第三章 集合 复习

@gylidian

最后修改时间: 2019/1/10 07:31

并　$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

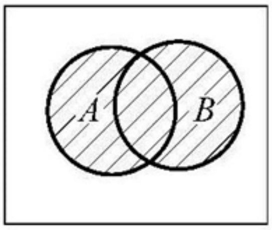
交　$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

相对补　$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$

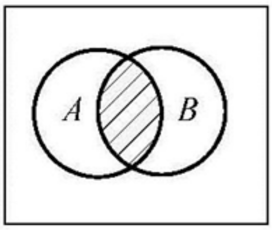
对称差　$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$

$\qquad = (A \cup B) - (A \cap B)$

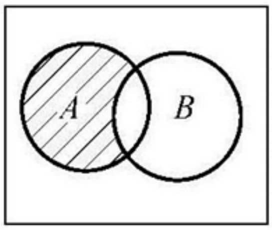
绝对补　$\sim A = E - A$



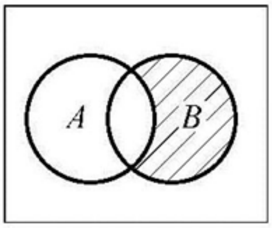
$A \cup B$



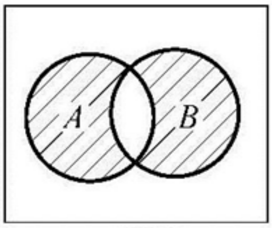
$A \cap B$



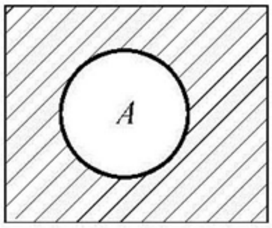
$A - B$



$B - A$



$A \oplus B$



$\sim A$

- 运算顺序：~和幂集优先，其他由括号确定
- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

  $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$

  $A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}$
- 某些重要结果

  $\varnothing \subseteq A - B \subseteq A$

  $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$（后面证明）

  $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B = A$

集合运算的算律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C=$ $A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C=$ $A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

吸收律的前提：$\cup$、$\cap$可交换

补交转换律：**A-B=A∩~B**

	$-$	$\sim$
$D.M$ 律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

包含排斥原理

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots$$

$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|$$

就2个的话，前∪后∩　前∩后∪

例题

例2

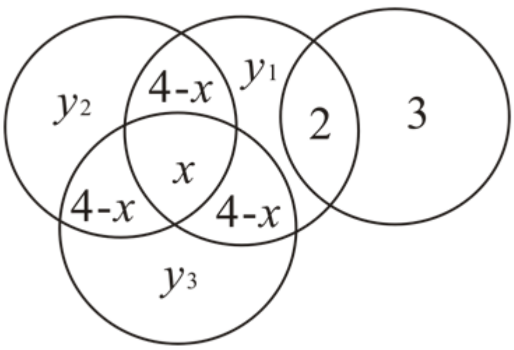
24名科技人员，每人至少会1门外语.

英语：13；　日语：5；　德语：10；　法语：9

英日：2；　英德：4；　英法：4；　法德：4

会日语的不会法语、德语

求：只会1种语言人数，会3种语言人数



$x+2(4-x)+y_1+2=13$

$x+2(4-x)+y_2=10$

$x+2(4-x)+y_3=9$

$x+3(4-x)+y_1+y_2+y_3=19$

$x=1,\ y_1=4,\ y_2=3,\ y_3=2$

幂集合

无次序

把一个集合的 0元、1元、2元....按顺序列出来然后合起来

P(A)=　{A的所有**子集**}

笛卡尔积

有次序

序偶$<x,y>$其元素可以属于两个不同的集合，任给两个集合A,B，可以定义一种序偶的集合

定义3-4.2 令A和B是任意两个集合，若序偶的第一元素属于A，而第二元素属于B，所有这样的序偶构成的集合称为集合A和B的笛卡尔积或直积，记作$A \times B$，

$$A \times B=\{<x,y> \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

约定

- $A_1 \times A_2 \times A_3=(A_1 \times A_2) \times A_3$;
  $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4=(A_1 \times A_2 \times A_3) \times A_4$
- 一般地，
  $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n=(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$
  $=\{<x_1, x_2, \ldots, x_n> \mid (x_1 \in A_1) \wedge (x_2 \in A_2) \wedge \ldots \wedge (x_n \in A_n)\}$
- $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$可以看成是$n$元组构成的集合
- $A \times A$简记为A^2；一般地，$A \times A \times \ldots \times A$简记为$A^n$

注

- $A \times B \neq B \times A$
- 若$A=\varnothing$或$B=\varnothing$, 则$A \times B=\varnothing$
- $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$

定理3-4.1 设A,B,C为任意三个集合, 则

a) $A \times (B \cup C)=(A \times B) \cup (A \times C)$

b) $A \times (B \cap C)=(A \times B) \cap (A \times C)$

c) $(A \cup B) \times C=(A \times C) \cup (B \times C)$

d) $(A \cap B) \times C=(A \times C) \cap (B \times C)$

定理3-4.2 若$C \neq \varnothing$, 则

$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C) \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B)$

定理3-4.3 设A,B,C,D为四个非空集合, 则

$A \times B \subseteq C \times D$当且仅当$A \subseteq C, B \subseteq D$

两个集合的笛卡尔积仍然是集合，故可以和其它集合继续做笛卡尔积