



中国科学院大学

601 高等数学甲

考研真题集 2001—2022

说 明

一年的时光已然匆匆，于此感谢各位小伙伴的帮助和分享。高等数学甲的真题我只从 2009 刷到了 2019，对真题的校对也只是从 2009 到 2019，顺道，我也给出了 2009 到 2019 的简明参考答案。其余年份的真题，可能会有一些错误，包括但不限于：错别字，用词错误，句子表达问题，公式的错误，字形的问题，标点符号的错误，版面的问题，排版的问题，答案的错误等等。这些遗留的问题，有待各位共同发现修改。当各位在刷各年的真题时，若能顺手，发现错误，给出简明答案，提交到码云，或者直接拿此源文件修改后分享出来，鄙人不胜感激。愿：

“古今共载树，天下齐乘凉”

水

2022 年 7 月 16 日

本文档使用 L^AT_EX 编写而成，源码地址 <https://gitee.com/ylxdxx/AM601-kaoyan>

中国科学院大学
2022 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上均无效。

- 一、 (1) $f(x) = \arcsin\left(\frac{4}{\pi}x - 1\right)$, 求 $f[f(x)]$ 的定义域 ()
- A. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ B. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ C. $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]$ D. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- (2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \tan^2 x \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{x^2}\right) = ()$
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 不存在
- (3) 若函数 $g(x)$ 二阶可导, 且满足 $g(0) = g'(0) = 0$, $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 讨论 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性 ()
- A. $f(x)$ 连续, $f'(x)$ 连续 B. $f(x)$ 连续, $f'(x)$ 不连续, $f'(0)$ 存在
C. $f(x)$ 连续, $f'(0)$ 不存在 D. $f(x)$ 不连续
- (4) $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^{2n}}{2 - x^{2n}}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 ()
- A. -1 B. 1 C. ± 1 D. 无间断点
- (5) 直线: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ 和直线 $\begin{cases} x+2y-3=0 \\ 3y+z+2=0 \end{cases}$ 间夹角的余弦值 $\cos \theta$ 为 ()
- A. $\frac{1}{\sqrt{8}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{10}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{12}}$ D. $\frac{1}{\sqrt{14}}$
- (6) 正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则下列级数: ① $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, ② $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^2$, ③ $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(a_n)$, ④ $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+a_n)$ 中一定收敛的级数个数为 ()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- (7) 判断曲线: $y = x \sin \frac{1}{x}$ 的渐近线 ()
- A. 只有垂直渐近线 B. 只有水平渐近线
C. 有垂直渐近线和水平渐近线 D. 只有斜渐近线
- (8) 函数 $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处 ()
- A. 累次极限都存在, 重极限存在 B. 累次极限都存在, 重极限不存在
C. 累次极限存在其中一个, 重极限不存在 D. 至少一个累次极限不存在
- (9) 函数 $z(x, y)$ 满足 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$, 则 $dz = ()$
- A. $\frac{z(dx+dy)}{z(x+y)}$ B. $\frac{z(ydx+xdy)}{y(x+z)}$ C. $\frac{z(zdx+xdy)}{y(x+z)}$ D. $\frac{z(xdx+ydy)}{z(x+y)}$
- (10) 下列广义积分收敛的是 ()
- A. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(e^{\frac{x}{2}}-1)} dx$ B. $\int_0^1 (\ln x)^{100} dx$ C. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ D. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x+\sin x} dx$

二、 $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{2}{x}}} + u(x) \right]$ 。

三、 函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y'' = e^{2y} + e^y$, 且 $y(0) = 0, y'(0) = 2$, 求 $y(x)$ 。

四、 设函数 $y(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$, 求下列极限:

(1) $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{dy}{dx}$ 和 $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{d^2y}{dx^2}$ 。

五、 证明: $u(x, y) = f(x)g(y)$ 成立的充分必要条件是 $u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$ 。

六、 计算半圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1, y > 0$, 绕 y 轴旋转所得到的旋转体的体积。

七、 曲线 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, 计算积分

$$I = \oint_C e^{xy} \{ [y \sin(xy) + \cos(x+y)] dx + [x \sin(xy) + \cos(x+y)] dy \}$$

八、 (1) 在 $[-\pi, \pi]$ 上把函数 $f(x) = x$ 展开为傅里叶级数;

(2) 证明: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ 。

九、 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足二阶可导, 并且有 $g''(x) \neq 0$, $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$, 试证明:

(1) $\forall x \in (a, b), g(x) \neq 0$;

(2) $\exists \xi \in (a, b), \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$ 。

十、 设 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$, 证明:

(1) $I_{n+1} = -I_n + \frac{1}{n+1}$;

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$;

(3) 用 (1) 和 (2) 的结论证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ 。

十一、 函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, 求其在满足条件 $ax + by + cz = 1$ 下的最小值。

中国科学院大学
2021 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上均无效。

一、选择题 (本题满分 50 分, 每小题 5 分)

- (1) $a = e^x$, $b = 1 + x$, $c = 1 + x + x^2$, 则在 $x = 0$ 的 ϵ 无穷小邻域内, 大小估计正确的为 ()
- A. $b \leq a \leq c$ B. $a \leq b \leq c$ C. $b \leq c \leq a$ D. 无法确定
- (2) 双曲正弦, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 双曲余弦 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 错误的是 ()
- A. 双曲正弦为奇函数, 双曲余弦为偶函数
B. 双曲正弦为增函数, 双曲余弦为减函数
C. 双曲正弦的导为双曲余弦, 双曲余弦的导为双曲正弦
D. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, 对任意 x 总成立
- (3) n 为正数, $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos 2\pi\sqrt{n^2 + n} = ()$
- A. 1 B. 0 C. -1 D. 不存在
- (4) 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 内的奇函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处导数为 ()
- A. a B. $-a$ C. 0 D. 不存在
- (5) 设向量 \vec{a} 和 \vec{b} 满足 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - 2\vec{b})$, $(3\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + 2\vec{a})$, 则 $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = ()$
- A. $|\vec{a}| = \sqrt{\frac{1}{2}}|\vec{b}|$ B. $|\vec{a}| = \sqrt{2}|\vec{b}|$ C. $|\vec{a}| = \sqrt{\frac{2}{3}}|\vec{b}|$ D. $|\vec{a}| = \sqrt{\frac{3}{2}}|\vec{b}|$
- (6) $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\sin^3 x \cos x}^{e^{x^2}-1} \arctan \frac{3t}{2+t} dt}{\arcsin x^2}$, 则 ()
- A. I 不存在 B. $I = 3/2$ C. $I = 1/2$ D. $I = 0$
- (7) $a_n > 0, \{a_n\}$ 单调递减趋于 0, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sqrt{a_n \cdot a_{n-1}} ()$
- A. 发散 B. 绝对收敛 C. 条件收敛 D. 无法判断
- (8) 设函数 $Z = xy + xF(\frac{y}{x})$, 其中 F 为可导函数, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ 的表达式是 ()
- A. $Z - xy$ B. 0 C. $Z + xy$ D. xy
- (9) $y'' - 6y' + 8y = e^x + e^{2x}$ 的一个特解形式 ()
- A. $ae^x + be^{2x}$ B. $ae^x + bxe^{2x}$ C. $axe^x + be^{2x}$ D. $axe^x + bxe^{2x}$
- (10) 正确的是 ()
- A. $\lim_{s \rightarrow 0} \iint_{s < x^2 + y^2 < \frac{1}{2}} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)(\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + y^2})^2}$ 存在
B. $\lim_{s \rightarrow 1} \iint_{-\frac{1}{2} < x^2 + y^2 < s} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)(\lim_{s \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + y^2})^2}$ 存在

C. $\lim_{s \rightarrow 0} \iint_{s < x^2 + y^2 < \frac{1}{2}} \frac{x(1+x^2)dx dy}{(x^2+y^2)(\lim \sqrt{x^2+y^2})^2}$ 存在

D. 以上均不对

二、(本题满分 10 分) 求常微分方程 $xy'' - y' \ln y' + y' \ln x = 0$, 满足 $y(1) = 2$ 和 $y'(1) = e^2$ 的特解。

三、(本题满分 10 分) 求过直线 $l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ 且平行于 $l_2: \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x - 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$ 的平面方程。

四、(本题满分 10 分) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n-1} + nx \sin \frac{x}{n}}{x^{2n} + 1}$, 讨论 $f(x)$ 连续性。

五、(本题满分 10 分) 设 $g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, $f(x) = g'(x) \circ$ 求 $f^{(n)}(0)$ 。

六、(本题满分 10 分) 设曲面 $\Sigma = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 的外侧, 计算积分

$$\iint_{\Sigma} y^2 z dx dy + x^2 y dz dx$$

七、(本题满分 10 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + \sin x}{\int_b^x \ln(1+t^3) t dt} = c, (c \neq 0)$, 求出 a, b, c 的值。

八、(本题满分 10 分) 设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} \sin(x^2 + y^2) & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 讨论 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的可微性。

九、(本题满分 10 分) $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ 展开为傅里叶函数。

十、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 ab 内可导, 证明: 如果 $f(x)$ 为非线性函数, 则存在 $\exists \xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ 使 $f'(\xi_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $f'(\xi_2) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 。

十一、(本题满分 10 分) 已知函数 $z = \{(x, y)$ 的全微分 $dz = 2x dx - 2y dy$ 并且 $f(1, 1) = 2020$; 求出 $f(x, y)$ 在椭球体域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ 上最大值和最小值。

中国科学院大学
2020 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上均无效。

一、选择题 (本题满分 50 分, 每小题 5 分)

- (1) 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^2+1} + \cdots + \frac{2n}{n^2+n-1} \right)$ 的值为 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. $+\infty$
- (2) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续, $F(x) = f(x)|x-a|$, 则 $f(a) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x=a$ 处可导的 ()
A. 充要条件 B. 充分非必要条件
C. 必要非充分条件 D. 既非充分又非必要条件
- (3) 极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{1-\sin x}}$ 的值为 ()
A. e^{-1} B. 1 C. e D. $+\infty$
- (4) 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 周期为 4, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1)-f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处的切线斜率为 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. -1 D. -2
- (5) 设向量 $\vec{a} = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (0, 1, 2)$, 则向量 \vec{b} 在向量 \vec{a} 方向上的投影向量为 ()
A. $(0, \frac{6}{5}, \frac{12}{5})$ B. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ C. $(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ D. $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$
- (6) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是 ()
A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$.
B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$.
C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$
D. $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0$.
- (7) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ = ()
A. 0 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 1
- (8) 设方程 $x + y + z = e^{xy}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 的表达式是 ()
A. $(x^2 + y^2)e^{xy}$ B. $(x + y)e^{xy}$ C. $2xye^{xy}$ D. $(1 + xy)e^{xy}$
- (9) 设 $a_0 = 3, a_1 = 5$, 且对任何自然数 $n > 1$ 有 $na_n = \frac{2}{3}a_{n-1} - (n-1)a_{n-1}$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 ()
A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

(10) 下列反常积分发散的是 ()

A. $\int_0^{+\infty} \frac{x^6}{1+e^x} dx$ B. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ C. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4 \ln x} dx$ D. $\int_1^{+\infty} \frac{2 \sin^2 x}{1+x^2} dx$

二、(本题满分 10 分) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 不存在, 并且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+xf(x)}-1}{\sin x} = 3$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。

三、(本题满分 10 分) 两平面均通过点 $A(-2, 1, -1)$, 其中一个平面通过 x 轴, 另一个平面通过直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$, 求两平面夹角的余弦。

四、(本题满分 10 分) 设函数 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x^x + tx - t^2 = 0, \\ \arctan(ty) = \ln(1 + t^2 y^2) \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

五、(本题满分 10 分) 已知函数 $u = f(r), r = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$, 求 $f(x)$ 的表达式。

六、(本题满分 10 分) 设曲线 $C: y = x^3 + 2x$ 与其在 $(1, 3)$ 点处的切线以及 x 轴围成的区域落在第一象限中的部分为 D , 计算:

(1) D 的面积。

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

七、（本题满分 10 分）计算下列第二型曲面积分：

$$I = \iint_S x dy dz + 2y^4 dx dz + 3z^6 dx dy$$

其中 S 是椭球面： $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ 。

八、（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 是周期为 3 的连续函数，证明：在任意长度为 2 的闭区间 $[a, a+2]$ 上至少存在一点 θ ，使得 $f(\theta) = f(\theta+1)$ 。

九、（本题满分 10 分）设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导，且 $f(a) = f(b) = g(a) = 0$ 。证明：存在 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f''(\xi)g(\xi) + 2f'(\xi)g'(\xi) + f(\xi)g''(\xi) = 0$ 。

十、（本题满分 10 分）设 f 是 $[0, 1]$ 上的连续函数，满足 $\int_0^x f(t)dt \geq 0$ 对所有的 $x \in [0, 1]$ 成立且 $\int_0^1 f(t)dt = 0$ 。证明： $\int_0^1 xf(x)dx \leq 0$ 。

十一、（本题满分 10 分）求证：若正数 x, y, z 满足 $x^2 + y^2 + z^2 = a$ ，其中 $a > 0$ ，则有不等式 $x^3 + y^3 + z^3 \geq \frac{a\sqrt{3a}}{3}$ 恒成立。

中国科学院大学
2019 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、选择题 (本题满分 50 分, 每小题 5 分)

- (1) 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) + \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right) \right]$ ()
A. $e - 1/2$ B. $5/2$ C. $e + 1/2$ D. $7/2$
- (2) 已知函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$, 则下列正确的是 ()
A. $f(0) = 0$ 且 $f'_-(0)$ 存在 B. $f(0) = 1$ 且 $f'_-(0)$ 存在
C. $f(0) = 0$ 且 $f'_+(0)$ 存在 D. $f(0) = 1$ 且 $f'_+(0)$ 存在
- (3) 以下 4 个命题中正确的是 ()
A. 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界
B. 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界
C. 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界
D. 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界
- (4) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1} & x \neq \pm 1 \\ 1 & x = \pm 1 \end{cases}$, 则下列说法正确的是 ()
A. $f(x)$ 在 $x = -1$ 连续, 在 $x = 1$ 不连续
B. $f(x)$ 在 $x = -1$ 不连续, 在 $x = 1$ 连续
C. $f(x)$ 在 $x = -1$ 和 $x = 1$ 都连续
D. $f(x)$ 在 $x = -1$ 和 $x = 1$ 都不连续
- (5) 若向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$ 、 $(5\vec{a} + \vec{b}) \perp (3\vec{a} - 4\vec{b})$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角 α 满足 ()
A. $\cos \alpha = \frac{14}{17}$ B. $\cos \alpha = \frac{13}{17}$ C. $\cos \alpha = \frac{12}{17}$ D. $\cos \alpha = \frac{11}{17}$
- (6) 已知 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{|x| + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 则关于累次极限 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ 和 $J = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ 的下列说法正确的是 ()
A. I 存在但 J 不存在 B. J 存在但 I 不存在
C. I 和 J 都存在但 $I \neq J$ D. I 和 J 都存在且 $I = J$
- (7) 已知数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 则下列级数
 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^2, \sum_{n=0}^{\infty} \sin(a_n), \sum_{n=0}^{\infty} \ln(1 + a_n)$
中收敛级数的数量是 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

(8) 设函数 $f(t)$ 二次连续可微, 令 $u = f(xy)$, 则 $\phi(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 的表达式是 ()

- A. $tf''(t) - f'(t)$ B. $f''(t) - tf'(t)$ C. $tf''(t) + f'(t)$ D. $f''(t) + tf'(t)$

(9) 设非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x), y_2(x)$, C 为任意常数, 则该方程的通解是 ()

- A. $C[y_1(x) - y_2(x)]$ B. $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$
C. $C[y_1(x) + y_2(x)]$ D. $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$

(10) 考虑积分 $I = \iint_D (x^2 - y^2) dx dy$, 其中 D 是椭圆: $\{(x, y) \in R^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$ 落在第一象限中的部分。则下列说法正确的是 ()

- A. $a > b$ 时 $I > 0$ B. $a > b$ 时 $I < 0$ C. $a > b$ 时 $I = 0$ D. $a < b$ 时 $I = 0$

二、(本题满分 10 分) 求常微分方程: $yy'' + (y')^2 = 0$ 满足初始条件: $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$ 的特解。

三、(本题满分 10 分) 求直线 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程。

四、(本题满分 10 分) 设 $a_0 = 3, a_1 = 5$, 且对任何自然数 $n > 1$ 有 $na_n = \frac{2}{3}a_{n-1} - (n-1)a_{n-2}$ 。

证明: 当 $|x| < 1$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛, 并求其和函数 $S(x)$ 。

五、(本题满分 10 分) 已知函数 $y = y(x)$ 由方程: $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定, 试求 $y''(0)$ 。

六、(本题满分 10 分) 对实数 $R > 0$ 定义积分:

$$I_R = \iiint_{1/R \leq x^2+y^2+z^2 \leq R} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{x^2+y^2+z^2} dx dy dz$$

证明极限 $I = \lim_{R \rightarrow +\infty} I_R$ 存在并计算其值。

七、(本题满分 10 分) 计算积分

$$I = \oint_L \frac{(x^2 - y^2 - x) dy + (1 - 2x)y dx}{(x^2 + y^2)[(x-1)^2 + y^2]}$$

其中 $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ 沿逆时针方向。

八、(本题满分 10 分) 已知 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, 试求一个序列 $x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 存在,

且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + x \right]^{[2/f(\frac{1}{x})]} = e^2$

九、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 2 阶可导, 其中 $a < b$ 。且有 $f'(\frac{a+b}{2}) = 0$ 。证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$ 。

十、(本题满分 10 分) 证明:

(1) 闭区间 $[0, 1]$ 上任何连续函数都有原函数。

(2) 闭区间 $[0, 1]$ 上任何连续可微函数都可以写成两个单调不减函数之差。

十一、(本题满分 10 分) 求函数 $f(x, y, z) = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$ 上的最大值, 并证明对任意正实数 a, b, c , 不等式 $ab^2c^3 \leq 108 \left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6$ 恒成立。

中国科学院大学
2018 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上均无效。

一、选择题 (本题满分 50 分, 每小题 5 分)

(1) 函数 $h(x)$ 的定义如下:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ x & -1 < x < 1 \\ -1 & x \leq -1 \end{cases}$$

则, 函数 $g(x) = h(\sin x^2)$ 一定是 ()

- A. 有界可微函数
B. 有界, 不一定连续
C. 连续, 不一定可微
D. 有界连续, 不一定可微

(2) 设 $f(x) = (x + \frac{1}{x})^{1000}$, 则 $f'(x) =$ ()

- A. $1000(x + \frac{1}{x})^{1000}(1 - \frac{1}{x^2})$
B. $1000(x + \frac{1}{x})^{999}(1 - \frac{1}{x^2})$
C. $(x + \frac{1}{x})^{999}(1 - \frac{1}{x^2})$
D. $1000(x + \frac{1}{x})^{1000}(1 - \frac{1}{x^2})$

(3) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right)^{\frac{1}{x}} =$ ()

- A. π^2
B. π
C. e^2
D. e

(4) 直线 $L_1: \begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + \frac{1}{2}z = 2 \end{cases}$ 与直线 $L_2: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2}$ 所夹的锐角 α 的余弦 $\cos \alpha =$ ()

- A. $\frac{1}{9}$
B. $\frac{2}{9}$
C. $\frac{1}{3}$
D. $\frac{4}{9}$

(5) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} =$ ()

- A. e^{-1}
B. e^{-2}
C. e
D. e^2

(6) 二重积分 $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2(x^2+y^2)^2} dx dy =$ ()

- A. $\frac{\pi}{64}$
B. $\frac{\pi}{32}$
C. $\frac{\pi}{16}$
D. $\frac{\pi}{8}$

(7) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt[4]{x^6+y^{18}}} =$ ()

- A. 0
B. 1
C. ∞
D. 不存在

(8) 若常微分方程初值问题: $y' + y = xy^2, y(0) = \alpha$ 的解 $y^*(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 1} y^*(x) = \frac{1}{e+2}$, 则可知 $\alpha =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{4}$
D. $\frac{1}{5}$

(9) 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} =$ ()

- A. e^2
B. $2e^2$
C. $3e^2$
D. $4e^2$

(10) 设 $f'(x^2) = \frac{1}{x} (x > 0)$, 则 $f(x) = (\quad)$

A. $2\sqrt{x} + C$

B. $\sqrt{x} + C$

C. $4\sqrt{x} + C$

D. $\frac{2}{\sqrt{x}} + C$

二、(本题满分 10 分) 设函数序列 $y_n = y_n(x)$ 的定义域为 $x > 1$, 当 $n \geq 1$ 时, 满足如下的迭代关系:

$$y_1(x) = 2x, y_{n+1}(x) = 2x - \frac{1}{y_n(x)}$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在, 并求这个极限。

三、(本题满分 10 分) 求由平面 $x + y + z = \pm 1, 2x - y + 2z = \pm 2, x - y - z = \pm 3$, 所界的平行六面体 Ω 的体积 V 。

四、(本题满分 10 分) 把函数 $f(x) = x \cos x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 展开成傅里叶级数。

五、(本题满分 10 分) 求抛物线 $y^2 = x, y^2 = 3x$ 和直线 $y = x, y = 2x$ 所围区域 D 的面积。

六、(本题满分 10 分) 由拉格朗日中值公式有: $e^x - 1 = xe^{x\theta(x)}, \theta(x) \in (0, 1)$ 。证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$ 。

七、(本题满分 10 分) 求微分方程 $y'' - y' - 2y = e^{2t}(3 - t)$ 的通解。

八、(本题满分 10 分) 计算曲线积分 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + 2y^2}$, 其中 L 是以点 $(1, 1), (-1, 0), (0, -1)$ 为顶点的三角形, 取逆时针方向。

九、(本题满分 10 分) 计算曲面积分 $\iint_S z dS$, 其中 S 为区域 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ 的边界。

十、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

十一、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续可微, 且 $f(0) = f(2) = 0$ 。证明:

$$\int_0^2 |f(x)f'(x)| dx \leq \frac{1}{2} \int_0^2 |f'(x)|^2 dx$$

中国科学院大学
2017 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上均无效。

一、选择题 (本题满分 50 分, 每小题 5 分)

- (1) 函数 $f(x) = |x| \sin x^2$, 正确的结论是 ()
- A. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界
B. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 为无穷大
C. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处可导
D. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 极限存在
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^4+n^3+n^2+1} + \frac{2}{n^4+n^3+n^2+2} + \cdots + \frac{n^2}{n^4+n^3+n^2+n^2} \right) = ()$
- A. 0
B. $\frac{1}{2}$
C. 1
D. ∞
- (3) 设 $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$, 则 $f'(1) + f''(2) + f'''(3) = ()$
- A. 0
B. -2
C. -8
D. -10
- (4) 设 $f(x) = x \sin x + \cos x - \frac{\pi}{2}$, 则下列命题中正确的是 ()
- A. $f(0)$ 是极大值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极小值
B. $f(0)$ 是极小值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值
C. $f(0)$ 是极大值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值
D. $f(0)$ 是极小值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极小值
- (5) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{\cos x^2}{\sin x}} = ()$
- A. e^{-1}
B. e^{-2}
C. e^{-3}
D. 1
- (6) 定积分 $\int_0^\pi (x \sin x)^2 dx = ()$
- A. $\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi}{4}$
B. $\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}$
C. $\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi^2}{4}$
D. $\frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}$
- (7) 设 D_K 是圆域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 在第 k 象限的部分, $k = 1, 2, 3, 4$ 。记 $I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy$, 则正确的是 ()
- A. $I_1 < 0$
B. $I_2 < 0$
C. $I_3 < 0$
D. $I_4 < 0$
- (8) 已知 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是微分方程 $y' + p(x)y = 0$ 的两个不同的特解, 则方程的通解一定为 ()
- A. $y = Cy_1(x)$
B. $y = Cy_2(x)$
C. $y = C(y_1(x) + y_2(x))$
D. $y = C(y_1(x) - y_2(x))$
- (9) 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为 ()
- A. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$
B. $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$
C. $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$
D. $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + u_{n+1})$
- (10) 设 $f'(\sin^2 x) = \cos 2x$, 且 $f(0) = 1$, 则 $\int_0^1 f(x) dx = ()$
- A. 1
B. $\frac{1}{6}$
C. $\frac{7}{6}$
D. $\frac{1}{2}$

二、(本题满分 10 分) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4 \cos x^2}$ 。

三、(本题满分 10 分) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \sin^n t dt = 0$ 。

四、(本题满分 10 分) 把函数 $f(x) = (x-1)^2$ 在 $(0, 1)$ 上展成余弦级数, 并求 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 。

五、(本题满分 10 分) 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 2) dxdy$$

其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧。

六、(本题满分 10 分) 计算 $\iint_{\Omega} \frac{(x+y) \ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}} dxdy$, 这里 Ω 是由直线 $x+y=1, x=0, y=0$ 所围成的三角形区域。

七、(本题满分 10 分) 求微分方程 $y''(x + (y')^2) = y'$ 满足初始条件 $y(1) = y'(1) = 1$ 的特解。

八、(本题满分 10 分) 计算曲线积分 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 是以点 $(1, 0)$ 为中心, 2 为半径的圆周, 取逆时针方向。

九、(本题满分 10 分) 设 $x \geq 0, a > 0$, 若 $\sqrt{x+a} - \sqrt{x} = \frac{a}{2\sqrt{x+\phi_a(x)}}$ 成立, 证明: $\frac{a}{4} \leq \phi_a(x) \leq \frac{a}{2}$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \phi_a(x) = \frac{a}{4}$ 和 $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_a(x) = \frac{a}{2}$ 。

十、(本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 且为增函数, 证明:

$$\int_0^2 f(x)dx \leq \int_0^2 xf(x)dx$$

十一、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导且 $f'(x)$ 连续, $f(a) = 0$, 这里 $a < b$ 。证明:

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx$$

中国科学院大学
2016 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上均无效。

一、选择题 (本题满分 50 分, 每小题 5 分)

- (1) 对于函数 $f(x)$, 当 x 是有理数时, $f(x) = \sin \pi x$; 当 x 为无理数时, $f(x) = 0$, 则正确的结论是 ()
- A. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界
B. $f(x)$ 处处不连续
C. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续
D. $f(x)$ 在整数点上连续
- (2) 设 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$, 则 $f(x)$ 等于 ()
- A. $x - \frac{1}{2}x^2$
B. $x + \frac{1}{2}x^2$
C. $x - \frac{1}{2}x^2 - C$
D. $\frac{1}{2}x^2 - x + C$
- (3) 设 y_1 和 y_2 均为微分方程 $y'' + 2y' + y = 2xe^{-x}$ 的特解, 则如下论断不正确的为 ()
- A. $\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$ 可能形如 $(c_1x^3 + c_2x^2)e^{-x}$, 其中 c_1, c_2 为常数
B. $\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2$ 可能形如 $(c_3x + c_4)e^{-x}$, 其中 c_3, c_4 为常数
C. $2y_1 + y_2$ 可能形如 $(c_5x^3 + c_6x^2)e^{-x}$, 其中 c_5, c_6 为常数
D. $2y_1 - y_2$ 可能形如 $(c_7x + c_8)e^{-x}$, 其中 c_7, c_8 为常数
- (4) $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = ()$
- A. $\frac{\pi}{2}$
B. $\frac{\pi}{4}$
C. $\frac{\pi^2}{4}$
D. $\frac{\pi^2}{6}$
- (5) 已知实向量 a, b 满足 $(a+b) \perp (a-b)$, $|a+b| = 1, |a| = 1$, 则 $|a \times b| = ()$
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
B. 1
C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D. $\frac{1}{6}$
- (6) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2) = ()$
- A. $2f(0)$
B. $f(2)$
C. $-f(2)$
D. 0
- (7) 正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛是级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛的 ()
- A. 充要条件
B. 充分条件, 但非必要条件
C. 必要条件, 但非充分条件
D. 既非充分条件, 也非必要条件
- (8) $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{\sqrt[3]{x^8 + y^{12}}} = ()$
- A. 0
B. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$
C. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
D. 不存在
- (9) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = ()$
- A. $e^{\frac{1}{6}}$
B. $e^{-\frac{1}{6}}$
C. $e^{\frac{1}{2}}$
D. $e^{-\frac{1}{2}}$
- (10) 若直线 $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ 与平面 $x + ky - z - 5 = 0$ 平行, 则 k 的取值为 ()
- A. -1
B. 0
C. 2
D. 1

二、(本题满分 10 分) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 计算下列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n}$$

并写出具体过程。

三、(本题满分 10 分) 求满足下列初始值的常微分方程 $y = y(x)$:

$$\begin{cases} y'' = y'(2y + 2) \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

的解。

四、(本题满分 10 分) 一空间物体由球面 $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的内侧和锥面 $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ 朝向 x 轴正向的一侧所界定, 其在点 (x, y, z) 的密度为 $\rho(x, y, z) = 1 - (y^2 + z^2)$, 试求该物体的质量。

五、(本题满分 10 分) 将函数 $f(x) = (\pi - |x|)^2 (-\pi \leq x \leq \pi)$ 展开成傅里叶级数, 并求 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和。

六、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x) = \int_0^x g(t) dt$, 求 $\int_0^1 e^{-x^2} f(x) dx$ 的值, 其中 $g(t) = 5t^4 + 3t^2 + 1$ 。

-
- 七、(本题满分 10 分) 设在上半平面 $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$ 内, 函数 $f(x, y)$ 具有连续偏导数, 且对任意的 $t > 0$ 都有 $f(tx, ty) = t^{-2}f(x, y)$ 。证明: 对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L , 都有

$$\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0$$

- 八、(本题满分 10 分) 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} xzdydz + 2yzdzdx + 3xydxdy$$

其中, Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ ($0 \leq z \leq 1$) 的上侧。

- 九、(本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

- 十、(本题满分 10 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $F(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)dt$, 其中 $\delta > 0$ 。证明: $F'(x)$ 存在且连续, 其中 $x \in (-\infty, +\infty)$ 。

- 十一、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f'(a) = f'(b) = 0$ 。证明: 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$$

中国科学院大学
2015 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、选择题 (本题满分 50 分, 每小题 5 分)

- (1) 对于函数 $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$, 结论不正确的是 ()
- A. 在 $(0, \infty)$ 内有界
B. 在 $(0, \infty)$ 内 $f(x)$ 没有最大值和最小值
C. 在 $(0, \infty)$ 内处处可导
D. 当 $x \rightarrow \infty, x \rightarrow 0^+$ 时, $f(x)$ 极限存在
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = ()$
- A. 1 B. 0 C. ∞ D. $e^{-\frac{1}{6}}$
- (3) 微分方程 $y' = \frac{1}{y-x}$ 的通解为 ()
- A. $x = y + Ce^{-y} - 1$ B. $y = x + Ce^{-x} - 1$
C. $x = \ln(x - y - 1) + C$ D. $y = \ln|y - x - 1| + C$
- (4) 已知 m, n 为正整数, 且 $m > n$ 。如果: $S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^m x \cos^n x dx, T = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cos^m x dx$ 。
则下面结论正确的一个是 ()
- A. $S > T$ B. $S = T$
C. $S < T$ D. S, T 的关系不确定
- (5) 设对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 总有 $m \leq f(x) < g(x) < h(x) \leq M$ 。且 $g(x)$ 为连续函数, 若
 $\lim_{x \rightarrow \infty} [M - f(x)][h(x) - m] = 0$ 。则对于 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$, 则下面结论正确的一个是 ()
- A. 一定存在, 且等于 $\frac{M+m}{2}$
B. 一定存在, 且只能等于 M 或 m
C. 一定不存在
D. 一定存在, 且可以取到 $[m, M]$ 上的任意值
- (6) 设函数 $f(x) = x^2 \sin x + \cos x + \frac{\pi}{2}x$, 在其定义域内零点的个数是 ()
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 多于 4
- (7) 设 \vec{a}, \vec{b} 为非零实向量, 且 $2\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 垂直, $\vec{a} + 2\vec{b}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 垂直。则 ()
- A. $|\vec{b}|^2 = 7|\vec{a}|^2$ B. $|\vec{a}|^2 = 7|\vec{b}|^2$ C. $|\vec{b}|^2 = 5|\vec{a}|^2$ D. $|\vec{a}|^2 = 5|\vec{b}|^2$
- (8) 设平面 D 由 $x + y = \frac{1}{2}, x + y = 1$ 及两条坐标轴围成, $I_1 = \iint_D \ln(x+y)^3 dx dy, I_2 = \iint_D (x+y)^3 dx dy, I_3 = \iint_D \sin(x+y)^3 dx dy$ 。则下面结论正确的一个是 ()
- A. $I_1 < I_2 < I_3$ B. $I_3 < I_1 < I_2$ C. $I_1 < I_3 < I_2$ D. $I_3 < I_2 < I_1$
- (9) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 的收敛半径为 ()

A. 2

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

(10) 已知曲面 $x^2 + y^2 + 2z^2 = 5$, 在其点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面与平面 $x + 2y + z = 0$ 平行, 则有 ()

A. $x_0 : y_0 : z_0 = 4 : 2 : 1$ B. $x_0 : y_0 : z_0 = 2 : 4 : 1$ C. $x_0 : y_0 : z_0 = 1 : 4 : 2$ D. $x_0 : y_0 : z_0 = 1 : 2 : 4$

二、(本题满分 10 分) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \sin \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \sin \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \sin \frac{n\pi}{n}} \right)$ 。

三、(本题满分 10 分) 设 $u = e^{x^2} \sin \frac{x}{y}$, 计算 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 在点 $(\pi, 2)$ 处的值。

四、(本题满分 10 分) 设 D 为第一象限内由 $\begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ xy = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$ 所围成的区域, f 为一元可微函数, 且 $f' = g$, 记 L 为 D 的边界。请证明:

$$\oint_L x f\left(\frac{y}{x}\right) dx = - \int_1^2 \frac{g(u)}{2u} du$$

五、(本题满分 10 分) 已知 $y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = e^x$ 为线性非齐次微分方程: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的三个特解, 求该方程满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 的特解。

六、(本题满分 10 分) 设 $f(x) = 4x + \cos \pi x + \frac{1}{1+x^2} - x^2 e^x + x e^x \int_x^1 f(t) dt$ 。求 $\int_0^1 (1-x) e^x f(x) dx$ 。

七、(本题满分 10 分) 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧。

八、(本题满分 10 分) 将函数 $f(x) = x - 1$ ($0 \leq x \leq 2$) 展开成周期为 4 的余弦级数。

九、(本题满分 10 分) 若 $g(x)$ 为单调增加的可微函数, 且当 $x \geq a$ 时, $|f'(x)| \leq g'(x)$ 。证明: 当 $x \geq a$ 时, $|f(x) - f(a)| \leq g(x) - g(a)$ 。

十、(本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上二阶可导, 且 $f'(0) = f'(2) = 0$ 。证明: 在区间 $(0, 2)$ 内至少存在一点 ξ , 满足 $|f''(\xi)| \geq |f(2) - f(0)|$ 。

十一、(本题满分 10 分) 设 $0 < a < 1$, $x \geq 0$ 且 $y \geq 0$ 。证明:

(1) $x^a y^{1-a} \leq ax + (1-a)y$

(2) 设 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$, 利用 (1) 中的结果证明:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

中国科学院大学
2014 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
 2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上均无效。
-

一、选择题 (本题满分 50 分, 每小题 5 分)

- (1) 设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 其极限为 $a \geq 2$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = (\quad)$
A. ∞ B. 0 C. 1 D. a
- (2) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right) = (\quad)$
A. 0 B. ∞ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$
- (3) $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+x^k} dx, N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+x^k} dx, k$ 为正整数, 下面结论正确的是 ()
A. $M < N$ B. $M = N$
C. $M > N$ D. M, N 的大小关系不确定
- (4) 设数列 a_n 单调减少, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 令 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \{S_n\}$ 是无界数列, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 ()
A. $[-1, 1]$ B. $[-1, 1)$ C. $[0, 2)$ D. $(0, 2]$
- (5) 设函数 $u(x, y) = \varphi(x) - \varphi(x-y) + \int_{x-y}^x \phi(t)dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ϕ 具有一阶导数, 则必有 ()
A. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ B. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ C. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ D. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
- (6) 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解, 且 $f(x_0) > 0, f'(x_0) = 0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处 ()
A. 取得极大值 B. 取得极小值
C. 某邻域内单调增加 D. 某邻域内单调减少
- (7) 设 Σ 为 zOy 平面内曲线 $z = y^2 (0 \leq y \leq 2)$ 绕 z 轴旋转生成的旋转曲面与平面 $z = 4$ 所围成的区域边界的外侧, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为其外法线向量的方向余弦, 则 $\iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{x^2 y}{2} + 2x - z \right) \cos \alpha + (3y + z) \cos \beta - xyz \cos \gamma \right] dS$ 的值为 ()
A. 40 B. 40π C. 20 D. 20π
- (8) 已知 $xe^{-2x}, e^x, 3x$ 是 n 阶常系数微分方程 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ 的三个解, 而 e^{-x} 不是该微分方程的解, 则下述结论中成立的是 ()
A. $n = 6, a_1 = 4, a_2 = 3, a_3 = a_4 = -4, a_5 = a_6 = 0$
B. $n = 5, a_1 = 3, a_2 = 0, a_3 = -4, a_5 = a_4 = 0$
C. $n = 4, a_1 = 1, a_2 = -3, a_3 = a_4 = 0$
D. $n = 3, a_1 = -1, a_3 = a_2 = 0$

(9) 已知直线 $L_1: \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x - 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ 与直线 $L_2: \begin{cases} y + z + 5 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$ 。则 L_1 和 L_2 的夹角为 ()

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{2}$

(10) 积分 $\int_0^\pi \sqrt{1 - \sin x} dx = ()$

A. π

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\sqrt{2} + 1$

D. $4(\sqrt{2} - 1)$

二、(本题满分 10 分) 设 $a \geq -12$ 是一个给定的实数, 已知 $x_1 = a$, 且 $x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}$, 判断 $\{x_n\}$ 的极限是否存在; 若存在, 求出 $\{x_n\}$ 的极限。

三、(本题满分 10 分) 设 L 为圆 $x^2 + y^2 = 2$ 位于第一象限的一段, 方向为逆时针方向, $f(x)$ 为 R 上的正值连续函数, 证明:

$$\int_L y \left(f(x) - \frac{1}{f(x)} \right) dx + (x^2 y + 2x f(y)) dy \geq 1 + \pi$$

四、(本题满分 10 分) 求微分方程的通解

$$[2x + e^x \sin(xy) + ye^x \cos(xy)] dx + [xe^x \cos(xy) + 3y^2] dy = 0$$

五、(本题满分 10 分) 将函数 $f(x) = 1 - x^2$ ($0 \leq x \leq \pi$) 展开成余弦级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 。

六、(本题满分 10 分) 已知 $2\mu + e^\mu = xy$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 。

七、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界可微, 则:

(1) 举例说明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 不一定存在

(2) 对于极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在的函数, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ 。

八、(本题满分 10 分) $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上是单调减少的连续函数, 证明:

$$\int_0^2 x f(x) dx \leq \int_0^2 f(x) dx$$

九、(本题满分 10 分) 已知 $0 \leq a, b \leq 1$, 且 $a+b=1$, 证明: 对任意实数 x, y 有 $e^{ax+by} \leq ae^x + be^y$ 。

十、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x) dx = 0$, $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$ 。证明: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$ 。

十一、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数, 已知 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 。证明:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 t e^{-t^2 x^2} f(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0)$$

中国科学院大学
2013 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上均无效。

一、(本题满分 10 分, 每小题 5 分)

- (1) 函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是连续函数, $a > 0$, 则函数 $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} a & f(x) \geq a \\ f(x) & -a < f(x) < a \\ -a & f(x) \leq -a \end{cases}$$

一定是 ()

- A. 有界可微函数 B. 有界连续函数
C. 连续可微函数 D. 以上结论都不正确

- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+2n+1} + \frac{2}{n^2+2n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+2n+n} \right) = ()$

- A. 1 B. ∞ C. $\frac{1}{2}$ D. 0

- (3) 函数 $f(x) = (x + 2 \cos x)^2$ 在区间 $[0, \pi/2]$ 上的最大值是 ()

- A. $\frac{\pi^2}{36} + \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 1$ B. $\frac{\pi^2}{36} + \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 2$ C. $\frac{\pi^2}{36} + \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 3$ D. $\frac{\pi^2}{4}$

- (4) 函数 $f(x) = x(x+1) \cdots (x+20)$, 下面四个结论正确的是 ()

- A. $f'(-1) > 0, f'(-2) > 0$ B. $f'(-1) > 0, f'(-2) < 0$
C. $f'(-1) < 0, f'(-2) < 0$ D. $f'(-1) < 0, f'(-2) > 0$

- (5) 已知 $g(x) \cdot \int_0^2 f(x) dx = 10$, 则 $\int_0^2 f(x) dx \cdot \int_0^2 g(x) dx = ()$

- A. 20 B. 10 C. 5 D. 不能确定

- (6) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt[3]{x^4+y^{12}}} = ()$

- A. 0 B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ D. 不存在

- (7) $f(u)$ 区间内可导且 $f'(u) > 0, f(0) = 0, L$ 为单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 被 $y = x$ 和 y 轴所夹弧段, 则弧长的曲线积分 $c_1 = \int_L f(2xy) ds$ 和 $c_2 = \int_L f(2x^2 - 1) ds$ 满足 ()

- A. $c_1 > 0, c_2 > 0$ B. $c_1 > 0, c_2 < 0$ C. $c_1 < 0, c_2 > 0$ D. $c_1 < 0, c_2 < 0$

- (8) 设二阶齐次常系数微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的任一解 $y(x)$ 满足当 $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$ 的时候, 则实数 a, b 满足 ()

- A. $a > 0, b > 0$ B. $a > 0, b < 0$ C. $a < 0, b > 0$ D. $a < 0, b < 0$

- (9) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域是 ()

- A. $[-2, 0)$ B. $(-2, 0)$ C. $(-2, 0]$ D. $[-2, 0]$

(10) 过点 $(0, 0, 1)$ 且与直线 $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 4 \\ z = 2t \end{cases}$ 及 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ 都平行的平面方程为 ()

A. $5x + 2y - z + 1 = 0$

B. $5x - y - 3z + 3 = 0$

C. $3x + y - z + 1 = 0$

D. $-3x - y + z + 1 = 0$

二、(本题满分 10 分) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x - 1)}$ 。

三、(本题满分 10 分) 求微分方程 $y'' = y'(y - 3)$ 满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = -\frac{5}{2}$ 的解。

四、(本题满分 10 分) 求函数 $f(x) = \pi^2 - x^2$ 在区间 $[-\pi, \pi)$ 上的傅里叶级数。

五、(本题满分 10 分) 求曲面积分 $\iint_S xydydz + z^2dxdy$, 其中 S 由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的上侧 (法向量与 z 轴正向量夹角为锐角的一侧) 及 $z = 1$ 的下侧围成的有向曲面。

六、(本题满分 10 分) 假设函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 1$ 且对于 $x \geq 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$$

证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 且不大于 $1 + \frac{\pi}{4}$ 。

七、(本题满分 10 分) 设两个连续函数 f, g 满足: 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) + g(x) \neq 0$ 。证明存在唯一的数 a ($0 \leq a \leq 1$) 使得

$$\int_a^1 |f(x)| dx = \int_0^a g^2(x) dx$$

八、(本题满分 10 分) 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_x^{2x} |\cos t| dt = \frac{2}{\pi}$$

九、(本题满分 10 分) 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} - xe^x \int_0^1 f(x) dx$, 求 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 。

十、(本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导。证明: 存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$f'(\eta) = (b^2 + ab + a^2 + 2) \frac{f'(\xi)}{3\xi^2 + 2}$$

十一、(本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上二阶可导, 且对任意的 $x \in [0, 2]$, 有 $|f(x)| \leq 1, |f''(x)| \leq 1$ 。证明: 对于任意 $x \in [0, 2], |f'(x)| \leq 2$ 成立。

中国科学院大学
2012 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上均无效。

一、 选择题 (本题满分 50 分, 每小题 5 分)

- (1) 函数 $f(x) = x \cos x^2$, 正确结论是 ()
- A. 在 $(-\infty, 0)$ 内有界 B. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 为无穷大
C. 在 $(-\infty, 0)$ 内无界 D. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 极限存在
- (2) 函数 $f(x)$ 上是连续函数, 且 $0 < m < f(x) < M < \infty$, 则 $\frac{1}{m} \int_{-m}^m (f(t) - M) dt$ 的最大取值区间是 ()
- A. $(-M - m, m - M)$ B. $(2m - 2M, 0)$
C. $(m - M, 0)$ D. $(0, M + m)$
- (3) 微分方程 $yy'' - (y')^2 = 0$ 的一个特解是 ()
- A. $y = xe^x$ B. $y = x \ln x$ C. $y = \ln x$ D. $y = e^x$
- (4) 已知 n, m 是正整数, 且 $n < m$, 如果 $A = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$, $B = \int_0^1 x^n (1-x)^{m+1} dx$, 则下面结论正确的一个是 ()
- A. $A > B$ B. $A = B$
C. $A < B$ D. A, B 的大小关系不确定
- (5) 函数 $f(x) = e^x - x^2 - 4x - 3$ 在其定义域内零点的个数是 ()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 多余 3
- (6) 若函数 $f(x) = \begin{cases} e^x(\sin x + \cos x) & x \geq 0 \\ abx^2 + ax + 2a + b & x < 0 \end{cases}$ 的导函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 ()
- A. $a = 2, b = -1$ B. $a = 2, b = -3$ C. $a = 1, b = -3$ D. $a = 1, b = -1$
- (7) 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x = 4$ 处条件收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1+2^n) a_n$ ()
- A. 条件收敛 B. 发散 C. 绝对收敛 D. 不能确定
- (8) 设 S 为螺旋面 $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = v \end{cases}$ 的一部份, $0 \leq u \leq \sqrt{15}$, $0 \leq v \leq \pi$ 则 $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$ 的值为 ()
- A. 17π B. 19π C. 21π D. 23π
- (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ 的值为 ()
- A. $e^{\frac{1}{3}}$ B. $e^{-\frac{1}{3}}$ C. $e^{\frac{1}{2}}$ D. $e^{-\frac{1}{2}}$

(10) 一平面过点 $M(1, 1, -1)$ 且与直线 $L: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-1}$ 垂直, 则该平面与平面 $x - 2y - z + 1 = 0$ 的交线的方向数是 ()

- A. $(-5, 1, 3)$ B. $(1, -3, 5)$ C. $(1, -5, 3)$ D. $(3, -1, 5)$

二、(本题满分 10 分) 证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n} \right)$ 存在, 并求出极限值。

三、(本题满分 10 分) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = e^x(2x + 1)$ 的通解。

四、(本题满分 10 分) 计算 $\iint_D (x|y| + xy) dx dy$, 其中 D 是由抛物线 $5y = x^2 - 6$ 和抛物线 $y^2 = x$ 围成的闭区域。

五、(本题满分 10 分) 将函数 $f(x) = |x - 1| (0 \leq x \leq \pi)$ 展开成正弦级数。

六、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x) = \int_x^1 e^{-t^2} dt$, 求 $\int_0^1 x^2 f(x) dx$ 的值。

七、(本题满分 10 分) 计算曲线积分 $I = \oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+2y^2}$, 其中 L 是由直线 $x+y=1, y=x-1$ 和半圆周 $x^2+y^2=1, x \leq 0$ 所围成的闭曲线, 方向为逆时针方向。

八、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f^2(x) \leq |x|^3$, 记 $F(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 求 $F'(x)$, 并讨论 $F'(x)$ 的连续性。

九、(本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 并且有 $0 < a < b$ 。证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{a+b}{2\xi} f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 。

十、(本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足 $f''(x) > 0$ 。证明:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

十一、(本题满分 10 分) 设 $a < b$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b x^2f(x)dx = 0$$

证明: 在 (a, b) 上至少存在三个不同点 x_1, x_2, x_3 , 使得 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ 。

中国科学院大学
2011 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、选择题 (本题满分 40 分, 每小题 5 分)

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right] = (\quad)$

A. 0

B. ∞

C. $\frac{e}{2}$

D. $-\frac{e}{2}$

(2) 若函数 $\begin{cases} x^2 + 2x & (x \geq 0) \\ \ln(1 + ax) & (x < 0) \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导, 则 a 等于 ()

A. -2

B. 2

C. -1

D. 1

(3) 设极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^4} = -2$, 则函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处 ()

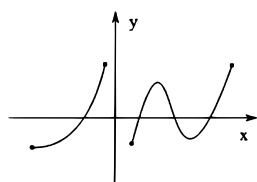
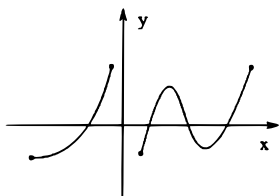
A. 导数值不等于 0

B. 导数值等于 0 但 $x = a$ 不是极值点

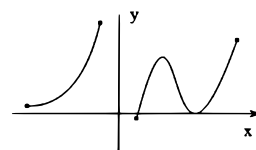
C. 取得极大值

D. 取得极小值

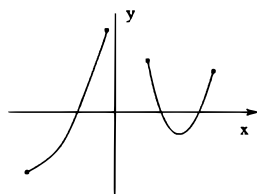
(4) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $f(x)$ 的图像如下图所示, 则 $f'(x)$ 的图像最有可能是 ()



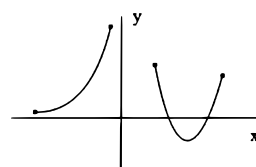
A.



B.



C.



D.

(5) 设 $x^2 \ln x$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则不定积分 $\int x f'(x) dx = (\quad)$

A. $\frac{2}{3} x^3 \ln x + \frac{1}{9} x^3 + C$

B. $2x - x^2 \ln x + C$

C. $x^2 \ln x + x^2 + C$

D. $3x^2 \ln x + x^2 + C$

(6) 设 y_1, y_2 是二阶线性函数齐次微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个特解, C_1, C_2 是两个任意常数, 则 ()

- A. $C_1y_1 + C_2y_2$ 不一定是该微分方程的解
- B. $C_1y_1 + C_2y_2$ 是该微分方程的解, 但不一定是通解
- C. $C_1y_1 + C_2y_2$ 是该微分方程的解, 但不是通解
- D. $C_1y_1 + C_2y_2$ 不是该微分方程的解

(7) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则下列级数一定发散的是 ()

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$
- B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$
- C. $\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$
- D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2)$

(8) 设两条抛物线 $y = nx^2 + \frac{1}{n}$ 和 $y = (n+1)x^2 + \frac{1}{n+1}$ 所围成的面积为 A_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n =$ ()

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

二、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有连续导数, 且 $f'(x) \geq 0$, 求证: 对任何整数 n , 都有

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \right| \leq \frac{2}{n} [f(2\pi) - f(0)]$$

三、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 具有连续导数, 且满足 $f(x) = x + \int_0^x t f'(x-t) dt$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 。

四、(本题满分 10 分) 设函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y, f(x, 0) = x, f(0, y) = y^2$, 求 $f(x, y)$ 。

五、(本题满分 10 分) 求函数 $f(x, y) = (x-6)^2 + (y+8)^2$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$ 上的最大值和最小值。

六、(本题满分 10 分) 计算二重积分 $\iint_D (|x| + |y|) dx dy$, 其中积分区域 D 由直线 $x = 0, x + y = 3, y = x - 1$ 及 $y = x + 1$ 所围成的区域。

七、(本题满分 10 分) 计算曲线积分 $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 是以 $(1, 0)$ 为中心, 半径为 R 的圆周 ($R > 0, R \neq 1$), 取逆时针方向。

八、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 在 $x = 0$ 的某个领域内有一阶连续的导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a > 0$, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 发散。

九、(本题满分 10 分) 将函数 $f(x) = x^2 (-\pi \leq x \leq \pi)$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数。

十、(本题满分 10 分) 已知函数 $f(x)$ 具有连续的二阶导数, $f(0) = 0, f'(0) = \frac{1}{3}$, 且对任意光滑有向封闭曲面 Σ 都有 $\oint_{\Sigma} e^x (f'(x) dy dz - 2y f(x) dz dx - z dx dy) = 0$, 求函数 $f(x)$ 的表达式。

十一、(本题满分 10 分) 已知平面过点 $(1, 2, 3)$, 它在 x 正半轴和 y 轴正半轴上的截距相等, 问当该平面在三个坐标轴上的截距分别为何值时, 它与三个坐标轴所围成的立体体积取极值, 并写出此时的平面方程。

十二、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, c]$ 上可导, f' 单调递减且 $f(0) = 0$, 求证: 对于 $0 \leq a \leq b \leq a + b \leq c$, 都有 $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$ 。

中国科学院大学
2010 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上均无效。

一、选择题 (本题满分 40 分, 每小题 5 分)

- (1) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} = 2$, 其中 $a^2 + c^2 \neq 0$, 则必有 ()
- A. $b = 4d$ B. $b = -4d$ C. $a = 4c$ D. $a = -4c$
- (2) $y = y(x)$ 满足 $\Delta y = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \Delta x + o(\Delta x)$, $y(1) = 1$, $\int_0^1 y(x) dx =$ ()
- A. 2π B. π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$
- (3) 设函数 $f(x) = \int_0^x t^2(t-1)dt$, 则 $f(x)$ 有多少个极值点 ()
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- (4) 下列命题正确的一项是 ()
- A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛
- B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散
- C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛
- D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 条件收敛

 **笔记** 上述的关系可以通过举反例排除, 各种关系及其严格的说明那位同学能发一下?

- (5) 设 $a_0, a_1, a_2, a_3 \dots$ 是等差数列, 且公差 $d > 0$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 ()
- A. $(-d, d)$ B. $[-d, d]$ C. $(-1, 1)$ D. $[-1, 1]$
- (6) 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 是二阶线性非齐次微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的三个线性无关的解, C_1, C_2 是两个任意常数, 则微分方程的通解为 ()
- A. $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x)$
- B. $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + (1 - C_1 - C_2) y_3(x)$
- C. $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) - (C_1 + C_2) y_3(x)$
- D. $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) - (1 - C_1 - C_2) y_3(x)$
- (7) 通过两个平面 $2x + y - 4 = 0$ 与 $y + 2z = 0$ 的交线及点 $M_0(2, -1, -1)$ 的平面方程为 ()
- A. $3x + y - z = 6$ B. $x + 3y - z = 0$ C. $3x - y + z = 6$ D. $x - 3y - z = 6$
- (8) 曲线 $y = e^x$ 和该曲线经过原点的切线以及 y 轴所围成的面积 ()
- A. $\frac{e}{2} - 1$ B. $\frac{e}{2} + 1$ C. $\frac{e}{2}$ D. $e + 1$

二、(本题满分 12 分) 设 $g(x)$ 是以正数 T 为周期的连续函数, $g(0) = 1, f(x) = \int_0^{2x} |x-t|g(t)dt$, 求 $f'(T)$ 。

三、(本题满分 12 分) 已知平面过点 $(1,2,3)$, 它在 x 正半轴和 y 轴正半轴上的截距相等, 问当该平面在三个坐标轴上的截距分别为何值时, 它与三个坐标轴所围成的立体体积取极值, 并写出此时的平面方程。

四、(本题满分 12 分) 求下面微分方程的通解:

$$yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$$

注: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$ 。

五、(本题满分 12 分) 将函数 $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x=0$ 处展开成幂级数, 并求收敛区间。

六、(本题满分 12 分) 在椭球面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 使函数 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在该点, 沿方向 $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j}$ 的方向导数最大。

七、(本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 为定义在 $[0, +\infty)$ 上的连续函数, 且满足

$$f(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dv + t^3$$

求 $f(x)$ 的表达式。

八、(本题满分 12 分) 设 $u = u(\sqrt{x^2+y^2})$ 具有连续的二阶偏导, 且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + u = x^2 + y^2$$

试求 u 的表达式。

九、(本题满分 12 分) 设函数 $f(x)$ 具有连续导数, 在区域 G 内曲线积分

$$\int_M^N \frac{1}{2x^2 + f(y)} (ydx - xdy)$$

与路径无关, 其中 G 不包含原点的单连通区域, M, N 是 G 内的任意两点, 且 $f(1) = 1$ 。

(1) 求 $f(x)$;

(2) 求 $\oint_{\Gamma} \frac{1}{2x^2 + f(y)} (ydx - xdy)$ 其中 Γ 为闭区间 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, 取逆时针方向。

十、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶连续导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $f(x)$ 不恒为零, 求证:

$$\int_0^1 |f''(x)| dx \geq 4 \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$$


十一、(本题满分 10 分) 一点从坐标原点出发向东移动 a m, 然后左拐弯移动 aq m (其中 $0 < q < 1$), 此后反复左拐弯前行, 使得后一段移动为前一段的 q 倍, 该点这样运动下去, 有一极限位置, 求该极限位置距离原点距离。

中国科学院大学
2009 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上均无效。

一、填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

- (1) 设 $y = \sqrt[4]{x^3 \sqrt{e^x \sin \frac{1}{x}}}$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____。
- (2) 设 $z = \frac{1}{x}f(xy) + yg(x+y)$, 其中 f, g 具有二阶连续导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$ _____。
- (3) 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$ 展开为 x 的幂级数, 展开式为: _____。
- (4) 过点 $P(-1, 0, 4)$ 且与平面 $3x - 4y + z + 10 = 0$ 平行, 又与直线 $L: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交的直线方程为: _____。
-  **笔记** 可能有问题, 后期重算
- (5) 微分方程 $yy'' + (y')^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的解为: _____。

二、选择题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

- (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\int_2^x (\int_t^2 e^{-u^2} du) dt}{(x-2)^2} = (\quad)$
A. $\frac{1}{e^2}$ B. $-\frac{1}{e^2}$ C. $\frac{1}{2e^4}$ D. $-\frac{1}{2e^4}$
- (2) 求积分 $\int_0^1 e^{\sqrt{1-x}} dx = (\quad)$
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- (3) 设在 $[0, +\infty)$ 上 $f''(x) > 0$, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 下列不等式成立的是 ()
A. $f'(0)x < f(0) - f(x) < f'(x)x$ B. $f'(0)x < f(x) - f(0) < f'(x)x$
C. $f(0) - f(x) > f'(0)x > f'(x)x$ D. $f(0) - f(x) < f'(0)x < f'(x)x$
- (4) 设 $L: x^2 + (y+1)^2 = 2$ 取逆时针方向, 则 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + (y+1)^2} = (\quad)$
A. 4π B. 2π C. π^2 D. $2\pi^2$
- (5) 设 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$ 的下侧, 则曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} y^3 dz dx + (y+z) dx dy = (\quad)$
A. $-\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $-\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{4}$

三、(本题满分 10 分) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^x = \int_a^{+\infty} xe^{-2x} dx$, 求 a 的值。

四、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $f(x) > 0$, 求证: 存在唯一的 $a \in (0, 1)$, 使得 $\int_0^a f(t) dt = \int_a^1 \frac{1}{f(t)} dt$ 。

五、(本题满分 10 分) 由直线 $y = 0, y = 8$ 及抛物线 $y = x^2$ 围成一个曲边三角形, 在曲边 $y = x^2$ 上求一点 $M(X, Y)$, 使得在该点处的切线与直线 $x = 0, y = 8$ 所围成的三角形面积最小。

六、(本题满分 10 分) 求满足 $x = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t-x)dt$ 的可微函数 $f(x)$ 。

七、(本题满分 10 分) 证明方程 $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 满足方程 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$ 。

八、(本题满分 10 分) 已知函数 $y_1 = xe^x + e^{2x}$, $y_2 = xe^x + e^{-x}$, $y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解, 求此微分方程的表达式。

九、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 且 $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$, 试求出 $f(x)$ 的傅里叶级数, 并求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和。

十、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 连续, 令 $F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x^2+y^2) dx dy$ ($t \geq 0$)。求 $F'''(0)$ 。

十一、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ 。试证明任意给定的正数 a, b 在开区间 $(0, 1)$ 内存在不同的实数 ξ 和 η , 使得

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b$$

中国科学院大学
2008 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

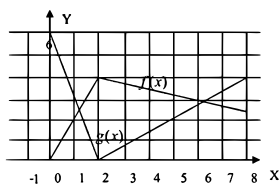
1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k}$ _____。
- (2) 设 $y = y(x)$ 是二阶线性常系数非齐次微分方程 $y'' + 2y' + y = e^{3x}$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解, 且 $y = y(x)$ 有连续的二阶导数, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} =$ _____。
- (3) 已知 $f'(x) \cdot \int_0^2 f(x) dx = 8$, 且 $f(0) = 0$, 则 $\int_0^2 f(x) dx =$ _____。
- (4) 设 $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 3$, $f(\pi) = 2$, 则 $f(0) =$ _____。
- (5) 在过点 $(0, 1)$ 的直线 $y = f(x)$ 中, 使得积分值 $\int_0^2 [x^2 - (f(x))^2] dx$ 达到最大的直线方程为 _____。

二、单选题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

- (1) 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处 ()
A. 连续且两个偏导数都存在
B. 不连续但两个偏导数都存在
C. 连续但至少有一个偏导数不存在
D. 不连续且至少有一个偏导数不存在
- (2) 如图, $f(x), g(x)$ 是两个逐段线性的连续函数, 设 $u(x) = f(g(x))$, 则 $u'(1)$ 的值为 ()



- A. $\frac{3}{4}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $-\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{12}$
- (3) 方程 $xe^{-x} = \frac{1}{2e}$ 的实根数为 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
 - (4) 与直线 $L_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ 与直线 $L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ 都平行, 且过原点的平面 π 方程是 ()
A. $x + y + z = 0$ B. $x - y + z = 0$ C. $x + y - z = 0$ D. $z - y - z = 0$
 - (5) 设 $x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ ($-\pi \leq x \leq \pi$), 则傅里叶系数 $a_2 =$ ()
A. $-\frac{2}{\pi}$ B. $\frac{2}{\pi}$ C. 1 D. -1

三、(本题满分 10 分) 求 $\int_{-1}^2 (|x| + 2x^2) dx$ 。

四、(本题满分 10 分) 设曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = t (0 < t < 1)$ 分别于 $x = 0, x = 1$ 所围成的面积之和为 $S(t)$, 试判断 $S(t)$ 是否存在最小值, 若存在, 求出其最小值点。

五、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$, 求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\xi f(\xi) + f(\xi) = 0$ 。

六、(本题满分 10 分) 设函数 $u = f(\ln \sqrt{x^2 + y^2})$, 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$, 试求函数 f 的表达式。

七、(本题满分 10 分) 计算二重积分 $I = \iint_D \sqrt{1-y^2} dx dy$, 其中 D 为 $x^2 + y^2 = 1 (y > 0)$ 与 $y = |x|$ 围成区域。

八、(本题满分 10 分) 求微分方程 $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$ 的通解。

九、(本题满分 10 分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n(n+1)x^n$ 在收敛区间 $(-1, 1)$ 内的核函数 $S(x)$, 并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{3^n}$ 的和。

十、(本题满分 10 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 1$, 且满足不等式 $f'(x) + f(x) - \frac{1}{1+x} \int_0^x f(t) dt = 0$, 求 $f'(x)$ 的函数表达式, 并证明不等式:

$$e^{-x} \leq f(x) \leq 1 \quad (x \geq 0)$$

十一、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶连续导数, 曲线积分

$$\oint_C [y^2 f(x) + 2ye^x + 2yg(x)] dx + 2[yg(x) + f(x)] dy = 0$$

其中 C 为平面上任一简单封闭曲线。求上式中的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 使得 $f(0) = g(0) = 0$ 。

中国科学院大学
2007 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上均无效。

一、填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\ln(1+x^3)}$ _____。
- (2) 设函数 $f(x, y)$ 可微, $f(0, 0) = 0, f'_x(0, 0) = m, f'_y(0, 0) = n, \phi(t) = f(t, f(t, t))$, 则 $\phi'(0) =$ _____。
- (3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}} =$ _____。
- (4) 微分方程 $x^2 y' + xy = y^2$ 满足 $y(1) = 2$ 的通解为 _____。
- (5) 设 Σ 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是其外法向量的方向余弦, 则 $\iint_{\Sigma} \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dS =$ _____。

二、选择题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

- (1) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-1)}{e^{x-1}} (\frac{1}{x} - b) & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 则 ()
A. $a = 0, b = 1$ B. $a = 1, b = -1$ C. $a = -1, b = 1$ D. $a = 1, b = 0$
- (2) 设 $f(x), g(x)$ 都在 x_0 处二阶可导, 且 $f(x_0) = g(x_0) = 0, f'(x_0) \cdot g'(x_0) > 0$, 则 ()
A. x_0 不是 $f(x) \cdot g(x)$ 的驻点
B. x_0 是 $f(x) \cdot g(x)$ 的驻点, 但不是 $f(x) \cdot g(x)$ 的极值点
C. x_0 不是 $f(x) \cdot g(x)$ 的驻点, 且是它的极小值点
D. x_0 不是 $f(x) \cdot g(x)$ 的驻点, 且是它的极大值点
- (3) 已知连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(2a-x)(a \neq 0), c$ 为任意常数, $\int_{-c}^c f(a-x)dx =$ ()
A. $2 \int_0^c f(2a-x)dx$ B. $2 \int_{-c}^c f(2a-x)dx$
C. 0 D. $2 \int_0^c f(a-x)dx$
- (4) 点 $P_1(-2, 3, 1)$ 关于直线 $L: x = y = z$ 的对称点 P_2 的坐标是 ()
A. $(-\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3})$ B. $(\frac{2}{3}, -1, -\frac{1}{3})$ C. $(-\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3})$ D. $(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$
- (5) 设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 且满足 $f(x+\pi) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2n}(n=1, 2, \dots)$ 等于 ()
A. 0 B. π C. $\frac{1}{\pi}$ D. $\frac{4}{\pi}$

三、(本题满分 10 分) 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有二阶连续导数, 且 $f(0) = 0$, 又

$$\varphi(x) = \begin{cases} f'(0) & x = 0 \\ \frac{e^x}{x} f(x) & x \neq 0 \end{cases}$$

求 $\varphi(x)'$ 。

四、(本题满分 10 分) 求满足 $x = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t-x)dt$ 的可微函数 $f(x)$ 。

五、(本题满分 10 分) 若 $u = f(zyx)$, $f(0) = 0$, $f'(1) = 1$, 且 $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = x^2 y^2 z^2 f'''(xyz)$, 求函数 u 。

六、(本题满分 10 分) 设 L 是分段光滑的简单闭曲线, 且点 $(2, 0)$, $(-2, 0)$ 均在闭曲线 L 所围成区域的内部, 计算曲线积分 $I = \oint_L \left[\frac{y}{(2-x)^2+y^2} + \frac{y}{(2+x)^2+y^2} \right] dx + \left[\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2} + \frac{2+x}{(2+x)^2+y^2} \right] dy$, 其中 L 取正向。

七、(本题满分 10 分) 求方程 $4x^2 y''' - 4x^3 y'' + 4x^2 y' = 1$ 的形如 $y = ax^{-1}$ 的特解, 进而求该方程的通解。

八、(本题满分 10 分) 在曲线 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上找到一个位于第一象限的点, 使得该曲线在该点处的切线与该曲线以及 x 轴和 y 轴所围成的图形面积最小, 并求此最小面积。

九、(本题满分 10 分) 当 $0 < K = \sqrt{a^2 + b^2} < r < R$, $D: r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$, 证明

$$\frac{\pi(R^2 - r^2)}{R + K} \leq \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \leq \frac{\pi(R^2 - r^2)}{r - K}$$

十、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明在区间 $[0, 1]$ 上存在两点 x_1, x_2 , 使得 $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$ 。

十一、(本题满分 10 分) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的各项 $u_n > 0, n = 1, 2, \dots, \{v_n\}$ 为一项正实数数列, 记 $a_n = \frac{u_n v_n}{u_{n+1}} - v_{n+1}$, 证明: 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 a 为有限正数或者正无穷, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

中国科学院大学
2006 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
 2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上均无效。
-

一、(本题满分 10 分) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$ 。

二、(本题满分 10 分) 求 a, b 的值, 使得 $f(x) = \begin{cases} \sin a(x-1) & x \leq 1 \\ \ln x + b & x > 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处可导。

三、(本题满分 10 分) 求 $y = (x-1) \left(\frac{(1-2x)\ln x}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{3}}$ 的导数。

四、(本题满分 10 分) 设 $z = f(u)$, 方程 $u = q(u) + \int_y^x p(t)dt$ 确定 u 是 x, y 的函数, 其中 $f(u), q(u)$ 可微, $p(t)$ 连续, 且 $q(u) \neq 1$, 求 $p(y) \frac{\partial z}{\partial x} + p(x) \frac{\partial z}{\partial y}$ 。

五、(本题满分 10 分) 设函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x^2} & x \neq 0 \\ A & x = 0 \end{cases}$$

连续, 且 $f(0) = 0$ 。

- (1) 求 A 的值, 使 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。
- (2) 研究 $F'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性。

六、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 满足方程 $\int \sqrt{x}f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{x}} + \int x^{\frac{3}{2}} \sin x dx + C$, 求 $\int f(x)dx$ 。

七、(本题满分 10 分) 当 $x > 0$ 时, $f(\ln x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 求 $\int_{-2}^2 xf'(x)dx$ 。

八、(本题满分 10 分) 求经过原点且垂直于平面 $\pi_1: x+2y+3z-2=0$ 及 $\pi_2: 6x-y-5z+23=0$ 的平面方程。

九、(本题满分 10 分) 将函数 $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ 展开成 $x-1$ 的幂级数。

十、(本题满分 10 分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1}$ 的核函数。

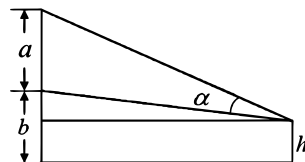
十一、(本题满分 10 分) 计算 $I = \int_L \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 是抛物线 $y = 2x^2 - 1$ 从点 $A(-1, 1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段。

十二、(本题满分 10 分) 设曲线积分 $\int_L (f'(x) + 2f(x) + e^x)ydx + f'(x)dy$ 与路径无关, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 计算 $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (f'(x) + 2f(x) + e^x)ydx + f'(x)dy$ 。

十三、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续在 (a, b) 内可导, 试证存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$ 。

十四、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 为可导且周期为 2 的函数, 满足 $f(1+x) + 2f(1-x) = 2x + \sin^2 x$, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 3$ 处的切线斜率。

十五、(本题满分 10 分) 如图, 某公园有一座高为 a 的塑像, 其基座高为 b 米。今有一观赏者高为 h 米 $h < b$, 问他离基底多远时, 其视线对塑像张成的角最大?



中国科学院大学
2005 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分)

- (1) 已知 $f'(x_0) = 3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 2x)}{x} =$ _____。
- (2) 设 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{x^2} , 则 $\int x f'(x) dx =$ _____。
- (3) 数量场 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 在点 $(1, 1, -1)$ 的最大方向微商值为 _____。
- (4) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n + 3^n}$ 的收敛半径为 _____。
- (5) 微分方程 $y' + \frac{1}{x} = 1$ 的通解为 _____。

二、单项选择题 (本题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分)

- (1) 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 可导的充要条件为 ()
A. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} f(t^2)$ 存在
B. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} f(t - \sin t)$ 存在
C. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} f(\ln(1+t))$ 存在
D. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} [f(2t) - f(t)]$ 存在
- (2) 设曲面 $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处的法线为 L , 又设 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{0}$; $\pi: x + y + 4z = 1$, 则 ()
A. L 与 L_1 相交, 且 L 平行于 π
B. L 与 L_1 相交, 且 L 垂直于 π
C. L 与 L_1 异面, 且 L 平行于 π
D. L 与 L_1 异面, 且 L 垂直于 π
- (3) 设 S 是柱面 $x^2 + y^2 = R^2 (0 \leq z \leq R)$ 的外侧, 则 $\iint_S (x^2 + y^2) dx dy$ 的值为 ()
A. $2\pi R^3$
B. $2\pi R^4$
C. πR^4
D. 0
- (4) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则下列结论中正确的是 ()
A. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
B. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} a_n$ 收敛
C. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} a_n$ 收敛
D. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛
- (5) 设 $f(x) = x - L (0 \leq x \leq 2L)$, 则其以 $2L$ 为周期的傅里叶级数在点 $x = -\frac{L}{2}$ 处收敛于 ()
A. $-\frac{L}{2}$
B. $-\frac{3L}{2}$
C. $\frac{L}{2}$
D. $\frac{3L}{2}$

三、(5 小题, 每小题 8 分, 满分 40 分)

- (1) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3}$ 。
- (2) 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$ 。
- (3) 利用欧拉积分计算 $\int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt[6]{1-x^6}} dx$ 。
- (4) $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $z = f(xy^2, \frac{y}{x})$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。
- (5) 计算二重积分 $\int_0^1 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^1 \cos y^2 dy$ 。

四、(3 小题, 每小题 12 分, 满分 36 分)

- (1) 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(x) = 1, f'(0) = 1$, 且曲线积分 $\int_L (e^x \sin y + 2yf'(x) + 2xy) dx + (f'(x) + f(x) + 2x + e^x \cos y) dy$ 与路径无关。
- i. 求 $f(x)$ 。
- ii. 当 L 是从 $(0, 0)$ 沿曲线 $y = x^4$ 到 $(1, 1)$ 的有向曲线段时, 求该曲线积分的值。
- (2) 将函数 $y = \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ 在 $x = 0$ 处展成泰勒级数, 并求收敛域及 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ 。
- (3) 将函数 $f(x) = \begin{cases} \pi & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ 展开成傅里叶级数 (说明收敛情况), 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 。

五、(2 小题, 每小题 12 分, 共 24 分)

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 上可导, $f(0) = 0, f(1) = 2$, 证明:

i. 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使 $f(\xi) = 1$ 。

ii. 存在 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 使 $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 1$ 。

(2) i. 求 $F(x) = \int_0^a |t - x| dt$ (常数 $a > 0$) 在 $[0, a]$ 上的最小值。

ii. 设 $f(x)$ 在 $[0, a](a > 0)$ 连续, 并且 $\int_0^a f(x) dx = 0, \int_0^u x f(x) dx = 1$, 求证: 存在一点 $x_0 \in [0, a]$ 使得 $|f(x_0)| \geq \frac{4}{a^2}$ 。

中国科学院大学
2004 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上均无效。

一、填空题 (本题共 5 题, 每小题 5 分, 满分 25 分)

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \cdots + \sin \frac{1}{n}} =$ _____。
- (2) 设 $y - \epsilon \sin y = x$ (常数 $\epsilon \in (0, 1)$), 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____。
- (3) 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx$ 的收敛域为 _____。
- (4) 曲面 $z = \arctan \frac{y}{x}$ 在点 $(1, 1, \frac{\pi}{4})$ 处的切平面方程为 _____。
- (5) 微分方程 $y'' - 3y' + 2y = \cos x$ 的通解为 _____。

二、单项选择题 (本题共 5 题, 每小题 5 分, 满分 25 分)

- (1) 设 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 外侧, 则 $\oiint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + zdx dy =$ ()
A. 0 B. πR^4 C. $2\pi R^4$ D. $4\pi R^4$
- (2) 曲线 $y = \sqrt{x^2 + 1} - x - 1$ 的渐近线条数为 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- (3) 给定严格递增数列 $\{A_n\}$, 且 $A_1 = a, \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = +\infty$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续且非负, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} dx$ 收敛的 ()
A. 充分条件但非必要条件 B. 必要条件但非充分条件
C. 充分必要条件 D. 既非充分条件也非必要条件
- (4) 如果级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right]$ ($p > 0$) 条件收敛, 则 ()
A. $0 < p \leq 1$ B. $p > 1$ C. $\frac{1}{3} < p \leq 1$ D. $\frac{1}{2} < p < \leq 1$
- (5) 设 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则下列选项正确的是 ()
A. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不可微, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0, 0)$ 处连续
B. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不可微, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0, 0)$ 处不连续
C. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0, 0)$ 处连续
D. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0, 0)$ 处不连续

三、(本题共 5 题, 每小题 8 分, 满分 40 分)

- (1) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\tan x} t(\tan t - t) dt}{\int_0^{\sin^2 x} \sin^{\frac{2}{3}} t dt}$ 。
- (2) 计算积分 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ 。

(3) 利用欧拉积分计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\frac{2}{3}} dx$ 。

(4) 利用 Stokes 公式计算

$$\oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$$

其中 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad (a > 0)$, 从 x 轴正向看 L 为逆时针走向。

(5) 设 $a, b > 0$ 。证明: 当 $y > x > 0$ 时, 有 $(a^x + b^x)^{\frac{1}{x}} > (a^y + b^y)^{\frac{1}{y}}$ 。

四、(本题共 3 题, 每小题 12 分, 满分 36 分)

(1) 求曲面 $x^2 + y^2 = az$ 和 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2} (a > 0)$ 所围成的立体体积。

(2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[n(n+1) - \frac{1}{n(n+1)} \right] x^n$ 的和函数, 并求收敛域。

(3) 求 k 的取值范围, 使得方程 $\frac{k}{r} + x^2 = 1$ 有唯一正根。

五、(本题共 2 题, 每题 12 分, 满分 24 分)

- (1) 将函数 $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ 展开成傅里叶级数 (说明收敛情况), 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 。
- (2) 确定常数 λ , 使得 $\frac{x}{y}(x^2 + y^2)^\lambda dx - \frac{x^2}{y^2}(x^2 + y^2)^\lambda dy = 0$ 在 $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$ 内为一全微分方程, 并利用曲线积分求此全微分方程的通解。

(1) $f(x)$ 可展开为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{4}(\pi - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{\pi - 1}{n^2 \pi} \left[(1 - (-1)^n) \cos nx + \frac{\pi + 1}{n} (-1)^{n+1} \sin nx \right] \right\} \\ &= \begin{cases} x, & -\pi < x \leq 0 \\ \pi x, & 0 \leq x < \pi \\ \frac{\pi(\pi-1)}{2}, & x = \pm\pi \end{cases} \end{aligned}$$

利用 $x = 0$ 的值有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

- (2) $\lambda = \frac{1}{2}$, 通解为 $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} = C$

中国科学院大学
2003 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分)

- (1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$ _____。
- (2) 设 $\begin{cases} x = \int_1^{t^2} u \ln u du \\ y = \int_{t^2}^1 u^2 \ln u du \end{cases} (t > 0)$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____。
- (3) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-2x}{1+x} \right)^n$ 的收敛域为 _____。
- (4) 椭球面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上平行于平面 $x - y + 2z = 0$ 的且平面方程为 _____。
- (5) 微分方程 $y'' + 2y' - 2y = 4xe^x$ 的通解为 _____。

二、选择题 (本题 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分)

- (1) 设 $f(x) = \begin{cases} |x|^a \arctan \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ x & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导, 则 a 的取值范围是 ()
A. $a > 0$ B. $0 < a \leq 1$ C. $0 < a < 1$ D. $a > 1$
- (2) _____
- (3) “对任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 就有 $|a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n| < \epsilon$ ” 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的 ()
A. 充分条件但非必要条件 B. 必要条件但非充分条件
C. 充分必要条件 D. 既非充分条件也非必要条件
- (4) 设 s 是柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 介于平面 $z = 0$ 及 $z = R$ 之间, $\iint_S (x^2 + z^2) dS =$ ()
A. $\frac{8}{3}\pi R^4$ B. $\frac{5}{3}\pi R^4$ C. $\frac{4}{3}\pi R^4$ D. πR^4
- (5) 设 L 是起点 $A(-1, 0)$, 终点 $B(1, 0)$ 的简单光滑曲线, 除 A, B 外其他点都在 x 轴上方, 则曲线积分 $\int_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ 的值为 ()
A. 恒为 $-\pi$ B. 恒为 0 C. 恒为 π D. 与曲线 L 有关
- (6) 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^p} dx$ 的收敛域为 ()
A. $p > -1$ B. $0 < p < 3$ C. $-1 < p < 1$ D. $-1 < p < 3$

三、(本题共 5 小题, 每小题 8 分, 满分 40 分)

- (1) 求 $\int \max(x, 1) dx$ 。
- (2) 计算无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^m+1)} dx$, 其中 m 为正整数。

-
- (3) 设 $G = \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{n}$ 。
- (4) 证明: 当 $x > 0$ 的时候, 有 $(1 + \frac{1}{x})^x < e < (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ 。
- (5) 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有一阶连续导函数, 对所有 $x \geq 0$, 有 $f(x) \leq e^{-x}$, 且 $f(0) = 1$ 。
证明: 存在 $\xi > 0$, 使得 $f'(\xi) = -e^{-\xi}$ 。

四、(本题共 3 小题, 每小题 12 分, 满分 36 分)

- (1) 求函数 $z = x^2y(3 - x - y)$ 在闭区域 $D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 4$ 上的最大值和最小值。
- (2) 设 $f(x) = \cos x + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (2x - t) f\left(\frac{t}{2}\right) dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 求 $f(x)$ 。
- (3) 设 $a, b, c > 0$, 求曲面 $x^2 + y^2 + \frac{a^2 - b^2}{c^2} z^2 = a^2$ 与 $|z| \leq c$ 所截物体的体积。

五、(本题共 2 小题, 每小题 12 分, 满分 24 分)

- (1) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-1}{2}x & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\pi-x}{2} & 1 < x \leq \pi \end{cases}$, 将 $f(x)$ 展开为周期为 2π 的正弦级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4}$ 。
- (2) 设区域 c 由曲面 $2x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 及平面 $z = 1, z = -1$ 所围成, S 为 c 的全表面外侧, 又设 $\vec{v} = (2x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ 。
- i. 求 $\operatorname{div} \vec{v}$ 。
- ii. 求积分 $\iint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(2x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 。

中国科学院大学
2002 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上均无效。

一、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{2} \cos \frac{1}{4} \cdots \cos \frac{1}{2^n} =$ _____。
- (2) $\int \frac{\cos x dx}{1+e^{\sin x}}$ _____。
- (3) 设 $z = z(x, y)$, 且有 $yz + zx + xy = 1$, 则 $dz =$ _____。
- (4) 含参变量广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^p} dx$ 的收敛域为 _____。
- (5) 微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^x$ 的通解为 _____。

二、选择题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

- (1) 设 $\begin{cases} ax+b & x \leq 9 \\ x^2 \cos \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则 ()
A. $a=1, b=0$ B. $a=0, b=0$ C. $a=1, b=1$ D. $a=0, b=1$
- (2) $f(x)$ 在区间 $[-L, L]$ 内具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 则 ()
A. 在 $(-L, 0)$ 和 $(0, L)$ 内均有 $f(x) > x$
B. 在 $(-L, 0)$ 和 $(0, L)$ 内均有 $f(x) < x$
C. 在 $(-L, 0)$ 内, $f(x) > x$; 在 $(0, L)$ 内, $f(x) < x$
D. 在 $(-L, 0)$ 内, $f(x) < x$; 在 $(0, L)$ 内, $f(x) > x$
- (3) 设 L 为圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$, 则曲线积分 $\int_L (x^4 + 2y^2 z^2) dL =$ _____
()
A. $\frac{\pi a^5}{3}$ B. $\frac{2\pi a^5}{3}$ C. πa^5 D. $2\pi a^5$
- (4) 下列级数中, 绝对收敛的级数是 ()
A. $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n}} - 1)$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{\sqrt{n}} + 1}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{e} + 1}$
- (5) $a + |x| = \pi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, 其中 $-\pi \leq x \leq \pi, a$ 为常数, 则 $a =$ ()
A. $\frac{\pi}{2}$ B. $-\frac{\pi}{2}$ C. π D. $-\pi$

三、(3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分)

- (1) 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+e^x} dx$ 。
- (2) 计算积分 $\int_0^1 (1 - \sqrt{x})^n dx$ 。
- (3) 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + [f'(x)]^2 = \sin x$, 且 $f'(0) = 0$ 。证明: $x = 0$ 是 $f(x)$ 的拐点。

四、(4 小题, 每小题 7 分, 共 28 分)

- (1) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + e^{nx} + e^{-nx}}$ 。
- (2) 计算曲线积分 $I = \oint_L z^2 dx + (x^2 + xy - x) dy + 2xz dz$, 其中 L 是抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与圆柱面 $x^2 + 4y^2 = 1$ 的交线。从 z 轴正方向向下看, L 为顺时针方向。
- (3) 把 $y = \arctan \frac{3+x}{3-x}$ 展为 x 的幂级数, 并求收敛域。
- (4) 求微分方程 $(x - x^3 y^2 \ln y) y' = 2y$ 的通解。

五、(3 小题, 每小题 8 分, 共 24 分)

- (1) 设曲面 $S: \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} (a > 0)$, 在 S 上求一切平面, 使此切面与三坐标所围成的四面体体积最大, 并求四面体体积的最大值。
- (2) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 在 $(\pi, \pi]$ 内的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \leq \pi \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展为傅里叶级数 (说明收敛情况), 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n}{n^2}$ 。

- (3) 设区域 Ω 由曲面 $x = 0, y = 0, x + y = 1, z(x + y) = 1$ 及 $z = 1$ 围成。

i. 求 Ω 的体积 V 。

ii. 证明 $\iiint_{\Omega} \frac{dxdydz}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{V}{2}$ 。

中国科学院大学
2001 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学 (甲)

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
 2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上均无效。
-

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

- (1) $F(x) = \frac{x^2}{x-a} \int_a^x f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 连续, 则有 $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ _____。
- (2) 通过点 $(3, 1, -1)$ 及直线 $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ 的平面方程为: _____。
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} =$ _____。
- (4) 方程 $y'' + y' + y = 0$ 的通解为 _____。
- (5) 设方程 $f\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{z}\right) = 0$ 确立了隐函数 $z = z(x, y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____。

二、(本题满分 10 分) 设 $y = y(x), z = z(x)$ 由方程 $z = xf(x+y)$ 和 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的函数, 其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\frac{dz}{dx}$ 。

三、(本题满分 12 分)

(1) (5 分) 计算

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - 2a \cos \theta + a^2}}, (a > 1)$$

(2) (7 分) 计算曲面积分

$$I = \iint_S (x^2 + y^2) dS$$

S : 曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = 1$ 所围成立体的全表面。

四、(本题满分 8 分) 将函数 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数。

五、(本题满分 20 分) 今有常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y - z \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 2y + 2z \\ \frac{dz}{dt} = 3x + 6z - z \end{cases}$$

- (1) 改写方程组为 $\frac{d}{dt}X(t) = AX(t)$ 形式, 其中 $X(t) = (x(t), y(t), z(t))'$ 为列向量, A 为 3 阶方阵, 记号 “ $'$ ” 表示转置。(2 分)
- (2) 求矩阵 A 的特征值及对应的特征向量。(10 分)
- (3) 给出非退化矩阵 T 和对角阵 D 使得 $T^{-1}AT = D$ 。(3 分)
- (4) 给出此微分方程的通解。(5 分)

六、(本题满分 5 分) 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, A 的秩为 $r > 0$ 。证明存在秩为 r 的 $m \times r$ 阶矩阵 B 和秩为 r 的 $r \times n$ 阶矩阵 C , 使得 $A = BC$ 。

七、(本题满分 5 分) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 是区域 D 上的非常值解析函数, 试说明 $\overline{f(z)} = u - iv$ 和 $g(z) = v + iv$ 在 D 上的解析性。

八、(本题满分 5 分) 计算积分

$$\int |z| = 3 \left[\bar{z} + (z-1)^5 \cos \frac{1}{(z-1)^3} \right] dz$$

其中 \bar{z} 为复数 z 的共轭复数。

九、(本题满分 12 分) 用分离变量法解定解问题。

$$|x| = \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (x, y) \in D, D: -\infty < x < 0, 0 < y < \pi \\ u|_{x=0} = \frac{y}{\pi}, u|_{x=-\infty} \text{ 有界} & (0 < y < \pi) \\ u|_{y=0} = 0, u|_{y=\pi} = 0 & (-\infty < x < 0) \end{cases}$$

十、(本题满分 8 分)

(1) 将上题中的区域 D 保形变换到上半平面。(6 分)

(2) 利用上半平面 Laplace 方程第一边值问题的 Green 函数, 写出 Laplace 方程第一边值问题在区域 D 的 Green 函数, 其中 \bar{z} 是 z 的共轭复数。(2 分)

$$G(z; z_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{|z - z_0|} - \ln \frac{1}{|z - \bar{z}|} \right)$$