



跑步的数学模型 作者：W.G. Pritchard。 W.

G. Pritchard

来源：《SIAM评论》，9月，第1卷（1993年9月），第359-379页 *SIAM Review*, Sep.,

Vol1993,.No35,.(3Sep., 1993), pp.359-379 出版社。工业与应用数学学会

稳定的URL: <https://www.jstor.org/stable/2132424>

参考文献

这篇文章的链接参考文献可在JSTOR上找到：

https://www.jstor.org/stable/2132424?seq=1&cid=pdf-reference#references_tab_contents

您可能需要登录到JSTOR来访问链接的参考文献。

JSTOR是一项非营利性服务，帮助学者、研究人员和学生在一个可信赖的数字档案中发现、使用和建立广泛的内容。我们利用信息技术和工具来提高生产力并促进新形式的学术研究。关于JSTOR的更多信息，请联系support@jstor.org。

您对JSTOR档案的使用表明您接受了使用条款和条件，可在<https://about.jstor.org/terms>。



JSTOR

工业与应用数学学会正在与JSTOR合作，对《*SIAM评论*》进行数字化、保存和扩展访问。

运行的数学模型*。

W.G. PRITCHARD†

摘要。自英国生物学家A.V. 希尔在20世纪20年代的开创性工作以来, 已经有许多数学理论来描述与跑步有关的动量和能量平衡。由于各种模型对与跑步有关的平衡得出了相当不同的结论和预测, 因此对它们所依据的假设进行批判性的审查是有意义的。因此, 例如, 根据所采用的模型, 人们预测, 对于一个短跑运动员来说, 克服空气阻力的相对能量消耗在2-16%的范围内。这个广泛的数值主要来自于对短跑过程中所施加的推动力的不同估计, 这表明各种模型之间的预测是多么的不同。

20世纪70年代初, 凯勒在希尔的思想基础上发展了一个完整的竞争理论模型。虽然希尔-凯勒模型只提供了一个第一近似值, 因为它没有试图分别建立无氧和有氧能量转换途径的模型, 而且只考虑了最简单的运动阻力模型, 但它还是很好地反映了从码数60到公里10数的世界跑步记录。

基于对各种模型的仔细评估, 我们认为短跑运动员大约有3%的努力是用来克服空气阻力的, 这个数字得到了跳远比赛中的独立估计的支持。该分析的一个有趣的结果是, 在高海拔地区短跑的好处不能完全由空气密度降低来解释, 这表明在高海拔地区短跑可能有一些生理上的好处。

作为对克服空气阻力的成本估算的一个特殊应用, 已经进行了一个评估在1988年的美国奥运会选拔赛中, 弗洛伦斯-格里菲斯-乔伊纳创造了新的世界纪录。由于风速表的读数有问题, 这项纪录在田径界一直受到很大的怀疑。这里显示, 该记录几乎可以肯定是在风的帮助下完成的, 其尾部风力为4毫秒或更大。

关键词: 数学模型、空气阻力、跑步的生理因素、跑步的模型

AMS主题分类。 76299

1. 引言。最早的跑步数学理论是受生物学家A.V. 希尔 (见希尔 (1925), 希尔 (1927), 以及古泽、希尔和帕金森 (1927)) 的启发, 他试图建立短跑模型, 并为跑步者的能量平衡提供一个简单模型。希尔的短跑模型以牛顿定律为基础, 使用两个生理常数来描述短跑运动员的特点, 即跑步者可以施加的最大推进力 (单位质量) P , 以及一个与跑步者动作相关的内部 (电阻) 损失的常数。Furusawa等人对某一特定对象达到各种距离所需的时间进行了测量, 估计 P 约为8.6毫秒² (不过, 在对他们的数据进行重新评估后, 我们发现 P 为9.9毫秒²)。希尔 (1927) 也估计了空气阻力对跑步者的相对成本, 并认为短跑运动员所消耗的力量中大约有4-5%是用来克服空气阻力的。

更具体地说, 让我们假设一个质量为 M 的人以稳定的速度 U 在静止的空气中奔跑, 其速度为 MP U 。让跑步者在克服空气阻力时施加的力为 F , 那么我们可以将克服空气阻力的 δ 相对成本定义为

(1)
$$\delta := \frac{F}{MP}.$$

如上所述, 只有一小部分跑步者的力量是在克服空气阻力时消耗的, 大部分的力量是在内部耗散的。因此, 第一近似值。

*1992年4月3日由编辑部接收; 1992年9月18日接受出版 (修订版)。
这项工作部分由美国国家科学基金会拨款DMS-9104518支持。
宾夕法尼亚州立大学数学系, 宾夕法尼亚州大学公园, 宾夕法尼亚州 16802.

没有必要将空气阻力的影响纳入与跑步者运动相关的水平动量平衡中。此外，在估计 F 方面的小误差，即众所周知的难以准确估计的数量，将不会大大影响 F 的大小。8.

然而，令人惊讶的是，文献中引用8的估计值介于0.020.16,更令人惊讶的是，大部分的变化来自于对 P 的估计的差异，而不是看起来更有问题的数量 F 。对于一个乍看之下似乎很简单的数量，如此大的数值范围需要解释。这些差异的背后是一些与建模过程相关的重要问题，其主要内容体现在以下对比性的陈述中：“众所周知，快跑或慢走一定距离需要更多的能量”（Furusawa等人（1927））和“无论以最高速度还是以悠闲的步伐跑一英里，所使用的能量几乎是一样的”（Kram和Taylor（1990））。后一种说法只是对一个原则的最新表述，该原则是基于在有限的速度范围内从生理学测量中得出的经验观察，多年来一直受到青睐。为什么这样的论述会有这么长的生命力是很神秘的，因为显然它不可能普遍成立，因为否则我们以最高速度到处移动就不会有什么缺点了；或者考虑一下过度热情的1500米长跑运动员，他一开始就跑得太快了，最后只能解体，完全筋疲力尽。

凯勒（1973年）采纳了希 尔提出的基本观点，并将其作为一个控制问题，他将其作为变数微积分中的一个问题加以解决。

该理论对从50码到10,000米的所有世界田径记录提供了一个非常好的描述，我们将把它称为希尔-凯勒模型。虽然希尔-凯勒模型只是一个初步的近似，但它确实捕捉到了一些与跑步的机械方面有关的突出特点。例如，与该模型相关的生理常数之一是上述单位质量的推进力 P ，从该模型中确定的 P 值与其他独立估计值相当吻合。特别是，研究这样一个独立的估计值是有意义的，它来自跳远，因此描述了跳远者作为一个刚性粒子的简单经典模型。

这里认为，对于一个短跑运动员来说，需要8一个大约0.03,下降到大约的数值。0.02对于中长跑运动员来说，这是很重要的，对于马拉松运动员来说0.017，这是很重要的。所有这些估计都是基于没有风的假设，但要考虑到环境风是相对简单的。虽然克服空气阻力的成本是一个相对较小的影响，但是它对跑步者来说可能相当重要。例如，我们跑步的速度刚好低于身体上的边界层变得湍流的速度，这表明通过适当地绊倒边界层，可能会大大减少形式阻力。为了正确看待这些数字，请注意，在1991年，大约有20名短跑运动员在米的世界领先者的3%以内，而100超过的跑步者50在米的1500最快时间的3%以内。

众所周知，短跑运动员在高海拔地区比在海平面上跑得更快。然而，似乎不可能完全解释在高海拔地区冲刺所获得的好处，因为空气密度降低，要解释这种差异，似乎必须有一些与高海拔地区冲刺有关的生理优势。

2. 希尔-

凯勒的跑步模型。需要满足的基本平衡定律是那些表达线性动量和能量守恒的定律。假设跑步者的速度为 $u(t)$ ，其中 t 表示时间，跑步者施加的单位质量的推动力的水平分量由 $p(t)$ 给出。为 了表达线性动量的平衡，我们需要采用一个抵抗运动的力 R 的模型。人们似乎普遍认为，作为第一种近似值，这些力应该与下列因素无关

运动的历史，因此可以表示为瞬时速度 u 的函数，即 $R=R(u)$ 。

从物理学的角度来看，也可以预期 R 随着 u 的变化而平滑地变化（参见Furusawa, Hill, and Parkinson (1927)）。然后，对于 $u \in [0, U]$ ，可以得出以下结论，其中 U 表示跑者的最大速度，我们可以通过多项式近似来插值 $R(u)$ ，即。

$$(2) \quad R(u) = a_1 u + a_2 u^2 + \dots$$

where a_1, a_2, \dots 是常数。Furusawa等人（1927年）仔细论证了这一点（见Maynard Smith (1968年)），跑步的主要阻力效应来自身体本身的摩擦损失，这些应该用 u 的线性项来建模。（因此，在跑步中所消耗的大部分力量是用来移动四肢的，而这大部分是通过内部摩擦效应耗散的，变成了热量。似乎可以合理地假设，这些摩擦效应应该，作为一个第一近似值，与速度 u 成线性关系）。预计 u 的二次项的主要贡献来自于空气阻力，与主导项相比，这个项的大小很小。

另一个假设，由Margaria等人（1963）的测量结果提出，并在Ward-Smith (1983), (1985a), (1985b) 的理论中使用，是电阻力是一个常数，与 u 无关。这样一个术语是完全站不住脚的，因为它将意味着在静止时需要一个水平力，与正常经验相反，正如Keller (1973) 所指出，导致相当不满意的预测。

同样地，一个前导阶术语 $ua, 0 < a < 1$, as Vaughan(1983)的测量所建议的，将意味着一个无界的导数为 R 在 $u=0$ ，这也是与正常经验相悖的。

因此， R 的适当选择似乎是在(2)中给出的，并且使用线性近似，我们从牛顿定律中可以看出

$$(3) \quad \frac{d}{dt} u(t) + tu(t) = p(t), \quad u(0) = 0,$$

其中时间常数 τ 被用来代替(3)中的 a 。我们假设 $p(t) \leq P$ ，其中 P 是指跑步者在单位质量上所能施加的最大力。如果我们最初假设， $p(t) = P$ 。那么(3)得出

$$(4) \quad u(t) = P\tau(1 - e^{-t/\tau}),$$

而在时间 t 内覆盖的距离 x 为

$$(5) \quad x(t) = P\tau[t - \tau(1 - e^{-t/\tau})].$$

因此，我们看到，乘积 $P\tau$ 是转轮的最大速度 U ，而时间常数 τ 则与转轮的内阻有关。古泽等人（1927年）首次根据经验证明了均匀速度的指数方法，正如我们将在下文中表明的那样，在表中显示的1约翰逊和刘易斯在罗马世界1987锦标赛上的时间分割中也很明显。

为了对更复杂的情况进行建模，需要一个方程来表示跑步者的能量平衡。Keller(1973)提出了一个很好的第一近似值，其中假定跑者有一些初始的能量储备， E_0 。这些能量会以施加的力的工作速度 p 消耗掉，然而，这些损失会通过以恒定的速度 a 释放储存的能量来缓解。希尔-凯勒模型假设

表1
 本-约翰逊和卡尔-刘易斯在罗马世锦赛final100比赛中取得的分速时间。
 1987.(摘自《田径新闻》，第401V期，第12,1215,月经出版商许可转载1987。.)

| 位置(m) IO | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|----------------|-------------|-------------|--------------------------|-------------|-------------|----------------|-------------|-------------|-------------|
| 约翰逊：t (s) 1.84 | 2.86 | 3.80 | 4.67 | 5.53 | 6.38 | 7.23 | 8.10 | 8.96 | 9.83 |
| 差异 (s) | | | | | | 1.020.94087 | | | |
| | | | 0.860.850.850.870.860.87 | | | | | | |
| 刘易斯：T (S) L. | 942。96 3.91 | 4 | | | | 785.646.507.36 | 8.22 | | |
| | 9.079.93 | | | | | | | | |
| 差异(s) | <u>1.02</u> | <u>0.95</u> | <u>0.87</u> | <u>0.86</u> | <u>0.86</u> | <u>0.86</u> | <u>0.86</u> | <u>0.85</u> | <u>0.86</u> |

是恒定的，比如说，对应于运动员的最大摄氧量。因此，运动员能量变化率的方程式， $E(t)$ ，采取了以下形式

(6a)

$$\frac{dE(t)}{dt} = a - p(t)u(t)。$$

与

(6b)

$$E(O) = E_o。$$

并注意到可用的能量必然是非负的，所以(6c)

$$E(t) \geq 0$$

系统（3）和（6）需要在完成比赛距离 D 的时间 T 最小化的约束条件下进行求解。Keller（1974）表明，最小化问题的解决方案分为两部分。对于距离小于某个临界距离 D_c 的比赛，最佳策略是跑者在整个比赛过程中应用他的最大推进力 P 。然而，对于长于 D_c 的比赛，这一策略将不起作用，因为选手没有能量资源来超越 D_c 的距离，因此他必须适当地控制 $p(t)$ 。在这种情况下，最佳策略是最初使用最大的推进力加速，直到达到一个速度，选手在整个比赛过程中保持这个速度，并且在运动员冲过终点线时耗尽他的所有资源。在最近的一篇论文中，Woodside（1991年）重新审查了Keller所考虑的方程组，将该问题作为一个最佳控制问题，即如何在给定的时间内最大限度地跑出距离。这种方法允许对该问题进行一些与凯勒所指出的略有不同的见解。

凯勒选择了确定与他的模型相关的四个生理常数-- r 、 P 、 E_o 和 a ，方法是获得与1960年代中期现存的世界纪录时间的最佳拟合，这些比赛的范围在50码和10公里之间。该理论对记录时间提供了非常好的拟合。Woodside（1991）重新评估了对 r 和 P 的估计，认为价值 $r = 0.739$ $P = 14.4 \text{ ms}^{-2}$ 然而， r 的值似乎太过复杂。小，不能很好地代表表1和图1中的数据，因此 P 的值似乎相应地过大。

2.1. 讨论。(i)

文献中对希尔-凯勒模型的有效性有相当多的异议。大部分的批评是针对(3)中使用的阻力函数 $R(u)$ 的建模，但也有一些是针对能量关系的。大多数批评源于对 R 的生理测量，这将在下文中详细讨论。然而，在这种测量的基础上，被提倡用来替代（3）的模型通常将（2）中的前导项作为常数项，这导致了上述牛顿定律在跑步者不运动时的不平衡。我们怀疑

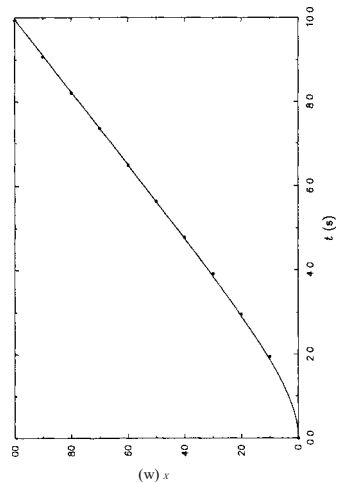


图1.C.刘易斯（在1987年世界锦标赛100米决赛中）达到的距离 x 是时间 t 的函数，与方程（4）的预测进行比较。

这方面的一些混乱是由于工人们没有认识到力 p 是由跑者控制的，所以如果他选择静止，他可以指定 $p=0$ ，表明 $R(0) \neq 0$ 是不允许的。

(ii) 正如引言中所指出的，文献中对 P 跑者所能施加的最大推进力的大小有很大的争议。生理常数 P 和 r 主要与短跑比赛有关，由Keller（1973）确定为12.2ms-和²0.892 s，意味着最大短跑速度为10.9ms⁻¹。我们可以从表所提供的数据中检验这些估计值 1.

约翰逊和刘易斯在世界1987锦标赛上取得的最大速度约为ms11.6-
(¹参见表1)。由于 $P \neq U$ ，对 r 的估计可以是
从(5)中得出的大 t ，使用近似值 $x(t)U(t - r)$ 。这样的确定方法使约翰逊和路易斯的-
 r 值分别为1.24秒和1.34秒。然而，这些值将是对 r 的高估，因为运动员对发令枪做出反应所需的时间，我们可以将其视为，例如，0.18秒，表明更有代表性的 r 值分别为1.06秒和1.16秒。（请注意，Keller对-
 r 的估计是基于手的计时，所以运动员和计时员的反应时间几乎是相互抵消的）。古泽等人（1927年）确定的数值为

-通过表1中的测量，我们对一些运动员的- r 进行了分析，发现被测试者之间的差异很大，在0.85秒到1.29秒之间，平均值为- $r=1.0$ 。即使运动员的最大速度非常接近，-
 r 的值也会有明显的差异（参考约翰逊和刘易斯之间10%的差异）。因此，这些数据表明，约翰逊每单位质量的推进力约为11.0毫秒²，比凯勒（1973）确定的数值低10或12%。然而，我认为不应过分看重上述 r 的估计值，只是它们对Keller（1973年）引用的数值提供了一般的确认。表1中给出的Lewis的分裂与（5）的预测的比较见图。1.

Dapena和Feltner（1987）通过对运动员的初始加速度（当 $u=0$ 时）的估计，对 P 进行了经验性的估计， $\approx 10.9\text{ms}^{-2}$ 。然而，它应该是。

需要注意的是，Dapena和Feltner的测量有相当大的误差，因为原始数据是位置与时间的关系，因此有必要进行两次数字微分，再加上回推到时间 $t=0$ ，以确定 P 。

(iii) 生理常数 ϵ 和 ρ er主要与长距离比赛有关，此时更有效的有氧能量转换途径有时间在能量平衡中发挥重要作用。

在预测最远冲刺距离 De 时，对 $o2408J/kg$ 的英镑估计值进行了检查，这与经验相符。由于100米和200米的平均世界纪录速度 (D/T) 是相同的 (10.14毫秒⁻¹)，而400米的¹平均速度为9.46毫秒，比这些数值下降了很多，所以上述对 De 的估计不会有太大错误。

另外，运动生理学家认为，在最大努力下，无氧运动的可用能量被限制在大约30秒的时间内（例如，见Sperry (1983, 第38页)），与Keller的估计基本一致。(我们顺便指出，古泽等人(1927)认为短跑运动员的最大速度只能维持到50或60米，Ward-Smith(1985a)的理论也预测了类似的结果，但表1显示这些预测显然没有在实践中得到证实。)

(iv) 对于长于 De 的比赛，跑步者的策略如下。他必须（在初始加速阶段的基础上）选择一个（恒定的）推进力 p ，使他的能量损失，如（6）中给出的，在 o 比赛结束时正好耗尽资源 ϵ 。因此，如表2所示（见图2），平均世界纪录速度 (D/T) 从400米处的数值单调地下降到¹10000米处的6.14毫秒-

。我们从（6a）中看到，对于一个稳定速度 Ua 的跑步者来说，当 $pUa=er$ 时， $dE/dt=0$ 。然后从（3）中可以看出， $p=Ua/r$ ，因此，对于这些条件。

(7)
$$Ua = (\text{err})^{\frac{1}{2}},$$

就凯勒的经验拟合常数¹而言，其值为 $Ua=6.09\text{ms}^{-1}$ 。然而，这样的特征在实践中似乎并没有得到证实，因为从表2可以看出，半程马拉松和马拉松的平均速度远远低于 Ua 的速度。伍德赛德（1991）试图通过在能量方程中加入一个额外的因素，即所谓的疲劳因素，来模拟这种效应，这样能量资源的消耗速度与从比赛开始时消耗的总功率成正比。这一修改似乎效果相当好。

表2
世界纪录的平均速度。¹/ M 和 M ，分别表示半程马拉松和马拉松。马拉松距离为 $m42,195$ 。

| | | | | | | |
|---------------------------|-------|----------------------------|------|-----|------|------|
| D (m) | 100 | | | | | |
| D/T (ms ⁻¹) | 10.14 | 20040080015003000500010000 | 6.42 | M | | 5.85 |
| | | 10.149.247.867.17 | | | 5.58 | |

(v) 有趣的是，尽管希尔-凯勒模型是一个高度简化的模型，但它似乎能很好地代表世界赛道记录。达成一致的原因可能是，最佳的比赛策略基本上是以稳定的速度运行。因此，涉及到与时间有关的生理效应的竞技跑步方面（如比赛中途的突发事件），希尔-凯勒理论并没有试图建立模型，在几乎是最佳条件下的比赛中应该是相对不重要的。

(vi) Peronnet和Thibault（1989年）建立了一个严格的经验模型，将人的跑步表现与一些代谢产能量的过程联系起来。该模型

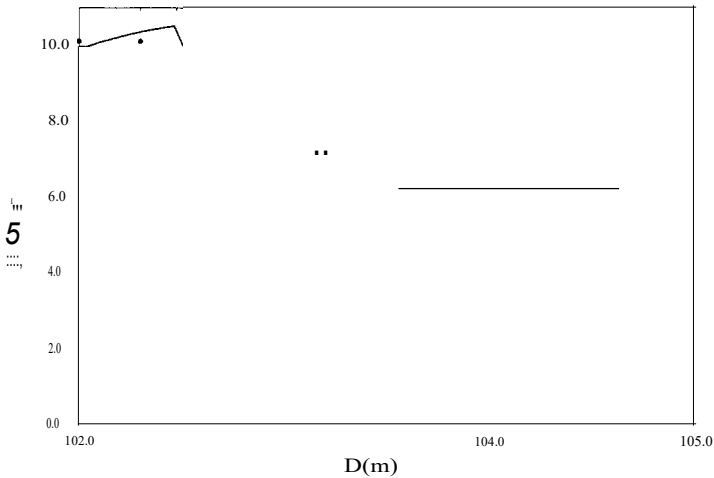


图2. 目前世界纪录保持者在D距离的比赛中取得的平均速度 U 与凯勒（1973）的预测值进行了比较。

提供了世界纪录表现的良好相关性；然而，由于是基于经验的，它对潜在的物理过程提供了很少的洞察力。

2.2. 生物力学研究。许多人已经尝试（例如，见Williams和Cavanagh（1983）），通过对与跑步者质量中心的运动以及跑步者各部分的运动相关的能量的详细预算来估计跑步者的工作速度。然而，这种预算所依据的假设并没有得到很好的理解，特别是那些与关节之间的摩擦力以及内部能量储存和耗散的其他方面有关的假设。事实上，威廉姆斯和卡瓦那很好地说明了用生物力学方法进行工作速度估算的极端困难，其中显示，一些工人估计一个跑者在3.6毫秒的速度下产生的机械功率在163瓦和1406瓦¹之间，取决于特定的工人和用于分析数据的方法。因此，目前看来，用于估计 P 的生物力学方法太不可靠，没有任何实际价值。

2.3. 生理学研究。跑步时消耗的能量可以通过测量稳定运动时的氧气消耗率来估计。进行这种测量的技术已经建立多年，并且已经进行了一些涉及人类和其他动物的研究（例如，见Margaria等人（1963）；Pugh（1970），（1971）；Davies（1980）；以及Kram和Taylor（1990），仅举几例）。然而，这类测量需要受试者在有效平衡建立后，保持几分钟的稳定运行状态。这种测量所依据的假设是，消耗的氧气负责释放跑步者产生的所有能量，从而将测量范围限制在稳定的有氧跑步条件中。为了保证良好的速度控制，实验通常是在跑步机上进行的，尽管有些测量是在跑步者旁边的汽车上进行的（例如，见Pugh（1970））。在这类研究中，通常假设跑步者消耗的1毫升氧气提供了大约相当于卡5或J21的能量（参见Ward-Smith（1985a））。

人们普遍认为，在这种生理测量的基础上，跑步过程中的功率使用与速度成线性比例。从表面上看，这种说法的经验证据似乎非常有力（参见上述引用的作品），尽管如上文所述，这种规律在小速度下无法适用。在许多生理学研究中，Pugh和Davies的研究提供了一些关于实验程序和结果的更详细的描述，我们在这里将集中讨论这些工作者描述的结果。

图3显示的是Davies（1980年，图1）的氧气测量摘要。消耗（所谓的 \dot{V}_{O_2} 率）作为运行速度的函数。（注意图中所示的方块相当好地代表了与耗氧量测量相关的散点）。最适合这些数据的线性回归线是

显示为虚线，有趣的是，在零速度时，它在 \dot{V} 轴上有一个负的截距。同样显示的（虚线）是Pugh的类似回归拟合（1970，图）。

2）数据，可以看出，在Davies进行测量的速度范围内（即2.7至4.5ms⁻¹），这两组数据彼此相当吻合。然而，正如图表的范围所显示的那样，这些结果只覆盖了可能的跑步速度的一个小范围，我们可以看到，二次函数也可以很好地表示作为速度 u 的函数的耗氧量（在这方面，值得

注意到Pugh(1970)发现，对他的一些受试者来说， \dot{V}_{O_2} 摄取不是线性的。在 u 中）。

可以检查一下这些数据所建议的单位质量的最大推进力 P ，从各种外推到 $u=1.0$ ms⁻¹，例如。使用转换

根据上述建议，线性推断表明 P 的值约为ms^{4.3}·⁻²。

而二次外推法（基于在 u = 0的 \dot{V}_{O_2} 之间的差异 0

和 u = 11.0 ms⁻¹) 表明 P 的值约为7.8 ms²·

这些值应与前述²Dapena和Feltner（1987）的经验估计值10.9 ms·

和²Keller（1973）的理论估计值12.2 ms·

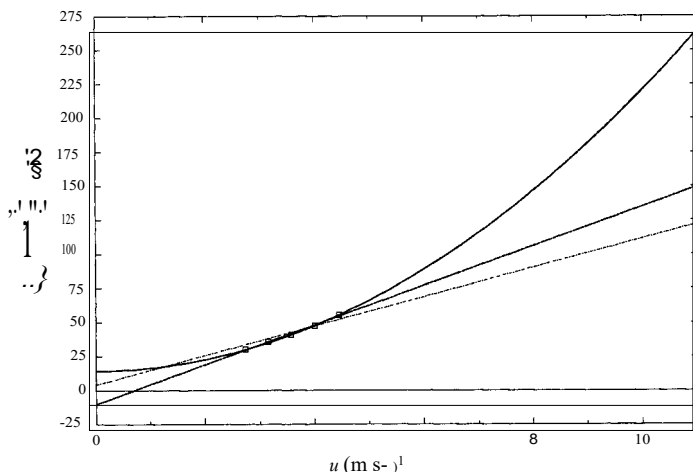
进行比较。鉴于需要从生理数据中进行大量外推来估计 P ，二次外推法和更直接的估计值之间的一致性似乎相当好。另一方面，线性外推法的估计值似乎太小了。

3. 空气阻力的代价。由于跑者的雷诺数 R ，基于躯干的宽度，是10⁵的数量级，空气阻力施加在运动员身上的力 f 几乎完全来自于形式阻力，根据空气动力学研究，由经验关系给出

(8)
$$f := -\frac{1}{2}\rho C_d A(l)|\mathbf{u} - \mathbf{W}|^2 \mathbf{l},$$

其中 \mathbf{l} 是速度 $\mathbf{u}-\mathbf{W}$ 方向的单位矢量， \mathbf{W} 是风速， $A(l)$ 是身体在与 \mathbf{l} 正交的平面上的投影面积，而阻力系数 C_d 只取决于流动的雷诺数和相对流速与身体的方向。事实上（8）只是一个重新定义，因为在实践中，阻力系数必须根据经验来确定。然而，对于流经大 R 值的悬崖体，预计 C_d ≈ 1 ，因为（8）的形式是这样的， C_d 反映了被体拦截的动能被破坏的比例，因此，不能被体后的压力场恢复。

我们暂且假设 $\mathbf{W}=\mathbf{W}_i$ ， $\mathbf{u}=\mathbf{u}_i$ ，其中 i 是水平方向的单位矢量，因此 W 是运动员运动方向上风速的水平分量。由此可见，运动员所受的力的大小 f



图：Davies (1980) 报告的跑步者的 $\dot{V}O_2$ 吸收量的测量值与跑步速度的关系。
 u (---), Davies 数据的最佳拟合回归线, $\dot{V}O_2 = 214.5u - 10.1$; (- - -), Pugh (1970) 的代表。
 数据, $\dot{V}O_2 = 10.7u + 4.25$; (-), 二次函数拟合戴维斯的数据, $\dot{V}O_2 = 212.06^2 + 14.4$.

是由

$$(9) \quad f = \frac{1}{2} \rho C_d A u^2 \left(1 - \frac{W}{u} \right)^2.$$

由于 (3) 表明, 在稳定的速度下, $p = u$ 。我们从 (1) 中看到, 克服空气阻力的相对成本 δ 是由以下公式给出的

$$(10) \quad \delta = \frac{1}{2} \tau M^{-1} \rho C_d A u \left(1 - \frac{W}{u} \right)^2,$$

表明在静止的空气中 ($W=0$) , 克服空气阻力的比例成本在 u 中是线性的, 而施加在转轮上的绝对力 f 在 u 中是二次方的。

如果我们让 U 、 P 分别表示单位质量的最大冲刺速度和推进力, 从 (9) 可以看出

$$(11) \quad \delta = \frac{1}{2} (MP)^{-1} \rho C_d A U^2 \left(1 - \frac{W}{U} \right)^2$$

因此, 对于一个质量为 70 公斤、横截面积为 $1.80 \times 0.30 \text{ m}^2$ 的人来说, 在海平面上运行在密度为 1.19 kg m^{-3} 的空气中, 我们大约有 $\delta = 0.038$ 。我们取 $C_d = 1.0$, $U = 10.1 \text{ m s}^{-1}$ 和 $P = 12.2 \text{ W kg}^{-1}$ 。然而, 看起来, 粗略的

对运动员正面面积的分析表明, $A = 0.45 \text{ m}^2$ 对运动员所呈现的横截面积给出了更有代表性的估计。使用后一种对 A 的估计

我们看到短跑运动员将大约 3.2% 的努力用于克服空气阻力, 考虑到与 C_d 、 A 和 P 的估计有关的不确定性, 我们可以很方便地将这个值四舍五入为 3%。

3.1. 以前的估计

对于短跑运动员的 δ 值，已经有几个 δ 估计的报道。第一个估计值是由Hill（1927）做出的，建议的数值大约是0.04到0.05，当然，这与上面的估计值密切相关。Pugh(1970)使用基于在4ms5-

¹的速度下获得的生理数据的方法，估计空气阻力对短跑的相对成本约为16%，后来他把这个数字（Pugh(1971)）修正为13%。随后，Davies（1980）根据类似的方法，提出了7.8%的数值。沃德-史密斯（1984年）估计为87.8%。0.090，和Frohlich(1985)的估计=8 后者的估计都0.10.是基于以下的模型其中功率 p 与 u 成线性比例（参见第2节）。

最近，Dapena和Feltner（1987年）根据对米100短跑最快时间100的统计分析和假设，提出了 $\delta=0.020$ 的数值。

在顺风 and 逆风情况下的跑步时间应该是完全相等的。虽然这乍一看似乎是一个合理的假设，但它是没有理由的。例如，众所周知，跑步者在迎风跑和顺风跑时采取不同的姿势，导致被风拦截的横截面积不同，可能会产生不同的推进力。尽管有这样的反对意见，但达佩纳和费尔特纳的分析所提出的 δ 的值不会太离谱，这表明 δ 的值超过，例如0.05，是非常不可能的。另一方面，上面的分析，加上下面要介绍的基于跳远的独立确认，表明 δ 的值 δ 太小0.02了。

3.2. 阻力系数。短跑运动员的雷诺数， $R = UL / \nu$ ，大约是 $x \quad 2.510^5$

这里 ν 是空气的运动粘度， L 是与流过运动员的气流有关的特征长度尺度，我们把它看作是躯干的宽度。空气动力学家会立即意识到，这样的雷诺数与圆柱体或球体的阻力系数曲线的膝部相吻合（所谓的阻力危机），在那里，当 R 增加到大约 10^6 。

Cd 时，阻力下降了2或3倍。 Cd 的突然变化与边界层的流动变得湍急有关。原则上，由于身体的不同部分有不同的长度尺度来描述流过它们的特点，与躯干、手臂、腿和头部相关的雷诺数都会不同。但是，由于阻力系数对 R 值相当不敏感，对于 R 小于 3×10^5 的情况，我们可以很近似地把面积 A 看作是跑步者的正面面积，当考虑到跑步者运动方向的风时。

Cd 的估计是通过模型的测量得出的。Hill（1927）通过对一个0.20米高的跑步者模型的测量，估计 $Cd=0.9$ 。Pugh（1971）对真人大小的模型进行了 Cd 的风洞测量。其中一个是用胶合板切出的

一个转轮，其形状是被明显的风拦截的投影面积；另一个是一个长方形的胶合板，其高度和投影面积与切口相同。这两个障碍物都产生了1.5的阻力系数。Pugh还测量了一个直立的椭圆体的 Cd ，它的横截面形状与躯干的横截面形状大致相同，并且有相同的

实验中，我们发现投射面积与流道的投射面积相同。这个模型得出的数值是 $Cd =$ 与这些实验相关的1.04.巨大的阻力系数强调了以下因素的重要性边界层与身体的分离点决定了尾流的大小。Davies（1980）0.9,根据生理测量估计 Cd 大约为

消耗功率的测量。因为这些测量涉及到两次测定 V 消耗量的差异，所以 o_2 它们在本质上不如直接方法准确。Van Ingen-Schenau(1982)在风洞中测定了滑冰者的阻力系数，发现 Cd 的值在和0.8和之间。1.0.

综上所述, C_d 的代表值似乎应该在, 例如, 之间。
0.9和, 1.04,因此, 为了简单起见, 我们使用了 $C_d=$ 的数值。1.0.

3.3. 投射面积 A 。 一些研究人员对被逆风拦截的投影面积 A 进行了估计。
Hill (1927年)、Pugh (1970年) 和Davies (1980年) 根据跑步者的正面照片估计了 A 。其他工作者使用了基于跑步者高度和质量的经验公式 (参见Dapena和Feltner (1987))。

3.4. 在静止空气中跑步的等效时间。假设一个短跑运动员, 发挥他最大的推动力, 以稳定的速度 $U(W)$ 奔跑, 这取决于风速 W ,
而由于空气阻力而抵制运动的单位质量的力由 $F(W)$ 给出。那么 (2) 简化为

$$(12) \quad U(W) = r(P - F(W)).$$

由此可见, 空风中的等效运行速度 $U(0)$ 与 $U(W)$ 的关系为

$$(13) \quad U(0) = \left(\frac{1 - F(0)/P}{1 - F(W)/P} \right) U(W).$$

设 $F(0)/P = \frac{1}{8}$, 让 $T(W)$ 为风速为 W 的测量时间,
由此可知, 在无风状态下的等效时间 $T(0)$ 由以下公式给出

$$(14) \quad T(0) = \frac{1 - \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8} - \frac{F(W)}{P}} T(W).$$

和相对时间校正 $T(0)/T(W) := (T(0) - T(W))/T(W)$ 的简单形式。

$$(15) \quad \frac{1 - \frac{1}{8}}{T(0) - \frac{1}{8}U} = \frac{1 - \frac{1}{8} - \frac{F(W)}{P}}{1 - \frac{1}{8} - \frac{F(W)}{P}}$$

就在田径比赛中直接观察到的数量而言, 使用0.030上面建议的值 $\frac{1}{8}$, 对于米赛100来说, 运动员在无风状态下所跑的时间 $T(0)$ 大约由以下公式给出

$$(16) \quad T(0) \approx [1.03 (-0.031) T(W) \frac{W}{U}]^2$$

这种校正使我们能够在不同的风况下进行直接比较。

3.5. 横风。上面的讨论只考虑了跑步者运动方向上的风。假设有一个横风 $\mathbf{W} = v\mathbf{j}$ 。那么运动方向上的力 \mathbf{f} 的分量 $\mathbf{f} \cdot \mathbf{i}$ 由 (8) 给出

$$(17) \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{i} = -\frac{1}{2} \rho C_d A(0) (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} u.$$

其中 $A(0)$ 是转轮在视风方向的 0 投影面积。对于厚度为零的物体 (即平板), 投影面积 $A(0) = A(0)u / (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$, 以及

从(17)中可以看出, 横风对运动方向 \mathbf{i} 上施加在身体上的力没有影响。对于一个真实的身体, $A(0)$ 将与平板略有不同, 但计算表明, 以一个非常好的近似值, 只需要考虑运动方向上的风的分量, 就可以确定给予跑步者的风助。

3.6. 一个关于时间调整的实际例子。从 (15) 中可以看出, 对于在尾风为 2ms^{-1} (记录允许的最大风速) 的情况下进行的100米比赛, 短跑运动员与静止的空气条件相比获得了大约1.1% 的优势。这个数字似乎很符合经验: 大多数世界短跑记录都是在某种尾风下创造的, 但风的大小似乎并不是决定新记录是否被创造的主要因素。

表3显示了取 $\delta=0.030$ 带来的100米冲刺时间调整的例子, 其中给出了卡尔-刘易斯在最近的主要锦标赛系列中记录的原始和调整的冲刺时间。可以看出, 修正后的时间在所考虑的七年时间里, 对空风速的影响是非常一致的。

表 3

卡尔·刘易斯自1984年以来在冠军系列赛中记录的时间。条目给出了记录的时间(秒)和风速(毫秒⁻¹); 黑体字的条目是根据空风速修正的时间。代码是。**OG**=奥林匹克运动会; **WC**=世界锦标赛; **USOT**=美国奥林匹克选拔赛。1988。

| 最后 | 半F。 | 圆的 2 | 圆的 1 |
|-----------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| OG849.99(+0.2) 10.00 | 10.14(-1.5) 10.04 | 10.04(+0.8) 10.09 | 10.32(-0.4) 10.29 |
| WC879.93(+1.0) 9.99 | 10.03(-1.4) 9.94 | 10.38(-3.0) 10.16 | 10.05(+1.4) 10.13 |
| 美国OT9.78(+5.2) 10.00 | 10.02(+2.6) 10.16 | 9.96(-0.4) 9.94 | 9.96(+1.9) 10.06 |
| OG889.92(+1.1) 9.98 | 9.97(+0.6) 10.00 | 9.99(+1.4) 10.07 | 10.14(+0.9) 10.19 |
| WC91 9.86(+1.2) 9.93 | 9.93(+1.3) 10.00 | 9.80(+4.3) 10.00 | 10.12(+0.2) 10.13 |

3.7. 中长跑和长跑运动员的空气阻力。对于比短跑更长的比赛, 运动员将其速度控制在小于最大值的情况下, 我们从 (10) 中看到, 空气阻力的相对成本与 u 成正比, 因此, 一个米1500跑运动员 (参见表2) 应该只需要花费大约2%的努力来克服空气阻力, 而马拉松运动员的成本应该大约是1.7%。因此, 虽然在静止空气中克服空气阻力的成本相当小, 但逆风对中长跑或长跑运动员的影响是相当大的。因此, 例如, 2毫秒的¹逆风会使马拉松运动员的空气阻力增加约1.85倍, 需要额外的1.4%的动力来克服逆风。

3.8. 长发和头罩的空气阻力。有人认为, 如果一个跑步者有长发, 他的阻力就会大大增加。虽然长发松散地吹在风中并没有什么帮助, 但这似乎并不能构成跑步者阻力的重要部分。头部只占身体投影面积的7%左右, 因此它的物理存在只占总努力的 $0.07 \times 3.0 = 0.21\%$ 的阻力。
发型的改变似乎不太可能给头部的有效阻力系数带来很大的增加, 因此这种阻力来源似乎低于0.1% 的水平, 因此重要性不大。因此, 美国短跑运动员在1988年奥运会上所戴的头罩主要是装饰性的, 所带来的空气动力学方面的好处小得可以忽略不计。

4. 阻力危机和运行服装。流过圆形圆柱体的阻力系数 (对于长宽比不太大的椭圆形圆柱体, 也得到类似的结果)。
对于 n 在 5×10^3 和 2×10^4 之间⁵, 几乎与 R 无关, 但随后从 $n=2 \times 10^4$ 时的约1.2下降⁵到 $n=4 \times 10^4$ 时的约0.6⁵, 当 n 增加到 5×10^4 时, 下降到约0.3⁵ (例如, 见Goldstein (1938))。在上述范围内, 随着 n 的增加, 阻力系数的减少是由以下原因造成的
由于机体上的湍流边界层的发展和随之而来的分离点靠近机体后部的移动, 机体上的形式阻力减少, 大大减少了尾流区域的横截面积。当系统

在第一次尝试测量 C_d 时，人们发现结果可能会受到一些看似微小的影响，如风洞中的背景湍流水平或身体的支撑方式的影响，因此，这种现象通常被称为**阻力危机**。

有一些证据表明，在Davies（1980年）和Kyle和Caiozzo（1986年）对跑步者的风洞测量中可能已经观察到了阻力危机（但请注意，这两篇论文都没有在文中明确提出这样的主张），在van Ingen-Schenau（1982年）对滑冰者的风洞测量中和Spring等人（1988年）对越野滑雪者的一些测量中也观察到了这种危机。（van Ingen-Schenau报告的数据有一个奇怪的特性，即阻力系数从 $R=x$ 时2.50.9的左右增加到 10^5 2.5R减小时的左右
到大约1 \times 10⁵。这后一个数字表明，尾流的横截面积大约是滑冰运动员正面面积的2.5倍。Spring等人确定的阻力系数在大约和1.03.5之间）。

从20世纪30年代对阻力的全面测量中出现的一个有趣的特点是，通过适当地使边界层跳动并诱导它在比通常预期的小得多的雷诺数下成为湍流，可以过早地触发危机，几乎是 R 的一个数量级。湍流的诱导方式有很多，但使用球体和圆柱体的实验表明，均匀的粗糙度，以砂纸的形式放在身体上，不如明智地放置一个单一的边界层跳闸有效。在圆形圆柱体的情况下，当沿着圆柱体发生器放置在与圆柱体前面成65°角的位置时，这种绊脚石是最有效的。另外，似乎最好确保绊脚石完全包含在边界层内，这表明在本案中例中绊脚石的突出部分不应超过0.5到0.75毫米。这表明，为了最大限度地减少风阻，跑步者应该穿非常光滑、合身的衣服，在胸部和大腿的每一侧都有大约0.5至0.75毫米高的小肋条。如果这样的行程与圆筒一样有效，我们可以合理地预期阻力系数减少50%，这表明短跑运动员可以预期将他的时间提高，例如1到1.5%。使用这种服装似乎没有任何弊端。

由于对于中长跑和长跑运动员来说，克服空气阻力的成本比短跑运动员要小得多，因此，使用这种服装的好处似乎没有短跑的好处大。然而，如上所述，即使是适度的逆风也会大大增加空气阻力的成本，在这种情况下，边界层的旅行可能是非常有益的。另一方面，紧身衣通常不受长跑运动员的青睐，因为需要尽可能有效地从身体表面带走热量（见Pritchard（1993）），但估计可以通过巧妙地选择材料来实现妥协。

对这种旅行的使用进行了一些初步测试，在之前和1988

美国印第安纳波利斯奥运会选拔赛。虽然在奥运选拔赛前的一次计时赛中获得了一个阳性结果，其中一名选手将他之前的最佳成绩提高了1%以上，但测试结果太少，根本无法确定。（然而，没有办法判断这种改进是部分由服装引起的，还是完全归功于他的身体准备状态）。

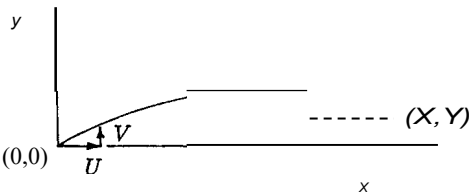
5. 在高海拔地区进行短跑。由于在高海拔地区很容易创造短跑记录，因此在高于海平面的高度进行短跑显然有很大优势。最好的例子是1968年在墨西哥城举行的海拔2240米的奥运会。Ward-Smith（1984年）对这届奥运会的成绩进行了统计分析，并与之前和后来的奥运会的成绩进行了比较。他得出结论，墨西哥城的海拔高度使短跑时间提高了约1.7%。类似的改进是

例如，在墨西哥城举行的400米比赛中，李-埃文斯将海平面上的最佳成绩（1966年创造的）提高了2%；美国4×400米接力队也取得了类似的成绩，超过了1966年创造的前纪录；在1968年的奥运会上，汤姆-史密斯将自己的200米前世界纪录提高了2%。这些改进也与最近的三级跳远结果一致，对于三级跳远来说，在高海拔地区的主要好处应该主要来自于在跑道上更快的速度：因此，例如，Joao de Olivera在高海拔地区的最佳跳远成绩比他在海平面的最佳跳远成绩高出2.5%，Keith Connor在高海拔地区比海平面高出1.6%。同样，在跳远比赛中，罗伯特-埃米扬在1900米高空跳下时，将其海平面最佳成绩提高了2.9%，不过其中约有1%的提高可归因于风助的不同。因此，总的来说，上述例子表明，短跑运动员可以通过在海拔高度（比如说，米）2000或更高的地方进行比赛，将他的时间提高2%。

在上述模型的背景下，在高海拔地区冲刺的好处应该完全来自于 p 的减少，就墨西哥城的情况而言，大约减少了25%。请注意， p 的减少意味着 R 的相应减少，由于 Cd 对 R 的减少相对不敏感（参见第4节），当移动到高海拔地区时，它应该看到很少的变化。因此，从（9）中可以看出，空气阻力的成本应该减少四分之一，这表明在高海拔地区冲刺的好处只有0.75%，远远低于上述的好处。我认为这种差异是很大的，由于缺乏任何其他机械解释，我只能假设它有一个生理上的原因。

6. 跳远。由于文献中给出的 δ 的估计范围很广，所以简要地研究一下跳远是很有意义的，因为这提供了一种完全不同的估计 δ 的方法。这里提出的计算是经典的，例如出现在Lamb（1926）的动力学书中，但它们并不是没有意义的，因为即使从一个高度简化的模型中也可以学到很多东西。de Mestre（1986）最近给出了一个比下面概述的更全面的分析，他仔细地把一些经常做的近似值放入了视野。

就目前而言，我们只需将跳远者视为一个质量为 m 的刚性弹体，其质心从位置 $(0, 0)$ 发射，相对于固定在原点的矩形直角坐标系的速度为 (U, V) 。假设该物体在其质心位于 (X, Y) 的位置时着陆，如图所示。4.



图：射弹路径示意图4。

让身体在时间 t 的位置为 $\mathbf{x} := (x, y)$ ，这样，在没有任何阻力或角度旋转的情况下，牛顿定律意味着

(18)
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{m}\mathbf{x}) = \mathbf{m}\mathbf{g}.$$

其中 $\mathbf{g} := (0, -g)$ 是重力加速度。在 m 固定的情况下，（1）的解是

(19)
$$(x, y) = (Ut, -h t^2 + Vt) .$$

和 t 是起飞后的时间。当 $y=Y$ 时，机体着陆，因此飞行时间 T 可以被证明为

$$(20) \quad T = \frac{V}{g} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2gY}{V^2}} \right].$$

来自 (20) 的相关根是带有加号的根，因此跳出的距离是 (21)。

这里最感兴趣的0是有 $Y=$ 的特殊情况, 在这种情况下, 我们有

$$(22) \quad X = \frac{2UV}{g}.$$

在继续之前，看看这个天真的模型与真实的跳跃有多大的关系是很有启发的。根据Hay等人 (1986) 对精英跳远运动员的测量， U 和 V 的典型值分别在9.0到9.5ms⁻¹和13.2到3.5ms⁻¹之间，因此起飞角度通常在20°左右。

使 $Y<0$ 显然是有帮助的，这可以通过着陆时伸展双腿来实现。因此，我们可以预期在着陆时质心水平的降低为

如果我们取 $U = 9.3$ ms⁻¹和 $V = 3.4$ ms⁻¹，那么(21)表明跳跃长度为1.5米0.7。 m 的X7.99和X的o值m6.52，因此，降低质心的好处是在这个例子中是1.48米。

然而，应该注意的是，在起飞时，质心通常在起飞板的前面，根据Hay等人的研究，典型的距离约为0.45米。因此，根据上述模型和目前的参数，我们可以预期总的跳跃长度为8.44米。鉴于模型的简单性，这对顶级跳水运动员所达到的距离提供了相当好的预测。

6.1. 空气阻力的影响。由空气阻力产生的对跳伞者的作用力的形式如 (8) 所示，应包括在 (18) 中。由于比 (18) 中的其他项小得多，它们只构成一个小的修正，因此我们将试图

实验中，我们只能对它们进行近似建模。因此，例如，我们将把表观风向的 θ 投影面积 A 看作是 $A(\theta)=A(0)\cos\theta$ 的形式，如上文讨论的那样。

关于横风的部分。

目前，我们假设风速 $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ ，因此水平分量由 $\mathbf{f} = -\frac{1}{2} \rho C_d A(0) u^2 \mathbf{i}$ 给出²，因此水平分量的模型为动量的平衡由以下公式给出

$$(23) \quad \ddot{x} = -kx^2,$$

其中 $k := \frac{1}{2} \rho C_d A(0)/m$ ， $X = u$ 。满足初始条件 $X = U$ 和 $x = \text{att}0 = 0$ 的 (23) 的解决方案是

$$(24) \quad x(t) = k^{-1} \log(1 + kUt).$$

按照上述类似的推理，我们发现 \mathbf{f} 在垂直方向的分量是 $-\frac{1}{2} \rho C_d A(0) uv$ 。因此，动量的垂直平衡大约由以下公式给出

$$(25) \quad \dot{y} = -kxj; -g.$$

水平速度 X 可以从(24)中确定，用它来计算(25)，我们发现，满足初始条件 $j.(0)=V$ 和 $y(0)=0$ 的 y 的解决方案是0

(26)
$$y(t) = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2} + \frac{g}{k} \right) \log(1 + kUt) - \frac{g}{k} t - \frac{1}{2} \frac{g}{k^2} t^2$$

等式(24)给出了 $x(t)$ ，很容易反过来得到 $t(x)$ ，因此 y 可以被写成 x 的函数。

(27) $X \approx X_0(1 - \frac{2}{3} k X_0).$

这有一个非常有趣的特点：空气阻力的比例成本，由 kX_0 给出。是直接和近似的距离跳跃， X 有关。

类似的计算可以在允许非零风的情况下进行。假设 $W = W_i$ ，让 $f_3 := (1 - W/U)$ ，并假设 $f_3 > 0$ 。由此可见，在相同的近似水平上，有

(28) $X = X_0 (1 - (\frac{1}{2} + f_3) k X_0)。$

在 $f_3=0$ 的情况下，它可简化为(27)。1.

比较空气阻力对短跑运动员和跳远运动员的相对重要性是有意义的。对于跳远运动员来说，空气阻力的相对影响可以被发现，而不需要推导出跳远运动员的总推进力，因为这实际上就是

由跳跃本身的长度提供。如果我们让 $A(0) = m0.45^2$ ， $Cd=1.0$ ， $m=kg70$ 与短跑运动员一样，那么在 $X_0=6.52$ 米的情况下， $kX_0=0.017$ ，如上所述。

这远远低于短跑运动员的估计值=80.030，但大部分差异可归因于跳远运动员在起飞时有额外的肌肉群起作用的事实

并能产生比短跑运动员大得多的推进力。可以从起飞时产生的垂直动能来粗略估计与跳跃有关的增加的力量。如果脚与地面接触的时间为 $t_{li}t$ ，比如说，产生垂直动能的平均工作速度大约为每公斤质量的 $\frac{1}{2}V_{li}^2/t_{li}t$ 。因此。

起飞时每单位质量产生的总功率的粗略估计是 $PU + \frac{1}{2} V_{li}^2/t_{li}t$ ，

并使用0.12至0.14秒的 $t_{li}t$ 代表值（例如，见Schmolinsky（1983）），由此可见，跳远运动员产生的推动力大约是短跑运动员的1.4倍，而且这一估计可能是非常保守的。因此，为了直接比较跳远运动员和短跑运动员的空气阻力的相对成本，我们预计必须将上述1.7%的数字提高到2.4%左右，这将与第3节中的估计有相当好的总体一致。

上面的讨论似乎没有留下什么疑问，许多报告的数值为8
我相信，使用"价值=8"将0.030极大地高估其重要性。
不会导致在评估短跑运动员的空气阻力成本时出现严重错误。

7. 100米锦标赛。作为上述理论的具体应用，特别是利用(16)给出的风的影响，考虑100米短跑在大型锦标赛的背景下，如奥运会或世界锦标赛，是有启发的。在这样的锦标赛中，100米是一个包括四轮比赛的项目，淘汰赛在比赛的第一天12进行，半决赛和决赛在第二天进行。对于这样一系列的比赛，人们的看法是，运动员的时间会随着他们在各轮比赛中的进展而减少。然而，事实并非如此，在实践中，大多数进入半决赛的运动员都是在第二轮比赛中完成最快的比赛。

在1984年和1988年奥运会、1987年世界锦标赛和1988年美国奥运会选拔赛上，男子和女子100米系列的成绩都被用来评估运动员在各轮比赛中的相对表现，首先对所有成绩进行了调整，以考虑到风的帮助或阻碍。由于在这些统计中，男性和女性的结果似乎没有大的差别，所以所有的八个比赛都包括在统计中。在解释这些结果时必须谨慎，因为统计数字会因运动员在比赛结束时明显无法获得下一阶段的比赛资格而有所偏颇。

在这四项比赛的所有64名决赛选手中，只有46%的选手在决赛中跑出了最快（修正）时间，35%的选手在第二轮比赛中跑出了最快时间，只有19%的选手在半决赛中跑出了最佳时间，这一特点说明了第二轮比赛的重要性。

在259名选手中，73%的选手在第二轮比赛中的表现比第一轮平均提高了0.66%。在进入各自决赛的64名运动员中，87%的选手在第二轮比赛中的表现比第一轮平均提高了1.53%。

然而，与第二轮比赛相比，128名半决赛选手中只有29%在半决赛中的成绩比第二轮比赛有所提高，平均而言，运动员在半决赛中比第二轮比赛慢了0.51%。在晋级决赛的运动员中，只有44%的人在半决赛中比第二轮跑得快，半决赛中平均比第二轮慢0.08%。另一方面，53%的决赛选手在决赛中比他们第二轮的表现有所提高，在决赛中平均比第二轮跑得快0.31%。在比赛的决赛中，70%的运动员在半决赛的基础上有所提高，在决赛中平均比半决赛快0.39%。

比赛结果的一个有趣的特点是，各轮比赛的状态保持得很好：决赛中最优秀的运动员通常在比赛的各个阶段都有领先的时间，而且没有一个决赛选手在第二轮的最快修正时间低于第十二名。在所有八项比赛中，在半决赛中取得最快（修正）时间的运动员在决赛中获得第一名或第二名，而在所有情况下，除了一项之外，半决赛中最慢（修正）时间的运动员在决赛中获得最后两名。

8. 女子100米世界纪录是在风的帮助下创造的吗？1988年7月16日，在印第安纳波利斯举行的美国奥运会选拔赛上，弗洛伦斯-格里菲斯-

乔伊纳打破了女子100米短跑的世界纪录。她的成绩是10.49秒，比之前的记录提高了3.5%，在一个成熟的项目中，这是一个异常大的飞跃。田径界对这一纪录的有效性普遍持怀疑态度，因为当女子100米的2预赛正在进行时，在相邻的跑道上不断记录到超过4毫秒的风速（¹远远超过2毫秒¹的允许极限）。然而，格里菲斯-

乔伊纳的比赛以及第二轮比赛的风速记录为0.0毫秒¹。

第三轮比赛的风速记录为毫秒5.0¹。

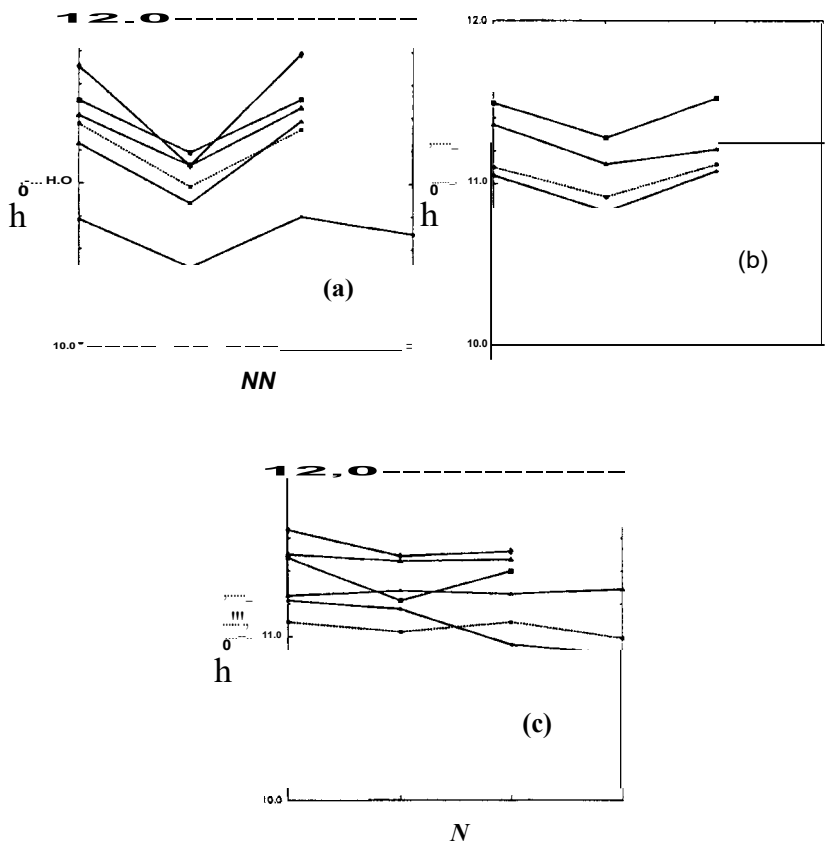
由于该比赛是连续两天举行的锦标赛系列的四轮比赛之一，因此可以推断出所有运动员在这场比赛中的表现与他们在其他比赛中的表现相比。根据这样的分析，Griffith-Joyner的记录似乎是由至少4毫秒¹的尾风助推的。

为了比较各轮比赛的表现，有必要将所有时间修正为标准风速；这种修正将通过使用（16）进行。但是，此外，由于第6节中描述的现象，在对冠军系列赛第二轮记录的快速时间进行解释时，需要注意一些。

为了适应这一特点，以及可用的非常小的数据集，我们开发了一个测试，使用一个特定运动员的表现中的最大变化来描述变化性。

而不是更常见的最小二乘法的特征。

表4显示的是在美国奥运选拔赛第一轮之后晋级的选手的时间，以及根据无效风速调整的时间。有问题的风速（即0.0毫秒¹）的比赛是第二轮的第一和第二回合，我们从表中看到，如果不包括这两场比赛的时间，选手们在各轮比赛中的风速修正时间是非常一致的。从表中可以看出，第二轮第1和第2场比赛中记录的异常快的时间。例如，第一轮和第二轮的选手分别比其他比赛的平均时间快2.8%和2.0%，而第三轮的选手只快0.3%。图为进入半决赛的每位选手的跑步时间图。5.



Fm.5.
1988年奥运会选拔赛女子100米半决赛和决赛选手记录的时间 $T(0)$ 校正为空风速。 \overline{N} 表示比赛的轮次。1
第一轮，2第二轮，3半决赛，4 决赛。参加(a)第2轮第1组；(b)第2组；(c)第23轮的热身赛的妇女的时间。
2.

为了考察第二轮的表现与其他轮的表现相比是否一致，利用了以下测试。确定每个半决赛和决赛选手的平均时间 T （修正为空风速），不包括在Let轮2.记录的时间
 $!!!T := \max \{IT; -Tl\}$ ，其中 T_i 表示1,半决赛或决赛中的时间记录。
最后。定义 $V := (T - T2) / !!!T$ ，其中 $T2$ 是一轮的风向修正时间 通常情况2.下，我们希望 V 的
量级约为1：对1984奥运会1988和世锦赛1987的男子和女子比赛都进行测试

表4

1988年美国奥林匹克选拔赛女子100米比赛的结果，所有超过第一轮的高手。表中显示的是记录的时间（秒）和风速（毫秒⁻¹）。
黑体字的时间是修正为零风速的比赛时间，每个选手名字后面的方括号内的数字表示她在2哪一轮比赛中参加的比赛。

| | 最后 | 半F. | 第二回合 | 第一轮 |
|-----------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| F.格里菲斯-乔伊纳[| I]10.61(+1.2) 10.69 | 10.70(+1.6) 10.80 | 10.49(+0.0) 10.49 | 10.60(+3.2) 10.78 |
| E. | 阿什福德[3]10.81(| 10.85(+1.6) 10.95 | 10.91 (+5.0) 11.17 | 11.0J (+3.5) 11.22 |
| +1.2) 10.89 | | | | |
| G. | 托伦斯[3]10.91(+1 | I 1.00 (+1.3) 11.09 | 10.78(+5.0) 11.03 | 10.93(+2.7) 11.09 |
| .2) 10.99 | | | | |
| S. | Echols[2]I+1.001.2 | 10.99(+1.3) 11.08 | 10.83(+0.0) 10.83 | 10.83(+3.9) 11.05 |
|) 11.08 | | | | |
| A. | 布朗[2]11.04(+1.2) | I (1.03+1.3) 11.12 | 10.92(+0.0) 10.92 | 10.88(+3.9) 11.10 |
| 11.12 | | | | |
| D. | 杨[2]11.19(+1.2) | 11.10(+1.6) 11.21 | 11.12(+0.Q) 11.12 | 11.16(+3.2) 11.36 |
| 11.27 | | | | |
| J. | 英尼斯[3]11.21(+1 | 11.15(+1.6) 11.26 | 11.02(+5.0) 11.28 | 11.08(+2.7) 11.25 |
| .2) 11.29 | | | | |
| G. Devers[!] | | 11.24(+1.3) 11.33 | 10.98(+0.Q) 10.98 | 11.15(+3.5) 11.36 |
| D.威廉姆斯[!] | | 11.27(+1.6) 11.38 | 10.88(+0.0) 10.88 | 11.07(+2.7) 11.24 |
| E.琼斯[3] | | 11.29(+1.6) 11.40 | 11.22(+0.0) 11.22 | 11.28(+3.2) 11.48 |
| D.Sowell[!] | | 11.40 (+1.6) 11.51 | 11.19(+0.0) 11.19 | 11.30(+3.2) 11.50 |
| A.汤普森[!] | | 11.67(+1.6) 11.79 | 11.35(+0.0) 11.35 | 11.53(+2.7) 11.71 |
| C.Guidry[!] | | 11.37(+1.3) 11.46 | 11.11(+0.0) 11.11 | 11.24(+2.7) 11.41 |
| W.Vereen[3] | | 11.38(+1.3) 11.47 | 11.19(+5.0) 11.46 | 11.30(+3.2) 11.50 |
| M.Finn[3] | | 11.43(+1.3) 11.52 | 11.22(+5.0) 11.49 | 11.43(+3.5) 11.65 |
| A.伯纳姆[2] | | 11.43(+1.3) 11.52 | 11.28(+0.Q) 11.28 | 11.26(+3.9) 11.49 |
| A.霍华德[!] | | | 11.76(+0.0) 11.76 | 11.54(+3.5) 11.76 |
| L.米勒[2] | | | 11.45(+0.0) 11.45 | 11.34(+3.9) 11.57 |
| M.Washington-Allen[2] | | | 11.65(+0.0) 11.65 | 11.59(+3.2) 11.80 |

得到的V 的 平 均 值 在0.73和3.77之间。每个系列的平均值V 都是正值，这一事实只是反映了先前的一个说法，即运动员在第二轮比赛中经常有出色的表现。这种效应在1988年奥运会女子100米赛跑的第二轮比赛中得到了极大的强调，许多运动员在第二轮比赛中跑出了非常快的成绩，而V的数值为3.77。(美国奥运会女子100米赛跑第二轮的第一组，V值为20.1，第二组为9.9，第三组为0.45。第1轮和第2轮的V 值 非常大，这有力地表明拒绝了风速读数为0.0ms⁻¹的假设。事实上，第1轮或第2轮的任何选手的最小V值都超过了第3轮的每个选手的最大V值。

这种潜在的困难是任何统计程序所固有的，我们可以用它来估计一场比赛与另一组比赛相比是否

"不寻常"；在目前的情况下，与每个人相关的小样本集比大样本集更有可能出现这种可能性。奥运会1988男子项目中的一名选手确实出现了这种情况；他的时间被简单地从数据集中舍弃了）。

格里菲斯-

乔伊纳在奥运会选拔赛和奥运会上跑出的风向修正时间，可以衡量上述讨论的一致性。按照时间顺序，它们分别是10.78、10.49、10.80、10.69、10.95、10.68、10.85和10.71秒。这个顺序表明，除去10.49秒的比赛，格里菲斯-

乔伊纳在她的最佳状态下能够跑出10.70秒左右的风向修正时间。为了使热身赛的V值

与我们对系列赛其他比赛的预期¹相一致，超过5毫秒¹的尾风¹是合适的。同样地，热身赛的风速²估计在2.5毫秒³^{1-秒}之间。

鉴于上述结果，我认为1988年美国奥运选拔赛女子100米决赛的第1轮和第2轮都有相当程度的风力辅助，格里菲斯-乔伊纳10.49秒的成绩应被视为反常的记录。

鸣谢。作者要感谢休斯顿大学数学系在稿件准备过程中的支持，并感谢Ridgway Scott的有益评论和建议。这项工作的最初动机是在J.B. Keller在宾夕法尼亚州立大学举办的一次Marker讲座后与他讨论的结果。

参考文献

- J.DAPENA AND M. E. FELTNER (1987), *Effects of wind and altitude on the times of 100-meter sprint races*, Internal. J.Sport Biomech., p3., 6.
- C.T. M. DAVIES (1980), 风助和阻力对跑步者向前运动的影响, J. Appl. Physiol. 48,702.
- N.DE MESTRE (1986), *The long jump revisited*, J. Aust. Math.Math.Soc. Ser. B, p28., 246.
- C.FROHLICH (1985), 风和海拔高度对足部比赛、撑杆跳和跳远的记录的影响。美国。J. Phys., p53., 726.
- K.FURUSAWA, A. V. HILL, AND J. L. PARKINSON (1927), *The dynamics of "sprint" running*, Proc.Roy.Soc. London B, p102., 29.
- S.GOLDSTEIN (1938), 流体动力学的现代发展。Vol II., Clarendon Press, Oxford.
- J.G. HAY, J. A. MILLER, AND R. W. CANTERNA (1986), *The techniques of elite male long jumpers*, J. Biomech. , 19, p. 855.
- A.V. HILL (1925), *The physiological basis of athletic records*, Report of 93rd Meeting, Brit.Assoc. for the Adv. of Sci., p. 156.
- (1927), 空气对跑步者的阻力, Proc.Roy.Soc. London B, p102., 380.
- G. J. VAN INGEN-SCHENAU (1982), *The influence of air friction in speed skating*, J. Biomech., p15., 449.
- J.B. KELLER (1973), *A theory of competitive running*, Physics Today, p26., 42.
- (1974), *Optimal velocity in a race*, Amer.Math.Monthly, p81., 474.
- R.KRAM AND C.R. TAYLOR (1990), *Energetics of running: a new perspective*, Nature, p346., 265.
- C.R. KYLE AND V. J. CAIOZZO (1986), *The effect of athletic clothing aerodynamics upon running speed*, Medicine and Sci. in Sports and Exer., 18, p. 509.
- H.LAMB (1926), *Dynamics*, The University Press, Cambridge.
- R.玛格丽亚, P.塞雷泰利, P.阿格莫, 和G.萨斯!(1963), 跑步的能量成本, J. Appl. Physiol., p18., 367.
- J.MAYNARD SMITH (1968), *Mathematical ideas in biology*, The University Press, Cambridge.
- F.PERONNET AND G. THIBAUT (1989), *Mathematical analysis of running performance and world records*, J. Appl. Physiol. 67,453.
- W.G. PRITCHARD (1993), *Scaling in the animal kingdom*, Bull.数学. Biology, p55., 111.
- L.G. C. E. PuGH (1970), 径赛和跑步机上的氧气摄入量与空气阻力的影响的观察。J.Physiol., p207., 823.
- (1971), 跑步和行走中风阻的影响以及对水平或垂直力的机械效率的工作, J.Physiol., p213., 255.
- G. SCHMOLINSKY (1983), *Track and Field*, Sportverlag, Berlin.
- P.N. SPERRY (1983), *Sport and Medicine*, Butterworths, London.
- E.SPRING, S. SAVOLAINEN, J. ERKKILA, T. HAMALAINEN, AND P. PIHKALA (1988), 越野滑雪者的阻力区。内部。J. Sport Biomech., p4., 103.
- C.L. VAUGHAN (1983), 短跑运动员的模拟。第一部分：模型的开发，内部。J. Bio-med.计算。 14, p. 65.
- A.J. WARD-SMITH (1983), 空气动力学和生物力学因素对跳远成绩的影响, J. Biomech., 16, pp. 655.
- (1984), 空气阻力及其对海平面和高空短跑的生物力学和能量学的影响, J. Biomech., p17., 339.
- (1985a), *A mathematical theory of running, based on first law of thermodynamics, and its application to the performance of world-class athletes*, J. Biomech., p18., 337.

- A. I. WARD-SMITH (1985b), *A mathematical analysis of the influence of adverse and favourable winds on sprinting*, J.Biomech., p18, 351.
- K.R. WILLIAMS AND P. R. CAVANAGH (1983), *A model for calculation of mechanical power during distance running*, J.Biomech. 115.
- W.WOODSIDE (1991), *The optimal strategy for running a race.(A mathematical model for world records from m50 to km)*275, Math.Comput.Modeling., p15, 1.