Décomposition harmonique
Signals and systems

Signals, systems and tools
Signals, systems and telecommunications

Franky De Bruyne

13 septembre 2024

1 Décomposition harmonique

La section 1 s'inspire des références [1, 2]. Le théorème de Fourier indique que toute fonction périodique non sinusoïdale peut être représentée sous la forme d'une somme de termes qui est composée :

- d'un terme sinusoïdal à la fréquence fondamentale,
- de termes sinusoïdaux dont les fréquences sont des multiples entiers de la fondamentale, les harmoniques,
- et d'une éventuelle composante continue.

La formule correspondant à la décomposition harmonique d'une fonction périodique est la suivante :

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\, X_k \, \sin\left(k\omega_0 t - \phi_k\right) \tag{1}$$

où
- X_0 : valeur de la composante continue généralement nulle et considérée comme telle par la suite,
- X_k : valeur efficace de l'harmonique de rang k,
- ω_0 : pulsation de la fréquence fondamentale,
- ϕ_k : déphasage de la composante harmonique à t = 0.

1.1 Valeur efficace

La valeur efficace d'un signal est obtenu par l'application de la formule générale [1]

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2\,dt}. \tag{2}$$

Pour un **signal purement (mono-)sinusoïdal**, on trouve la relation

$$X_{eff} = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}} \tag{3}$$

où X_{max} est la valeur de crête. Notez que cette relation ne vaut que pour un signal purement (mono-)sinusoïdal. Pour un signal triangulaire, on a

$$X_{eff} = \frac{X_{max}}{\sqrt{3}}$$

et pour un signal carré, on a

$$X_{eff} = X_{max}.$$

Pour **le signal périodique non sinusoïdal défini dans l'équation (1)**, on a

$$X_{eff} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} X_k^2}. \tag{4}$$

Typiquement, on calcule X_{eff} à l'aide d'une FFT. Le nombre de termes dans la somme est typiquement limité à des valeurs de l'ordre de 40 à 50.

1. Dans la littérature, on retrouve aussi la notation anglo-saxonne X_{RMS} avec RMS qui signifie Root Mean Square, soit "racine de la moyenne du carré".

1.2 Taux de distorsion harmonique (THD)

Le taux de distorsion harmonique [2] est une notion très utilisée pour définir l'importance du contenu harmonique d'un signal alternatif. Pour **le signal périodique non sinusoïdal défini dans l'équation (1)**, on a

$$\mathrm{THD} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} X_k^2}}{X_1}. \tag{5}$$

Le THD se mesure typiquement pour l'onde de tension et de courant :

— Le **THD en tension** caractérise la déformation de l'onde de tension :

  — Une valeur de THD inférieure à 5% est considérée comme normale. Aucun dysfonctionnement n'est à craindre.
  — Une valeur de THD comprise entre 5 et 8% révèle une pollution harmonique significative. Quelques dysfonctionnements sont possibles.
  — Une valeur de THD supérieure à 8% révèle une pollution harmonique importante. Des dysfonctionnements sont probables. Une analyse approfondie et la mise en place de dispositifs d'atténuation sont nécessaires.

— Le **THD en courant** caractérise la déformation de l'onde de courant. La recherche du pollueur s'effectue en mesurant le THD en courant sur l'arrivée et sur chacun des départs des différents circuits, afin de s'orienter vers le perturbateur.

  — Une valeur de THD inférieure à 10% est considérée comme normale. Aucun dysfonctionnement n'est à craindre.
  — Une valeur de THD comprise entre 10 et 50% révèle une pollution harmonique significative. Il y a risque d'échauffements, ce qui implique le sur-dimensionnement des câbles et des sources.
  — Une valeur de THD supérieure à 50% révèle une pollution harmonique importante. Des dysfonctionnements sont probables. Une

2. THD correspond à Total Harmonic Distortion ou taux de distorsion harmonique global.

analyse approfondie et la mise en place de dispositifs d'atténuation sont nécessaires.

2 Exemple

Dans cette section, on utilise la FFT pour calculer la valeur efficace et le taux de distortion harmonique (THD) d'une onde de tension typique mesurée sur le réseau électrique en Belgique. Les données de l'exemple et le software Matlab qui a servi au calcul est disponible sur EOLE. L'onde de tension a été mesurée avec une fréquence d'échantillonnage $f_s = 16\,\mathrm{kHz}$ à l'aide d'un système Triphase[3]. Nous avons à notre disposition $N = 367869$ données échantillonnées avec un pas d'échantillonnage de $T_s = 6.25\,10^{-5}\,\mathrm{s}$. Ceci corresponds à environ 23 s de données. Vu qu'il n'est pas très judicieux de faire du "zero padding" en présence d'un signal périodique, nous décidons de n'exploiter que les $N = 2^{18}$ premières données. Ceci correspond à environ 16.4 secondes de données. La Figure 1 montre les 1000 premières données pour chaque phase.

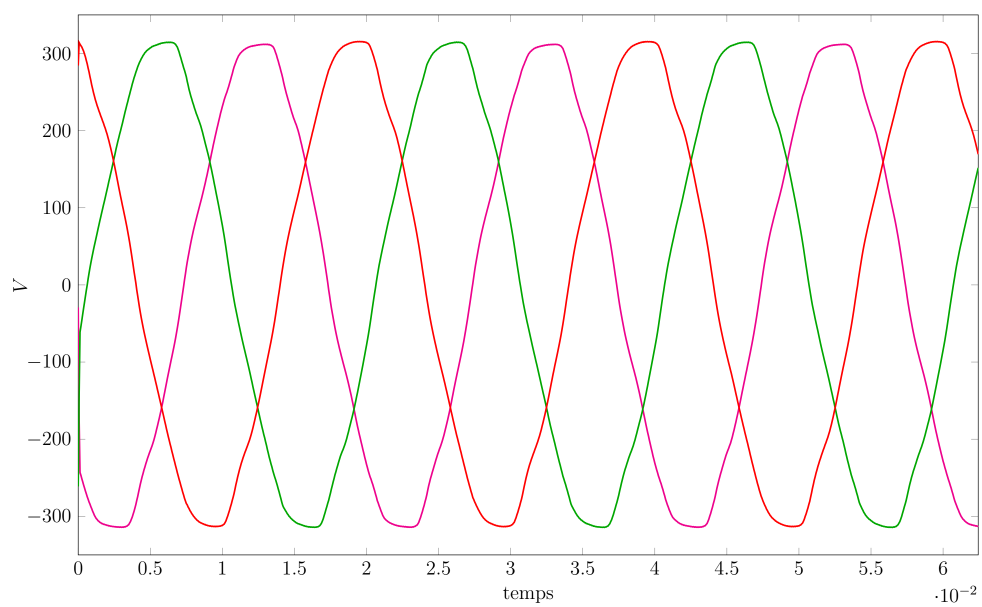

FIGURE 1 – Tension de phase triphasée mesurée sur le réseau électrique belge

3. http://www.triphase.be/

On remarque la déformation caractéristique de l'onde de tension, signe de pollution harmonique. Notez que la grande quantité de données, nous permet d'avoir une résolution spectrale raisonnable

$$\mathrm{r}_{\text{spect}} = \frac{f_s}{N} = \frac{16000}{2^{18}} = 0.0610\,\mathrm{Hz}. \tag{6}$$

Le calcul de la FFT pour la première phase, nous donne le spectre de la Figure 2. Vu que la fréquence d'échantillonnage est 16 kHz, le spectre est calculé sur l'intervalle $[0 \quad 8\,\mathrm{kHz}]$. Il est donc possible d'estimer l'influence des harmoniques jusqu'à l'harmonique 159. La Figure 3 montre le spectre du signal limité à une fréquence de 1000 Hz et une amplitude de 10 V pour mieux pouvoir visualiser la présence des harmoniques. Le tableau 1 donne les valeurs de la tension de crête de la fondamontale F_1 et des harmoniques H_k pour $k \leq 19$. Ces valeurs sont extraites du spectre du signal. Les contributions H_k avec une valeur de crête $X_k > 0.1\,\mathrm{V}$ sont indiqués en mauve. Ces contributions correspondent à des harmoniques impaires et sont fréquemment rencontrées sur le réseau électrique. Les harmoniques paires très souvent négligeables en milieu industriel, s'annulent en raison de la symétrie du signal. L'influence des harmoniques est à peine perceptible pour $k > 19$.

A l'aide des formules (4) et (5), on calcule que pour le signal étudié on a

$$V_{eff} = 224.6000\,V \tag{7}$$

alors que la valeur efficace de la fondamentale est $V_{1,eff} = \frac{317.56718}{\sqrt{2}} = 224.5539\,\mathrm{V}$. Le taux de distortion harmonique est

$$\mathrm{THD} = 6.4368\,\%. \tag{8}$$

Références

[1] J. N. Fiorina, "Cahier technique merlin gerin n° 159." `http://www.schneider-electric.com/documents/technical-publications/en/shared/electrical-engineering/electrical-networks/low-voltage-minus-1kv/ect159.pdf`, 1992.

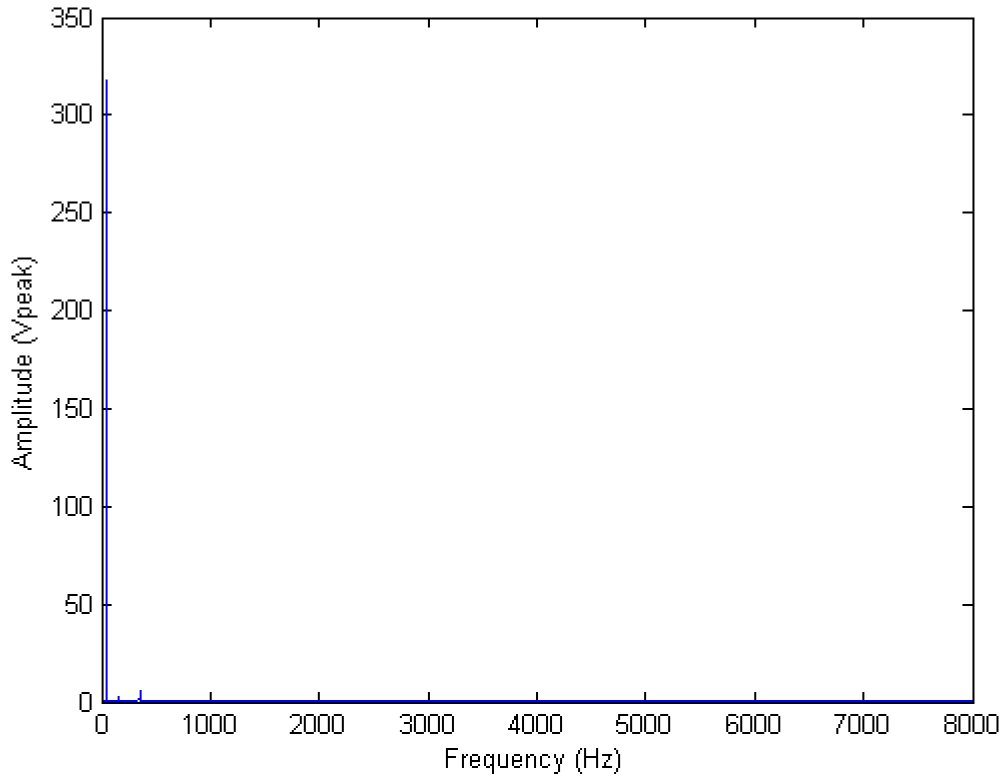

FIGURE 2 – Spectre de la tension de phase de la première phase mesurée

[2] S. Electric, "Détection et filtrage des harmoniques, guide expert basse tension n° 4." `http://www.global-download.schneider-electric.com/85257578007E5C8A/all/821BA7F28237979C88257578005F4C85/$File/dbtp152gui_fr.pdf`, 2009.

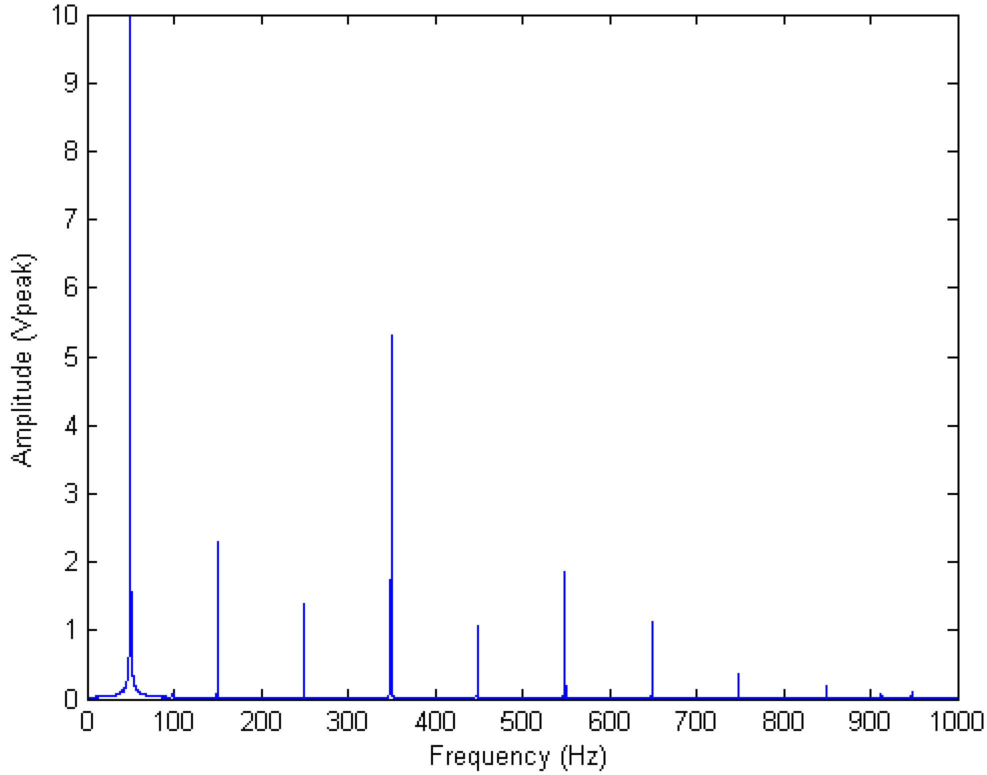

FIGURE 3 – Spectre de la tension de phase de la première phase mesurée

Harmoniques	Fréquence (Hz)	Amplitude (V)
F_1	49.927139	317.56718
H_2	99.854277	0.060506575
H_3	149.78142	2.2873982
H_4	199.70855	0.016015335
H_5	249.63569	1.3879520
H_6	299.56283	0.0080434992
H_7	349.48997	5.3177614
H_8	399.41711	0.023515198
H_9	449.34425	1.0581996
H_{10}	499.21035	0.013775099
H_{11}	549.19853	1.8497964
H_{12}	599.12566	0.024632345
H_{13}	648.99177	1.1223875
H_{14}	698.97994	0.0069144738
H_{15}	748.84605	0.36936013
H_{16}	798.77318	0.0083080552
H_{17}	848.70032	0.19778838
H_{18}	898.62746	0.010216483
H_{19}	948.55460	0.11260695

TABLE 1 – Valeurs des tensions de crête (V) pour la fondamentale F_1 et les harmoniques H_k avec $k \leq 19$