

Redresseur

Signals and systems

Signals, systems and tools
Signals, systems and telecommunications

Franky De Bruyne

September 13, 2024

1 Redresseur simple alternance

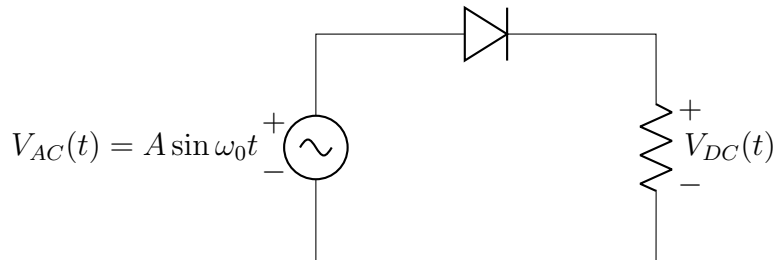


Figure 1: Redresseur simple alternance

Considérons le circuit de la figure 1 avec des composants idéaux. On parle de redressement **simple alternance**, car la diode ne se bloque que pendant l'alternance négative de la tension du générateur. Le courant ne peut circuler que pendant l'alternance positive de $V_{AC}(t)$ et il reste nul pendant l'alternance négative. La tension en sortie pour une période T du sinus $V_{AC}(t)$ est

$$V_{DC}(t) = \begin{cases} A \sin \omega_0 t, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (1)$$

avec

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

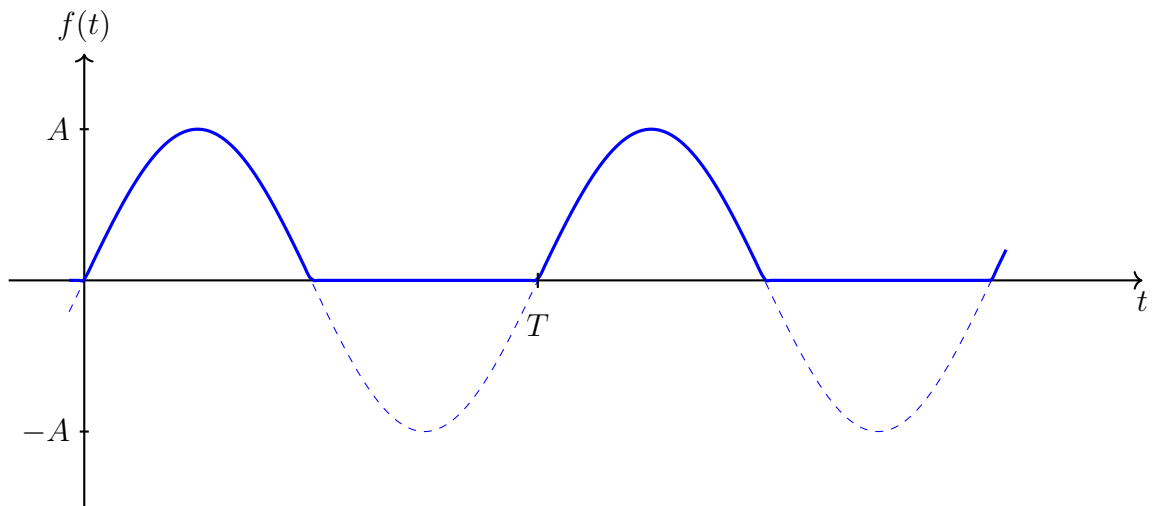


Figure 2: Sinus $V_{AC}(t)$ en trait discontinu et le sinus redressé simple alternance $V_{DC}(t)$ en trait continu

1.1 Calcul des coefficients de Fourier

Les coefficients c_k sont alors obtenus à partir de

$$c_k = \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} f(t) e^{-j \frac{2k\pi t}{T}} dt$$

avec T_f la période de la fonction $f(t)$. Pour la fonction $V_{DC}(t)$ définie en (1), on a $T_f = T$. Pour la fonction étudiée et pour $|k| \neq 1$,

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (A \sin \omega_0 t) e^{-j \frac{2k\pi t}{T}} dt \\
&= \frac{A}{2jT} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi t}{T}} - e^{-j \frac{2\pi t}{T}} \right) e^{-j \frac{2k\pi t}{T}} dt \\
&= \frac{A}{2jT} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi t}{T}(1-k)} - e^{-j \frac{2\pi t}{T}(1+k)} \right) dt \\
&= \frac{A}{2jT} \left[\frac{e^{j \frac{2\pi t}{T}(1-k)}}{j \frac{2\pi}{T}(1-k)} - \frac{e^{-j \frac{2\pi t}{T}(1+k)}}{-j \frac{2\pi}{T}(1+k)} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{4\pi} \left(\frac{e^{j\pi(1-k)}}{(1-k)} + \frac{e^{-j\pi(1+k)}}{(1+k)} - \frac{1}{(1-k)} - \frac{1}{(1+k)} \right)
\end{aligned}$$

On note que

$$e^{j\pi(1-k)} = 1 \text{ pour } k \text{ impair et } e^{j\pi(1-k)} = -1 \text{ pour } k \text{ pair.}$$

De même

$$e^{-j\pi(1+k)} = 1 \text{ pour } k \text{ impair et } e^{-j\pi(1+k)} = -1 \text{ pour } k \text{ pair.}$$

On a

$$c_k = \begin{cases} 0, & k \text{ impair} \\ \frac{A}{2\pi} \left(\frac{1}{(1-k)} + \frac{1}{(1+k)} \right) = \frac{A}{\pi} \frac{1}{(1-k^2)}, & k \text{ pair} \end{cases}$$

Les cas de $k = 1$ et $k = -1$ doivent être traité séparément. Prenons le cas $k = 1$.

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{A}{2jT} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi t}{T}} - e^{-j\frac{2\pi t}{T}} \right) e^{-j\frac{2\pi t}{T}} dt \\
&= \frac{A}{2jT} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(1 - e^{-j\frac{4\pi}{T}} \right) dt \\
&= \frac{A}{2jT} \left[t + \frac{e^{-j\frac{4\pi}{T}}}{j\frac{4\pi}{T}} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{A}{2jT} \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{j\frac{4\pi}{T}} - 0 - \frac{1}{j\frac{4\pi}{T}} \right) \\
&= \frac{A}{4j}
\end{aligned}$$

Un raisonnement similaire donne

$$c_{-1} = -\frac{A}{4j}$$

1.2 Calcul de la série de Fourier

Par définition, on a

$$f(t) = V_{DC}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2k\pi t}{T}}$$

Considérons les harmoniques k de $f(t)$, c.-à-d. les contributions apportées par k et $-k$ ($|k| \geq 1$ et k pair) dans cette somme. On a

$$\begin{aligned}
c_k e^{j\frac{2k\pi t}{T}} + c_{-k} e^{-j\frac{2k\pi t}{T}} &= \frac{A}{\pi} \frac{1}{(1 - k^2)} \left(e^{j\frac{2k\pi t}{T}} + e^{-j\frac{2k\pi t}{T}} \right) \\
&= \frac{A}{\pi} \frac{1}{(1 - k^2)} \left(2 \cos \left(\frac{2k\pi t}{T} \right) \right) \\
&= \frac{2A}{\pi} \frac{1}{(1 - k^2)} \cos(k\omega_0 t)
\end{aligned}$$

L'harmonique 1 de $f(t)$, c.-à-d. la contribution apportée par 1 et -1 dans cette somme est

$$\begin{aligned} c_1 e^{j\frac{2\pi t}{T}} + c_{-1} e^{-j\frac{2\pi t}{T}} &= \frac{A}{4j} \left(e^{j\frac{2\pi t}{T}} - e^{-j\frac{2\pi t}{T}} \right) \\ &= \frac{A}{4j} \left(2j \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right) \\ &= \frac{A}{2} \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

Le coefficient c_0 correspond à la moyenne du signal $f(t)$ sur une période T , c.-à-d.

$$c_0 = \frac{A}{\pi}.$$

On obtient maintenant la série de Fourier de la fonction étudiée, c.-à-d.

$$f(t) = V_{DC}(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin \omega_0 t - \frac{2A}{\pi} \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1} \cos(k\omega_0 t) \quad (2)$$

Les figures ci-dessous illustrent l'approximation de $V_{DC}(t)$ par sa série de Fourier tronquée pour différentes valeurs de k .

La Figure 5 donne le spectre du sinus redressé simple alternance V_{DC} . On trouve une composante DC, une composante à la fréquence f_0 du signal AC et des composantes aux harmoniques paires de la fréquence f_0 du signal AC. Le sinus redressé simple alternance n'est pas une fonction paire ou impaire. Il est donc normal de retrouver des termes en sinus et cosinus.

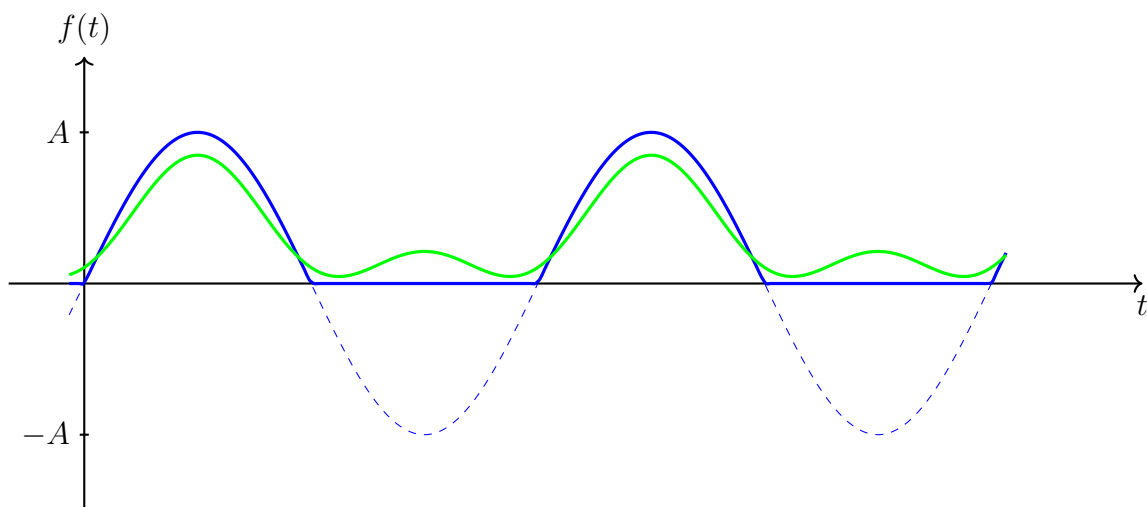


Figure 3: Approximation du sinus redressé simple alternance ($k = 2$)

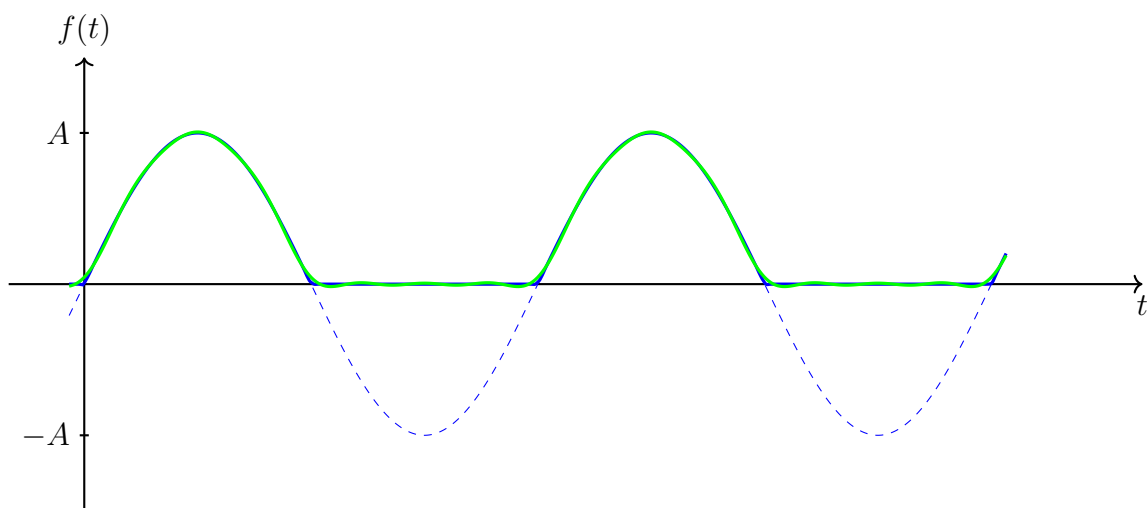


Figure 4: Approximation du sinus redressé simple alternance ($k = 6$)

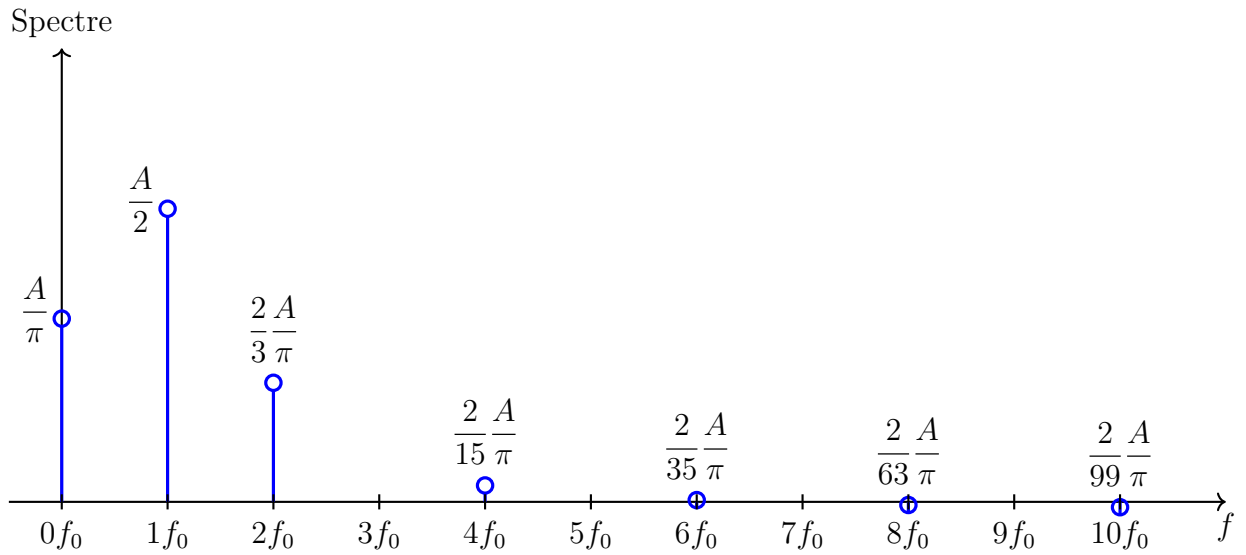


Figure 5: Spectre du sinus redressé simple alternance

2 Redresseur double alternance

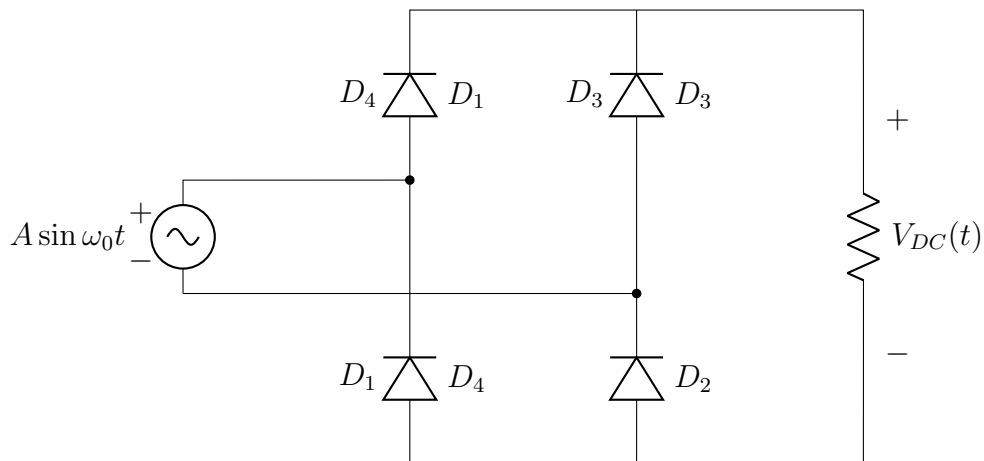


Figure 6: Redresseur double alternance

Considérons le circuit de la figure 6 avec des composants idéaux. On parle de redressement **double alternance**, le courant traverse la résistance toujours dans le même sens pendant les deux alternances positive et négative de la tension du générateur.

Quel que soit son sens, le courant traverse deux diodes car les deux autres sont bloquées:

- Lors de l'alternance positive de $V_{AC}(t)$, le courant traverse D_1 et D_2 car D_3 et D_4 sont bloquées.
- Lors de l'alternance négative de $V_{AC}(t)$, le courant traverse D_3 et D_4 car D_1 et D_2 sont bloquées.

Ce système est 2 fois plus efficace que le redressement simple alternance mais il nécessite 4 diodes au lieu d'une seule. Ce judicieux système de 4 diodes est appelé **pont de diodes** ou **pont de Graëtz**.

La tension en sortie pour une période T du sinus $V_{AC}(t)$ est

$$V_{DC}(t) = A |\sin \omega_0 t| \quad (3)$$

avec

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Le signal redressé double alternance a une période de $\frac{T}{2}$; sa fréquence fondamentale est double de la tension alternative qui l'a produite. Il faudra en tenir compte dans le calcul des coefficients de Fourier.

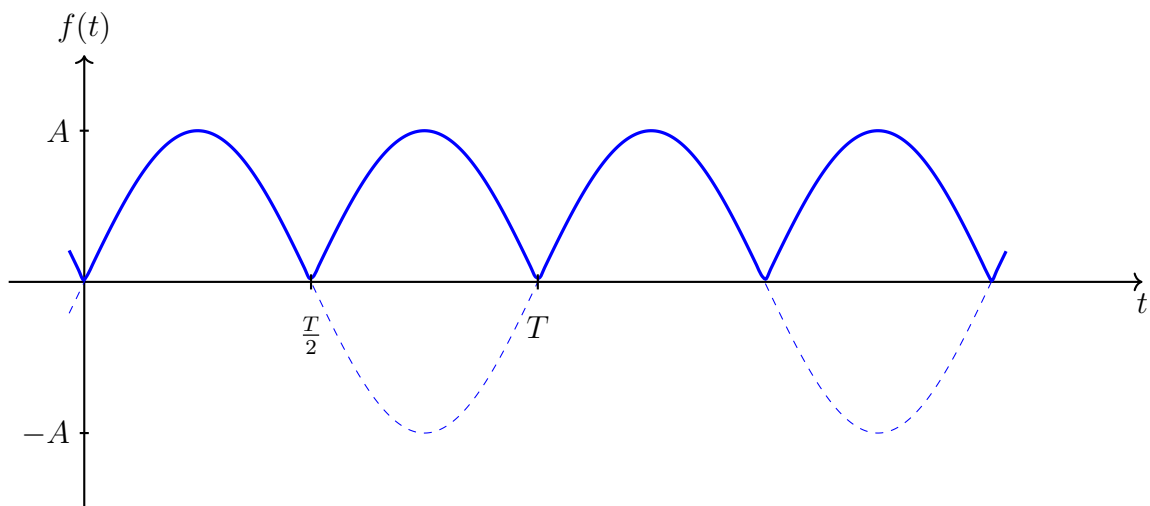


Figure 7: Sinus $V_{AC}(t)$ en trait discontinu et le sinus redressé double alternance $V_{DC}(t)$ en trait continu

2.1 Calcul des coefficients de Fourier

Les coefficients c_k sont alors obtenus à partir de

$$c_k = \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} f(t) e^{-j \frac{2k\pi t}{T}} dt$$

avec T_f la période de la fonction $f(t)$. Pour rappel, la fonction $V_{DC}(t)$ définie en (3) a comme fréquence fondamentale $2\omega_0$, c.-à-d. le double de la fréquence ω_0 de la tension alternative qui l'a produite. La période à considérer dans calcul des coefficients de Fourier est donc $T_f = \frac{T}{2}$. Pour la fonction étudiée,

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} |\sin \omega_0 t| e^{-j \frac{4k\pi t}{T}} dt \\ &= \frac{2A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi t}{T} e^{-j \frac{4k\pi t}{T}} dt \\ &= \frac{2A}{2jT} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi t}{T}} - e^{-j \frac{2\pi t}{T}} \right) e^{-j \frac{4k\pi t}{T}} dt \\ &= \frac{A}{jT} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi t}{T}(1-2k)} - e^{-j \frac{2\pi t}{T}(1+2k)} \right) dt \\ &= \frac{A}{jT} \left[\frac{e^{j \frac{2\pi t}{T}(1-2k)}}{j \frac{2\pi}{T}(1-2k)} - \frac{e^{-j \frac{2\pi t}{T}(1+2k)}}{-j \frac{2\pi}{T}(1+2k)} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= -\frac{A}{2\pi} \left(\frac{e^{j\pi(1-2k)}}{(1-2k)} + \frac{e^{-j\pi(1+2k)}}{(1+2k)} - \frac{1}{(1-2k)} - \frac{1}{(1+2k)} \right) \end{aligned}$$

On note que

$$e^{j\pi(1-2k)} = -1 \text{ et } e^{-j\pi(1+2k)} = -1 \quad \forall k.$$

On a

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{A}{\pi} \left(\frac{1}{(1-2k)} + \frac{1}{(1+2k)} \right) \\ &= \frac{2A}{\pi} \frac{1}{(1-4k^2)} \end{aligned}$$

2.2 Calcul de la série de Fourier

Par définition, on a

$$f(t) = V_{DC}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{4k\pi t}{T}}$$

Considérons les harmoniques k de $f(t)$, c.-à-d. les contributions apportées par k et $-k$ dans cette somme. On a

$$\begin{aligned} c_k e^{j\frac{4k\pi t}{T}} + c_{-k} e^{-j\frac{4k\pi t}{T}} &= \frac{2A}{\pi} \frac{1}{(1-4k^2)} \left(e^{j\frac{4k\pi t}{T}} + e^{-j\frac{4k\pi t}{T}} \right) \\ &= \frac{2A}{\pi} \frac{1}{(1-4k^2)} \left(2 \cos \left(\frac{4k\pi t}{T} \right) \right) \\ &= \frac{4A}{\pi} \frac{1}{(1-4k^2)} \cos(2k\omega_0 t) \end{aligned}$$

Le coefficient c_0 correspond à la moyenne du signal $f(t)$ sur une période T , c.-à-d.

$$c_0 = \frac{2A}{\pi}.$$

On obtient maintenant la série de Fourier de la fonction étudiée, c.-à-d.

$$f(t) = V_{DC}(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(2k\omega_0 t). \quad (4)$$

En prenant le changement de variable $\bar{k} = 2k$, on retrouve une équation qui est plus facilement comparable à la série de Fourier du sinus redressé simple alternance de l'équation (2), c.-à-d.

$$f(t) = V_{DC}(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1} \cos(k\omega_0 t). \quad (5)$$

Les figures ci-dessous illustrent l'approximation de $V_{DC}(t)$ par sa série de Fourier tronquée pour différentes valeurs de k .

La Figure 10 donne le spectre du sinus redressé double alternance V_{DC} . On trouve une composante DC et des composantes aux harmoniques paires de la fréquence f_0 du signal AC. Le sinus redressé double alternance est une fonction paire. Il est donc normal de ne retrouver que des termes en cosinus.

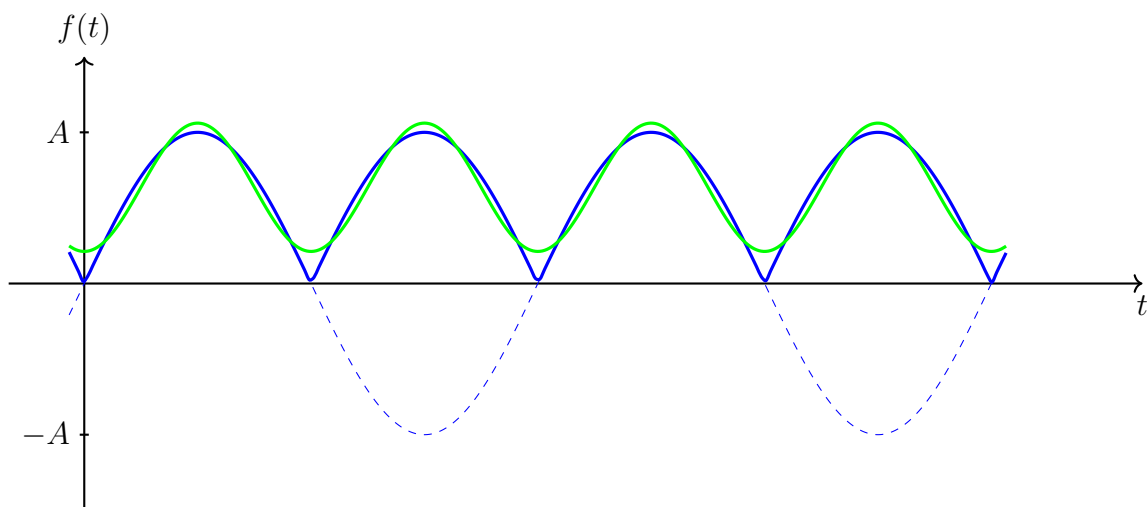


Figure 8: Approximation du sinus redressé double alternance ($k = 2$)

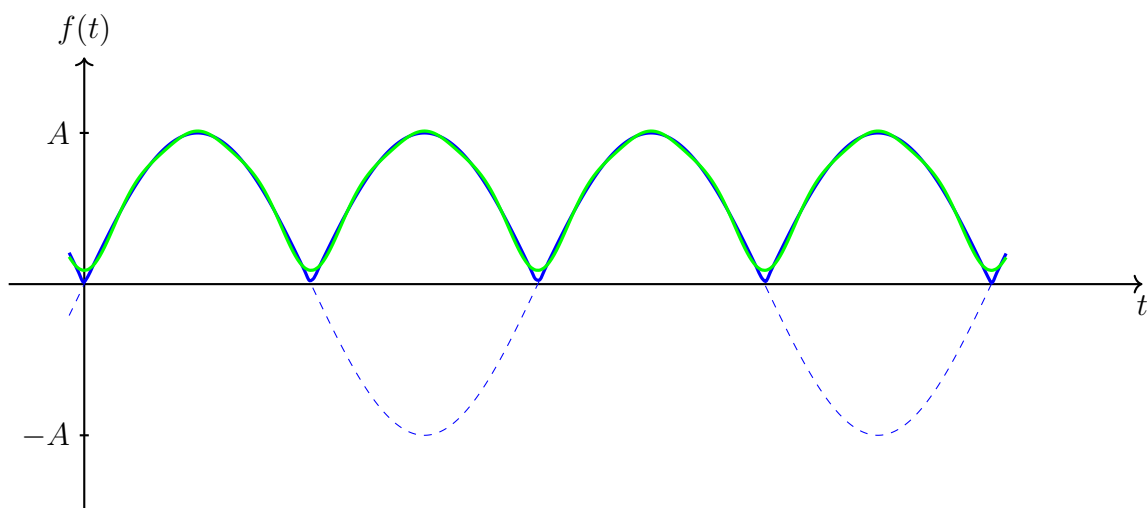


Figure 9: Approximation du sinus redressé double alternance ($k = 6$)

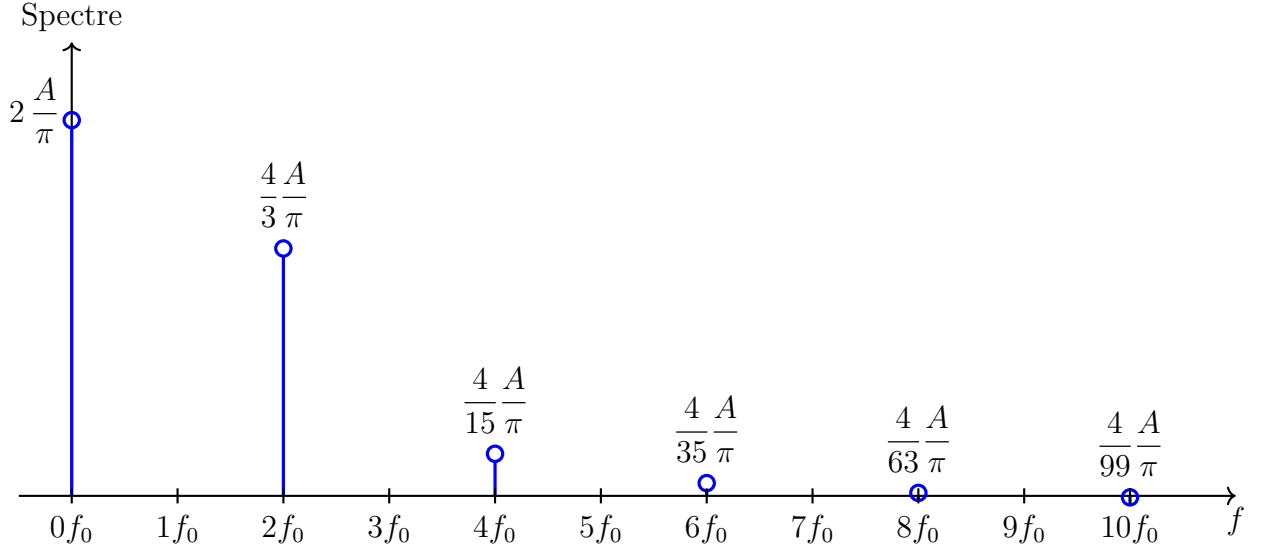


Figure 10: Spectre du sinus redressé double alternance

3 Cohérence des résultats

On peut facilement vérifier la cohérence des résultats précédents. Le signal redressé simple alternance s'écrit

$$V_{DC_{sa}}(t) = \begin{cases} A \sin \omega_0 t, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

On observe

$$\begin{aligned} V_{DC_{sa}}(t) - \frac{A}{2} \sin \omega_0 t &= \begin{cases} \frac{A}{2} \sin \omega_0 t, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -\frac{A}{2} \sin \omega_0 t, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \\ &= \frac{A}{2} |\sin \omega_0 t| \\ &= \frac{1}{2} V_{DC_{da}}(t) \end{aligned}$$

Donc

$$V_{DC_{sa}}(t) = \frac{1}{2}V_{DC_{da}}(t) + \frac{A}{2} \sin \omega_0 t. \quad (6)$$

C'est aussi la décomposition du sinus redressé simple $V_{DC_{sa}}(t)$ en sa partie paire, c.-à-d. la moitié d'un sinus redressé double alternance $\frac{1}{2}V_{DC_{da}}(t)$, et en sa partie impaire, c.-à-d. $\frac{A}{2} \sin \omega_0 t$. On retrouve bien un résultat similaire dans la série de Fourier : le sinus redressé simple alternance a les mêmes harmoniques que le sinus redressé double alternance avec un facteur $\frac{1}{2}$ et un terme supplémentaire à la fréquence de base du signal d'entrée $V_{AC}(t)$.

4 Filtrage

La tension de sortie obtenue après redressement n'est pas lisse. En effet, elle contient des harmoniques de la tension alternative. Pour réduire les harmoniques responsables des parasites hautes fréquences, on utilise un filtre en sortie du redresseur. La solution est d'utiliser un condensateur de capacité C en parallèle avec la charge résistive R_c comme illustré dans les Figures 11 et 12.

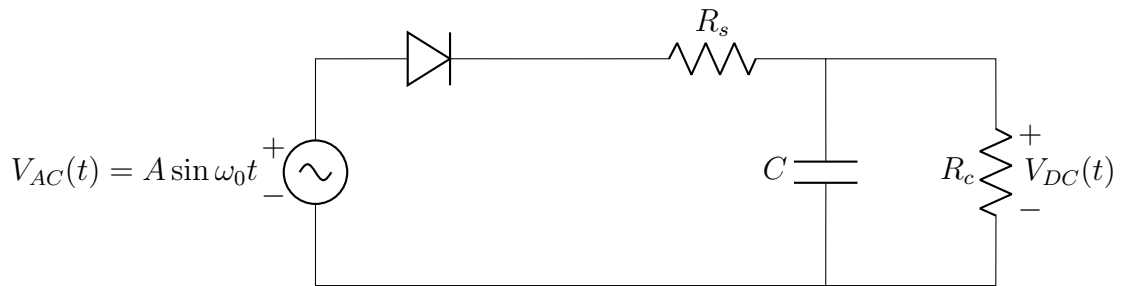


Figure 11: Redresseur simple alternance avec filtre

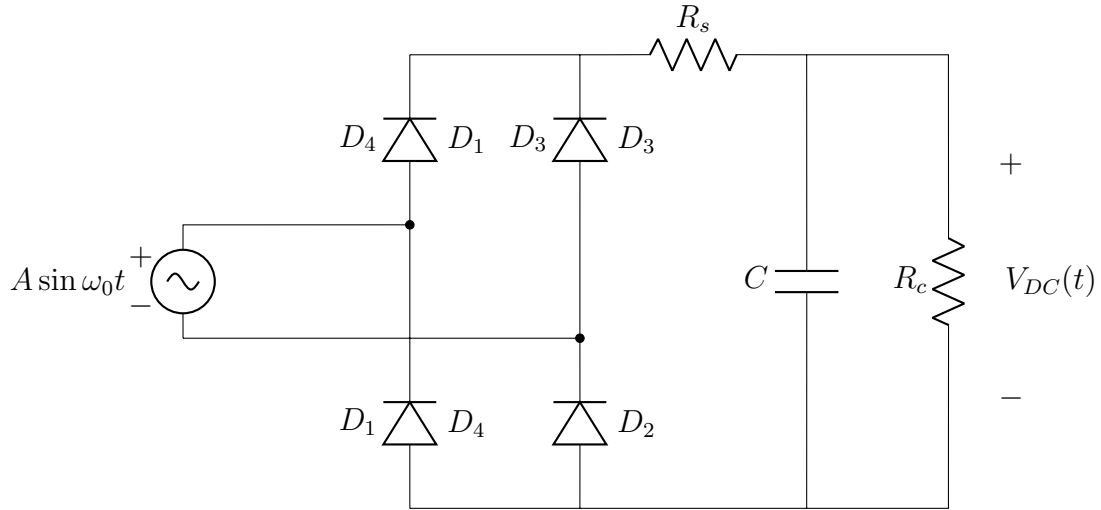


Figure 12: Redresseur double alternance avec filtre

L'idée est que le condensateur va servir de “réservoir” de courant quand la tension aux bornes du condensateur tombe. On supposera que la charge est résistive et est modélisée par une résistance R_c .

La résistance R_s est la résistance série toujours présente. Celle-ci limite le courant vers la capacité. En conséquence, on ne peut faire l'hypothèse que la tension en sortie suit parfaitement le sinus redressé lors de la charge du condensateur. Dans la suite, on supposera R_s suffisamment petit pour avoir une constante de temps de charge petite.

Comment dimensionner la capacité du condensateur ? Lorsque la tension aux bornes du condensateur diminue, celui-ci se décharge dans la résistance. Le circuit est alors celui de la Figure 13.

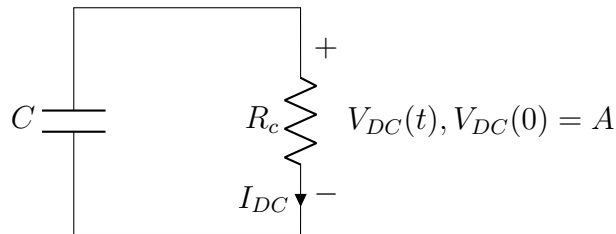


Figure 13: Décharge du condensateur dans la charge résistive

On obtient

$$\begin{aligned}\frac{V_{DC}(t)}{R_c} &= I_{DC}(t) \\ -C \frac{dV_{DC}(t)}{dt} &= I_{DC}(t)\end{aligned}$$

et finalement

$$R_c C \frac{dV_{DC}(t)}{dt} + V_{DC}(t) = 0 \quad (7)$$

avec condition initiale $V_{DC}(0) = A$. On supposera que le condensateur a été chargé à la valeur de crête de tension alternative $V_{AC}(t) = A \sin \omega_0 t$. On néglige donc la présence de la diode et de la résistance série R_s . Dans le domaine de Laplace, on écrit

$$R_c C (sV_{DC}(s) - V_{DC}(0)) + V_{DC}(s) = 0 \Rightarrow V_{DC}(s) = A \frac{R_c C}{R_c C s + 1}.$$

En repassant dans le domaine temporel, on trouve

$$V_{DC}(t) = A e^{-\frac{t}{R_c C}}, \quad (8)$$

c.-à-d. la constante de temps de décharge est $\tau_d = R_c C$. On peut écrire l'approximation de Taylor du premier ordre de $V_{DC}(t)$ autour de $t = 0$, c.-à-d.

$$V_{DC}(t) = A e^{-\frac{t}{R_c C}} \approx A \left(1 - \frac{t}{R_c C}\right).$$

Pour le **redresseur simple alternance**, on approximera la période de décharge par la période T du signal alternatif à l'entrée $V_{AC}(t)$. L'ondulation résiduelle sur $V_{DC}(t)$ sera donc environ

$$V_{ripple} = A \frac{T}{\tau_d} = A \frac{T}{R_c C} = A \frac{1}{f_0 R_c C} \quad (9)$$

où $\omega_0 = 2\pi f_0$. Il faut donc choisir $\tau_d = R_c C \ll T$. Pour avoir un taux d'ondulation résiduel de $x\%$, il faut

$$\frac{T}{R_c C} = x\% \Rightarrow C = \frac{T}{R_c x\%} = \frac{1}{R_c f_0 x\%}. \quad (10)$$

Pour le **redresseur double alternance**, on approximera la période de décharge par la période $\frac{T}{2}$ du signal alternatif à l'entrée $V_{AC}(t)$. L'ondulation résiduelle sur $V_{DC}(t)$ sera donc environ

$$V_{ripple} = A \frac{T}{2\tau_d} = A \frac{T}{2R_c C} = A \frac{1}{2f_0 R_c C}. \quad (11)$$

On a

$$C = \frac{T}{2R_c x\%} = \frac{1}{2R_c f_0 x\%}. \quad (12)$$

Comme on pouvait s'y attendre, le condensateur a une capacité 2 fois plus petite que dans le cas simple alternance pour un même taux d'ondulation.

On peut vérifier ces résultats dans les Figures 14 et 15. Pour les valeurs

$$R_s = 0.01\Omega, R_c = 100\Omega, C = 1000\mu F, A = 100V \text{ et } f_0 = 50Hz,$$

on trouve pour le redresseur simple alternance

$$V_{ripple} = A \frac{T}{\tau_d} = A \frac{T}{R_c C} = A \frac{1}{f_0 R_c C} = 100V \frac{1}{50 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot 10^{-6}} = 20V,$$

ce qui correspond approximativement au résultat observé dans la Figure 14.

Pour le redresseur double alternance, on observe une ondulation réduite de moitié dans la Figure 15, c.-à-d. environ 10V. On peut observer l'effet de la chute de tension sur les diodes, c.-à-d. 0.7V pour le redresseur simple alternance et 1.4V pour le redresseur double alternance.

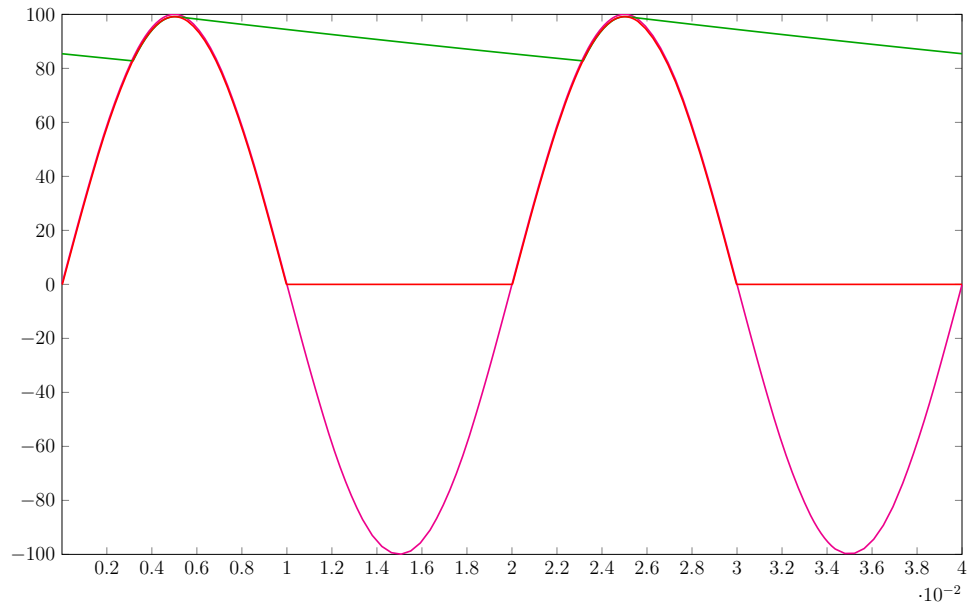


Figure 14: Redresseur simple alternance avec filtre et $R_s = 0.01\Omega$, $R_c = 100\Omega$, $C = 1000\mu F$, $A = 100V$ et $f_0 = 50Hz$.

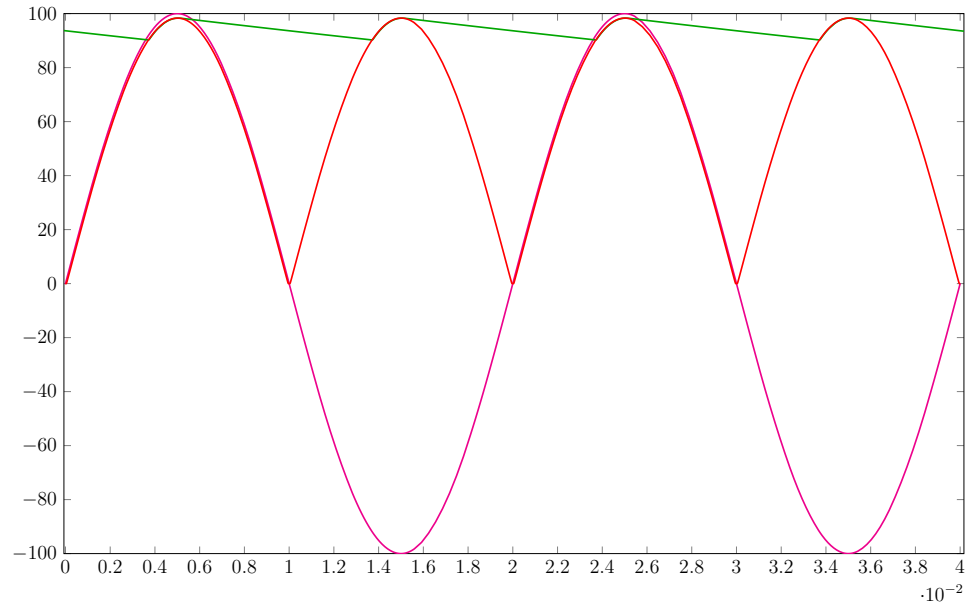


Figure 15: Redresseur double alternance avec filtre et $R_s = 0.01\Omega$, $R_c = 100\Omega$, $C = 1000\mu F$, $A = 100V$ et $f_0 = 50Hz$.