第四章 二元关系 复习

@gylidian

最后修改时间: 2019/1/10 07:18

有序对

由两个客体 x 和 y，按照一定的顺序组成的

二元组称为 **有序对**，记作**<x,y>**

有序对性质
有序性 <x,y>≠<y,x> （当x≠y时）
<x,y> 与 <u,v> 相等的充分必要条件是
<x,y>=<u,v> <=> x=u ∧ y=v

笛卡儿积的性质

不适合交换律 $A\times B\neq B\times A \quad (A\neq B, A\neq\varnothing, B\neq\varnothing)$

不适合结合律 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing, B\neq\varnothing)$

对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$
$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$
$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$
$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

若A或B中有一个为空集，则$A\times B$就是空集.

$$A\times\varnothing=\varnothing\times B=\varnothing$$

若$|A|=m$, $|B|=n$，则 $|A\times B|=mn$

二元关系

定义 如果一个集合满足以下条件之一：

（1）集合非空, 且它的元素都是有序对

（2）集合是空集

则称该集合为一个二元关系, 简称为关系，记作R.

如$<x,y>\in R$, 可记作 xRy；如果$<x,y>\notin R$, 则记作$x\not{R}y$

实例：$R=\{<1,2>,<a,b>\}$, $S=\{<1,2>,a,b\}$.

R是二元关系, 当a, b不是有序对时，S不是二元关系

根据上面的记法，可以写 $1R2$, aRb, $a\not{R}c$ 等.

从A到B的关系与A上的关系

定义 设A,B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做从A到B的二元关系, 当$A=B$时则叫做 A上的二元关系.

例4 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, $R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A\times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$. 那么 R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系, R_3和R_4同时也是 A上的二元关系.

计数

$|A|=n$, $|A\times A|=n^2$, $A\times A$的子集有2^{n^2}个. 所以 A上有 2^{n^2}个不同的二元关系.

例如 $|A|=3$, 则 A上有=512个不同的二元关系.

A上重要关系的实例

> 设 A 为任意集合，
> $\varnothing$是 A 上的关系，称为空关系
> E_A, I_A 分别称为全域关系与恒等关系，定义如下：
>
> $E_A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$
>
> $I_A=\{<x,x>|x\in A\}$
>
> 例如, $A=\{1,2\}$, 则
>
> $E_A=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$
>
> $I_A=\{<1,1>,<2,2>\}$
>
> 小于等于关系 L_A, 整除关系D_A, 包含关系$R_{\subseteq}$定义:
>
> $L_A=\{<x,y>|\ x,y\in A\wedge x\le y\}$, $A\subseteq\mathbf{R}$，$\mathbf{R}$为实数集合
>
> $D_B=\{<x,y>|\ x,y\in B\wedge x$整除$y\}$,
>
> $B\subseteq\mathbf{Z}^*$, $\mathbf{Z}^*$为非0整数集
>
> $R_{\subseteq}=\{<x,y>|\ x,y\in A\wedge x\subseteq y\}$, A是集合族.
>
> 类似的还可以定义大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等等.

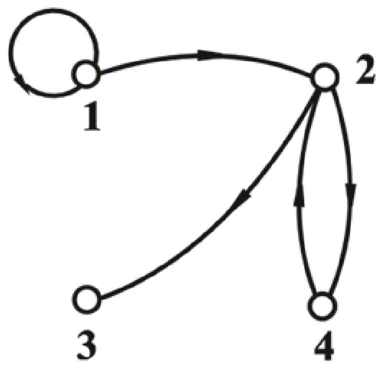
关系的表示

$A=\{1,2,3,4\}$,

$R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$,

R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$



关系的运算

定义域、值域和域

$$\mathrm{dom}R = \{ x \mid \exists y\, (<x,y>\in R) \}$$

$$\mathrm{ran}R = \{ y \mid \exists x\, (<x,y>\in R) \}$$

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$$

例1 $R=\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>\}$, 则

$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$

逆与合成

$$R^{-1} = \{<y,x> \mid <x,y>\in R\}$$

$$R\circ S = |<x,z> \mid \exists\, y\, (<x,y>\in R\wedge<y,z>\in S) \}$$

例2 $R=\{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$

$S=\{<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

$R^{-1}=\{<2,1>, <3,2>, <4,1>, <2,2>\}$

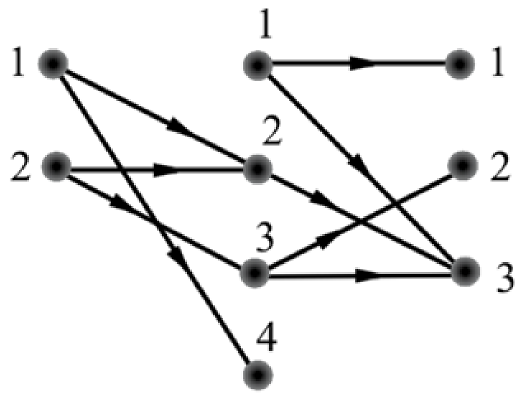
$R\circ S=\{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

$S\circ R=\{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$

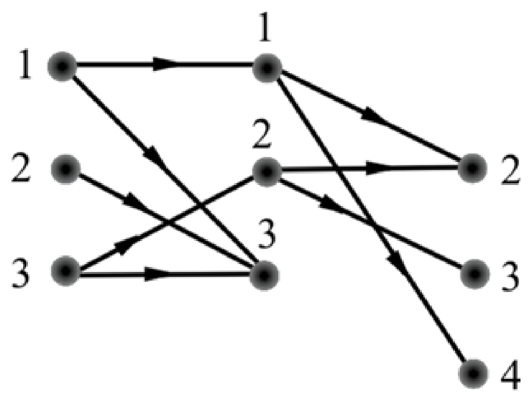
利用图示（不是关系图）方法求合成

$R\circ S=\{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

$S\circ R=\{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$



$R\circ S$



$S\circ R$

关系基本运算的性质

定理1 设F是任意的关系, 则

- (1) $(F^{-1})^{-1}=F$
- (2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

定理2 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1}= G^{-1}\circ F^{-1}$

就是说，满足结合律　然后一前一后 变 一后$^{-1}$一前$^{-1}$

> **A上关系的幂运算**
>
> 设R为A上的关系, n为自然数, 则 R 的 n次幂定义为:
>
> (1) $R^0=\{<x,x> \mid x\in A\}=I_A$
>
> (2) $R^{n+1}=R^n\circ R$

例3 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$, 求$R$的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

解 R与R^2的关系矩阵分别为

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \quad M^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

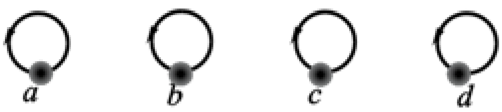
同理，$R^0=I_A$, R^3和R^4的矩阵分别是:

$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \quad M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}, \quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此$M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$. 因此可以得到

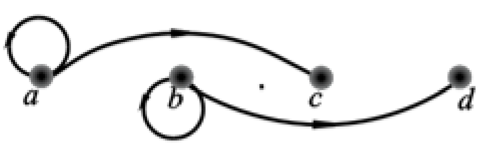
· · · $R^2=R^4=R^6=\ldots$, $R^3=R^5=R^7=\ldots$

$R^0, R^1, R^2, R^3,\ldots$的关系图如下图所示

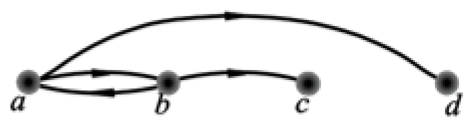


R^0

R^1



$R^2=R^4=\ldots$



$R^3=R^5=\ldots$

幂运算的性质

定理3 设A为n元集, R是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s=R^t$.

定理4 设 R 是 A 上的关系, $m, n\in\mathbb{N}$, 则

(1) $R^m\circ R^n=R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n=R^{mn}$

关系的性质

自反 任取一个A中的元素x，如果都有**<x,x>**在R中，那么就成R在A上是自反的
反自反 任取一个A中的元素x，如果都有<x,x>**不在**R中，那么就成R在A上是反自反的

在关系矩阵上的表示，
自反：**主对角线**上的元素**都是1**
反自反：主对角线上的元素都是0

在关系图上的表示，
自反：每一个顶点**都有环**
反自反：每一个顶点都没有环

对称性：关系矩阵关于主对角线对称 <x,y> <y,x>
反对称性：关系矩阵关于主对角线不对称或者非主对角线上元素全部为0

传递： 如果<a,b>，<b,c>是R的元素，那么<a,c>是R的元素

	自反	反自反	对称	反对称	传递
表达式	$I_A\subseteq R$	$R\cap I_A=\varnothing$	$R=R^{-1}$	$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$	$R\circ R\subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i\neq j$, 则$r_{ji}=0$	对M^2中1所在位置, M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边, 是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边, 是一条有向边(无双向边)	如果顶点x_i连通到x_k, 则从x_i到x_k有边

定义 设R是非空集合A上的关系, R的自反（对称或传递）闭包是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:

（1）R'是自反的（对称的或传递的）

（2）$R \subseteq R'$

（3）对A上任何包含R的自反（对称或传递）关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$, 对称闭包记作 $s(R)$, 传递闭包记作 $t(R)$.

定理1 设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R) = R \cup R^0$

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

(3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

说明:

- 对于有穷集合A ($|A|=n$) 上的关系, (3)中的并最多不超过 R^n.
- 若 R是自反的，则 $r(R)=R$; 若R是对称的，则 $s(R)=R$; 若R是传递的，则 $t(R)=R$.

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r, M_s 和 M_t, 则

$$M_r = M + E$$

$$M_s = M + M'$$

$$M_t = M + M^2 + M^3 + \ldots$$

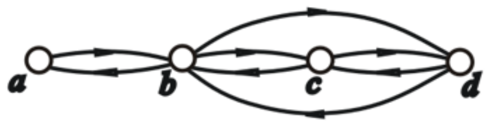
E 是和 M 同阶的单位矩阵, M'是 M 的转置矩阵.

注意在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加.

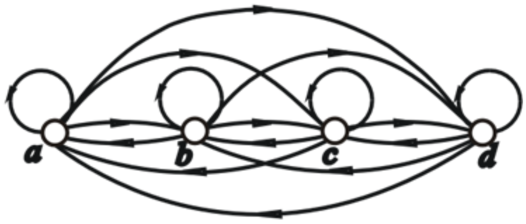
例1 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b>\}$, R和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.

R

$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

偏序关系

定义 非空集合A上的自反、反对称和传递的关系，称为A上的偏序关系，记作≼. 设≼为偏序关系, 如果$<x, y>\in$≼, 则记作 $x≼y$, 读作 x"小于或等于" y.

实例：整数集和小于等于关系构成偏序集$<Z,\le>$，幂集$P(A)$和包含关系构成偏序集$<P(A),R_{\subseteq}>$.

实例

集合A上的恒等关系 I_A 是A上的偏序关系.

小于或等于关系, 整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

偏序集的哈斯图

利用偏序自反、反对称、传递性简化的关系图

特点：

每个结点**没有环**，

两个连通的结点之间的**序关系**通过**结点水平位置**的**高低**表示，放在后面的元素画得越高

具有覆盖关系的两个结点之间连边

求一个偏序集的盖住关系

1. 去掉所有<x,x>
2. 再破坏掉传递性：若<x,y>，<y,z>，~~<x,z>~~ 都在，则去掉 ~~<x,z>~~

剩下的就是**COV(A)** 也就是**盖住关系**

例4 $<\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, R_{整除}>$

$<P(\{a, b, c\}), R_{\subseteq}>$