La réponse d'un système à l'entrée $x[k] = 0 \quad \forall k$ sauf $x[0] = 1$, $x[1] = -2$

est $y[k] = 2(2^k - 1)\, u[k]$

Quelle est sa réponse impulsionnelle ?

$$y[k] = 2(2^k - 1)\,u[k] \rightsquigarrow Y(z) = 2\frac{z}{z-2} - \frac{2z}{(z-1)}$$

$$= 2\,2^k u[k] - 2u[k]$$

$$Y(z) = 2\left(\frac{z(z-1) - z(z-2)}{(z-2)(z-1)}\right) = 2\left(\frac{z^2 - z - z^2 + 2z}{(z-2)(z-1)}\right) = \frac{2z}{(z-2)(z-1)}$$

$$X(z) = 1 - 2z^{-1} = \frac{z-2}{z}$$

$$Y(z) = H(z)X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{2z}{(z-2)(z-1)}}{\frac{(z-2)}{z}} = \frac{2z^2}{(z-2)^2(z-1)}$$

Réponse impulsionnelle $h[k] = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{2z}{(z-2)^2(z-1)} = \frac{A}{(z-2)} + \frac{B}{(z-2)^2} + \frac{C}{(z-1)}$$

$$A = \left[\frac{2z}{(z-1)}\right]'\Bigg|_{z=2} = \frac{(z-1)2 - 2z}{(z-1)^2}\Bigg|_{z=2} = \frac{-2}{(z-1)^2}\Bigg|_{z=2} = -2$$

$$B = \frac{2z}{(z-1)}\Bigg|_{z=2} = 4$$

$$C = \frac{2z}{(z-2)^2}\Bigg|_{z=1} = 2$$

$$H(z) = -\frac{2z}{(z-2)} + 2\frac{2z}{(z-2)^2} + \frac{2z}{(z-1)}$$

$$h[k] = 2\left(-(2)^k + k(2)^k + 1\right)u[k]$$

Réponse à $x[k]$

$2(-2^k + k2^k + 1)u[k]$

$-4(-2^{k-1} + (k-1)2^{k-1} + 1)u[k]$

$= (\cancel{-4\,2^{k-1}} + \cancel{4\,2^{k-1}}$

$\cancel{4k\,2^{k-1}} - \cancel{4k\,2^{k-1}} + 4\,2^k$

$+2 - 4)\,u[k]$

$= (2\,2^k - 2)\,u[k]$

ok