Processus
Signals and systems

Signals, systems and tools
Signals, systems and telecommunications

Franky De Bruyne

13 septembre 2024

1 Second ordre oscillant

Le système du second ordre oscillant a comme fonction de transfert

$$P(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}. \tag{1}$$

On appelle ω_n la pulsation naturelle et ζ l'amortissement du système. On supposera

$$0 \leq \zeta < 1.$$

Les pôles du systèmes sont alors complexes conjugués [1], c.-à-d.

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2)\\ &= -\sigma \pm j\omega_d \quad (3) \end{aligned}$$

1. Avec $\zeta > 1$, on a 2 pôles réels et le processus se résume à la succession de 2 processus du premier ordre.

avec $\sigma = \zeta\omega_n$ et $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ la pseudo-pulsation. On peut réécrire la fonction de transfert de la façon suivante

$$\begin{aligned} P(s) &= \frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2 + (1-\zeta^2)\omega_n^2}, \\ &= \frac{\omega_n^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2}. \end{aligned}$$

1.1 Réponse impulsionnelle

Supposons que l'entrée du système est une impulsion $x(t) = \delta(t)$, alors l'entrée du système s'écrit

$$X(s) = 1$$

dans le domaine de Laplace. La réponse impulsionnelle du système dans le domaine de Laplace est

$$Y(s) = P(s)X(s) = P(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega_d}\,\frac{\omega_d}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2}.$$

La réponse impulsionnelle $y(t)$ s'obtient en prenant la transformée de Laplace inverse de $Y(s)$. On obtient

$$y(t) = \frac{\omega_n^2}{\omega_d}\, e^{-\sigma t}\, \sin\omega_d t. \tag{4}$$

On a utilisé la propriété de translation en fréquence pour obtenir la relation précédente. La réponse impulsionnelle est illustrée dans les Figures 1 et 2.

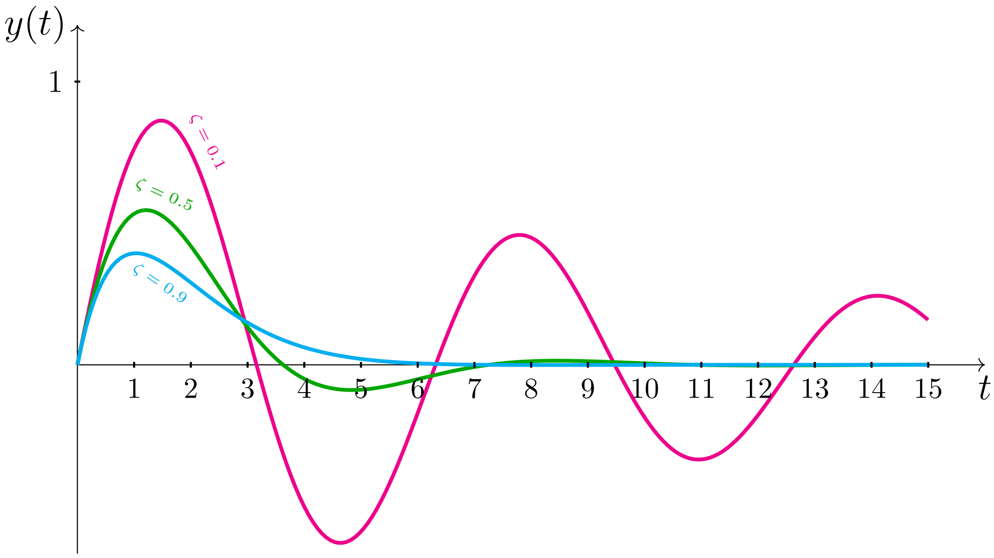

FIGURE 1 – Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre oscillant avec fréquence naturelle $\omega_n = 1$

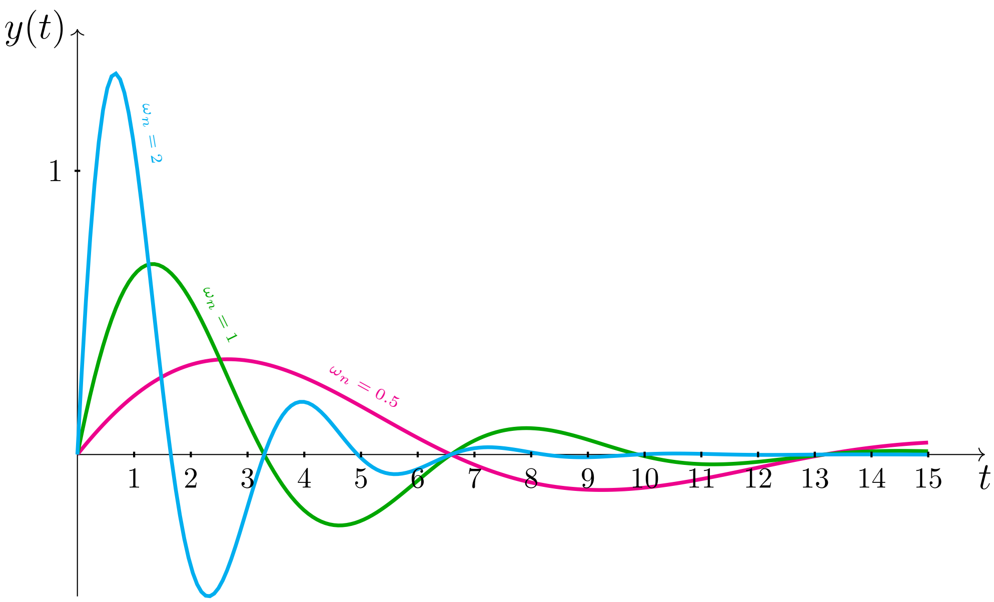

FIGURE 2 – Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre oscillant avec amortissement $\zeta = 0.3$

Les théorèmes des valeurs initiale et finale peuvent nous aider à esquisser la réponse impulsionnelle au démarrage en $t = 0$ et pour $t \to \infty$. Par le théorème de la valeur initiale on a

- $y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{\omega_n^2\, s}{s^2+2\zeta\omega_n\, s+\omega_n^2} = 0,$

- $\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s(sY(s) - y(0)) = \lim_{s\to\infty} \frac{\omega_n^2\, s^2}{s^2+2\zeta\omega_n\, s+\omega_n^2} = \omega_n^2.$

La réponse impulsionnelle démarre donc à l'origine avec une pente de ω_n^2. Par le théorème de la valeur finale et pour [2]

$$0 < \zeta < 1$$

on a

- $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\omega_n^2\, s}{s^2+2\zeta\omega_n\, s+\omega_n^2} = 0.$

1.2 Réponse indicielle

Supposons que l'entrée du système est un échelon unitaire $x(t) = u(t)$, alors l'entrée du système s'écrit

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

dans le domaine de Laplace. La réponse impulsionnelle du système dans le domaine de Laplace est

$$Y(s) = P(s)X(s) = \frac{P(s)}{s} = \frac{\omega_n^2}{s((s+\sigma)^2 + \omega_d^2)}.$$

Après décomposition en fraction simple, on trouve

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s+2\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega_d^2}, \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega_d^2} - \frac{\sigma}{\omega_d}\,\frac{\omega_d}{(s+\sigma)^2+\omega_d^2}. \end{aligned}$$

La réponse indicielle $y(t)$ s'obtient en prenant la transformée de Laplace inverse de $Y(s)$. On obtient

$$y(t) = 1 - e^{-\sigma t}(\cos(\omega_d\, t) + \frac{\sigma}{\omega_d}\, \sin(\omega_d\, t)).$$

2. Pour que le théorème de la valeur finale soit applicable, il faut que le système soit asymptotiquement stable.

On a utilisé la propriété de translation en fréquence pour obtenir la relation précédente. La réponse indicielle est illustrée dans les Figures 3 et 4.

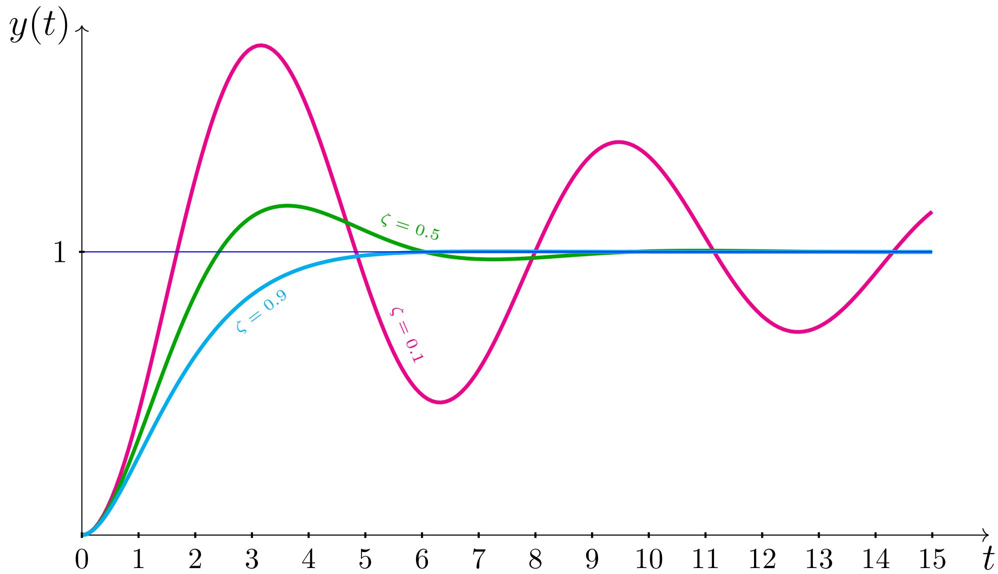

FIGURE 3 – Réponse indicielle d'un système du second ordre oscillant avec pulsation naturelle $\omega_n = 1$

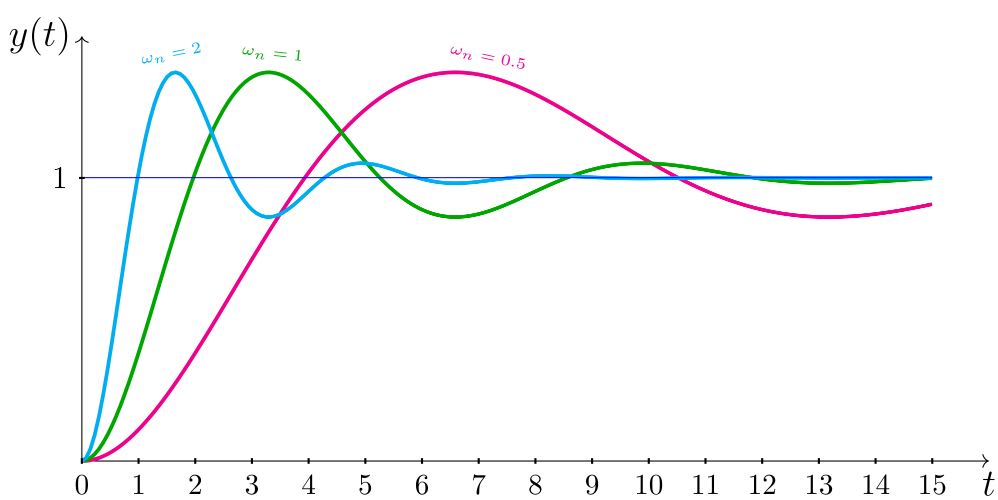

FIGURE 4 – Réponse indicielle d'un système du second ordre oscillant avec amortissement $\zeta = 0.3$

Les théorèmes des valeurs initiale et finale peuvent nous aider à esquisser la réponse indicielle au démarrage en $t = 0$ et pour $t \to \infty$. Par le théorème de la valeur initiale on a

- $y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = 0,$
- $\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s(sY(s) - y(0)) = \lim_{s\to\infty} \frac{\omega_n^2 s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = 0.$
- $\ddot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) = \lim_{s\to\infty} \frac{\omega_n^2 s^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = \omega_n^2.$

La réponse impulsionnelle démarre donc à l'origine avec une pente nulle et une courbure ω_n^2.
Par le théorème de la valeur finale et pour $0 < \zeta < 1$, on a

- $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = 1.$

Le gain statique (basse fréquence) du système est 1.

1.3 Diagramme de Bode

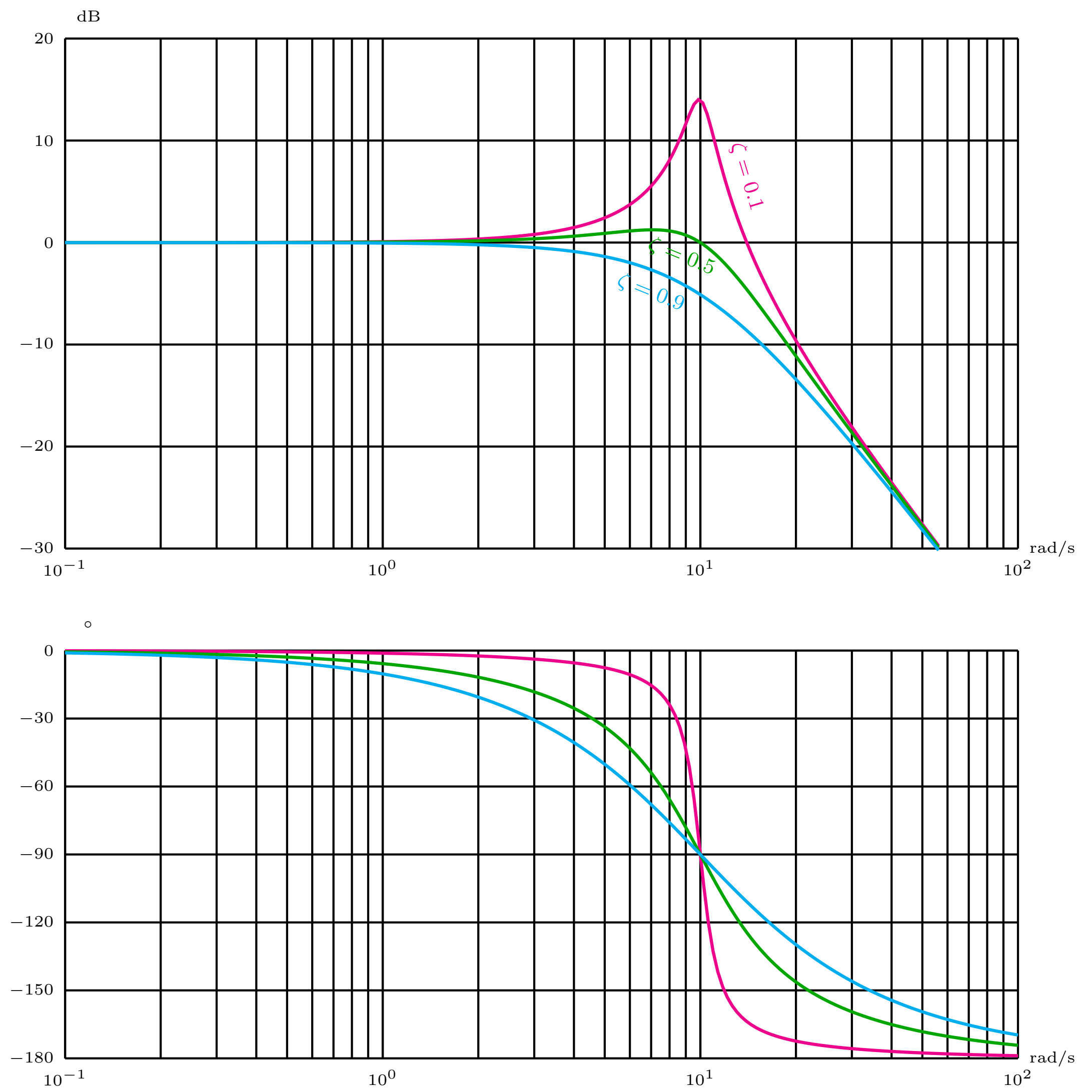

FIGURE 5 – Diagramme de Bode d'un système du second ordre oscillant avec pulsation naturelle $\omega_n = 1$

On peut écrire la fonction de transfert d'un système du second ordre oscillant de la manière suivante

$$P(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\, s + 1}.$$

On note que pour $\omega << \omega_n$, on a

$$P(s) \approx 1 \cdot$$

Un signal sinusoïdal basse fréquence à l'entrée du système produit un signal très similaire en sortie. L'amplification est approximativement 1 et le déphasage approximativement 0°. Pour $\omega >> \omega_n$, on a

$$P(s) \approx -\frac{\omega_n^2}{\omega^2} \cdot$$

Un signal haute fréquence est de plus en plus atténué et le déphasage tend vers -180°. La pente dans le diagramme de Bode du gain correspond à -40db par décade pour les hautes fréquences. A la pulsation naturelle, on a

$$P(j\omega_n) = \frac{1}{j2\zeta} = -j\frac{1}{2\zeta} \cdot$$

Un signal sinusoïdal à la pulsation naturelle ω_n sera amplifié d'un facteur $\frac{1}{2\zeta}$ et déphasé de -90°. Un petit amortissement ζ correspond à une grande amplification à la pulsation naturelle.

1.4 Exemple

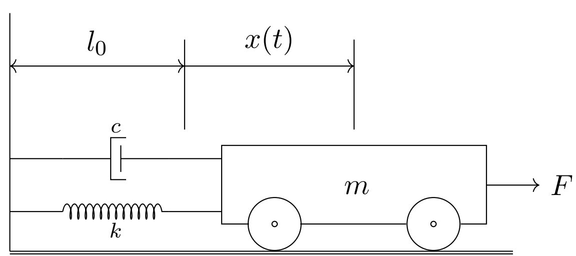

Figure 6 – Système masse ressort amortisseur

Considérons le système de la Figure 6. Soit $x(t)$ l'élongation du ressort par rapport à sa longueur naturelle l_0. Si la force de rappel du ressort est proportionnelle à son élongation et si la force de frottement de l'amortisseur est proportionnelle à la vitesse $\dot{x}$, l'équation de Newton donne

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F. \tag{5}$$

où m, c et k sont des constantes positives désignant respectivement la masse du mobile, la constante d'amortissement de l'amortisseur et la raideur du ressort. En posant

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et } \zeta = \frac{1}{2}\frac{c}{\sqrt{km}} \tag{6}$$

on obtient la fonction de transfert du système

$$P(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}. \tag{7}$$

On appelle ω_n aussi la pulsation propre du système. Pour $c < 2\sqrt{km}$, le comportement est bien celui d'un système du second ordre oscillant.

Etudions, le système (5) avec $F = 0$ et $c = 0$ ($\zeta = 0$). Le système se réduit à celui d'un **oscillateur harmonique**, c.-à-d.

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0. \tag{8}$$

On peut calculer la réponse quand x_0 et $\dot{x}_0$ désignent respectivement la position et la vitesse initiales. En effet, dans le domaine de Laplace, on a

$$s^2 X(s) - s x_0 - \dot{x}_0 + \omega_n^2 X(s) = 0.$$

On trouve

$$X(s) = x_0\,\frac{s}{s^2+\omega_n^2} + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}.$$

En repassant dans le domaine temporel par la transformée de Laplace inverse, on trouve

$$x(t) = x_0\,\cos\omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t.$$

Le mouvement est harmonique et la période des oscillations est donnée par

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n}.$$

L'énergie totale de l'oscillateur harmonique

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}}$$

est conservée au cours du mouvement. Lors des oscillations, l'énergie cinétique est progressivement transformée en énergie potentielle du ressort au cours d'un quart de période puis, pendant le quart de période suivant, la conversion inverse se produit.

Quand $c \neq 0$ ($\zeta \neq 0$), on a un oscillateur amorti, l'énergie n'est plus conservée car un partie de celle-ci est dissipée dans l'amortisseur à chaque oscillation.