(2) $\begin{cases} mx + y = -1 \\ 3mx - my = 2m + 3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (a-1)x - (a^2-1)y = 1 \\ (a^2-1)x + (a-1)y = 2; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} kx + y = k + 1 \\ x + ky = 2k \end{cases}$

5. 当k为何值时，方程组

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ kx + (k-2)y = 3 \end{cases}$$

的解中，x与y的值取异号？

§3.三阶行列式与三元线性方程组

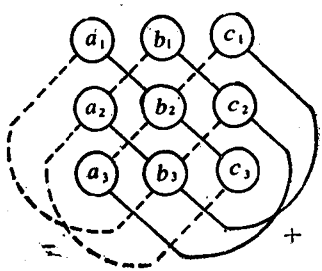
3.1 三阶行列式 仿照二阶行列式，我们可以把九个数排成三行三列的正方形，并在两侧各加一竖直线.

如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

并规定它表示一个数

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \quad (2)$$



这时我们就把（1）叫做一个三阶行列式，（2）式就叫做这个三阶行列式的展开式（或这三阶行列式的值。）

讨论一元二次多项式的根，和一元二次方程根的讨论一样，可由判别式 b^2-4ac 的符号分为三种情形：

当 $b^2-4ac>0$ 时，$f(x)$有两个不同实根；

当 $b^2-4ac=0$ 时，$f(x)$有两个相同实根；

当 $b^2-4ac<0$ 时，$f(x)$没有实根。

同样地对于系数为参数的多项式

$$\varphi_2(x)=ax^2+bx+c$$

的根，也可以系统全面的讨论如下：

1° 当 $a\neq 0$ 时，$\varphi_2(x)$ 为二次多项式，它的根可由上述三种不同情形分别讨论；

2° 当 $a=0$，但 $b\neq 0$ 时，$\varphi_2(x)$ 为一次多项式，它有唯一实根：$-\dfrac{c}{b}$；

3° 当 $a=b=0$，但 $c\neq 0$ 时，$\varphi_2(x)$ 为零次多项式，它没有根；

4° 当 $a=b=c=0$ 时，$\varphi_2(x)=0$ 为零多项式，它有无限多个根。

对于一元二次多项式

$$f(x)=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0)$$

如果有两个根 α_1,α_2 存在，同样也满足韦达定理。即

$$\alpha_1+\alpha_2=-\frac{b}{a};\qquad \alpha_1\cdot\alpha_2=\frac{c}{a}.$$

例2. 若已知二次多项式 $f(x)$有两个实根

$$\alpha_1=\sin(\alpha+\beta),\ \alpha_2=\sin(\alpha-\beta).$$

试求这个二次多项式 $f(x)$。

解： 由韦达定理可知

$$f(x)=x^2-[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]x$$
$$+\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta),$$

所以

$$f(x)=x^2-2x\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$$

·练习·

1． 用配方法求 $f(x)=x^2-(a-b)x+ab-2b$ 的根。

2． 若多项式

$$f(x)=x^2-(a+1)x+2a-1$$

有两个相同的实根，试确定 a 的值，并求出它的根来。

3． 全面讨论多项式 $f(x)=(a+3)x^2-4x+a$ 的根的情形。

***1.2　一元三次和一元高次多项式的根**　我们已经知道对于一个非零常数 $k\neq 0$，方程 $f(x)=0$ 与 $k\cdot f(x)=0$ 具有完全相同的根，因此，相应地就可以知道多项式 $f(x)$ 与多项式 $k\cdot f(x)$ 也有完全相同的根，这就是说，在求一个多项式 $f(x)$ 的根时，可以用求另一个多项式 $kf(x)$ 的根来代替。

应用这个道理，对于一元三次多项式

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\quad(a\neq 0)\qquad(1)$$

求根，就可以转化为对于三次多项式

$$\varphi(x)=x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}$$

的求根问题，不妨把 $\varphi(x)$ 简记为

$$\varphi(x)=x^3+rx^2+sx+t\qquad(2)$$

这叫做一元三次多项式的标准形式，其主要特点是首项系数为1。

为了求出一元三次多项式（2）的根，我们还可以用换元的方法，进一步把它化简。

令 $x=y-\frac{r}{3}$，代入(2)，经展开整理后得

$$g(y)=y^3+\left(s-\frac{r^2}{3}\right)y+\left(t-\frac{rs}{3}+\frac{2r^3}{27}\right),$$

我们再把它简记为

$$g(y)=y^3+py+q=0 \quad (p,q\text{ 为实数}) \qquad (3)$$

并叫做一元三次多项式的简化形式。其主要特点是首项系数为1，而且不含有二次项。

综上所述，只要求出三次多项式的简化形式 $g(y)$ 的根 α，就可求得三次多项式的标准形式 $\varphi(x)$ 的根 $x=\alpha-\frac{r}{3}$，进而求得三次多项式的一般形式 $f(x)$ 的根 $x=\alpha-\frac{b}{3a}$. 因此，一元三次多项式的求根问题，关键就在于求出简化形式三次多项式的根.

例3. 试求多项式

$$f_1(x)=x^3-9x^2+33x-65$$

相应的简化式.

解： 令 $x=y+3$，代入 $f(x)$ 表达式，得

$$\begin{aligned}g_1(y)&=(y+3)^3-9(y+3)^2+33(y+3)-65,\\&=y^3+9y^2+27y+27-9y^2-54y-81+33y\\&\quad+99-65\\&=y^3+6y-20\end{aligned}$$

所以

$$g_1(y)=y^3+6y-20.$$

对于简化一元三次多项式

$$g(y)=y^3+py+q$$

求根，我们可以采用以下方法：

首先，设它的根$y_0=u+v$，则可分别确定u,v，使得

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0 \qquad (*)$$

即

$$u^3+v^3+q+(u+v)(3uv+p)=0$$

这是一个含有两个未知数的方程，为了确定u与v的值，我们可以选取一个条件，在此条件下将方程（$*$）转化为一个二元方程组求解。

我们选择条件，使$3uv+p=0$，即$3uv=-p$，

就将方程($*$)转化为方程组

$$\begin{cases} u^3+v^3+q=0, \\ 3uv=-p. \end{cases}$$

进一步变换方程组为

$$\begin{cases} (u^3+v^3)^2=q^2 \\ 4u^3\cdot v^3=-4\cdot\left(\dfrac{p}{3}\right)^3, \end{cases}$$

两式相减，得$(u^3-v^3)^2=q^2+4\cdot\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$即.

$$u^3-v^3=\pm\sqrt{q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

这样就得出方程组

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3-v^3=\pm\ 2\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}, \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$u^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3},\quad v^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

其中，由于 u,v 在方程组中地位等同，所以我们仅取一组符号即可，所以

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

这样，对于简化三次多项式

$$g(y)=y^3+py+q$$

就得出它的求根公式：

$$y_0=u+v$$

$$=\sqrt[6]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[6]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{3}\right)^3}}。$$

这就是著名的卡尔丹公式。

运用这个公式，一般可以求出三次多项式的至少一个实根。

例4. 求 $f(x)=x^3-9x^2+33x-65$ 的实根。

解： 由例 3 知，$f(x)$ 相应的简化形式，可利用代换 $x=y+3$ 得出

$$g(y)=y^3+6y-20$$

代入卡尔丹公式，求得

$$y=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}。$$

$\therefore$ $f(x)$ 的实根为

$$x=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}+3。$$

注意：在卡尔丹公式中，二次根号下的式子，记作

$$\triangle=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

叫做三次多项式根的判别式，

当 $\triangle>0$ 时，三次多项式有且只有一个实根；

当 $\triangle\leq 0$ 时，三次多项式有三个实根。

详细讨论，需要学习复数后进行。

对于四次多项式的求根，也有一般的公式，然而它比三次多项式更要复杂得多，因而实用价更小，我们这里就略去了。

这里不禁要问：是否任何高次多项式的根都可以有一个求根公式呢？回答是否定的。经过许多数学家的多年努力，于十九世纪廿年代证明了：一般五次以及更高次的多项式不存在求根公式（即不能用它的系数，经过加、减、乘（乘方）、除、开方运算把它的根表达出来）。

·练习·

1. 求出$f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-3x^2+\dfrac{11}{2}x-3$的标准式，并通过适当代换，找出它相应的简化式，求出$f(x)$的实根。
2. 用换元法求特殊四次多项式 $f(x)=4x^4-5x^2+1$ 的实根。

习题 4—1

1. 如果$f(x)=a^2x^2-2a(a-1)x+a-1$有两个相同的实根，试求a和这个实根。
2. 试全面讨论多项式$ax^2-2(a+b+c)x+2(b+c)$的根的情形。
3. 如果已知下列三个多项式中，至少有有一个实数根，试求出实数a的范围：

$x^2+2ax-2a$； $x^2+4ax-4+3$； $x^2+(a-1)x+a^2$

4．如果二次多项式 $x^2-(m-1)x+m$ 的两个根满足下列各关系，试分别求出m的值：

(1) 两根之比为2:3

(2) 两根之差为1．

5．如果二次多项式x^2-ax+a^2-4有两个正根，试求a的取值范围；若只有一个正根时，a又在什么范围内取值呢？

6．如果两个多项式$f(x)=x^2+ax+b$,$g(x)=x^2+bx+a$只有一个共同的根，试求这个根；并求它们另外的两个非共同根的和。

7．用卡尔丹公式求出多项式$x^3-12x+16$的一个实根，再用因式定理求出另外两个实根。

8．如果多项式$x^3-3x^2-12x+3ax+16$有一个正根a,试求a及另外两个根。

*9．如果多项式 $2x^3-7x^2+(k+5)x-k$ 有三个实根，其中两个根互为倒数，试求 k 及三个根。

§2.有理系数多项式的整数根和有理根

对于有理系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(a_n\neq 0), \quad (1)$$

我们可以取系数 $a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$的分母的最小公倍数m，遍乘多项式$f(x)$各项，从而得到

$$mf(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0 \ (b_n\neq 0) \quad (2)$$

(2)显然就是一个整系数多项式，而且(1)与(2)具有相同的根，因而，我们只须讨论整系数多项式$mf(x)$；

另一方面，对于整系数多项式

$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0 \quad (b_n\neq 0)$$

我们还可以提取各系数 $b_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 的公因式 $d\neq 1$，从而得到， $g(x)=d\cdot h(x)$，其中

$$h(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0 \quad (c_n\neq 0) \quad (3)$$

(3) 显然仍是一个整系数多项式，但它的各系数是互质的，即$(c_n,c_{n-1},\cdots,c_1,c_0)=1$.而且(3) 与(2) 的根是相同的。因此，我们只须讨论简化了的整系数多项式$h(x)$。

在本节中，以下提到的整系数多项式，都是指（3）式意义下的多项式，不再声明了。

2.1整系数多项式的整数根和 有理数根 设整系数多项式

$$h(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0 \qquad (3)$$

其中，$c_i\in z(i=0,1,\cdots,n)$，且$(c_0,c_1,\cdots,c_n)=1$.

我们有以下定理：

定理1. 整数 α 是多项式(3)的根的必要条件是α 能够整除c_0。

证明： 由于 α 是 $h(x)$的根，所以 $h(\alpha)=0$，

即

$$c_n\alpha^n+c_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+c_1\alpha+c_0=0,$$

$$\therefore \quad c_0=-\alpha(c_n\alpha^{n-1}+c_{n-1}\alpha^{n-2}+\cdots+c_1),$$

上式右边括号内整数的和、差、积与方幂，由整数的运算性质知，它们是整数，所以，整α除c_0。

这个定理告诉我们，多项式$h(x)$ 的整数根α要在 c_0的因数中寻求；但要注意，定理仅是提供了α是整数根的必要条件，并不是充分条件。因此，可以应用定理先确定$h(x)$的整

数根的范围，再运用综合除法或余式定理在这个范围内试除确定它的根。

例1. 试求 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ 的整数根、

解： 因为常数项 $c_0=-6$，它的因数有

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

所以 $f(x)$ 的整数根可能是 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$、

再用综合除法或余式定理逐个试除，得出只有取1，2，3时，余式为0，因而 $x=1, 2, 3$ 都是多项式的根，其余的因数试除余式均不为零，因而都不是多项式的根，所以 $f(x)$ 的整数根为1，2，3。

例2. 试求 $f(x)=x^3+x^2+x+2$ 的整数根。

解： 先判定整根的范围：由于常数项 $c_0=2$，它的因数有 $\pm 1, \pm 2$ 所以 $f(x)$ 的整根可能是 $\pm 1, \pm 2$ 再逐个试除求余，确定整数根：由直接计算，得

$f(1)=5$，$f(-1)=1$，$f(2)=16$，$f(-2)=-4$。

所以 $\pm 1, \pm 2$ 都不是 $f(x)$ 的根。

因此，多项式 $f(x)$ 没有整数根。

定理2. 既约分数 $\dfrac{p}{q}$ 是整系数多项式（3）的根的必要条件是 p 能整除 c_0，q 能整除 c_n。

证明： 由于 $\dfrac{p}{q}$ 是 $h(x)$ 的根，所以 $h\left(\dfrac{p}{q}\right)=0$，即

$$c_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+c_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\cdots+c_1\frac{p}{q}+c_0=0$$

因此，

$$c_0q^n=-p(c_n\cdot p^{n-1}+c_{n-1}p^{n-2}\cdot q+\cdots+c_1q^{n-1}) \quad (*)$$

$$c_np^n=-q(c_{n-1}p^{n-1}+\cdots+c_1p\cdot q^{n-2}+c_0q^{n-1}) \quad (**)$$

由 (*)得：$p|c_0q^n$（表示p整除c_0q^n），但因为$\frac{p}{q}$为既约分数，$(p,q)=1$，所以$(p,q^n)=1$，因此就可有

$$p|c_0$$

再由(**)可得 $q|c_np^n$，同样由于$(p,q)=1$，因而$(p^n,q)=1$.因此就有

$$q|c_n.$$

这里同样应注意，定理仅给出 $\frac{p}{q}$是 $h(x)$的既约分数（有理数）根的必要条件，并不是充分条件。因而，运用这个定理也只能判定$h(x)$的根的范围，还须要借助综合除法或余式定理才能确定它的根。

例3. 试判断 $f(x)=6x^3+x^2-4x+1$ 可能有哪些有理数根？

解： 因为 $c_3=6$，其因数为±1，±2，±3，±6；$c_0=1$，其因数有±1，所以，$f(x)$可能有的有理数根为±1，$\frac{1}{2}$，$\pm\frac{1}{3}$，$\pm\frac{1}{6}$。

由定理2，不难得出以下推论

推论： 整系数多项式

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

若有有理数根，则有理数根为整数。

如例1，$f(x)$的有理根1，2，3都是整数；又如例2，$f(x)$没有整数根，也就没有有理数根。

例4. 求 $f(x)=6x^4+5x^3+3x^2-3x-2$ 的有理根。

解： 先用定理2判定有理根的范围：因为 $c_n=6$，它，有因数±1，±2，±3，±6；又因 $c_0=-2$，它有因数±1，

± 2，所以 $f(x)$ 可能有的有理数根为

$$\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{1}{3}, \quad \pm\frac{2}{3}, \quad \pm\frac{1}{6}.$$

再用余式定理或综合除法求余，从而确定有理根：由直接计算，得

$$f(1)\neq 0. \ f(-1)\neq 0, \ f(\pm 2)\neq 0 \text{及} f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0.$$

所以

$\pm 1, \pm 2, \ +\frac{1}{2}$都不是$f(x)$的根。

又用$-\frac{1}{2}$试除

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6 & 5 & 3 & -3 & -2 & -\frac{1}{2} \\
 & -3 & -1 & -1 & 2 & \\
\hline
6 & 2 & 2 & -4 & \boxed{0} &
\end{array}$$

所以$-\frac{1}{2}$是 $f(x)$ 的根，由因式定理可得

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(6x^3+2x^2+2x-4).$$

令$f_1(x)=6x^3+2x^2+2x-4$，则$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot f_1(x)$，

对 $f_1(x)$求有理根，试除后知 $f\left(\pm\frac{1}{3}\right)\neq 0$，因而$\pm\frac{1}{3}$

不是 $f_1(x)$的根，当然也不是 $f(x)$的根，再用$\frac{2}{3}$试除：

$$
\begin{array}{rrrr|l}
6 & 2 & 2 & -4 & \frac{2}{3} \\
 & 4 & 4 & 4 & \\
\hline
6 & 6 & 6 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

所以，$\frac{2}{3}$是$f_1(x)$的根，也就是$f(x)$的又一个根.因此

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(6x^2+6x+6)$$

$$=6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x^2+x+1).$$

这里由于x^2+x+1的判别式$\triangle<0$，因而它没有实数根，更不会有有理根，所以$f(x)$的有理根为$-\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$.

·练习·

1． 求$f(x)=6x^5+19x^4+22x^3+23x^2+16x+4$的有理根

2． 证明：多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$有根1的必要充分条件是

$$a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0=0$$

2.2 多项式的正根与负根 对于实系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\quad(a_n\neq 0)$$

的根，我们有以下判定有，无正根或负根的定理：

定理3. 如果实系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\quad(a_n\neq 0)$$

的各项系数$a_i(i=n,n-1,\cdots,1,0)$都是非负数，那么这个多项式$f(x)$就没有正数根。

证明：（用反证法）若$\alpha>0$且$f(\alpha)=0$，则

$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$。

等号左边全是非负数，但由已知其中至少有首项系数不为零，所以它们的和不可能为零，而等号右边为零。这是不可能的。所以$f(\alpha) = 0$不成立，即$f(x)$没有正根。

由于$-f(x)$与$f(x)$有完全相同的根，所以把a_n、a_{n-1}，…，a_1、a_0全是非负数”改为“a_n、a_{n-1}，…，a_1，a_0全是非正数”，则结论不变。

这样一来，如果要求一个各项系数符号统一的多项式的根，就可以不考虑正根了。如练习中的1,° 肯定不会有正根。

定理4. 如果实系数多项式

$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$的偶次项系数都为非负（或非正）数，而奇次项系数又都为非正（或非负）数。那么这个多项式$f(x)$就没有负根。

同学们可以自己用反证法证明这个定理。

有了这两个定理，配合定理1，2就可以进一步缩小求有理根时试除的范围。

例5. 求$f(x) = 5x^6 - 7x^5 - 8x^4 - x^3 + 7x^2 + 8x + 4$的有理根。

解： $f(x)$可能有的有理数根是± 1，± 2，± 4，$\pm\frac{1}{5}$，$\pm\frac{2}{5}$，$\pm\frac{4}{5}$。

用$x-1$试除得 $f(1) = 0$，因而有

$$f(x) = (x-1)(5x^5 - 2x^4 - 10x^3 - 11x^2 - 4x + 4)$$
$$= (x-1)f_1(x);$$

$f_1(x)$ 可能有的有理数根还是那几个，但再用 $x-1$ 试除

$f_1(x)$，不能整除，用$x-2$试除$f_1(x)$，得$f_1(2)=0$，因而有

$$f_1(x)=(x-2)(5x^4+8x^3+6x^2+x-2)=(x-2)f_2(x);$$

$f_1(x)$所没有的根，$f_2(x)$当然也不会有。因此，$f_2(x)$可能有的有理数根是-1，± 2，$\pm\frac{1}{5}$，$\pm\frac{2}{5}$。但再用$x-2$试除$f_2(x)$，不能整除，说明$f_2(x)$已没有正整数根；用$5x-1$试除$f_2(x)$，不能整除，再用$5x-2$试除$f_2(x)$，得$f_2\left(\frac{2}{5}\right)=0$，因而又有

$$f_2(x)=(5x-2)(x^3+2x^2+2x+1)=(5x-2)f_3(x);$$

$f_3(x)$已没有正根，可能有的负根只是$x=-1$；用$x+1$试除$f_3(x)$得$f_1(-1)=0$，因而有

$$f_3(x)=(x+1)(x^2+x+1)=(x+1)f_4(x).$$

$f_4(x)$已没有实数根，因而，说明$f(x)$不再有有理数根。所以$f(x)$的有理数的是1，2，$\frac{2}{5}$，-1。

·练习·

1． 求$f(x)=x^3-4x^2+x+6$的有理根。

2． 解方程$2x^4+x^3+12=7x^2+16x$（仅求有理根）。

习题 4—2

1． 求下列多项式的有理根：

（1） x^3-7x+6；

（2） x^4-2x^2+3x-2；

（3） $x^3-9x^2+26x-24$；

（4） $10x^3-9x^2-3x+2$；

(5) $2x^5-5x^2-2x+2$;

(6) $5x^4+24x^3-15x^2-118x+24$;

(7) $x^4-4a^3x+3a^4$;　　　$(a\in Q)$,

(8) $x^3-ax^2-b^2x+ab^2$　　$(a,\ b\in Q)$.

2. 分解因式:

(1) $6x^4+5x^3y+3x^2y^2-3xy^3-2y^4$;

(2) $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2$;

(3) x^4-4x+3.

3. 解下列方程:

(1) $4x^3-3x-1=0$;

(2) $8x^4-6x^3-7x^2+6x-1=0$.

4. 试证明: -1为多项式$f(x)$的根的必要充分条件是$f(x)$的奇次项系数之和等于$f(x)$的偶次项系数之和.

5. 证明: $f(x)=2x^3+2x-1$ 没有有理根.

6. 求 $g(x)=2x^5+3x^4-15x^3-26x^2-27x-9$的有理根,并分解因式。

§3. 两个多项式的公根与多项式的重根

公根和重根的问题,也是多项式理论中的基本问题,特别是多项式的重根问题,在下一节实根的讨论与计算中将起重要作用。

3.1 两多项式的公根 设多项式 $f(x)$与 $g(x)$都有一个根α,即$f(\alpha)=0$、$g(\alpha)=0$,则α就叫做多项式$f(x)$与$g(x)$的公根。

由因式定理可以知道,多项式$f(x)$有一个根α 的充要条件是 $f(x)$含有一次因式 $x-\alpha$.

因此，对于两个多项式 $f(x)$,$g(x)$的公根 α，就有以下定理：

定理1. 两多项式 $f(x)$，$g(x)$ 有一个公根的必要充分条件是这两个多项式必有一个一次公因式。

证明： 必要性

设$f(x)$，$g(x)$有一个公根α，则由因式定理得

$$f(x)=(x-\alpha)\cdot f_1(x),\quad g(x)=(x-\alpha)\cdot g_1(x).$$

显然,$f(x)$，$g(x)$有一次公因式 $x-\alpha$.

充分性

设$f(x)$，$g(x)$有一公因式$x-\alpha$，则有

$$f(x)=(x-\alpha)\cdot f_1(x),\quad g(x)=(x-\alpha)\cdot g_1(x).$$

显然就有$f(\alpha)=0$，$g(\alpha)=0$.所以，

α 就是 $f(x)$，$g(x)$ 的一个公根。

又由于两个多项式的公因式都是它们的最高公因式的因式，因此，两多项式的公根必定都是它们的最高公因式的根。反之，两多项式的最高公因式的根也必定是这两个多项式的公根。

这样一来，要求两个多项式的公根，只要先求出它们的最高公因式，再求这一公因式的根就可以了。

例1. 求$f(x)=2x^3+x^2-5x-3$与$g(x)=2x^3-5x^2+x+3$的公根。

解： 先用辗转相除法求得

$$(f(x),\ g(x))=x^2-x-1$$

这一多项式的根为$x=1\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.所以$f(x)$与$g(x)$的公根为

$$x_1=1+\frac{\sqrt{5}}{2},\quad x_2=1-\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

如果能通过确定每个多项式有理根的范围首先将多项式进行因式分解，那么也一样可以求得两多项式的公根，这样也就省去辗转相除求最高公因式的繁杂计算了。

还可以先求出一个多项式的根，再去逐个代入另一多项式进行检验，凡能使第二个多项式的值为〇的，就是公根；否则就不是。

例2. 试求 $f(x)=ax^2+bx+c$ 与 $g(x)=x^2-1$ 有一个公根的必要条件。

解： 因为 $g(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$，所以 $g(x)$ 有两个根 1，-1，因此，$f(x)$ 与 $g(x)$ 有一个公根只可能是 1 或 -1

若公根为 1，则 $a+b+c=0$，

若公根为 -1，则则 $a-b+c=0$，

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有一个公根的必要条件是

$$a+b+c=0，\text{或 } a-b+c=0.$$

·练习·

1. 试求 $f(x)=4x^4+26x^3+51x^2-7x-24$ 与

$g(x)=3x^4+20x^3+32x^2-8x-32$ 的公根。

2. 试求 $f(x)=4x^5-5x^4+1$ 与 $g(x)=x^4-4x+3$ 的公根。

3. 如果 $f(x)=x^2+kx+1$ 与 $g(x)=x^2+x+k$ 且 $k\neq 1$，并已知它们只有一个公根。试求 k 的值及这一公根的值。

3.2 多项式的重根 对于多项式 $f(x)$，如果有

$$f(x)=(x-\alpha)^m\cdot q(x)。\text{且 } q(\alpha)\neq 0\ (m>1\in Z)$$

那么，我们就说 α 是 $f(x)$ 的 m 重根。

重根的判定和排除，是计算多项式的实数根时很注重的问题。在此，我们给出以下定理。

定理2. 如果α是多项式$f(x)$的m重根($m>1$)，那么α必定是$f'(x)$的$m-1$重根。

证明：由定理条件知

$f(x)=(x-\alpha)^{m}\cdot q(x)$ 且 $q(\alpha)\neq 0$，

又由多项式乘积的求导数公式，得

$$f'(x)=m(x-\alpha)^{m-1}\cdot q(x)+(x-\alpha)^{m}\cdot(x-\alpha(q'(x)$$
$$=(x-\alpha)^{m-1}\cdot[mq(x)+(x-2)q'(x)],$$

其中由于$q(\alpha)\neq 0$，$m>1$，因而 $m\cdot q(\alpha)\neq 0$ 所以α就是$f'(x)$的$m-1$重根。

定理3 α是多项式$f(x)$的二重根的必要充分条件是α为$f(x)$与$f'(x)$的公根，且$f''(\alpha)\neq 0$

证明： 必要性，

由泰勒公式，得

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n \qquad (*)$$

由于α是$f(x)$的二重根，根据因式定理，得

$$(x-\alpha)^2|f(x).$$

因而有

$$f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)=0.$$

所以，$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$，且$f''(\alpha)\neq 0$，

α是$f(x)$，$f'(x)$的公根。

对任意x都成立

充分性，

由$f(x)$、$f'(x)$有公根α，且$f''(\alpha)\neq 0$ 则$f(\alpha)=0$，

$f'(\alpha)=0$．再从泰勒公式(*)不难得出

$$(x-\alpha)^2|f(x)。$$

所以，α 是 $f(x)$的二重根。

定理3 完全可以类似地推广到m 重根的情形，得到下述定理：

定理4． α 是$f(x)$的m重根的必要充分条件是α是$f(x)$，$f'(x)$，…，$f^{(m-1)}(x)$的公根，且$f^{(m)}(\alpha)\neq 0$．

如果再结合定理 1.2 的内容，我们就可以得出：要判定$f(x)$有没有重根，只要看$f'(x)$，$f(x)$的最高公因式就可以了，若最高公因式含有因式$(x-\alpha)^{m-1}$，则可以断定 $f(x)$有 m重根α，同时还可以断定$f'(x)$有$m-1$重根α，$f''(x)$有$m-2$重根α，…．

例3． 试求 $f(x)=x^5-3x^4+2x^3+2x^2-3x+1$ 的重根

解： 先求出导数

$$f'(x)=5x^4-12x^3+6x^2+4x-3,$$

再用辗转相除法求出

$$(f(x),f'(x))=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3.$$

所以，$(x-1)^3|f(x)$，$(x-1)|f'(x)$，即$x=1$是$f(x)$与$f'(x)$的公根因此．$f(x)$ 有重根 1 （而且是$f(x)$的 4 重根，$f'(x)$的 3 重根）。

例4． 求证方程

$$x^4+2x^3-15x^2+4x+20=0$$

有二重根，并求出这个方程的根。

解： 设 $f(x)=x^4+2x^3-15x^2+4x+20$，

$$f'(x)=4x^3+6x^2-30x+4.$$

由辗转相除法可求出

$$(f(x),f'(x))=x-2,$$ 这是一次式。

所以，$f(x)$有二重根2，也就是原方程有二重根2，再用因式定理，得

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-2)^2(x^2+6x+5) \\
&= (x-2)^2(x+1)(x+5)
\end{aligned}
$$

因此，原方程可变形为

$$(x-2)^2(x+1)(x+5)=0$$

所以原方程的各根为：2，2，－1，－5。

·练习·

1．判定下列多项式是否有重根？若有，试求出重根来：

（1）$f(x)=x^4-4x^3+8x+4$；

（2）$g(x)=4x^3+8x^2-8x+3$．

2．举例说明定理2的逆命题是不正确的。

习题 4—3

1．求下列各组多项式的公根：

（1）$f(x)=x^3+5x^2+3x-9$，

$g(x)=x^3+7x^2+15x+9$；

（2）$f(x)=x^3+3x^2-2x-6$，

$g(x)=x^3-3x^2-2x+6$；

（3）$f(x)=x^4-5x^2+4$，$g(x)=x^2+x-2$．

2．已知 $f(x)=2x^2-(3m+2)x+12$ 与 $g(x)=4x^2-(9m-2)x+36$有一个公根，试求m的值。

3．求下列多项式的重根：

（1）$f(x)=9x^3+12x^2-11x+2$；

（2）$f(x)=x^4+4x^2-4x-3$；

（3）$f(x)=x^4-2x^3-x^2-4x+12$；

（4）$g(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$。

4． 若多项式 $f(x)=x^3-12x+a$ 有重根，试求 a。

5． 试求多项式 $g(x)=x^4-px^2+q$ 有重根的必要条件

6． 已知多项式 $f(x)=x^4-x^3-3x^2+4x-4$ 有两个互为相反数的根，试求出这两个根。

7． 试一试，举例验证：如果多项式 $f(x)$ 有重根，那么多项式 $g(x)=\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$ 就没有重根，但 $g(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的根。

*§4．实系数多项式的实数根

对于实系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\quad(a_n\neq0)$$

的根的讨论，要困难和复杂得多，因为多项式的根除了有理根之外，更多的是存在无理数根，而且五次以上的多项式，求根公式根本没有。因此，如何求出这些多项式的实根（如果存在的话）？特别是如何求出这些多项式的无理根的近似值？就成为我们急需讨论的内容了。

4.1 计算实根近似值的基本思想 求实系数多项式的实根的近似值，主要采用逼近法，其理论根据就是今后要详细学习的中间值定理，我们现在叙述和解释如下：

定理1．（中间值定理）$f(x)$ 是一个实系数的多项式，$a<b$，若 $f(a)$ 与 $f(b)$ 符号相反，则一定存在一实数 c，$a<c<b$ 使 $f(c)=0$。

我们从图象上来解释中间值定理。如图 4－1，由于 $f(a)$

与$f(b)$符号相反，所以点$(a, f(a))$及点$(b, f(b))$分别在x轴的两侧，而曲线$y=f(x)$是连续的。因此它从x轴的一侧运动x到轴的另一侧，至少要“穿过”x轴一次。若在$(c, 0)$点穿过，就有$f(c)=0$。

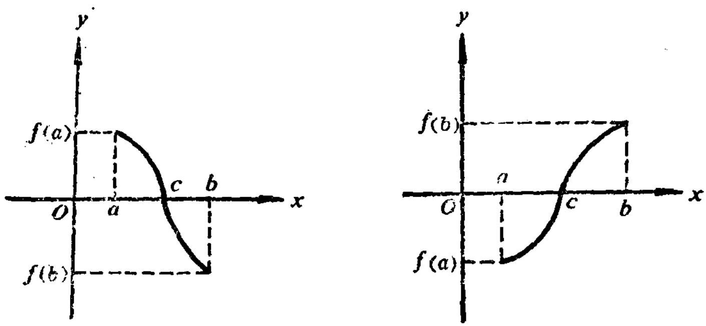


图4—1

这样的解释尽管是直观形象的。但还不能算是严格证明。因为：什么叫连续？为什么多项式函数在$(-\infty, +\infty)$是连续的？这些问题还没有确切的交待过。而且对于一般连续函数的这一中间值定理，我们也不满足于仅仅是几何解释。不过我们目前只是直观承认这一条定理的内容并初步应用它。以后在微积分学习中再详细证明。

例1. 判断多项式

$$f(x)=x^3-3x+1$$

的实根介于哪些连续整数之间？

解： 显然，当$x\leq-3$时，$f(x)<0$，且有：

$f(-2)=-1$，$f(-1)=+3$，$f(0)=+1$，$f(1)=-1$，$f(2)=+3$，$x>3$时，$f(x)>0$。所以$f(x)$在$(-2, -1)$，$(0, 1)$，及$(1, 2)$各有一实根。

例1 说明了中间定理的作用，但并没有告诉我们多项式实根如何定位的基本方法。因为尽管在这一题中，$f(-2)$，$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ 求出后，实根的位置是显然的，但是怎样想到用 -2，-1，0，1，2的函数值作为试探的目标呢？万一$f(x)$的根是一个很大的数，例如10^6左右的数时，岂不要试上10^6个函数值？万一 $f(x)$ 只有一个实数根，再找另两个根时不仅徒劳，而且不知到什么时候才能明确另两个不是实根。何况还可能有一些多项式根本没有实根。

这样看来，要寻求求多项式实根近似值的更完善的途径，必须解决以下三个问题：

1. 确定根的界限——求出一个区间，使多项式的实根在这一范围内；

2. 根的分离定位——判定多项式的实根的个数，并使每个实根只包含在一个小区间内；

3. 根的计算——求出每一实根的近似值。

本节将系统解决这些问题，在着手解决这些问题之前，我们首先要明确逼近法的基本思想，即如何计算出$f(x)$在(a,b)中的一个实根的近似值？使它能达到指定的精确度？

例2. 求$f(x)=x^3-3x+1$在$(1, 2)$中的实根的近似值。（要求误差不超过0.001）．

解： 由中间值定理可知，在$(1, 2)$中 $f(x)$ 有一个实根，设为α，为了求出要求精度范围内的近似值，可以把区间$(1, 2)$十等分，将分点1.1，1.2，…，1.8，1.9 分别代入$f(x)$，由于 $f(1.5)=-0.125$，$f(1.6)=+0.296$，所以这个根α在$(1.5, 1.6)$中，即α精确到0.1的不足近似值为1.5；

再把区间$(1.5, 1.6)$十等分，将分点1.51，1.52，…，1.58，1.59分别代入$f(x)$，因为$f(1.53)=-0.008423$，$f(1.54)$

$=+0.03226$，所以这个根 α 在$(1.53, 1.54)$中，即 α 精确到0.01的不足近似值为1.53；

继续将$(1.53, 1.54)$十等分，计算各分点的多项式的值，因为 $f(1.532)=-0.00010$，$f(1.533)=+0.00369$，所以，根α在$(1.532, 1.533)$中，它的精确到 0.001 的不足近似值为 $\alpha\approx1.532$。

如果继续这样做下去，只要细心、不嫌繁，就可以求出精确到任意水平的根的近似值。

例2说明是逼近法的基本思想，也是求实根的基本方法，它的主要依据就是中间值定理。但方法繁，计算量大，现在已有不少更先进的算法，我们将在后边介绍一种改进了的方法。

·练习·

1．利用中间值定理，判定下列多项式的实根在哪些连续整数之间：

（1）$f(x)=x^4-6x^3+5x^2+12x-6$；

（2）$f(x)=2x^3-5x^2+5x-3$．

2．利用逼近法，试求 $f(x)=x^3-8x+1$ 在$(0, 1)$中的实根，（精确到0.001）．

***4.2 实系数多项式实根的界和定位** 我们已经知道，根据中间值定理，可以经过耐心细致的计算，首先确定多项式实根的位置在哪些连续整数整之间，其次再用逼近法去求每一个实根的近似值。但是，对某一些多项式，如果我们一开始就用一个整数进行试算，可能会发生困难，一则难在应从哪一个整数试起呢？二则难在有些多项式用整数试算找不到实根存在的区间，中间值定理无能为力。

例3.试判定下列多式项的实根在哪两个连续整数之间？

（1）$f(x)=x^4-6x^2+10$；（2）$g(x)=8x^2-8x+1$。

解：（1）由于$f(x)=(x^2-3)^2+1$，因此，无论用那一个整数a去试算，恒有$f(a)>0$，中间值定理无法判断。实际上，$f(x)$确实没有实根。

（2）一方面当我们用一个个整数a试算$g(x)$的值时，会发现总有$g(a)>0$，好像可以断言$g(x)$没有实根了；但另一方面，用求根公式可以求得$g(x)$的两个根：

$$x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$$

显然都是实根。只不过这两个实根都在（0，1）中间，其图象如图4－2

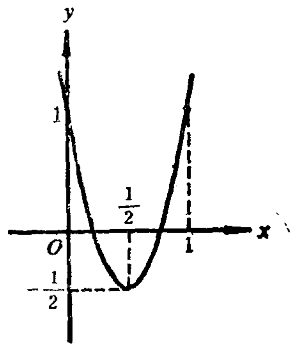


图4—2

这样看来，尽管$g(0)>0$，$g(1)>0$，是同号的，但在（0，1）中不是没有实根，而是有两个实根。

这就提醒我们注意，中间值定理所述的内容中$f(a)$与$f(b)$符号相反只是$f(x)$在(a,b)中有实根的充分条件，但不是必要条件。

依据中间值定理，运用逼近法求多项式的实根时，由于会遇到以上困难，因而我们就不得不进一步来探求新的更有效的方法。

史笃姆方法就是彻底解决实根个数及定位的有效方法。

史笃姆方法只是对没有重根的多项式来说的，因此可设多项式$f(x)$没有重根。

又因为当多项式的首项系数 $a_n \neq 1$ 时，可用 a_n 去除这个多项式的每一项，从而得到一个首项系数为1的实系数多项式，它的零点（实根）不发生变化。因此，我们就可设

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是一个没有重根的实系数多项式。

（一）$f(x)$的根界

可以证明，$f(x)$的每一个根的绝对值都不会大于$f(x)$的各项系数绝对值的和。因此，我们可取

$$M=1+|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\cdots+|a_1|+|a_0|,$$

作为$f(x)$的根界。即$f(x)$的所有实根都在区间$[-M,M]$中。这里我们不加证明而引用这一结论。

例5. 写出多项式 $\varphi(x)=x^3-10x+2$ 的根界。

解： $\because M=1+|-10|+2=13,$

$\therefore \varphi(x)$的所有根都在区间$[-13,13]$之内。

（二）史笃姆函数序列

设没有重根的多项式 $f(x)$ 和它的导数 $f'(x)$，则有 $\deg f(x)=\deg f'(x)+1$，把 $f'(x)$记为 $f_1(x)$，并作带余除法，得

$$f(x)=q_1(x)\cdot f_1(x)+r_1(x)$$

其中$r_1(x)=0$或$r_1(x)\neq 0$，$\deg r_1(x)<\deg f_1(x)$。在这里只有 $f(x)$是一次多项式，从而 $f_1(x)$是零次多项式时，才能有 $r_1(x)=0$，否则$r_1(x)$不会等于零。记 $f_2(x)=-r_1(x)$。（注意，式中的一个负号十分重要）。

又以$f_2(x)$ 除 $f_1(x)$，得 $f_1(x)=q_2(x)f_2(x)+r_2(x)$，同样，只有$f_2(x)$是零次多项式时，才有$r_2(x)=0$，否则 $r_2(x)\neq 0$，记$f_3(x)=-r_2(x)$。如此继续下来，直到可以整除为止。即得

$$
\left.\begin{aligned}
f(x)&=q_1(x)f_1(x)-f_2(x),\\
f_1(x)&=q_2(x)f_2(x)-f_3(x),\\
f_2(x)&=q_3(x)f_3(x)-f_4(x),\\
&\cdots\cdots\\
f_{k-1}(x)&=q_k(x)f_k(x)-f_{k+1}(x),\\
&\cdots\cdots\\
f_{s-1}(x)&=q_s(x)f_s(x).
\end{aligned}\right\}
$$

容易看到，这些计算实际上是对两个多项式 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 进行辗转相除，只不过每一次的余式改变一个符号而已。由于非零数因子不影响辗转相除的结果，所以最后能整除的除式$f_s(x)$就是$f(x)$与$f'(x)$的最高公因式。但是我们已给出$f(x)$没有重根这样一个条件，所以 $f_s(x)$只能是零次多项式，因而可记为f_s。

$$f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots,f_s$$

叫做多项式$f(x)$的**史笃姆函数序列**。

例5. 试求$f(x)=x^3-10x+2$的史笃姆函数序列。

解： $f_1(x)=f'(x)=3x^2-10$

用$f_1(x)$除$f(x)$，得

$$r_1(x)=-\frac{20}{3}x+2,$$

$$\therefore\ f_2(x)=-r_1(x)=\frac{20}{3}x-2=\frac{20}{3}\left(x-\frac{3}{10}\right);$$

用$f_2(x)$除$f_1(x)$，得

$$r_2(x)=-\frac{973}{100}$$

$$\therefore\ f_3=\frac{973}{100}.$$

因此，所求的史笃姆函数序列为：$x^3-10x+2$，$3x^2-10$，$\frac{20}{3}\left(x-\frac{3}{10}\right)$，$\frac{973}{100}$。

由于以下讨论史笃姆函数序列时，只考虑x取某一数值时，$f_k(x)$为零，为正还是为负，所以在任一个史笃姆函数列中，乘以一个正常数（注意必须是正的）不影响讨论结果。因此对于上述例题所得的史笃姆函数序列，可以写成：

$$f(x)=x^3-10x+2,$$
$$f_1(x)=3x^2-10,$$
$$f_2(x)=10x-3,$$
$$f_3=1.$$

对讨论结果不会有影响。

（三）实数列的变号数

在史笃姆函数序列中，以实数a代x，得到一系列实常数：$f(a),f_1(a),f_2(a),\cdots,f_k(a),\cdots,f_s$。这些数有正、有负，也可能有零。丢开那些具体数字，只考查各项的符号，就成为一系列符号的排列，例如

$$\begin{array}{cccccccccccc} + & + & + & - & - & + & - & + & - & - & + \\ & & & \vee & & \vee\vee\vee & & \vee & & \vee & \\ & & & ① & & ②③④ & & ⑤ & & ⑥ & \end{array} \quad (1)$$

如果在这个排列中，两个相邻的符号相反，我们就说这一排列有一个变号。整个排列中变号的总数，就叫做它的变号数。（1）的变号数是6；

如果在实数列中含有零，那么，它的变号数就指去掉零以后，剩下的各数组成的数列的变号数。例如

$$+ + - 0 + + 0 + - + - - \quad (2)$$

的变号数，就是指

$$+ + - + + + - + - - \qquad (3)$$

的变号数，显然它们的变号数是5。

给出一个多项式的史笃姆函数序列以后，用实数a代入，得实数列

$$f(a), f_1(a), f_2(a), \cdots, f_k(a), \cdots, f_s.$$

我们把这一数列的变号的个数记为$W(a)$.

（四）史笃姆定理及其证明

定理2. （**史笃姆定理**）如果用$-M, M$代入没有重根的多项式$f(x)$的史笃姆函数序列，所得实数列的变号数分别为$W(-M)$与$W(M)$，那么，多项式$f(x)$在$[-M, M]$内就有$W(-M)-W(M)$个实根。

解6. 求多项式

$$f(x)=x^3-10x+2$$

的实根个数及各个根所在的位置。

解： 由例4知$f(a)$的根都在$[-13, 13]$之内；

又由例5知$f(x)$的史笃姆函数序列为

$f(x)=x^3-10x+2, f_1(x)=3x^2-10, f_2(x)=10x-3,$

$f_3=1.$

在根界$[-13, +13]$内，取点计算变号数，变号的情况列表如下：

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	$W(x)$
-13	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-4	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-3	$+$	$+$	$-$	$+$	2
-2	$+$	$+$	$-$	$+$	2
-1	$+$	$-$	$-$	$+$	2

0	+	−	−	+	2
1	−	−	+	+	1
2	−	+	+	+	1
3	−	+	+	+	1
4	+	+	+	+	0
+13	+	+	+	+	0

从中根据史笃姆定理就可以断定 多项式$f(x)=x^3-10x+2$共有$W(-13)-W(13)=8$个实根；同时还可以进一步得出，这三个实根分别在$(-4,-3)$,$(0,1)$,$(3,4)$三个区间之中。

以下我们分几个步骤来证明史笃姆定理。(以下供选学)

第一个问题：会不会出现类似以下的排列

$$+\quad +\quad +\quad 0\quad +\quad +\quad -$$

即中间有一个零，而其左右同号，如果有这种情况，这个零就不能随便算作正的或负的了。

我们来证明这种情况不会产生，即

（1）史笃姆函数序列中以一个实常数代入，居中间出现一个零，则其左右必为一正一负，既不会出现相邻的两个零，也不会在零的左右出现两个同是正号或两个同是负号。

证明：若以 a 代入 $f_k(x)$，得 $f_k(a)$为零，则

$$(x-a)\mid f_k(x)$$

此时如果又有$f_{k+1}(x)=0$，即

$$(x-a)\mid f_{k+1}(x)$$

则$x-a$为$f_k(x)$与$f_{k+1}(x)$的公因式，由此可知$x-a$也是$f(x)$与$f'(x)$的公因式，因而 a 是 $f(x)$的重根，这与假设矛盾。所以 $f_{k+1}(a)\neq 0$。同理$f_{k-1}(a)\neq 0$。

又因为

$$f_{k-1}(x)=q_k(x)f_k(x)-f_{k+1}(x);$$

所以，

$$f_{k-1}(a)=q_k(a)\cdot f_k(a)-f_{k+1}(a).$$

现在$f_k(a)=0$，所以必然有

$$f_{k-1}(a)=-f_{k+1}(x).$$

如果在运算过程中，$f_{k-1}(x)$，$f_{k+1}(x)$乘过不同的正常数，可能使$f_{k+1}(x)$与$f_{k-1}(a)$的绝对值不等，但符号总是相反的。可见一个零的左右的两个符号必相反。

第二个问题：怎么会产生变号个数的变化？当x经过某一个$f_k(x)$的根而不是$f(x)$的根时，变号的个数会不会有变化？

变号数的变化来源于各个符号的变化。若x由a渐增到b，完全没有经过$f(x)$及$f_k(x)$的任一个根（如例6中x由-3增加到-2，或由-1增加到0，或由2增加到3），则所有的符号都没有变，因而变号个数也不会变。

关于x通过$f_k(x)$的某一个根，但不是$f(x)$的根的情况，我们来证明：

（2）若x通过$f_k(x)$的某一个根，但不是$f(x)$的根时，史笃姆函数序列的值只改变变号的位置，不改变变号的个数。

如在例6中：x从-2到-1通过$f_1(x)$的根，史笃姆函数序列的值的符号，就从

$$+\qquad +\qquad -\qquad +\qquad ,$$

改变为

$$+\qquad -\qquad -\qquad +\qquad .$$

变号的位置从第2到第3改变为从第1到第2；但变号的个数仍是2．

证明：$f_k(x)$与$f_{k+1}(x)$没有公共的根，设α是$f_k(x)$的一

个根，则$f_{k-1}(\alpha)\neq 0$，$f_{k+1}(\alpha)\neq 0$。我们考虑x从$\alpha-\varepsilon$经过α变到$\alpha+\varepsilon$的过程，ε取得如此之小，以至$f_{k-1}(x)$，$f_{k+1}(x)$都没有一个根在$(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$内，由中间值定理这总是可行的。

$f_k(\alpha)=0$，已证明$f_{k-1}(\alpha)$与$f_{k-2}(\alpha)$异号，因此可能有下列四种情况：

x	$f_{k-1}(x)$	$f_k(x)$	$f_{k+1}(x)$
$\alpha-\varepsilon$	$-$	$-$	$+$
α	$-$	0	$+$
$\alpha+\varepsilon$	$-$	$+$	$+$

x	$f_{k-1}(x)$	$f_k(x)$	$f_{k+1}(x)$
$\alpha-\varepsilon$	$-$	$+$	$+$
α	$-$	0	$+$
$\alpha+\varepsilon$	$-$	$-$	$+$

x	$f_{k-1}(x)$	$f_k(x)$	$f_{k+1}(x)$
$\alpha-\varepsilon$	$+$	$-$	$-$
α	$+$	0	$-$
$\alpha+\varepsilon$	$+$	$+$	$-$

x	$f_{k-1}(x)$	$f_k(x)$	$f_{k+1}(x)$
$\alpha-\varepsilon$	$+$	$+$	$-$
α	$+$	0	$-$
$\alpha+\varepsilon$	$+$	$-$	$-$

可以看到，在任何一种情况下，史笃姆函数序列只改变变号的位置，不改变变号的个数。

第三个问题：至此产生变号个数起变化的其他可能都已排除，那就只有一个可能会改变变号个数：x 经过 $f(x)$ 的根。因此我们就问：x 从小到大渐增地变化，每经过 $f(x)$ 的一个根时，变号的个数如何变化呢？以下就解决并证明这一问题。

（3）x 从小到大渐地增变化，每通过 $f(x)$ 的一个根时，史笃姆函数序列的值的变号就减少一个。

证明：我们只在 $f(x)$ 的根 α 邻近的一个区域 $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ 内考虑 $f(x)$ 及 $f_1(x)$（即 $f'(x)$）的局部性质。因为 $f(x)=0$，则 $f'(x)\neq 0$。我们取足够小的 ε，使 $f'(x)$ 在 $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ 内符号不变：$f'(x)>0$ 时，$f(x)$ 递增，这说明 $f(x)$ 由负变正；反之，$f'(x)<0$ 时，$f(x)$ 递减，说明 $f(x)$ 由正变负。情况列表如下：

x	$f(x)$	$f_1(x)$
$\alpha-\varepsilon$	$-$	$+$
α	0	$+$
$\alpha+\varepsilon$	$+$	$+$

x	$f(x)$	$f_1(x)$
$\alpha-\varepsilon$	$+$	$-$
α	0	$-$
$\alpha+\varepsilon$	$-$	$-$

可见在任何情况下，x 从小做大每经过 $f(x)$ 的一个根，史笃姆函数序列的值总是减少一个变号。

综合以上三条，史笃姆定理即获证。

我们在叙述求实多项式实根位置的史笃姆方法及证明史笃姆定理时都强调这样一个假设：实多项式$f(x)$没有重根。对于这个条件的限制在应用上和理论上都会使我们感到不满足。从应用上说，是否在使用史笃姆方法以前要验证$f(x)$有没有重根？从理论上说，如果$f(x)$有重根，史笃姆定理会受到些什么损害？

（五）我们来回答这两个问题。

第一，从应用上说，这个条件完全不会增加我们的计算量。因为求史笃姆函数序列的过程实际是用辗转相除法求$f(x)$及$f'(x)$的最高公因式过程。如果$f(x)$有重根，在上述运算中必然会看出。发现重根以后，我们把有关因式除掉（这些因式为零时的值就是$f(x)$的重根），再研究其没有重根部分的因式。这时，多项式的次数至少降低二次，对运算更有利。

第二、从理论上讲，如果有重根，史笃姆定理的结论同样正确，不过这时$f_s(x)$是一个次数不小于1的多项式，不可以写成fs'而计算根的个数的时候，重根α不论是多少重根，只作为1个根计数。即史笃姆函数序列的值在x由小到大经过$f(x)$的m重根α时，变号数不是减少m个，而是只减少1个。我们不另作详细证明，只举以下一例说明。

例7. 求多项式

$$f(x)=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=(x-1)^3(x+1)^2$$

的史笃姆函数序列中变号的变化情况。

解： 先求$f(x)$的史笃姆序列及根界。

$$f_1(x)=5x^4-4x^3-6x^2+4x+1$$

$$=(x-1)^2(x+1)(5x+1),$$

$f_2(x)=x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$,

$f_3(x)=0$.

根界：$M=8$，$\therefore f(x)$的根在$[-8,+8]$中.

变号情况列表如下：

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$W(x)$
-8	$-$	$+$	$-$	2
-2	$-$	$+$	$-$	2
0	$-$	$+$	$+$	1
2	$+$	$+$	$+$	0
$+8$	$+$	$+$	$+$	0

可知$f(x)$在$(-2,0)$有一个根。（实际是二重根-1）在$(0,2)$有一个根，（实际是三重根1）。

综观（一）至（五），我们可以看到史笃姆定理可以彻底地解决实系数多项式的实根的个数、定位等问题。因而，史笃姆定理也被称为实数范围内的代数基本定理。

·练习·

1. 试求多项式 $f(x)=x^3+3x^2-4x+1$ 的实根界、实根个数及各个实根的位置。

*2. 用史笃姆定理证明：n次多项式$f(x)$的实根个数不大于n。

4.3 实系数多项式实根的计算

在4.1 中我们已经根据中间值定理，运用逼近方法求过的实根的近似值，但太繁，计算量也很大，以下我们将利用两种换元变形，改进计算过程，从而得到多项式实根近似计算的秦九韶方法。

（一）多项式的两种换元变形

第一种变形：令$y=x-k$，则$x=y+k$，于是

$$f(x)=f(k)+\frac{f'(k)}{1!}(x-k)+\frac{f''(k)}{2!}(x-k)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(k)}{n!}(x-k)^n$$

$$=f(k)+\frac{f'(k)}{1!}y+\frac{f''(k)}{2!}y^2+\cdots+\frac{f(n)(k)}{n!}y^n$$

$$=g(y)=g(x-k)。$$

若$g(y)$的一个根是α，即$y=\alpha$时，$g(y)=0$．也就是：$x-k=\alpha$时，$g(x-k)=0$．但$g(x-k)=f(x)$．所以$x=k+\alpha$时，$f(x)=0$．这说明在求出$g(y)$的一个根后，加上k就是$f(x)$的根。由于k可以自由选择，常可以使α比之$k+\alpha$更易于计算。

利用这种变形，就可以把“求$f(x)$在(a,b)内的一个实根”问题，转化为“求$g(y)$在$(a-k,b-k)$内的一个实根”问题。适当选择k，可以简化计算.

例如，求多项式

$$f(x)=x^3-3x+1$$

的位于$(1,2)$的根时，可令$y=x-1$，得

$$g(y)=-1+3y^2+y^3$$

只须先求$g(y)$在$(0,1)$的根。这时，只须计算$g(0.5)$，$g(0.6)$等，比之计算$f(1.5)$，$f(1.6)$等要简单一些。

为了把$f(x)$改写成$g(x-k)$，可以应用泰勒公式；也可应用余式定理及其推论，采用综合除法；还可以用直接代入法。

第二种变形：令$y=kx(k\neq 0)$，则$x=\frac{y}{k}$，于是

$$f(x)=a_na^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

$$= a_n\left(\frac{y}{k}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{y}{k}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{y}{k}\right) + a_0$$

$$= \frac{1}{k^n}\,(a_n y^n + a_{n-1} k y^{n-1} + \cdots + a_1 k^{n-1} y + a_0 k^n)$$

$$= g_1(y) = \frac{1}{k}{}^n \cdot g(y) = \frac{1}{k^n} g(Kx).$$

显然 $g_1(y)$ 与 $g(y)$ 有相同的根。

若 $g(y)$ 的一个根是 α，则 $y=\alpha$ 时，$g(y)=0$，也就是 $kx=\alpha$ 时，$g_1(kx)=0$，但 $g_1(kx)=f(x)$，所以 $x=\dfrac{\alpha}{k}$ 时，$f(x)=0$，这说明在求出 $g(y)$ 的一个根以后，除以 k 就是 $f(x)$ 的根。由于 k 可以自由选择，就可以使 α 比之 $\dfrac{\alpha}{k}$ 更易于计算。

例如，已知

$f(x)=x^3+3x^2-1$

一根在（0，1），令 $y=10x$，则 $x=\dfrac{y}{10}$，于是

$g(y)=y^3+30y^2-1000$

对应的一根在（0，10）。为了求这个根，可以计算 $g(5)$，$g(6)$，…等，求出 $g(y)$ 的误差不大于 1 的根的近似值后，除以 10 即得 $f(x)$ 的误差不大于 0.1 的近似根。这比之计算 $f(0.5)$，$f(0.6)$，…等，可以避免小数的出现。

利用这种变形，就可以把“求 $f(x)$ 在 (a,b) 内的一个实根”，转化为“求 $g(y)$ 在 (ka,kb) 内的一个实根”。适当选择 k，同样可以简化计算。

（二）秦九韶法

把以上两种变形交替使用，主要依靠中间值定理，我们

就得到多项式实根近似计算的秦九韶方法。

例8. 求多项式

$$f(x)=x^3-3x+1$$

在(1,2)的实根近似值，要求误差不大于10^{-8}。

解：第一步：令 $y=x-1$，并令 $z=10y$，得 z 的多项式 z^3+30z^2-1000。

由于后面还要变形，文字变化太多很不方便，我们仍用x作为变数，只要是注意要求的是$f_1(x)$在（1，2）的根的小数点后第一位数字记。

$f_1(x)=x^3+30x^2-1000$，计算得出

$f_1(0)<0, f_1(5)=-125<0, f_1(6)=+296>0, f_1(10)>0$。所以$f_1(x)$的根在(5，6)中，即$f(x)$根在(1.5，1.6)中；

第二步：在 $f_1(x)$中，使$y=x-5$，$z=10y$，写成 z 的多项式后，仍以 x 为变数，得

$$f_2(x)=x^3+450x^2+37500x-125000,$$

$f_2(x)$的根在(0，10)中，因而 x^3的绝对值比之其他各项要小得多，x^2 项也比较小，对 $f(x)$ 为正或为负主要决定于后两项，因而估计 x 在(3，4)中，计算结果确有 $f_2(3)<0$，$f_2(4)>0$。所以$f_2(x)$ 的根（3，4）中，即$f(x)$ 的根在(1.53，1.54)中；

第三步：在$f_2(x)$中使$y=x-3$，$z=10y$ 仍写成 x的多项式，得

$$f_3(x)=x^3+4590x^2+4022700x-8423000,$$

由最后两项估计，根在(2，3)中，试算结果确有 $f_3(2)<0$，$f_3(3)>0$，所以$f_3(x)$的根在(2，3)中，即$f(x)$的根一定在(1.532，1.533)中；

第四步：在 $f(x)$中使，$y=x-2$，$z=10y$，仍写成x的多

项式，得

$$f_4(x)=x^3+45960x^2+404103200x-359236000$$

现在，前两项起的作用更小了，我们可以一次算出 x 应取值的三位数字，然后再加以验算，不必象前面那样一位数一位数地计算了，把后两项系数相除，得 $x=0.889$，由此应得$f(x)$的根在(1.532888，1.532889)中，验证得$x\approx1.532889$，误差小于10^{-6}。

注意：上述方法对多项式的正根与负根显然同样适用，但是计算负根时，出错的可能性比计算正根要大些，为此，我们可以利用第二种变形，令$k=-1$，就把计算负根改变为计算正根了。例如为求 $f(x)=x^3-3x+1$ 在（-2，-1）的根，可改为求$g(y)=y^3-3y-1$ 在（1，2）的根，求出后改变符号即得$f(x)$在（-2，-1）的根。

在常数项的绝对值比其他各系数的绝对值大许多倍时，可以先把中间两项略去，估计根有几位整数，然后从$n\times10$，$n\times100$，或开始试除。若特大的系数不是出现在常数项，而是出现在中间某一项，也可把除第一项与最大系数的那项以外的所有项先略去，估计根有几位数，按照上述方法试除。

例9. 估计多项式 $f(x)=x^3+x^2-10^7$ 的正根有几位整数。

解：由方程 $x^3-10^7=0$ 可看到其正根是以百位数字为第一位数字。因此用 $x=100$，$x=200$，$x=300$，… 来试算，得 $f(200)=-1960000$，$f(300)=+17090000$。因而有一个根在(200，300)中，即正根有3位整数。

若需要求这个根的近似值，用前述方法，先减去200，但不必乘10，得 $f_1(x)$的根在（0，100）中，然后以 $n\times10$试算。以后再减去这个 $n\times10$，得 $f_2(x)$，它的根在（0，10）中，这样

就与例8相类似了。

·练习·

1. 验证$f(x)=x^3-5x^2+9x-11$在(3，4)中有一个实根，并求一多项式$g(y)$，使$g(y)$的每一个根都等于$f(x)$的根减去3。

2. 用秦九韶法求下列多项式在指定区间内的实根的近似值：

   (1) $f(x)=x^3+4x^2+6x-2$，在(0，1)内；(要求精确到0.1)。

   (2) $f(x)=x^3-5x^2+9x-11$，在(3，4)内；(精确到0.0001。

   (3) $f(x)=x^3+5x^2+6x+9$，在(－5，－4)内；(精确到0.01)。

习题 4—4

1. 用逼近法求多项式$f(x)=2x^3-x^2-9x+1$在区间(－2，－1)中的实根的近似值（精确到0.01）．

2. 求下列多项式的实根的界和位置：

   (1) $f(x)=x^3-6x^2+5x+13$；

   (2) $f(x)=x^4-4x^3-5x^2+18x+20$．

3. 求下列多项式实根的界和个数：

   (1) $f(x)=4x^3-2x-5$；　(2) $f(x)=x^n+1$．

4. 用秦九韶方法，求下列多项式在指定区间的实根的近似值（精确到0.001）

   (1) $f(x)=x^3+2x-20$，在(2，3)中；

   (2) $f(x)=x^3+x^2-2500$，在正数范围内．

5. 用秦九韶法，求$\sqrt[3]{17}$的近似值（精确到10^{-4}）。

§5. 二元二次方程组

前面几节，我们较系统地学习了多项式的求根问题，实际上，也是系统地学习了一元方程的求解问题。我们还系统地学习了线性方程组的求解。归纳起来，在学习过的方程、方程组求解过程中，基本思想和方法就是：消元和降次。

在本节，我们将继续遵循这个基本思想，专门研究二元二次方程组及其解法。

5.1 二元二次方程与二元二次方程组 由二元二次多项式组成的方程，就叫做二元二次方程，其一般形式是

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0, \qquad (*)$$

其中a，b，c不全为零；d，e，f为任意实数；x，y为二元。

凡满足方程(*)的有序数对（x，y），都叫做方程(*)的一个解。

二元二次方程的实数解，可有三种情况存在，即有唯一解，无解和无限多解，例如

方程 $2x^2+y^2=0$，只有一个解(0，0)；

方程$x^2+2y^2+1=0$，就没有实数解；

方程$x^2+2y^2-4=0$，就有无限多个解

由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组以及两个二元二次方程组成的方程组，都称为二元二次程方程组.因此，二元二次方程组的一般形式有两种类型：

$$(\text{I})\begin{cases} ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0; \\ mx+ny+l=0; \end{cases}$$

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases} a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2+2d_1x+2e_1y+f_1=0 \\ a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2+2d_2x+2e_2y+f_2=0. \end{cases}$$

组成一个方程组的两个方程的公共解，就叫做这个方程组的解。

例如，方程组

$$\begin{cases} 3x^2-11xy+6y^2=0 \\ 5x^2+y^2=0 \end{cases}$$

的解是$(x,\ y)=(0,\ 0)$。

求出方程组的所有解或判定方程组无解的过程，叫做解方程组。

解二元二次方程组的基本思想方法，仍然是消元和降次。

我们已经学习过的消元方法有：加减消元法，代入消元法，公式消元法等，其中最根本的是加减消元法。

已经学习过的降次方法有：开平方法，配方法，因式分解法，公式法，换元法等，其中最根本的是因式分解和换元法。

·练习·

1． 试用先消元，后降次和先降次，后消元两种办法，解方程组

$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ x+y=b, \end{cases}$$ 并讨论解的情况。

5.2二元二次方程组类型（Ⅰ）的解法

第（Ⅰ）类型的二元二次方程组，指的是由一个二元一次方程和一个二元二次方程所组成的方程组，这种类型的方程组一般都可以用代入法来解。但根据方程组的特点还可以灵活应用其它解法。

例1. 解方程组

$$\begin{cases} 5x-2y=7 & (1) \\ x^2+y^2=25 & (2) \end{cases}$$

解： 由(1)得

$$y=\frac{1}{2}(5x-7) \qquad (3)$$

代入(2)，整理后得

$$29x^2-70x-15=0,$$

解出

$$x_1=3, \quad x_2=-\frac{17}{29}.$$

代入(3)得

$$y_1=4, \quad y_2=-\frac{144}{29}.$$

所以方程组的解集为

$$\{(x, y)\}=\left\{(3, 4), \left(-\frac{17}{29}, -\frac{144}{29}\right)\right\}.$$

通过例1.我们可以得到以下一般情况：

对于方程组

$$\begin{cases} ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 & (1) \\ mx+ny+l=0 & (2) \end{cases}$$

可以这样解，若$n\neq 0$，由(2)解出 $y=\frac{1}{n}(-mx-l)$ (*)，代入(1)就可以消去y而得到x的一元二次方程，求出x后，再代入(*)，从而求出相应的y；

若$m\neq 0$，由(2)解出 $x=\frac{1}{m}(-l-ny)$(**)，代入(1)

也可以消去 x 而得到 y 的一元二次方程，求出 y 后，再代入（* *），从而求出相应的 x。

这种解法就是代入消元法，它是解这种类型方程组的基本方法。

例2. 解方程组

$$\begin{cases}(3x-2y-5)(x-y+1)=0 & (1)\\ x+y=7 & (2)\end{cases}$$

（分析） 这个方程组可以像例1一样用代入法求解·但由于其中的方程（1）具有特点：方程左边的式子是两个一次因式的乘积，方程右边等于0。因此，原方程组可以改写成以下两个二元一次方程组

$$\begin{cases}3x-2y-5=0 & (3)\\ x+y-7=0 & (2)\end{cases};\quad \begin{cases}x-y+1=0 & (4)\\ x+y-7=0 & (2)\end{cases}.$$

显然由(2)，(3)组成的方程组的解及由(2)，(4)组成的方程组的解都能满足由(1)，(2)组成的方程组；反之，(1)，(2)的解至少能满足(2)，(3)及(2)，(4)中的一个方程组，所以，只要分别出方程组(2)，(3)与(2)，(4)，就可以了。

解： 将原方程组改写成为以下两个方程组

$$\begin{cases}3x-2y-5=0 & (3)\\ x+y-7=0 & (2)\end{cases}\quad 及\quad \begin{cases}x-y+1=0 & (4)\\ x+y-7=0 & (2)\end{cases}$$

解(3)，(2)，得

$$\begin{cases}x=\dfrac{19}{5},\\ y=\dfrac{16}{5}.\end{cases}$$

解(4)，(2)，得

$$\begin{cases}x=3,\\ y=4.\end{cases}$$

所以，原方程组的解集为

$$\{(x, y)\} = \left\{\left(\frac{19}{5}, \frac{16}{5}\right), (3, 4)\right\}.$$

一般地，方程组

$$\begin{cases} (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \\ mx + ny + l = 0 \end{cases}$$ (8) (7)

可以转化为两个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ mx + ny + l = 0 \end{cases} \text{与} \begin{cases} a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ mx + ny + l = 0 \end{cases}$$

求解。

例3. 解方程组

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ xy = 56 \end{cases}$$

（分析） 这个方程组除可以用代入法求解外，还可以应用韦达定理，以x, y为两根，先做一个一元二次方程，再来求解。

解： 由已知方程可知，若设 x, y 为某一个一元二次方程的两个根，则由韦达定理可得出这一元二次方程为

$$z^2 - 15z + 56 = 0,$$

解出这个方程，得

$$z_1 = 7, \qquad z_2 = 8.$$

所以，原方程组的解集为

$$\{(x, y)\} = \{(7, 8), (8, 7)\}$$

一般地，方程组

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

的解，可以建立一个一元二次方程

$$z^2 - az + b = 0,$$

解出两根$z_1=\alpha, z_2=\beta$.从而得出方程组的解集

$$\{(x,y)\}=\{(\alpha,\beta),(\beta,\alpha)\}.$$

综合例1—3的一般结论，我们还可以给出这种类型方程组解的几何意义如下：

一次方程表示直线，二次方程表示二次曲线，因此，这种类型方程组的一个解，就表示直线与二次曲线的一个交点。

显然，直线与二次曲线最多有两个交点，也可能有两个重合的交点，也可能没有交点。相应地说明这种类型的二元二次方程组最多有两个解，也可能有两个相同的解，也可能没有解。

·练习·

解下列方程组

1. $\begin{cases} y^2=4x+4 \\ 3x-y=1; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} (x+y+1)(x+y-3)=\beta \\ x-y=-1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0 \\ xy=-5; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 6xy=1. \end{cases}$

5.3 **二元二次方程组类型(Ⅱ)的解法**第(Ⅱ)类型的二元二次方程组指的是由两个二元二次方程组成的方程组，这种类型的方程组求解是比较复杂的，若用代入法，都要解四次方程，这里我们只讲一些特殊的方程组的解法，其要领仍是降次、消元。

(一) 可转化为第(Ⅰ)类型的方程组

例4. 解方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 & (1) \\ x^2-5xy+6y^2=0 & (2) \end{cases}$$

（分析） 这个方程组的特点是：其中有一个方程(2)的左边可以分解为两个一次因式的乘积，右边等于0．因此，方程(2)可化为两个二元一次方程，从而原方程组就可以化为两个第（I）类型的二元二次方程组

解： 由(2)得

$$(x-2y)(x-3y)=0,$$

所以$x-2y=0$，或$x-3y=0$．因此，原方程组可化为以下两个方程组：

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x-2y=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x-3y=0, \end{cases}$$

解这两个方程组，即得到原方程组的解集为

$$\{(x,y)\}=\{(4,2),(-4,-2),$$

$$(3\sqrt{2},\sqrt{2}),(-3\sqrt{2},-\sqrt{2})\}.$$

例5． 解方程组

$$\begin{cases} x^2-y^2+2y-1=0 \\ 2x^2-3xy-2y^2+2x+6y-4=0. \end{cases}$$

（分析） 这个方程组的特点是：两个方程的左边都可以分解为一次式的乘积，右边都等于0．因此，原方程组就可以化为四个二元一次方程组来解

解： 用待定系数法分别将两个方程左边进行因式分解，可得

$$\begin{cases} (x+y-1)(x-y+1)=0 & (1) \\ (2x+y-2)(x-2y+2)=0 & (2) \end{cases}$$

原方程组可化为以下四个线性方程组：

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x+y-2=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-1=0 \\ x-2y+2=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x+y-2=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+1=0 \\ x-2y+2=0. \end{cases}$$

解出这几个方程组，即可得原方程组的解集为

$$\{(x,\ y)\}=\{(1,0),(0,1),\left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right),(0,1)\}$$

例6. 解方程组

$$\begin{cases} x^2+5xy-2x+3y+1=0, & (1) \\ 3x^2+15xy-7x+8y+4=0 & (2) \end{cases}$$

(**分析**)这个方程组的特点是：两个方程中对应二次项系数成比例，这样，我们可以运用方程的变换，消去二次项得到一个二元一次方程，将原方程组转化为第(Ⅰ)类型方程组求解。

解 由(2)－(1)×3，得

$$-x-y+1=0, \qquad (3)$$

将原方程组化为(1)，(3)组成的(或(2)，(3)第(Ⅰ)类型方程组

$$\begin{cases} x^2+5xy-2x+3y+1=0 & (1) \\ \qquad\qquad -x-y+1=0 & (3) \end{cases}$$

用代入法可以解出

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=2. \end{cases}$$

所以，原方程组的解集为

$$\{(x,\ y)\}=\{(1,\ 0),\ (-1,\ 2)\}.$$

注意： 解由(2)，(3)组成的方程组，可得同样结果，但相比之下，计算要繁一些。

例7. 解方程组

$$\begin{cases} 2x^2+xy+x-3y+3=0, & (1) \\ \qquad 3xy+y^2-2x+6y-6=0. & (2) \end{cases}$$

(分析)这一方程组的特点是：两方程的左边虽不能分解因式，但这两个方程的非二次项系数是成比例的，因而，我们可以通过方程的变换，消去非二次项得到一个二元二次齐次式的方程，而这一方程的左边一般是可以分解因式的。从而可以将方程组化为第（Ⅰ）类型求解。

解： 由（1）×2+（2），得

$$4x^2+5xy+y^2=0,$$

即

$$(4x+y)(x+y)=0. \qquad (3)$$

这样，原方程组可转化为1(),（3）所组成的方程组，(或者（2），（3）所组成的方程组）再由例4的分析即可化为以下两个方程组求解：

$$\begin{cases} 2x^2+xy+x-3y+3=0 \\ 4x+y=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+xy+x-3y+3=0 \\ x+y=0. \end{cases}$$

分别解出，得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{13+\sqrt{193}}{4} \\ y_1=-13-\sqrt{193}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=\dfrac{13-\sqrt{193}}{4} \\ y_2=-13+\sqrt{193}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=-1 \\ y_3=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4=-3 \\ y_4=3. \end{cases}$$

所以，原方程组的解集为

$$\{(x,y)\}=\left\{\left(\frac{13+\sqrt{193}}{4},\ -13-\sqrt{193}\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{13-\sqrt{193}}{4},\ -13+\sqrt{193}\right),(-1,\ 1),(-3,3)\right\}.$$

综合例4—7的分析可以得出：对一些具有一定特点（如其中一或两个方程的一边可分解因式，另一边为0；两个方程相应的二次项系数成比例；两方程相应的非二次项系数成比例）的第（Ⅱ）类型二元二次方程组，我们可以利用分解因式或方程的变换等方法，降低方程的次数，转化为第（Ⅰ）类型方程组求解。

·练习·

解方程组：

1. $\begin{cases} x^2+2xy+x^2+2x+2x-3=0, \\ 2x^2-y^2+x-y+1=0; \end{cases}$

2. $\begin{cases} (x-2y)^2-1=0, \\ (3x-2y+1)(2x+y-3)=0; \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y^2+7x+2y-11=0, \\ x^2+y^2+3x+4y-9=0; \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy-3y+1=0, \\ 2y-\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{3}=0; \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=25, \\ 9x^2-12xy+4y^2=9. \end{cases}$

（二）可转化为含一元方程的方程组．

例8． 解方程组

$$\begin{cases} 2x^2-xy+y^2-3y+2=0, & (1) \\ 6x^2-3xy-y^2-y+6=0. & (2) \end{cases}$$

（分析）这一方程组的特点是：两方程的左边不能分解因式，二次项或非二次项系数都无法消去，但其中含有同一个元 x 或 y 的相应各项系数是成比例的（本题中含 x 的项有

$\frac{2}{6}=\frac{-1}{-3}$)。因而，我们可以利用方程的变换首先消去一元，得到一个一元方程，从而原方程组即可化为含有此一元方程的方程组求解。

解： 由(2)－(1)×3，得

$$-4y^2+8y=0,$$

即

$$4y(y-2)=0. \qquad (3)$$

这样，原方程组就可转化为由(1)，(3)组成或由(2)，(3)组成的方程组求解。再由象例4的分析，原方程组就化为

$$\begin{cases} 2x^2-xy+y^2-3y+2=0 \\ y=0, \end{cases} \text{与}$$

$$\begin{cases} 2x^2-xy+y^2-3y+2=0 \\ y-2=0 \end{cases}$$

直接用代入法即可解出：

$\{$ 无实数解， $\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=1 \\ y_2=2. \end{cases}$

所以原方程组的解集为

$$\{(x,\ y)\}=\{(0,\ 2),\ (1,\ 2)\}.$$

·练习·

解方程组

1. $\begin{cases} -2xy+y^2+x+y+3=0 \\ 4xy-6y^2-2x+y+4=0; \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x^2+3xy+y^2+3x+4y-1=0 \\ x^2+6xy+2y^2+2x+8y-3=0. \end{cases}$

（三）可用换元法解的方程组

例9. 解方程组

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^2+3x+3y-2=0 & (1) \\ 2x^2-2xy+2y^2-2x-2y+15=0. & (2) \end{cases}$$

（分析） 这个方程组的特点是：在两个方程中若x，y将位置互换，方程式不变，这种方程我们叫做轮换对称方程，这种方程组一般可用换元的办法，设$x+y=s$，$x\cdot y=t$.将方程组转化为关于s，t的方程组，解出s，t再进而解出x，y.

解： 设 $\begin{cases} x+y=s \\ xy=t, \end{cases}$ (*)

代入原方程组，得

$$\begin{cases} s^2-4t+3s-2=0 & (3) \\ 2s^2-6t-2f+15=0. & (4) \end{cases}$$

象例8一样，在(3)，(4)中消去t，由(3)×3－(4)×2得

$$-s^2+13s-36=0,$$

即

$$(s-4)(s-9)=0.$$

因此就有：

$$\begin{cases} s^2-4t+3s-2=0 \\ s-4=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} s^2-4t+3s-2=0 \\ s-9=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} s=4 \\ t=\dfrac{13}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} s=9 \\ t=\dfrac{53}{2}. \end{cases}$$

将上述两解代回(*)中，得

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=\dfrac{13}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} xy=9 \\ xy=\dfrac{53}{2}. \end{cases}$$

这两方程组都无实数解。

所以，原方程组无实数解。

综合以上（一）—（三）的解法讨论，我们同样可以给出这种类型方程组解的几何意义如下：

第（Ⅱ）类型的二元二次方程组的解，就是它们两个方程所代表的两条二次曲线的交点。

两条二次曲线的交点最多有四个，也可能有两个，还可能没有交点。相应地，第类（Ⅱ）型的二元二次方程组最多有四个解，也可能有两个解，还可能没有解。

·练习·

解列下方程组

1. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=a \\ x\cdot y=b \quad (a>0,\ b>0)； \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=12, \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{y-1}=5； \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=3(xy+1) \\ 2(x^2+y^2)-xy=6(x+y)-4. \end{cases}$

习题　4—5

1. 解下列方程组：

（1）$\begin{cases} xy+36=0 \\ x+y=5； \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x-y=7 \\ x^2+y^2=85； \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2-y^2-3x+2y=10 \\ x+y=7; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} (x-2)^2+(y+3)^2=9 \\ 3x-2y=6; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 4x^2-9y^2=15 \\ 2x-3y=5; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=5, \\ x+y=13; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} \dfrac{4}{x^2}+\dfrac{25}{y^2}=25 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=1; \end{cases}$ (8) $\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{2x}{y}=3, \\ 2x+3y=4. \end{cases}$

2. (1). m取什么值时，方程组

$$\begin{cases} y^2=4x \\ y=2x+m \end{cases}$$

有两个相等的实数解？并求出这个解。

(2) 在什么情况下，关于x，y的方程组

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$$

有实数解？没有实数解？

3. 解方程组：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y^2=4x; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+y^2=101 \\ xy=-10; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2-y^2+(x-y)-6=0 \\ x^2+2xy+y^2-25=0; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ 6x^2-5xy+y^2=0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \\ (x-4)(y-1)+(x-8)(y-2)=0; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} 2x^2+27xy+6y^2-6x-21y-14=0 \\ 2x^2-9xy-3y^2-6x+6y+4=0. \end{cases}$

4. 解方程组：

(1) $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2=25 \\ 2(x-2)^2-3(y-1)^2=5; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (x+3)^2+y^2=9, \\ 9(x-2)^2+4y^2=36; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ (x+1)^2=(y-1)^2; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x^2-xy-2y^2+y=0 \\ x^2-xy-2y^2-3x+6y=0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2+y^2=x+y+20 \\ xy+10=2(x+y); \end{cases}$

(6) $\begin{cases} (x+y+1)^2+(x+y)^2=25, \\ x^2-y^2=8; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 2x^2-4xy+3y^2=36 \\ 3x^2-4xy+2y^2=36; \end{cases}$

(8) $\begin{cases} 4x^2+9y^2=10 \\ 2xy=1. \end{cases}$

5. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2x^2-xy-y^2+3x+2y=3 \\ x^2-3x+2=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-15xy-3y^2+2x+9y-98=0 \\ 5xy+y^2-3y+21=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2+3xy-4x-4y+3=0 \\ xy+2x+2y-5=0; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} xy=3 \\ yz=6 \\ xz=2; \end{cases}$ (5) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2} \\ x+y=10; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=29 \\ 7x^2-8xy+7y^2=43。 \end{cases}$

本章内容要点

一、本章主要内容是讨论实系数多项式的根，若α满足$f(\alpha)=0$，则α叫多项式$f(x)$的根。多项式$f(x)$的根就是方程$f(x)=0$的根。

二、多项式$f(x)$的求根，就是解方程$f(x)=0$。对于一元多项式$f(x)$：一次、二次、三次、四次多项式都有求根公式（也称为根式解），而五次以上的一元多项式没有求根公式（不存在根式解）。

三、有理系数多项式$f(x)$若有有理根$\dfrac{p}{q}$，$(p, q)=1$则必定有p能整除常数项a_0，q能整除首项系数a_n。特别地，若$f(x)$有整数根α，则$\alpha \mid a_0$。

因此，求有理系数多项式$f(x)$的有理根时，就可以首先找出a_n与a_0的因数，配成以a_n的因数为分母，以a_0的因数为分子的各种应有形式的有理分数就是所求有理根的范围；其次再用余式定理与综合除法逐个试算，确定所求多项式的有理根。特别地，有理系数多项式的整数根，只要在a_0的所有因数中试算，即可确定。

四、同时满足 $f(\alpha)=0$，$g(\alpha)=0$ 的数 α，叫做多项式$f(x)$ 与 $g(x)$ 的公根。

两多项式$f(x)$与$g(x)$有公根的充要条件是它们有一次公因式；

求两多项式的公根，一般只要求它们的最高公因式的根就可以；也可以先求其中一个多项式的根，再逐个代入另一多项式去试算，凡满足的，就是公根，否则就不是公根。

五、如果 α 满足

$$f(x)=(x-\alpha)^m\cdot q(x)，且 q(\alpha)\neq 0。$$

那么，α 就叫做 $f(x)$的 m 重根。

α是$f(x)$的二重根的充要条件是α为$f(x)$，$f'(x)$的公根。

若$(f(x),\ f'(x))$含有$(x-\alpha)^{m-1}$的因式，则α就是$f(x)$的m重根，也是$f'(x)$的$m-1$重根。

对于一个多项式$f(x)$，如果它有重根，那么，$(f(x),\ f'(x))$就是非零次多项式，且不为零多项式。因而.

$$\frac{f(x)}{(f(x),\ f'(x))}=\varphi(x)就是一个没有重根的多项式，$$

而且$\varphi(x)$与$f(x)$有相同的根。

六　实系数多项式的实根，一般是用有理数近似值表示，求实根的近似值主要依据多项式函数的中间值定理，采用逼近的方法。一般地要顺序解决以下几个问题：

1. **确定根界，**

多项式 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的所有根在$[-M,\ M]$之中，$M=1+|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|$；

2. **确定根的个数，根的定位，**

计算史笃姆函数序列及变号数$W(-M)$,$W(M)$. 由史笃姆定理可确定：没有重根的多项式$f(x)$在$[-M,\ M]$中有

$(W(-M)-W(M))$ 个实根，并可将每个根限定在一个确定的区间中。

3. 计算每一实根的近似值，

运用秦九韶法，可以计算出在(a, b)中的实根的任意精确度的近似值。在具体计算过程中，主要使用了两种变换，方便和简化了运算。

七、 二元二次方程组分为两种类型，第（Ⅰ）类型是基础，它的求解主要是采用代入消元法；第（Ⅱ）类型，我们仅讨论了一些具有特点的特殊方程组的解法，其中主要是：

1. 可转化为第（Ⅰ）类型求解的方程组，其转化的主要方法是因式分解；消去二次项；消去非二次项、再分解因式；总之是降次。

2. 可转化为含有一元方程的方程组，其转化的主要方法是消去含有某一元的各项。实际就是消元。

3. 可用换元法解的轮换对称方程组。

至于一般的由两个二元二次方程组的方程组，如果不具有以上这些特点，其解法繁难，我们先不予讨论。以后可以使用几何法解决。

复习题四

1. 求下列多项式的有理根：

（1）$x^3-x^2-8x+12$；　（2）$x^3-11x^2+18x-8$；

（3）$x^4-7x^3-7x^2+43x+42$；

（4）$x^5+4x^3+8x^2+32$。

（5）$4x^4-x^2+2x-1$；　（6）$4x^4-9x^2+6x-1$。

2. 如果多项式$f(x)=ax^2+bx+c$的二根之比为$\frac{2}{3}$，求证：

$6b^2=25ac$。

3．判别下列多项式有没有重根，若有，求出其重根。

（1）$x^4-24x^2+64x-48$；

（2）$x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$；

（3）x^4+4x^2-4x-3。

4．证明：$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$没有重根。

5．求$f(x)=x^4+x^3-2x-4$与$g(x)=x^4-x^3+2x-4$的公根。

6．求多项式x^3+px+q有重根的条件。

7．（1）若a为整数，但$|a|\neq 2$，试证：多项式

$$f(x)=x^2+ax+1$$

没有有理根。

（2）若a，b，c都是奇数，试证明$f(x)=ax^2+bx+c$没有整数根。

8．$a\neq 0$，求证多项式$f(x)=x^n-a^n$没有重根。

9．已知$f(x)=2x^4-8x^3+19x^2-12x+24$有两个根分别是$g(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+2$的两个根的2倍，求这两个根。

10．求多项式$p(x)=x^3+2x^2-5x-7$的正根的近似值，使误差小于10^{-6}。

11．求98的5次方根，使误差小于10^{-6}（允许应用四位对数表求出前若干位数字）。

12．求多项式$f(x)=x^3+x^2+x-10^{10}$的正根的近似值，使误差小于1．

13．将x^5-243写成以$x-3$为元的多项式，将x^4+x^2+1写成以$x+1$为元的多项式。

14. 应用中间值定理，写出下列各多项式的实根在哪些连续整数之间。

(1). $x^4-2x^3-x^2+6x+2$；

(2). x^3+x^2-2x+1；

(3). $x^4-8x^3+14x^2+4x-6$；

15. 若三次多项式 $f(x)=x^3-2x^2-x+3$ 有三个根 α,β,r，试求下列各式的值：

(1) $\alpha^2+\beta^2+r^2$；　　(2) $\alpha^3+\beta^3+r^3$；

(3) $(\alpha+1)(\beta+1)(r+1)$；

(4) $\alpha^2(\beta+r)+\beta^2(\alpha+r)+r^2(\alpha+\beta)$。

16. 应用多项式的第一种换元变形，使

$f(x)=x^3-6x^2+5x+7$

变形为$g(y)$后，$g(y)$中y^2的系数为零。

17. 应用多项式的第一种换元变形使，

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\quad(a_n\neq 0)$，

变形为$g(y)$后，$g(y)$中y^{n-1}的系数为零。

18. 解方程组：

(1). $\begin{cases} x^2-xy+y^2=48 \\ x-y-8=0 \end{cases}$；

(2). $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=1 \\ 3x^2+xy+3y^2=13 \end{cases}$；

(3). $\begin{cases} x^2+y^2+4x-2y+3=0 \\ x^2+4xy-y^2+10y-9=0 \end{cases}$；

(4). $\begin{cases} x^2-xy=12 \\ xy-2y^2=1 \end{cases}$；

*(5). $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{a^2} \\ \dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{b^2}; \end{cases}$

*(6). $\begin{cases} x^4+y^4=97 \\ x+y=5; \end{cases}$

(7). $2(x-y)+xy=3xy-(x-y)=7$.