现一次，

称这样的 **简单合取式**(简单析取式) 为 **极小项**(极大项)

> 说明：
>
> n个命题变项产生2n个极小项和2n个极大项

> 2n个极小项（极大项）均互不等值
>
> 在极小项和极大项中文字均按下标或字母顺序排列
>
> 用mi表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十
>
> 进制表示. 用Mi表示第i个极大项，其中i是该极大项成
>
> 假赋值的十进制表示, mi(Mi)称为极小项(极大项)的名称.
>
> mi与Mi的关系：$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$， $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

由p, q两个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

主析取范式与主合取范式

主析取范式：由极小项构成的析取范式

主合取范式：由极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变项为p, q, r时，

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ 是主析取范式

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\wedge M_5$ 是主合取范式

A的主析取范式：与A等值的主析取范式

A的主合取范式：与A等值的主合取范式.

任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是唯一的

用 等值演算法 求公式的主范式 的步骤

(1) 先求析取范式（合取范式）

(2) 将 **不是极小项**（极大项）的**简单合取式**（简单析取式）

化成

与之等值的 **若干个极小项的析取**（极大项的合取）

需要利用同一律（零律）、排中律（矛盾律）、分配律、幂等律等

(3) 极小项（极大项）用名称mi（Mi）表示，并按角标从小到大顺序排序

例 求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$ 的主析取范式与主合取范式.

(1) 求主析取范式

$$(p\to\neg q)\to r$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r, \qquad \text{（析取范式）} \quad ①$$

$$(p\wedge q)$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_6\vee m_7, \qquad ②$$

$$r$$

$$\Leftrightarrow(\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$$

$$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7 \qquad ③$$

②, ③代入①并排序，得

$$(p\to\neg q)\to r\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7 \text{（主析取范式）}$$

(2) 求主合取范式

$$(p\to\neg q)\to r$$

$$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r), \qquad \text{（合取范式）} \quad ①$$

$$p\vee r$$

$$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$$

$$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$$

$$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2, \qquad ②$$

$q \vee r$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee q \vee r$

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_4$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p \to \neg q) \to r \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$ （主合取范式）

主范式的用途——与真值表相同

(1) 求公式的成真赋值和成假赋值

例如 $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$,

其成真赋值为001, 011, 101, 110, 111,

其余的赋值 000, 010, 100为成假赋值.

类似地，由主合取范式也可立即求出成假赋值和成真赋值.

(2) 判断公式的类型

设A含n个命题变项，则

A为重言式$\Leftrightarrow$$A$的主析取范式含$2^n$个极小项

$\Leftrightarrow$$A$的主合取范式为1.

A为矛盾式$\Leftrightarrow$$A$的主析取范式为0

$\Leftrightarrow$$A$的主合取范式含$2^n$个极大项

A为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow$$A$的主析取范式中至少含一个且不含全部极小项

$\Leftrightarrow$$A$的主合取范式中至少含一个且不含全部极大项

(3) 判断两个公式是否等值

例 用主析取范式判断下述两个公式是否等值:

(1) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\wedge q)\rightarrow r$

(2) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$

解 $p\rightarrow(q\rightarrow r) = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\rightarrow r = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\rightarrow q)\rightarrow r = m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

故(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

说明:

由公式A的主析取范式确定它的主合取范式，反之亦然.

用公式A的真值表求A的主范式.

例题

例 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业

的大学生中选派一些人出国学习. 选派必须满足

以下条件:

(1)若赵去，钱也去;

(2)李、周两人中至少有一人去;

(3)钱、孙两人中有一人去且仅去一人;

(4)孙、李两人同去或同不去;

(5)若周去，则赵、钱也去.

试用主析取范式法分析该公司如何选派他们出国?

> **解此类问题的步骤为:**
>
> **① 将简单命题符号化**
>
> **② 写出各复合命题**
>
> **③ 写出由②中复合命题组成的合取式**∧∧∧∧∧　并且并且并且并且并且
>
> **④ 求③中所得公式的主析取范式**∨∨∨∨∨　把各个极小项 并上　就是最终结果啦（其实就是个 只有一个文字的 大合取式）

解 ① 设p：派赵去，q：派钱去，r：派孙去，

s：派李去，u：派周去.

② (1) $(p\rightarrow q)$

(2) $(s\vee u)$

(3) $((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))$

(4) $((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))$

(5) $(u\rightarrow(p\wedge q))$

③ (1)～(5)构成的合取式为

$$A=(p\rightarrow q)\wedge(s\vee u)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))\wedge((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))\wedge(u\rightarrow(p\wedge q))$$

④ $A\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s\wedge u)$

结论：由④可知，A的成真赋值为00110与11001，因而派孙、李去（赵、钱、周不去）或派赵、钱、周去（孙、李不去）.

A的演算过程如下：

$A\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))\wedge(s\vee u)\wedge(\neg u\vee(p\wedge q))\wedge((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))$ （交换律）

$B_1=(\neg p\vee q)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))$

$\Leftrightarrow((\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(q\wedge\neg r))$ （分配律）

$B_2=(s\vee u)\wedge(\neg u\vee(p\wedge q))$

$\Leftrightarrow((s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge s)\vee(p\wedge q\wedge u))$ （分配律）

$B_1\wedge B_2\Leftrightarrow(\neg p\wedge q\wedge\neg r\wedge s\wedge\neg u)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg u)$

$\vee(q\wedge\neg r\wedge s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge s)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge u)$

再令 $B_3=((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))$

得 $A\Leftrightarrow B_1\wedge B_2\wedge B_3$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s\wedge u)$

注意：在以上演算中多次用矛盾律

要求：自己演算一遍

推理理论

定义 若对于每组赋值，或者$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 均为假，或者当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时，$B$也为真，则称由$A_1$, A_2, …, A_k推B的推理正确，否则推理不正确（错误）.

"$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推B"的推理正确

当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式.

推理的形式结构: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$ 或

前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论: B

若推理正确，则记作: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$.

判断推理是否正确的方法

- 真值表法
- 等值演算法　　判断推理是否正确
- 主析取范式法
- 构造证明法　　证明推理正确

说明：用前3个方法时采用形式结构

"$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$".

用构造证明时，采用

"前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$, 结论: B".

例题

(2) 若今天是1号，则明天是5号. 明天是5号. 所以今天是1号.

解 设p：今天是1号，q：明天是5号.

推理的形式结构为: $(p\to q)\wedge q\to p$

证明（用主析取范式法）

$$(p\to q)\wedge q\to p$$
$$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge q\to p$$
$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p$$
$$\Leftrightarrow \neg q\vee p$$
$$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$$
$$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_3$$

结果不含m_1, 故01是成假赋值，所以推理不正确.

✨**推理定律——重言蕴涵式**

重要的推理定律

$A\Rightarrow(A\vee B)$	附加律
$(A\wedge B)\Rightarrow A$	化简律
$(A\to B)\wedge A\Rightarrow B$	假言推理
$(A\to B)\wedge\neg B\Rightarrow\neg A$	拒取式
$(A\vee B)\wedge\neg B\Rightarrow A$	析取三段论
$(A\to B)\wedge(B\to C)\Rightarrow(A\to C)$	假言三段论
$(A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C)\Rightarrow(A\leftrightarrow C)$	等价三段论
$(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(A\vee C)\Rightarrow(B\vee D)$	构造性二难

$(A\to B)\wedge(\neg A\to B)\Rightarrow B$　构造性二难（特殊形式）

$(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(\neg B\vee\neg D)\Rightarrow(\neg A\vee\neg C)$

破坏性二难

证明

描述推理过程的命题公式序列，其中每个命题公式或者是已知的前提，或者是由前面的命题公式应用推理规则得到的结论.

✨推理规则

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

(4) 假言推理规则

$$\begin{array}{c} A\to B \\ A \\ \hline \therefore B \end{array}$$

(5) 附加规则

$$\begin{array}{c} A \\ \hline \therefore A\lor B \end{array}$$

(6) 化简规则

$$\begin{array}{c} A\land B \\ \hline \therefore A \end{array}$$

(7) 拒取式规则

$$\begin{array}{c} A\to B \\ \neg B \\ \hline \therefore \neg A \end{array}$$

(8) 假言三段论规则

$$\begin{array}{c} A\to B \\ B\to C \\ \hline \therefore A\to C \end{array}$$

(9) 析取三段论规则

$$\begin{array}{c} A\lor B \\ \neg B \\ \hline \therefore A \end{array}$$

(10)构造性二难推理规则

$$\begin{array}{c} A\to B \\ C\to D \\ A\lor C \\ \hline \therefore B\lor D \end{array}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\begin{array}{c} A\to B \\ C\to D \\ \neg B\lor\neg D \\ \hline \therefore \neg A\lor\neg C \end{array}$$

(12) 合取引入规则

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline \therefore A\land B \end{array}$$

构造证明之一——直接证明法

例 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我就有课. 若有课，今天必备课. 我今天下午没备课. 所以，

明天不是星期一和星期三.

解 设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我有课，s：我备课

推理的形式结构为

前提：$(p\vee q)\rightarrow r$, $r\rightarrow s$, $\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

证明

① $r\rightarrow s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg r$	①②拒取式
④ $(p\vee q)\rightarrow r$	前提引入
⑤ $\neg(p\vee q)$	③④拒取式
⑥ $\neg p\wedge\neg q$	⑤置换

构造证明之二——附加前提证明法

欲证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：$C\rightarrow B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

结论：B

例题

例 构造下面推理的证明:

2是素数或合数. 若2是素数，则$\sqrt{2}$是无理数. 若$\sqrt{2}$是无理数，则4不是素数. 所以，如果4是素数，则2是合数.

用附加前提证明法构造证明

解 设 p：2是素数，q：2是合数，

r：$\sqrt{2}$是无理数，s：4是素数

推理的形式结构

前提：$p\vee q$, $p\rightarrow r$, $r\rightarrow\neg s$

结论：$s\rightarrow q$

证明

① s	附加前提引入
② $p\rightarrow r$	前提引入
③ $r\rightarrow\neg s$	前提引入
④ $p\rightarrow\neg s$	②③假言三段论
⑤ $\neg p$	①④拒取式
⑥ $p\vee q$	前提引入
⑦ q	⑤⑥析取三段论

请用直接证明法证明之

构造证明之三——归谬法(反证法)

欲证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

将$\neg B$加入前提，若推出矛盾，则得证推理正确.

理由:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

括号内部为矛盾式当且仅当$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B)$为重言式

例题

例 构造下面推理的证明

前提：$\neg(p \wedge q) \vee r$, $r \rightarrow s$, $\neg s$, p

结论：$\neg q$

证明（用归缪法）

① q	结论否定引入
② $r \rightarrow s$	前提引入
③ $\neg s$	前提引入
④ $\neg r$	②③拒取式
⑤ $\neg(p \wedge q) \vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p \wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦ $\neg p \vee \neg q$	⑥置换
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p \wedge p$	⑧⑨合取

请用直接证明法证明之