中国科学院大学

601 高等数学甲

考研真题集 2001–2023

说　明

一年的时光已然匆匆，于此感谢各位小伙伴的帮助和分享。高等数学甲的真题我只从 2009 刷到了 2019，对真题的校对也只是从 2009 到 2019，顺道，我也给出了 2009 到 2019 的简明参考答案。其余年份的真题，可能会有一些错误，包括但不限于：错别字，用词错误，句子表达问题，公式的错误，字形的问题，标点符号的错误，版面的问题，排版的问题，答案的错误等等。这些遗留的问题，有待各位共同发现修改。当各位在刷各年的真题时，若能顺手，发现错误，给出简明答案，提交到码云，或者直接拿此源文件修改后分享出来，鄙人不胜感激。愿:

“古今共栽树，天下齐乘凉”

水

2024 年 11 月 3 日

感谢:

- NiYanhhhhh 的提交
- 爱吃番茄的真徐涛对 2023 年真题与答案的提供

本文档使用 LaTeX 编写而成，源码地址 https://gitee.com/ylxdxx/AM601-kaoyan

中国科学院大学

2023 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 (1) 已知 $f\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right)=\sqrt{x^2+1}-x$, 其反函数 $f^{-1}(x)$ 是 ( )

A. $\ln\frac{1}{x}$　　B. $\ln\frac{1}{\sqrt{x}}$　　C. $e^{\frac{1}{x}}$　　D. $e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{2/x}$ 的结果为 ( )

A. e　　B. 6　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{e}$

(3) 已知对数螺旋线 $\rho=e^{\theta}$，在 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$(\rho,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$ 处切线的直角坐标方程是 ( )

A. $x-y=0$　　B. $x-y=1$　　C. $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$　　D. $x+y=e^{2\pi}$

(4) 已知方程 $xe^x=1$，求实数根的个数 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

(5) 已知 $\boldsymbol{a}=(0,1,2)$，而 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，则 $\boldsymbol{b}$ 为 ( )

A. $\cdot\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left(0,\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$　　C. $\left(0,\frac{2}{7},\frac{4}{7}\right)$　　D. $\left(0,\frac{2}{9},\frac{4}{9}\right)$

(6) 已知 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处 ( )

A. 可导但不可微　　B. 不可导　　C. 可导也可微　　D. 不连续也不可导

(7) 已知 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)}$，其渐近线的条数为 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(8) 已知 $z=z(x,y)$ 是由 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 确定的二元函数，F 和 z 均为可微函数，求 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ 的值 ( )

A. $z+xy$　　B. $z-xy$　　C. 0　　D. 1

(9) 已知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^n x^n}{(n!)^2}$，收敛半径 r 为 ( )

A. 1　　B. 0　　C. e　　D. ∞

(10) 已知 $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+xe^x$，其满足的一个微分方程是 ( )

A. $y''-y'-2y=3xe^x$　　B. $y''-y'-2y=3e^x$

C. $y''+y'-2y=3e^x$　　D. $y''+y'-2y=3xe^x$

二、 函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}+a, & x<0\\ 1/2, & x=0\\ b\cdot\frac{\sin^3 x}{\ln(1+x^3)}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a，b 的值。

三、 已知微分方程 $y'' + xy' - 2y = 0$。

(1) 利用级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的形式，求一个特解；

(2) 求其通解。

四、 已知 $\sqrt[x]{y} = \sqrt[y]{x}$，$x > 0$，$y > 0$，$y = f(x)$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

五、 对二元函数 u 和一元函数 f, 求证 u 满足 $y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 的充要条件是 $u(x, y) = f\left(x^2 - y^2\right)$。

六、 区域 $D : x^2 + y^2 \leqslant 2$，$x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$ 上，求二重积分

$$\iint_D x^{\left[1+x^2+y^2\right]} \cdot y\left[1 + x^2 + y^2\right] dxdy$$

其中 $[x]$ 为向下取整函数，表示取不大于 x 的最大整数。

七、 (1) 求 $y = \ln x$ 上过原点的切线和 $y = \ln x$ 和 x 轴围成的面积；

(2) 求 (1) 中的封闭曲线绕 x 轴旋转一周形成的体积。

八、 计算曲面积分

$$I=\iint_S x^2ydydz+xy^2dzdx+\left(x^2+2y^2\right)dxdy$$

其中 S 为 $x^2+y^2+z^2=4$ 的上则。

九、 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$f(x)$ 的最小值为 -1，求证 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\geqslant 8$。

十、 直线 $l:\begin{cases}x^2+y+2z=1\\2x+y+3z=4\end{cases}$，线上有一点 $P(x,y,z)$，求当 P 点到原点的距离最小时 P 点的坐标。

十一、 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[2,4]$ 上连续，在开区间 $(2,4)$ 上可导且导数取值大于 0，假设极限 $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(2x-2)}{x-2}$ 存在，试证明：

(1) $f(x)$ 在 $(2,4)$ 上取值大于 0；

(2) $\exists\xi\in(2,4)$，使得 $\frac{6}{\int_2^4 f(x)dx}=\frac{\xi}{f(\xi)}$；

(3) 对上述中的 $\xi\in(2,4)$，$\exists\eta\neq\xi$，$\eta\in(2,4)$，使得

$$6f'(\eta)=\frac{\xi}{\xi-2}\int_2^4 f(x)dx$$

中国科学院大学

2022 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 (1) $f(x)=\arcsin\left(\frac{4}{\pi}x-1\right)$, 求 $f[f(x)]$ 的定义域 (　)

A. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$　B. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$　C. $\left[\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right]$　D. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\tan^2 x\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{x^2}\right)=$ (　)

A. 0　B. 1　C. 2　D. 不存在

(3) 若函数 $g(x)$ 二阶可导, 且满足 $g(0)=g'(0)=0, f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, 讨论 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性 (　)

A. $f(x)$ 连续, $f'(x)$ 连续　B. $f(x)$ 连续, $f'(x)$ 不连续, $f'(0)$ 存在

C. $f(x)$ 连续, $f'(0)$ 不存在　D. $f(x)$ 不连续

(4) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^x+x^{2n}}{2-x^{2n}}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 (　)

A. -1　B. 1　C. ± 1　D. 无间断点

(5) 直线: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-1}$ 和直线 $\begin{cases}x+2y-3=0\\ 3y+z+2=0\end{cases}$ 间夹角的余弦值 $\cos\theta$ 为 (　)

A. $\frac{1}{\sqrt{8}}$　B. $\frac{1}{\sqrt{10}}$　C. $\frac{1}{\sqrt{12}}$　D. $\frac{1}{\sqrt{14}}$

(6) 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 则下列级数: ① $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$, ② $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n)^2$, ③ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin(a_n)$, ④ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln(1+a_n)$ 中一定收敛的级数个数为 (　)

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

(7) 判断曲线: $y=x\sin\frac{1}{x}$ 的渐近线 (　)

A. 只有垂直渐近线　B. 只有水平渐近线

C. 有垂直渐近线和水平渐近线　D. 只有斜渐近线

(8) 函数 $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 (　)

A. 累次极限都存在, 重极限存在　B. 累次极限都存在, 重极限不存在

C. 累次极限存在其中一个, 重极限不存在　D. 至少一个累次极限不存在

(9) 函数 $z(x,y)$ 满足 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$, 则 $dz=$ (　)

A. $\frac{z(zdx+ydy)}{z(x+y)}$　B. $\frac{z(ydx+zdy)}{y(x+z)}$　C. $\frac{z(zdx+xdy)}{y(x+z)}$　D. $\frac{z(xdx+ydy)}{z(x+y)}$

(10) 下列广义积分收敛的是 (　)

A. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)}dx$　B. $\int_0^1(\ln x)^{100}dx$　C. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$　D. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x+\sin x}dx$

二、 $u(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{2}{x}}}+u(x)\right]$。

三、 函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y''=e^{2y}+e^{y}$，且 $y(0)=0, y'(0)=2$，求 $y(x)$。

四、 设函数 $y(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=\cos t \end{cases}$，求下列极限：

(1) $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{dy}{dx}$ 和 $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{d^2y}{dx^2}$。

五、 证明：$u(x,y)=f(x)g(y)$ 成立的充分必要条件是 $u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$。

六、 计算半圆 $(x-1)^2+y^2=1$，$y>0$，绕 y 轴旋转所得到的旋转体的体积。

七、 曲线 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，计算积分

$$I=\oint_C e^{xy}\{[y\sin(xy)+\cos(x+y)]dx+[x\sin(xy)+\cos(x+y)]dy\}$$

八、 (1) 在 $[-\pi,\pi]$ 上把函数 $f(x)=x$ 展开为傅里叶级数；

(2) 证明: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$。

九、 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足二阶可导, 并且有 $g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证明：

(1) $\forall x\in(a,b)$，$g(x)\neq 0$；

(2) $\exists\xi\in(a,b)$，$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$。

十、 设 $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$，证明：

(1) $I_{n+1}=-I_n+\frac{1}{n+1}$；

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$；

(3) 用 (1) 和 (2) 的结论证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$。

十一、 函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 求其在满足条件 $ax+by+cz=1$ 下的最小值。

中国科学院大学
2021 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 选择题 (本题满分 50 分，每小题 5 分)

(1) $a=e^x,\quad b=1+x,\quad c=1+x+x^2$, 则在 $x=0$ 的 ϵ 无穷小邻域内, 大小估计正确的为（ ）

A. $b\le a\le c$　　B. $a\le b\le c$　　C. $b\le c\le a$　　D. 无法确定

(2) 双曲正弦, $\sin hx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余泫 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=$ 错误的是（ ）

A. 双曲正弦为奇函数, 双曲余弦为偶函数

B. 双曲正弦为增函数, 双曲余弦为减函数

C. 双曲正弦的导为双曲余弦, 双曲余弦的导为双曲正弦

D. $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$, 对住意 x 总成立

(3) n 为正数, $\lim\limits_{n\to\to\infty}\cos 2\pi\sqrt{n^2+n}=$（ ）

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. 不存在

(4) 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 内的奇函数, 且 $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=a\ne 0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处导数为（ ）

A. a　　B. $-a$　　C. 0　　D. 不存在

(5) 设向是 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 满足 $(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-2\vec{b}),\quad (3\vec{a}-\vec{b})\perp(\vec{a}+2\vec{a})$, 则 $|\vec{a}|$ 与 $|\vec{b}|$（ ）

A. $|\vec{a}|=\sqrt{\frac{1}{2}}|\vec{b}|$　　B. $|\vec{a}|=\sqrt{2}|\vec{b}|$　　C. $|\vec{a}|=\sqrt{\frac{2}{3}}|\vec{b}|$　　D. $|\vec{a}|=\sqrt{\frac{3}{2}}|\vec{b}|$

(6) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\sin^3 x\cos x}^{e^{x^2}-1}\arctan\frac{3t}{2+t}dt}{\arcsin x^3}$, 则（ ）

A. I 不存在　　B. $I=3/2$　　C. $I=1/2$　　D. $I=0$

(7) $a_n>0,\{a_n\}$ 单调递减值趋于 0, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt{a_n\cdot a_{n-1}}$（ ）

A. 发散　　B. 绝对收敛　　C. 条件收敛　　D. 无法判断

(8) 设函数 $Z=xy+xF\left(\frac{\mathrm{y}}{x}\right)$, 其中 F 为可导函数, 则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ 的表达式是（ ）

A. $Z-xy$　　B. 0　　C. $Z+xy$　　D. xy

(9) $y''-6y'+8y=e^x+e^{2x}$ 的一个特解形式（ ）

A. ae^x+be^{2x}　　B. ae^x+bxe^{2x}　　C. axe^x+be^{2x}　　D. axe^x+bxe^{2x}

(10) 正确的是（ ）

A. $\lim\limits_{s\to 0}\iint_{s<x^2+y^2<\frac{1}{2}}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$ 存在

B. $\lim\limits_{s\to 1}\iint_{-\frac{1}{2}<x^2+y^2<s}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$ 存在

C. $\lim\limits_{s\to 0}\iint_{s<x^2+y^2<\frac{1}{2}}\frac{\left(1+x^2\right)dxdy}{(x^2+y^2)\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$ 存在

D. 以上均不对

二、 (本题满分 10 分) 求常微分方程 $xy''-y'\ln y'+y'\ln x=0$, 满足 $y(1)=2$ 和 $y'(1)=e^2$ 的特解。

三、 (本题满分 10 分) 求过直线 $l_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$ 且平行于 $l_2:\begin{cases}2x+y-z+1=0\\x-2y+z-2=0\end{cases}$ 的平面方程。

四、 (本题满分 10 分) 设 $f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n-1}+nx\sin\frac{x}{n}}{x^{2n}+1}$, 讨论 $f(x)$ 连续性。

五、 (本题满分 10 分) 设 $g(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$,$f(x)=g'(x)$。求 $f^{(n)}(0)$。

六、 (本题满分 10 分) 设曲面 $\Sigma=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ 的外侧, 计算积分

$$\iint_{\Sigma} y^2 z dx dy + x^2 y dz dx$$

七、 (本题满分 10 分) $\lim_{x\to 0} \frac{ax+\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c, (c\neq 0)$, 求出 a,b,c 的值。

八、 (本题满分 10 分) 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2) & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ ，讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微性。

九、 (本题满分 10 分) $f(x)=\begin{cases} x & -\pi\leq x\leq 0 \\ 0 & 0\leq x\leq \pi \end{cases}$ 展开为傅里叶函数。

十、 (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 ab 内可导，证明：如果 $f(x)$ 为非线性函数，则存在 $\exists\, \xi_1,\xi_2\in(a,b)$ 使 $f'(\xi_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，$f'(\xi_2)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

十一、 (本题满分 10 分) 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=2xdx-2ydy$ 并且 $f(1,1)=2020$; 求出 $f(x,y)$ 在椭球体域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1\right\}$ 上最大值和最小值。

中国科学院大学
2020 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 选择题 (本题满分 50 分，每小题 5 分)

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^2+1}+\cdots+\frac{2n}{n^2+n-1}\right)$ 的值为 (　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. $+\infty$

(2) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续, $F(x)=f(x)|x-a|$, 则 $f(a)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=a$ 处可导的 (　)

A. 充要条件　　B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件　　D. 既非充分又非必要条件

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{1-\sin x}}$ 的值为 (　)

A. e^{-1}　　B. 1　　C. e　　D. $+\infty$

(4) 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 周期为 4, 又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率为 (　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. -1　　D. -2

(5) 设向量 $\vec{a}=(1,2,2),\vec{b}=(0,1,2)$, 则向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 方向上的投影向量为 (　)

A. $\left(0,\frac{6}{5},\frac{12}{5}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$　　C. $\left(0,\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$　　D. $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$

(6) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是 (　)

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0.$

B. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, 且 $\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

D. $\lim\limits_{x\to0}\left[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)\right]=0$, 且 $\lim\limits_{y\to0}\left[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)\right]=0.$

(7) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=$ (　)

A. 0　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 1

(8) 设方程 $x+y+z=e^{xy}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 的表达式是 (　)

A. $(x^2+y^2)\,e^{xy}$　　B. $(x+y)e^{xy}$　　C. $2xye^{xy}$　　D. $(1+xy)e^{xy}$

(9) 设 $a_0=3,a_1=5$, 且对任何自然数 $n>1$ 有 $na_n=\frac{2}{3}a_{n-1}-(n-1)a_{n-1}$, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 (　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

(10) 下列反常积分发散的是（　）

A. $\int_0^{+\infty}\frac{x^6}{1+e^x}dx$　　B. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$　　C. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4\ln x}dx$　　D. $\int_1^{+\infty}\frac{2\sin^2 x}{1+x^2}dx$

二、（本题满分 10 分）已知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在, 而 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在, 并且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+xf(x)}-1}{\sin x}=3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

三、（本题满分 10 分）两平面均通过点 $A(-2,1,-1)$, 其中一个平面通过 x 轴, 另一个平面通过直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$ ，求两平面夹角的余弦。

四、（本题满分 10 分）设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases} x^x+tx-t^2=0, \\ \arctan(ty)=\ln(1+t^2y^2) \end{cases}$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

五、（本题满分 10 分）已知函数 $u=f(r), r=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$, 求 $f(x)$ 的表达式。

六、（本题满分 10 分）设曲线 $C: y=x^3+2x$ 与其在（1,3）点处的切线以及 x 轴围成的区域落在第一象限中的部分为 D, 计算:

(1) D 的面积。

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

七、（本题满分 10 分）计算下列第二型曲面积分:

$$I=\iint_S xdydz+2y^4dxdz+3z^6dxdy$$

其中 S 是椭球面：$x^2+4y^2+9z^2=1$ 。

八、（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 是周期为 3 的连续函数, 证明：在任意长度为 2 的闭区间 $[a,a+2]$ 上至少存在一点 θ, 使得 $f(\theta)=f(\theta+1)$ 。

九、（本题满分 10 分）设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=g(a)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)g(\xi)+2f'(\xi)g'(\xi)+f(\xi)g''(\xi)=0$ 。

十、（本题满分 10 分）设 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数，满足 $\int_0^x f(t)dt\geq 0$ 对所有的 $x\in[0,1]$ 成立且 $\int_0^1 f(t)dt=0$ 。证明: $\int_0^1 xf(x)dx\leq 0$ 。

十一、（本题满分 10 分）求证：若正数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2=a$, 其中 $a>0$, 则有不等式 $x^3+y^3+z^3\geq\frac{a\sqrt{3a}}{3}$ 恒成立。

中国科学院大学

2019 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 选择题 (本题满分 50 分，每小题 5 分)

(1) 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)+\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)\right]$ (　)

A. $e-1/2$　　B. $5/2$　　C. $e+1/2$　　D. $7/2$

(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1$，则下列正确的是 (　)

A. $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在　　B. $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在

C. $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在　　D. $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

(3) 以下 4 个命题中正确的是 (　)

A. 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

B. 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

C. 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

D. 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot\sin(x^2-1)}{x^2-1} & x\neq\pm1\\ 1 & x=\pm1\end{cases}$，则下列说法正确的是 (　)

A. $f(x)$ 在 $x=-1$ 连续，在 $x=1$ 不连续

B. $f(x)$ 在 $x=-1$ 不连续，在 $x=1$ 连续

C. $f(x)$ 在 $x=-1$ 和 $x=1$ 都连续

D. $f(x)$ 在 $x=-1$ 和 $x=1$ 都不连续

(5) 若向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$、$(5\vec{a}+\vec{b})\perp(3\vec{a}-4\vec{b})$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 α 满足 (　)

A. $\cos\alpha=\frac{14}{17}$　　B. $\cos\alpha=\frac{13}{17}$　　C. $\cos\alpha=\frac{12}{17}$　　D. $\cos\alpha=\frac{11}{17}$

(6) 已知 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，则关于累次极限 $I=\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 和 $J=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$ 的下列说法正确的是 (　)

A. I 存在但 J 不存在　　B. J 存在但 I 不存在

C. I 和 J 都存在但 $I\neq J$　　D. I 和 J 都存在且 $I=J$

(7) 已知数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，则下列级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}(a_n)^2,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\sin(a_n),\quad \sum_{n=0}^{\infty}\ln(1+a_n)$$

中收敛级数的数量是 (　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(8) 设函数 $f(t)$ 二次连续可微，令 $u=f(xy)$，则 $\phi(t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 的表达式是（ ）

A. $tf''(t)-f'(t)$　　B. $f''(t)-tf'(t)$　　C. $tf''(t)+f'(t)$　　D. $f''(t)+tf'(t)$

(9) 设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x),y_2(x)$，C 为任意常数，则该方程的通解是（ ）

A. $C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$　　B. $y_1(x)+C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$

C. $C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$　　D. $y_1(x)+C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$

(10) 考虑积分 $I=\iint_D\left(x^2-y^2\right)dxdy$，其中 D 是椭圆：$\{(x,y)\in R^2|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1\}$ 落在第一象限中的部分。则下列说法正确的是（ ）

A. $a>b$ 时 $I>0$　　B. $a>b$ 时 $I<0$　　C. $a>b$ 时 $I=0$　　D. $a<b$ 时 $I=0$

二、（本题满分 10 分）求常微分方程：$yy''+(y')^2=0$ 满足初始条件：$y(0)=1,y'(0)=\frac{1}{2}$ 的特解。

三、（本题满分 10 分）求直线 L：$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程。

四、（本题满分 10 分）设 $a_0=3,a_1=5$，且对任何自然数 $n>1$ 有 $na_n=\frac{2}{3}a_{n-1}-(n-1)\,a_{n-1}$。证明：当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛，并求其和函数 $S(x)$。

五、（本题满分 10 分）已知函数 $y=y(x)$ 由方程：$e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，试求 $y''(0)$。

六、 (本题满分 10 分) 对实数 $R>0$ 定义积分:

$$I_R=\iiint\limits_{1/R\le x^2+y^2+z^2\le R}\frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

证明极限 $I=\lim\limits_{R\to+\infty}I_R$ 存在并计算其值。

七、 (本题满分 10 分) 计算积分

$$I=\oint\limits_L\frac{(x^2-y^2-x)\,dy+(1-2x)ydx}{(x^2+y^2)\left[(x-1)^2+y^2\right]}$$

其中 $L=\left\{(x,y)\in R^2\middle|x^2+y^2=4\right\}$ 沿逆时针方向。

八、 (本题满分 10 分) 已知 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，试求一个序列 $x_n\to0\ (n\to\infty)$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在，且满足 $\lim\limits_{x\to0}\left[\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)+x\right]^{\left[2/f\left(\frac{1}{x}\right)\right]}=e^2$

九、 (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 2 阶可导，其中 $a<b$。且有 $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$。证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $|f''(\xi)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$。

十、 (本题满分 10 分) 证明:

(1) 闭区间 $[0,1]$ 上任何连续函数都有原函数。

(2) 闭区间 $[0,1]$ 上任何连续可微函数都可以写成两个单调不减函数之差。

十一、 (本题满分 10 分) 求函数 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的最大值，并证明对任意正实数 a,b,c，不等式 $ab^2c^3\le108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6$ 恒成立。

中国科学院大学
2018 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 选择题 (本题满分 50 分，每小题 5 分)

(1) 函数 $h(x)$ 的定义如下:

$$h(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 1\\ x & -1<x<1\\ -1 & x\leqslant -1\end{cases}$$

则，函数 $g(x)=h\left(\sin x^2\right)$ 一定是 (　)

A. 有界可微函数　　B. 有界，不一定连续

C. 连续，不一定可微　　D. 有界连续，不一定可微

(2) 设 $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{1000}$, 则 $f'(x)=$ (　)

A. $1000\left(x+\frac{1}{x}\right)^{1000}\left(1-\frac{1}{x}\right)$　　B. $1000\left(x+\frac{1}{x}\right)^{999}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

C. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{999}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$　　D. $1000\left(x+\frac{1}{x}\right)^{1000}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

(3) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ (　)

A. π^2　　B. π　　C. e^2　　D. e

(4) 直线 $L_1:\begin{cases}x+2y=1\\ y+\frac{1}{2}z=2\end{cases}$ 与直线 $L_2:\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{2}$ 所夹的锐角 α 的余弦 $\cos\alpha=$ (　)

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{2}{9}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{4}{9}$

(5) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=$ (　)

A. e^{-1}　　B. e^{-2}　　C. e　　D. e^2

(6) 二重积分 $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}x^2e^{-2\left(x^2+y^2\right)^2}dxdy=$ (　)

A. $\frac{\pi}{64}$　　B. $\frac{\pi}{32}$　　C. $\frac{\pi}{16}$　　D. $\frac{\pi}{8}$

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|}{\sqrt[4]{x^6+y^{18}}}=$ (　)

A. 0　　B. 1　　C. ∞　　D. 不存在

(8) 若常微分方程初值问题：$y'+y=xy^2, y(0)=\alpha$ 的解 $y^*(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 1}y^*(x)=\frac{1}{e+2}$, 则可知 $\alpha=$ (　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{5}$

(9) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}=$ (　)

A. e^2　　B. $2e^2$　　C. $3e^2$　　D. $4e^2$

(10) 设 $f'(x^2)=\frac{1}{x}(x>0)$, 则 $f(x)=(\quad)$

A. $2\sqrt{x}+C$　　B. $\sqrt{x}+C$　　C. $4\sqrt{x}+C$　　D. $\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

二、 (本题满分 10 分) 设函数序列 $y_n=y_n(x)$ 的定义域为 $x>1$, 当 $n\geqslant 1$ 时, 满足如下的迭代关系:

$$y_1(x)=2x, y_{n+1}(x)=2x-\frac{1}{y_n(x)}$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在, 并求这个极限。

三、 (本题满分 10 分) 求由平面 $x+y+z=\pm 1, 2x-y+2z=\pm 2, x-y-z=\pm 3$, 所界的平行六面体 Ω 的体积 V 。

四、 (本题满分 10 分) 把函数 $f(x)=x\cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 展开成傅里叶级数。

五、 (本题满分 10 分) 求抛物线 $y^2=x, y^2=3x$ 和直线 $y=x, y=2x$ 所围区域 D 的面积。

六、 (本题满分 10 分) 由拉格朗日中值公式有: $e^x-1=xe^{x\theta(x)}, \theta(x)\in(0,1)$ 。证明: $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$。

七、 (本题满分 10 分) 求微分方程 $y''-y'-2y=e^{2t}(3-t)$ 的通解。

八、 (本题满分 10 分) 计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+2y^2}$, 其中 L 是以点 $(1,1),(-1,0),(0,-1)$ 为顶点的三角形，取逆时针方向。

九、 (本题满分 10 分) 计算曲面积分 $\iint_S zdS$, 其中 S 为区域 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$ 的边界。

十、 (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

十一、 (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续可微, 且 $f(0)=f(2)=0$ 。证明:

$$\int_0^2 |f(x)f'(x)|\,dx \leq \frac{1}{2}\int_0^2 |f'(x)|^2\,dx$$

中国科学院大学

2017 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 选择题 (本题满分 50 分，每小题 5 分)

(1) 函数 $f(x)=|x|\sin x^2$, 正确的结论是 ( )

A. 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界　　B. 当 $x\to\infty$ 时, $f(x)$ 为无穷大

C. 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导　　D. 当 $x\to\infty$ 时, $f(x)$ 极限存在

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4+n^3+n^2+1}+\frac{2}{n^4+n^3+n^2+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^4+n^3+n^2+n^2}\right)=(\quad)$

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. ∞

(3) 设 $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$, 则 $f'(1)+f''(2)+f'''(3)=(\quad)$

A. 0　　B. -2　　C. -8　　D. -10

(4) 设 $f(x)=x\sin x+\cos x-\frac{\pi}{2}$, 则下列命题中正确的是 ( )

A. $f(0)$ 是极大值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极小值　　B. $f(0)$ 是极小值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极大值

C. $f(0)$ 是极大值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极大值　　D. $f(0)$ 是极小值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极小值

(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{\cos x^2}{\sin x}}=(\quad)$

A. e^{-1}　　B. e^{-2}　　C. e^{-3}　　D. 1

(6) 定积分 $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2dx=(\quad)$

A. $\frac{\pi^2}{3}-\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi^2}{4}$　　D. $\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{4}$

(7) 设 D_K 是圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1\}$ 在第 k 象限的部分, $k=1,2,3,4$ 。记 $I_k=\iint_{D_k}(y-x)dxdy$, 则正确的是 ( )

A. $I_1<0$　　B. $I_2<0$　　C. $I_3<0$　　D. $I_4<0$

(8) 已知 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的两个不同的特解，则方程的通解一定为 ( )

A. $y=Cy_1(x)$　　B. $y=Cy_2(x)$

C. $y=C\left(y_1(x)+y_2(x)\right)$　　D. $y=C\left(y_1(x)-y_2(x)\right)$

(9) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛，则必收敛的级数为 ( )

A. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n^2$

C. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_n+u_{n+1})$

(10) 设 $f'\left(\sin^2 x\right)=\cos 2x$, 且 $f(0)=1$, 则 $\int_0^1 f(x)dx=(\quad)$

A. 1　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{7}{6}$　　D. $\frac{1}{2}$

二、 (本题满分 10 分) 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4\cos x^2}$。

三、 (本题满分 10 分) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\pi \sin^n t dt=0$。

四、 (本题满分 10 分) 把函数 $f(x)=(x-1)^2$ 在 $(0,1)$ 上展成余弦级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$。

五、 (本题满分 10 分) 计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma 2x^3dydz+2y^3dzdx+3\left(z^2-2\right)dxdy$$

其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant 0)$ 的上侧。

六、 (本题满分 10 分) 计算 $\iint_\Omega \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}dxdy$, 这里 Ω 是由直线 $x+y=1, x=0, y=0$ 所围成的三角形区域。

七、 (本题满分 10 分) 求微分方程 $y''\left(x+(y')^2\right)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解。

八、 (本题满分 10 分) 计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$, 其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心, 2 为半径的圆周, 取逆时针方向。

九、 (本题满分 10 分) 设 $x\geqslant 0, a>0$, 若 $\sqrt{x+a}-\sqrt{x}=\frac{a}{2\sqrt{x+\phi_a(x)}}$ 成立，证明: $\frac{a}{4}\leqslant\phi_a(x)\leqslant\frac{a}{2}$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\phi_a(x)=\frac{a}{4}$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\phi_a(x)=\frac{a}{2}$。

十、 (本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 且为增函数，证明:

$$\int_0^2 f(x)dx\leq\int_0^2 xf(x)dx$$

十一、 (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导且 $f'(x)$ 连续, $f(a)=0$, 这里 $a<b$。证明:

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\,dx$$

中国科学院大学

2016 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 选择题 (本题满分 50 分，每小题 5 分)

(1) 对于函数 $f(x)$, 当 x 是有理数时, $f(x)=\sin \pi x$ ；当 x 为无理数时, $f(x)=0$, 则正确的结论是 (　)

A. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界　　B. $f(x)$ 处处不连续

C. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续　　D. $f(x)$ 在整数点上连续

(2) 设 $f'\left(\sin^2 x\right)=\cos^2 x$, 则 $f(x)$ 等于 (　)

A. $x-\frac{1}{2}x^2$　　B. $x+\frac{1}{2}x^2$　　C. $x-\frac{1}{2}x^2-C$　　D. $\frac{1}{2}x^2-x+C$

(3) 设 y_1 和 y_2 均为微分方程 $y''+2y'+y=2xe^{-x}$ 的特解，则如下论断不正确的为 (　)

A. $\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2$ 可能形如 $\left(c_1x^3+c_2x^2\right)e^{-x}$, 其中 c_1, c_2 为常数

B. $\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2$ 可能形如 $\left(c_3x+c_4\right)e^{-x}$, 其中 c_3, c_4 为常数

C. $2y_1+y_2$ 可能形如 $\left(c_5x^3+c_6x^2\right)e^{-x}$, 其中 c_5, c_6 为常数

D. $2y_1-y_2$ 可能形如 $\left(c_7x+c_4\right)e^{-x}$, 其中 c_7, c_8 为常数

(4) $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=$ (　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi^2}{4}$　　D. $\frac{\pi^2}{6}$

(5) 已知实向量 a, b 满足 $(a+b)\perp(a-b), |a+b|=1, |a|=1$, 则 $|a\times b|=$ (　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1}{6}$

(6) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$, 则 $F'(2)=$ (　)

A. $2f(0)$　　B. $f(2)$　　C. $-f(2)$　　D. 0

(7) 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛是级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛的 (　)

A. 充要条件　　B. 充分条件，但非必要条件

C. 必要条件，但非充分条件　　D. 既非充分条件，也非必要条件

(8) $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0}\frac{x^2y}{\sqrt[3]{x^8+y^{12}}}=$ (　)

A. 0　　B. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$　　C. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$　　D. 不存在

(9) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=$ (　)

A. $e^{\frac{1}{6}}$　　B. $e^{-\frac{1}{6}}$　　C. $e^{\frac{1}{2}}$　　D. $e^{-\frac{1}{2}}$

(10) 若直线 $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ 与平面 $x+ky-z-5=0$ 平行，则 k 的取值为 (　)

A. -1　　B. 0　　C. 2　　D. 1

二、 (本题满分 10 分) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 计算下列极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1}{n}$$

并写出具体过程。

三、 (本题满分 10 分) 求满足下列初始值的常微分方程 $y = y(x)$:

$$\begin{cases} y'' = y'(2y+2) \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

的解。

四、 (本题满分 10 分) 一空间物体由球面 $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的内侧和锥面 $x = \sqrt{y^2+z^2}$ 朝向 x 轴正向的一侧所界定, 其在点 (x, y, z) 的密度为 $\rho(x, y, z) = 1 - (y^2 + z^2)$, 试求该物体的质量。

五、 (本题满分 10 分) 将函数 $f(x) = (\pi - |x|)^2 (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ 展开成傅里叶级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和。

六、 (本题满分 10 分) 设函数 $f(x) = \int_0^x g(t)dt$, 求 $\int_0^1 e^{-x^2} f(x)dx$ 的值, 其中 $g(t) = 5t^4 + 3t^2 + 1$。

七、 (本题满分 10 分) 设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内, 函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数, 且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 。证明: 对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L, 都有

$$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$$

八、 (本题满分 10 分) 计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma xzdydz+2yzdzdx+3xydxdy$$

其中, Σ 为曲面 $z=1-x^2-\frac{1}{4}y^2\ (0\leqslant z\leqslant 1)$ 的上侧。

九、 (本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$, 证明:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

十、 (本题满分 10 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且 $F(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+t)dt$, 其中 $\delta>0$。证明: $F'(x)$ 存在且连续, 其中 $x\in(-\infty,+\infty)$。

十一、 (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f'(a)=f'(b)=0$ 。证明: 存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

中国科学院大学

2015 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 选择题 (本题满分 50 分，每小题 5 分)

(1) 对于函数 $f(x)=\frac{\sin x^2}{x}$, 结论不正确的是 ( )

A. 在 $(0,\infty)$ 内有界

B. 在 $(0,\infty)$ 内 $f(x)$ 没有最大值和最小值

C. 在 $(0,\infty)$ 内处处可导

D. 当 $x\to\infty, x\to 0^+$ 时, $f(x)$ 极限存在

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=$ ( )

A. 1　　B. 0　　C. ∞　　D. $e^{-\frac{1}{6}}$

(3) 微分方程 $y'=\frac{1}{y-x}$ 的通解为 ( )

A. $x=y+Ce^{-y}-1$　　B. $y=x+Ce^{-x}-1$

C. $x=\ln(x-y-1)+C$　　D. $y=\ln|y-x-1|+C$

(4) 已知 m,n 为正整数, 且 $m>n$ 。如果: $S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^m x\cos^n x dx, T=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos^m x dx$。则下面结论正确的一个是 ( )

A. $S>T$　　B. $S=T$

C. $S<T$　　D. S,T 的关系不确定

(5) 设对任意的 $x\in\mathbb{R}$, 总有 $m\leqslant f(x)<g(x)<h(x)\leqslant M$ 。且 $g(x)$ 为连续函数, 若 $\lim\limits_{x\to\infty}[M-f(x)][h(x)-m]=0$ 。则对于 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$，则下面结论正确的一个是 ( )

A. 一定存在, 且等于 $\frac{M+m}{2}$

B. 一定存在, 且只能等于 M 或 m

C. 一定不存在

D. 一定存在, 且可以取到 $[m,M]$ 上的任意值

(6) 设函数 $f(x)=x^2\sin x+\cos x+\frac{\pi}{2}x$, 在其定义域内零点的个数是 ( )

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 多于 4

(7) 设 $\vec{a},\vec{b}$ 为非零实向量, 且 $2\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 垂直，$\vec{a}+2\vec{b}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}$ 垂直。则 ( )

A. $|\vec{b}|^2=7|\vec{a}|^2$　　B. $|\vec{a}|^2=7|\vec{b}|^2$　　C. $|\vec{b}|^2=5|\vec{a}|^2$　　D. $|\vec{a}|^2=5|\vec{b}|^2$

(8) 设平面 D 由 $x+y=\frac{1}{2}, x+y=1$ 及两条坐标轴围成，$I_1=\iint_D\ln(x+y)^3dxdy, I_2=\iint_D(x+y)^3dxdy, I_3=\iint_D\sin(x+y)^3dxdy$ 。则下面结论正确的一个是 ( )

A. $I_1<I_2<I_3$　　B. $I_3<I_1<I_2$　　C. $I_1<I_3<I_2$　　D. $I_3<I_2<I_1$

(9) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$, 则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{b_n^2}x^n$ 的收敛半径为 ( )

A. 2　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

(10) 已知曲面 $x^2+y^2+2z^2=5$, 在其点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面与平面 $x+2y+z=0$ 平行, 则有 (　)

A. $x_0:y_0:z_0=4:2:1$　　B. $x_0:y_0:z_0=2:4:1$

C. $x_0:y_0:z_0=1:4:2$　　D. $x_0:y_0:z_0=1:2:4$

二、 (本题满分 10 分) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\sin\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\sin\frac{2\pi}{n}}+\cdots\cdots+\sqrt{1+\sin\frac{n\pi}{n}}\right)$。

三、 (本题满分 10 分) 设 $u=e^{x^2}\sin\frac{x}{y}$, 计算 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点 $(\pi,2)$ 处的值。

四、 (本题满分 10 分) 设 D 为第一象限内由 $\begin{cases} y=x \\ y=2x \\ xy=1 \\ xy=2 \end{cases}$ 所围成的区域, f 为一元可微函数, 且 $f'=g$, 记 L 为 D 的边界。请证明:

$$\oint_L xf\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x=-\int_1^2\frac{g(u)}{2u}\,\mathrm{d}u$$

五、 (本题满分 10 分) 已知 $y_1=x, y_2=x^2, y_3=e^x$ 为线性非齐次微分方程: $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的三个特解, 求该方程满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 的特解。

六、 (本题满分 10 分) 设 $f(x)=4x+\cos\pi x+\frac{1}{1+x^2}-x^2e^x+xe^x\int_x^1 f(t)dt$ 。求 $\int_0^1(1-x)e^xf(x)dx$。

七、 (本题满分 10 分) 计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧。

八、 (本题满分 10 分) 将函数 $f(x)=x-1\ (0\leqslant x\leqslant 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数。

九、 (本题满分 10 分) 若 $g(x)$ 为单调增加的可微函数, 且当 $x\geqslant a$ 时, $|f'(x)|\leqslant g'(x)$ 。证明：当 $x\geqslant a$ 时, $|f(x)-f(a)|\leqslant g(x)-g(a)$。

十、 (本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导, 且 $f'(0)=f'(2)=0$ 。证明：在区间 $(0,2)$ 内至少存在一点 ξ, 满足 $|f''(\xi)|\geqslant|f(2)-f(0)|$。

十一、 (本题满分 10 分) 设 $0<a<1$, $x\geqslant 0$ 且 $y\geqslant 0$ 。证明:

(1) $x^a y^{1-a}\leqslant ax+(1-a)y$

(2) 设 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$, 利用 (1) 中的结果证明:

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\leqslant\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

中国科学院大学

2014 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 选择题 (本题满分 50 分，每小题 5 分)

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 收敛，其极限为 $a \geqslant 2$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k = (\quad)$

A. ∞　　B. 0　　C. 1　　D. a

(2) 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)=(\quad)$

A. 0　　B. ∞　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{3}$

(3) $M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+x^k}dx, N=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+x^k}dx, k$ 为正整数，下面结论正确的是 (　)

A. $M<N$　　B. $M=n$

C. $M>N$　　D. M,N 的大小关系不确定

(4) 设数列 a_n 单调减少, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，$\{S_n\}$ 是无界数列, 则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 (　)

A. $[-1,1]$　　B. $[-1,1)$　　C. $[0,2)$　　D. $(0,2]$

(5) 设函数 $u(x,y)=\varphi(x)-\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x}\phi(t)dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ϕ 具有一阶导数, 则必有 (　)

A. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$　　B. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$　　C. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　D. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(6) 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解, 且 $f(x_0)>0, f'(x_0)=0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处 (　)

A. 取得极大值　　B. 取得极小值

C. 某邻域内单调增加　　D. 某邻域内单调减少

(7) 设 Σ 为 zoy 平面内曲线 $z=y^2(0\leqslant y\leqslant 2)$ 绕 z 轴旋转生成的旋转曲面与平面 $z=4$ 所围成的区域边界的外侧, $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为其外法线向量的方向余弦, 则 $\iint\limits_{\Sigma}\left[\left(\frac{x^2y}{2}+2x-z\right)\cos\alpha+(3y+z)\cos\beta-xyz\cos\gamma\right]dS$ 的值为 (　)

A. 40　　B. 40π　　C. 20　　D. 20π

(8) 已知 $xe^{-2x},e^x,3x$ 是 n 阶常系数微分方程 $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0$ 的三个解, 而 e^{-x} 不是该微分方程的解, 则下述结论中成立的是 (　)

A. $n=6,a_1=4,a_2=3,a_3=a_4=-4,a_5=a_6=0$

B. $n=5,a_1=3,a_2=0,a_3=-4,a_5=a_4=0$

C. $n=4,a_1=1,a_2=-3,a_3=a_4=0$

D. $n=3,a_1=-1,a_3=a_2=0$

(9) 已知直线 $L_1:\begin{cases} 2x+y-z+1=0 \\ x-2y+2z-3=0 \end{cases}$ 与直线 $L_2:\begin{cases} y+z+5=0 \\ 2x-z+1=0 \end{cases}$ 。则 L_1 和 L_2 的夹角为 (　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

(10) 积分 $\int_0^\pi \sqrt{1-\sin x}dx=$ (　)

A. π　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\sqrt{2}+1$　　D. $4(\sqrt{2}-1)$

二、 (本题满分 10 分) 设 $a \geqslant -12$ 是一个给定的实数, 已知 $x_1=a$, 且 $x_{n+1}=\sqrt{12+x_n}$, 判断 $\{x_n\}$ 的极限是否存在; 若存在, 求出 $\{x_n\}$ 的极限。

三、 (本题满分 10 分) 设 L 为圆 $x^2+y^2=2$ 位于第一象限的一段, 方向为逆时针方向, $f(x)$ 为 R 上的正值连续函数，证明:

$$\int_L y\left(f(x)-\frac{1}{f(x)}\right)dx+\left(x^2y+2xf(y)\right)dy \geq 1+\pi$$

四、 (本题满分 10 分) 求微分方程的通解

$$\left[2x+e^x\sin(xy)+ye^x\cos(xy)\right]dx+\left[xe^x\cos(xy)+3y^2\right]dy=0$$

五、 (本题满分 10 分) 将函数 $f(x)=1-x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 展开成余弦级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$。

六、 (本题满分 10 分) 已知 $2\mu + e^{\mu} = xy$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$。

七、 (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界可微, 则:

(1) 举例说明 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ 不一定存在

(2) 对于极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ 存在的函数, 证明 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$。

八、 (本题满分 10 分) $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上是单调减少的连续函数，证明:

$$\int_0^2 x f(x) dx \leqslant \int_0^2 f(x) dx$$

九、 (本题满分 10 分) 已知 $0 \leqslant a, b \leqslant 1$, 且 $a + b = 1$, 证明: 对任意实数 x, y 有 $e^{ax+by} \leq ae^x + be^y$。

十、 (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x) dx = 0, \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$ 。证明: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2, 使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$。

十一、 (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数，已知 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 。证明:

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^1 t e^{-t^2 x^2} f(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0)$$

中国科学院大学
2013 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、（本题满分 10 分，每小题 5 分）

(1) 函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续函数, $a>0$, 则函数 $F(x)$

$$F(x)=\begin{cases} a & f(x)\geqslant a \\ f(x) & -a<f(x)<a \\ -a & f(x)\leqslant -a \end{cases}$$

一定是（ ）

A. 有界可微函数　B. 有界连续函数

C. 连续可微函数　D. 以上结论都不正确

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+2n+1}+\frac{2}{n^2+2n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+2n+n}\right)=$（ ）

A. 1　B. ∞　C. $\frac{1}{2}$　D. 0

(3) 函数 $f(x)=(x+2\cos x)^2$ 在区间 $[0,\pi/2]$ 上的最大值是（ ）

A. $\frac{\pi^2}{36}+\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+1$　B. $\frac{\pi^2}{36}+\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+2$　C. $\frac{\pi^2}{36}+\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+3$　D. $\frac{\pi^2}{4}$

(4) 函数 $f(x)=x(x+1)\cdots(x+20)$, 下面四个结论正确的是（ ）

A. $f'(-1)>0, f'(-2)>0$　B. $f'(-1)>0, f'(-2)<0$

C. $f'(-1)<0, f'(-2)<0$　D. $f'(-1)<0, f'(-2)>0$

(5) 已知 $g(x)\cdot\int_0^2 f(x)dx=10$, 则 $\int_0^2 f(x)dx\cdot\int_0^2 g(x)dx=$（ ）

A. 20　B. 10　C. 5　D. 不能确定

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt[3]{x^4+y^{12}}}=$（ ）

A. 0　B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$　C. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$　D. 不存在

(7) $f(u)$ 区间内可导且 $f'(u)>0, f(0)=0, L$ 为单位圆周 $x^2+y^2=1$ 被 $y=x$ 和 y 轴所夹弧段, 则弧长的曲线积分 $c_1=\int_L f(2xy)ds$ 和 $c_2=\int_L f\left(2x^2-1\right)ds$ 满足（ ）

A. $c_1>0, c_2>0$　B. $c_1>0, c_2<0$　C. $c_1<0, c_2>0$　D. $c_1<0, c_2<0$

(8) 设二阶齐次常系数微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的任一解 $y(x)$ 满足当 $x\to+\infty, y\to0$ 的时候, 则实数 a,b 满足（ ）

A. $a>0,b>0$　B. $a>0,b<0$　C. $a<0,b>0$　D. $a<0,b<0$

(9) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域是（ ）

A. $[-2,0)$　B. $(-2,0)$　C. $(-2,0]$　D. $[-2,0]$

(10) 过点 $(0,0,1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=t+1 \\ y=-t-4 \\ z=2t \end{cases}$ 及 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$ 都平行的平面方程为 (　)

A. $5x+2y-z+1=0$　　　　B. $5x-y-3z+3=0$

C. $3x+y-z+1=0$　　　　D. $-3x-y+z+1=0$

二、 (本题满分 10 分) 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(x^x-1)}$。

三、 (本题满分 10 分) 求微分方程 $y''=y'(y-3)$ 满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=-\frac{5}{2}$ 的解。

四、 (本题满分 10 分) 求函数 $f(x)=\pi^2-x^2$ 在区间 $[-\pi,\pi)$ 上的傅里叶级数。

五、 (本题满分 10 分) 求曲面积分 $\iint_S xydydz+z^2dxdy$, 其中 S 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的上侧 (法向量与 z 轴正向量夹角为锐角的一侧) 及 $z=1$ 的下侧围成的有向曲面。

六、 (本题满分 10 分) 假设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$ 且对于 $x\geqslant 1$,

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}$$

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，且不大于 $1+\frac{\pi}{4}$。

七、 (本题满分 10 分) 设两个连续函数 f, g 满足: 当 $x \in [0,1]$ 时, $f(x)+g(x) \neq 0$ 。证明存在唯一的数 a $(0 \leqslant a \leqslant 1)$ 使得

$$\int_a^1 |f(x)| dx = \int_0^a g^2(x) dx$$

八、 (本题满分 10 分) 证明:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_x^{2x} |\cos t| dt = \frac{2}{\pi}$$

九、 (本题满分 10 分) 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} - xe^x \int_0^1 f(x) dx$, 求 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 。

十、 (本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导。证明: 存在 $\xi, \eta \in (a,b)$, 使得

$$f'(\eta) = \left(b^2 + ab + a^2 + 2\right) \frac{f'(\zeta)}{3\zeta^2 + 2}$$

十一、 (本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导, 且对任意的 $x \in [0,2]$, 有 $|f(x)| \leqslant 1, |f''(x)| \leqslant 1$ 。证明: 对于任意 $x \in [0,2], |f'(x)| \leqslant 2$ 成立。

中国科学院大学

2012 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 选择题 (本题满分 50 分，每小题 5 分)

(1) 函数 $f(x)=x\cos x^2$, 正确结论是 (　)

A. 在 $(-\infty,0)$ 内有界　　B. 当 $x\to\infty$ 时, $f(x)$ 为无穷大

C. 在 $(-\infty,0)$ 内无界　　D. 当 $x\to\infty$ 时, $f(x)$ 极限存在

(2) 函数 $f(x)$ 上是连续函数, 且 $0<m<f(x)<M<\infty$, 则 $\frac{1}{m}\int_{-m}^{m}(f(t)-M)dt$ 的最大取值区间是 (　)

A. $(-M-m,m-M)$　　B. $(2m-2M,0)$

C. $(m-M,0)$　　D. $(0,M+m)$

(3) 微分方程 $yy''-(y')^2=0$ 的一个特解是 (　)

A. $y=xe^x$　　B. $y=x\ln x$　　C. $y=\ln x$　　D. $y=e^x$

(4) 已知 n,m 是正整数, 且 $n<m$, 如果 $A=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx, B=\int_0^1 x^n(1-x)^{m+1}dx$, 则下面结论正确的一个是 (　)

A. $A>B$　　B. $A=B$

C. $A<B$　　D. A,B 的大小关系不确定

(5) 函数 $f(x)=e^x-x^2-4x-3$ 在其定义域内零点的个数是 (　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 多余 3

(6) 若函数 $f(x)=\begin{cases} e^x(\sin x+\cos x) & x\geqslant 0 \\ abx^2+ax+2a+b & x<0 \end{cases}$ 的导函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 则 (　)

A. $a=2,b=-1$　　B. $a=2,b=-3$　　C. $a=1,b=-3$　　D. $a=1,b=-1$

(7) 若幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=4$ 处条件收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+2^n\right)a_n$ (　)

A. 条件收敛　　B. 发散　　C. 绝对收敛　　D. 不能确定

(8) 设 S 为螺旋面 $\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v \\ z=v \end{cases}$ 的一部份，$0\le u\le\sqrt{15}$，$0\le v\le\pi$ 则 $\iint_S\sqrt{x^2+y^2}dS$ 的值为 (　)

A. 17π　　B. 19π　　C. 21π　　D. 23π

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ 的值为 (　)

A. $e^{\frac{1}{3}}$　　B. $e^{\frac{-1}{3}}$　　C. $e^{\frac{1}{2}}$　　D. $e^{-\frac{1}{2}}$

(10) 一平面过点 $M(1,1,-1)$ 且与直线 $L: \frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-1}$ 垂直, 则该平面与平面 $x-2y-z+1=0$ 的交线的方向数是 ( )

A. $(-5,1,3)$ B. $(1,-3,5)$ C. $(1,-5,3)$ D. $(3,-1,5)$

二、 (本题满分 10 分) 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)$ 存在, 并求出极限值。

三、 (本题满分 10 分) 求微分方程 $y''-3y'+2y=e^x(2x+1)$ 的通解。

四、 (本题满分 10 分) 计算 $\iint_D (x|y|+xy)dxdy$, 其中 D 是由抛物线 $5y=x^2-6$ 和抛物线 $y^2=x$ 围成的闭区域。

五、 (本题满分 10 分) 将函数 $f(x)=|x-1|(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 展开成正弦级数。

六、 (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)=\int_x^1 e^{-t^2}dt$, 求 $\int_0^1 x^2 f(x)dx$ 的值。

七、 (本题满分 10 分) 计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+2y^2}$, 其中 L 是由直线 $x+y=1, y=x-1$ 和半圆周 $x^2+y^2=1, x\leqslant 0$ 所围成的闭曲线, 方向为逆时针方向。

八、 (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f^2(x)\leqslant |x|^3$, 记 $F(x)=\int_0^1 f(xt)dt$, 求 $F'(x)$, 并讨论 $F'(x)$ 的连续性。

九、 (本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 并且有 $0<a<b$ 。证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\frac{a+b}{2\xi}f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

十、 (本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f''(x)>0$ 。证明:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leq \frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\cdots+f\left(x_n\right)}{n}$$

十一、 (本题满分 10 分) 设 $a<b$, 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b x^2f(x)dx=0$$

证明：在 (a,b) 上至少存在三个不同点 x_1,x_2,x_3, 使得 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=f\left(x_3\right)=0$。

中国科学院大学
2011 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 选择题 (本题满分 40 分，每小题 5 分)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right] =$ ( )

A. 0 B. ∞ C. $\frac{e}{2}$ D. $-\frac{e}{2}$

(2) 若函数 $\begin{cases} x^2+2x & (x\geqslant 0) \\ \ln(1+ax) & (x<0) \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则 a 等于 ( )

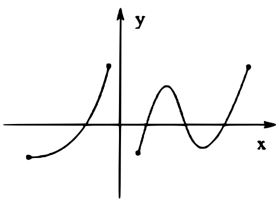
A. -2 B. 2 C. -1 D. 1

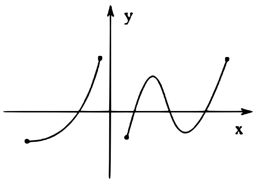
(3) 设极限 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^4} = -2$, 则函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 ( )

A. 导数值不等于 0 B. 导数值等于 0 但 $x=a$ 不是极值点

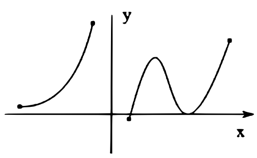
C. 取得极大值 D. 取得极小值

(4) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $f(x)$ 的图像如下图所示, 则 $f'(x)$ 的图像最有可能是 ( )

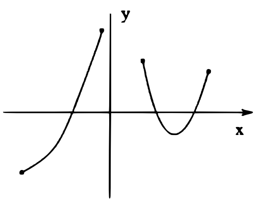




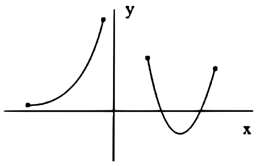
A.



B.



C.



D.

(5) 设 $x^2\ln x$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则不定积分 $\int xf'(x)dx =$ ( )

A. $\frac{2}{3}x^3\ln x + \frac{1}{9}x^3 + C$ B. $2x - x^2\ln x + C$

C. $x^2\ln x + x^2 + C$ D. $3x^2\ln x + x^2 + C$

(6) 设 y_1, y_2 是二阶线性函数齐次微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个特解, C_1, C_2 是两个任意常数, 则 (   )

A. $C_1y_1 + C_2y_2$ 不一定是该微分方程的解

B. $C_1y_1 + C_2y_2$ 是该微分方程的解, 但不一定是通解

C. $C_1y_1 + C_2y_2$ 是该微分方程的解，但不是通解

D. $C_1y_1 + C_2y_2$ 不是该微分方程的解

(7) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，则下列级数一定发散的是 (   )

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2)$

(8) 设两条抛物线 $y = nx^2 + \frac{1}{n}$ 和 $y = (n+1)x^2 + \frac{1}{n+1}$ 所围成的面积为 A_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n =$ (   )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

二、 (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有连续导数, 且 $f'(x) \geqslant 0$, 求证：对任何整数 n, 都有

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx\right| \leqslant \frac{2}{n}\left[f(2\pi) - f(0)\right]$$

三、 (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 具有连续导数, 且满足 $f(x) = x + \int_0^x tf'(x-t)dt$, 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$。

四、 (本题满分 10 分) 设函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y, f(x, 0) = x, f(0, y) = y^2$, 求 $f(x, y)$。

五、 (本题满分 10 分) 求函数 $f(x, y) = (x-6)^2 + (y+8)^2$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 25\}$ 上的最大值和最小值。

六、 (本题满分 10 分) 计算二重积分 $\iint_D (|x|+|y|)dxdy$, 其中积分区域 D 由直线 $x=0, x+y=3, y=x-1$ 及 $y=x+1$ 所围成的区域。

七、 (本题满分 10 分) 计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$, 其中 L 是以 $(1,0)$ 为中心, 半径为 R 的圆周 $(R>0, R\neq 1)$, 取逆时针方向。

八、 (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在 $x=0$ 的某个领域内有一阶连续的导数, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 发散。

九、 (本题满分 10 分) 将函数 $f(x)=x^2(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数。

十、 (本题满分 10 分) 已知函数 $f(x)$ 具有连续的二阶导数, $f(0)=0, f'(0)=\frac{1}{3}$, 且对任意光滑有向封闭曲面 Σ 都有 $\oint_\Sigma e^x\left(f'(x)dydz-2yf(x)dzdx-zdxdy\right)=0$, 求函数 $f(x)$ 的表达式。

十一、 (本题满分 10 分) 已知平面过点 $(1,2,3)$，它在 x 正半轴和 y 轴正半轴上的截距相等，问当该平面在三个坐标轴上的截距分别为何值时，它与三个坐标轴所围成的立体体积取极值，并写出此时的平面方程。

十二、 (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上可导, f' 单调递减且 $f(0)=0$, 求证: 对于 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$ ，都有 $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$。

中国科学院大学

2010 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 选择题 (本题满分 40 分，每小题 5 分)

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d\left(1-e^{-x^2}\right)}=2$, 其中 $a^2+c^2\neq 0$, 则必有 ( )

A. $b=4d$　　B. $b=-4d$　　C. $a=4c$　　D. $a=-4c$

(2) $y=y(x)$ 满足 $\Delta y=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x), y(1)=1, \int_0^1 y(x)=$ ( )

A. 2π　　B. π　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

(3) 设函数 $f(x)=\int_0^x t^2(t-1)dt$, 则 $f(x)$ 有多少个极值点 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(4) 下列命题正确的一项是 ( )

A. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛

B. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散

C. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛

D. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 条件收敛

笔记 上述的关系可以通过举反例排除，各种关系及其严格的说明那位同学能发一下？

(5) 设 $a_0,a_1,a_2,a_3\ldots$ 是等差数列, 且公差 $d>0$, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为 ( )

A. $(-d,d)$　　B. $[-d,d)$　　C. $(-1,1)$　　D. $[-1,1)$

(6) 设 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 是二阶线性非齐次微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的三个线性无关的解，C_1,C_2 是两个任意常数, 则微分方程的通解为 ( )

A. $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+C_3y_3(x)$

B. $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+(1-C_1-C_2)\,y_3(x)$

C. $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)-(C_1+C_2)\,y_3(x)$

D. $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)-(1-C_1-C_2)\,y_3(x)$

(7) 通过两个平面 $2x+y-4=0$ 与 $y+2z=0$ 的交线及点 $M_0(2,-1,-1)$ 的平面方程为 ( )

A. $3x+y-z=6$　　B. $x+3y-z=0$　　C. $3x-y+z=6$　　D. $x-3y-z=6$

(8) 曲线 $y=e^x$ 和该曲线经过原点的切线以及 y 轴所围成的面积 ( )

A. $\frac{e}{2}-1$　　B. $\frac{e}{2}+1$　　C. $\frac{e}{2}$　　D. $e+1$

二、 (本题满分 12 分) 设 $g(x)$ 是以正数 T 为周期的连续函数, $g(0)=1, f(x)=\int_0^{2x}|x-t|g(t)dt$, 求 $f'(T)$ 。

三、 (本题满分 12 分) 已知平面过点 $(1, 2, 3)$，它在 x 正半轴和 y 轴正半轴上的截距相等，问当该平面在三个坐标轴上的截距分别为何值时，它与三个坐标轴所围成的立体体积取极值，并写出此时的平面方程。

四、 (本题满分 12 分) 求下面微分方程的通解：

$$yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$$

注: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$+C。

五、 (本题满分 12 分) 将函数 $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x = 0$ 处展开成幂级数, 并求收敛区间。

六、 (本题满分 12 分) 在椭球面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 使函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在该点, 沿方向 $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j}$ 的方向导数最大。

七、 (本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 为定义在 $[0,+\infty)$ 上的连续函数, 且满足

$$f(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dv+t^3$$

求 $f(x)$ 的表达式。

八、 (本题满分 12 分) 设 $u=u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 具有连续的二阶偏导, 且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$$

试求 u 的表达式。

九、 (本题满分 12 分) 设函数 $f(x)$ 具有连续导数，在区域 G 内曲线积分

$$\int_M^N \frac{1}{2x^2+f(y)}(ydx-xdy)$$

与路径无关，其中 G 不包含原点的单连通区域, M N 是 G 内的任意两点, 且 $f(1)=1$ 。

(1) 求 $f(x)$;

(2) 求 $\oint_\Gamma \frac{1}{2x^2+f(y)}(ydx-xdy)$ 其中 Γ 为闭区间 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, 取逆时针方向。

十、 (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数, 且 $f(0)=f(1)=0, f(x)$ 不恒为零, 求证:

$$\int_0^1 |f''(x)|\,dx\geqslant 4\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$$

十一、 (本题满分 10 分) 一点从坐标原点出发向东移动 a m, 然后左拐弯移动 aq m(其中 $0<q<1$), 此后反复左拐弯前行，使得后一段移动为前一段的 q 倍，该点这样运动下去，有一极限位置，求该极限位置距离原点距离。

中国科学院大学
2009 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 填空题 (本题满分 30 分，每小题 6 分)

(1) 设 $y=\sqrt[4]{x\sqrt[3]{e^x\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}}$, 则 $\frac{dy}{dx}=$ ________ 。

(2) 设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+yg(x+y)$, 其中 f,g 具有二阶连续导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$ ________ 。

(3) 函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$ 展开为 x 的幂级数, 展开式为: ________ 。

(4) 过点 $P(-1,0,4)$ 且与平面 $3x-4y+z+10=0$ 平行，又与直线 $L:\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线方程为: ________ 。

笔记 可能有问题，后期重算

(5) 微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的解为: ________ 。

二、 选择题 (本题满分 30 分，每小题 6 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\int_2^x\left(\int_t^2 e^{-u^2}du\right)dt}{(x-2)^2}=(\quad)$

A. $\frac{1}{e^2}$　　B. $-\frac{1}{e^2}$　　C. $\frac{1}{2e^4}$　　D. $-\frac{1}{2e^4}$

(2) 求积分 $\int_0^1 e^{\sqrt{1-x}}dx=(\quad)$

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(3) 设在 $[0,+\infty)$ 上 $f''(x)>0$, 则当 $x\in(0,+\infty)$ 时, 下列不等式成立的是 (　)

A. $f'(0)x<f(0)-f(x)<f'(x)x$　　B. $f'(0)x<f(x)-f(0)<f'(x)x$

C. $f(0)-f(x)>f'(0)x>f'(x)x$　　D. $f(0)-f(x)<f'(0)x<f'(x)x$

(4) 设 $L:x^2+(y+1)^2=2$ 取逆时针方向, 则 $\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+(y+1)^2}=(\quad)$

A. 4π　　B. 2π　　C. π^2　　D. $2\pi^2$

(5) 设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧, 则曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}y^3dzdx+(y+z)dxdy=$ (　)

A. $-\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $-\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

三、 (本题满分 10 分) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}xe^{-2x}dx$, 求 a 的值。

四、 (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(x)>0$, 求证: 存在唯一的 $a\in(0,1)$, 使得 $\int_0^a f(t)dt=\int_a^1\frac{1}{f(t)}dt$。

五、 (本题满分 10 分) 由直线 $x=0,y=8$ 及抛物线 $y=x^2$ 围成一个曲边三角形, 在曲边 $y=x^2$ 上求一点 $M(X,Y)$, 使得在该点处的切线与直线 $x=0,y=8$ 所围成的三角形面积最小。

六、 (本题满分 10 分) 求满足 $x = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t-x)dt$ 的可微函数 $f(x)$ 。

七、 (本题满分 10 分) 证明方程 $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 满足方程 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$。。

八、 (本题满分 10 分) 已知函数 $y_1 = xe^x + e^{2x}, y_2 = xe^x + e^{-x}, y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，求此微分方程的表达式。

九、 (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$ ，试求出 $f(x)$ 的傅里叶级数，并求数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和。

十、 (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 连续，令 $F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant t^2} f\left(x^2+y^2\right) dxdy \ (t \geqslant 0)$ 。求 $F''(0)$ 。

十一、 (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ 。试证明任意给定的正数 a, b 在开区间 $(0,1)$ 内存在不同的实数 ξ 和 η, 使得

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b$$

中国科学院大学

2008 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 填空题 (本题满分 30 分，每小题 6 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}$ ＿＿＿＿＿＿。

(2) 设 $y=y(x)$ 是二阶线性常系数非齐次微分方程 $y''+2y'+y=e^{3x}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解，且 $y=y(x)$ 有连续的二阶导数，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{y(x)}=$ ＿＿＿＿＿＿。

(3) 已知 $f'(x)\cdot\int_0^2 f(x)dx=8$, 且 $f(0)=0$, 则 $\int_0^2 f(x)dx=$ ＿＿＿＿＿＿。

(4) 设 $\int_0^\pi[f(x)+f''(x)]\sin xdx=3, f(\pi)=2$, 则 $f(0)=$ ＿＿＿＿＿＿。

(5) 在过点 $(0,1)$ 的直线 $y=f(x)$ 中，使得积分值 $\int_0^2\left[x^2-(f(x))^2\right]dx$ 达到最大的直线方程为 ＿＿＿＿＿＿。

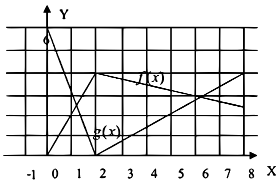
二、 单选题 (本题满分 30 分，每小题 6 分)

(1) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处 (　)

A. 连续且两个偏导数都存在　　B. 不连续但两个偏导数都存在

C. 连续但至少有一个偏导数不存在　　D. 不连续且至少有一个偏导数不存在

(2) 如图, $f(x),g(x)$ 是两个逐段线性的连续函数, 设 $u(x)=f(g(x))$, 则 $u'(1)$ 的值为 (　)



A. $\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $-\frac{1}{12}$　　D. $\frac{1}{12}$

(3) 方程 $xe^{-x}=\frac{1}{2e}$ 的实根数为 (　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(4) 与直线 $L_1\begin{cases}x=1\\ y=-2+t\\ z=1+t\end{cases}$ 与直线$L_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$ 都平行，且过原点　的平面 π 方程是 (　)

A. $x+y+z=0$　　B. $x-y+z=0$　　C. $x+y-z=0$　　D. $z-y-z=0$

(5) 设 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$, 则傅里叶系数 $a_2=$ (　)

A. $\frac{-2}{\pi}$　　B. $\frac{2}{\pi}$　　C. 1　　D. -1

三、 (本题满分 10 分) 求 $\int_{-1}^{2}(|x|+2x^2)\,dx$。

四、 (本题满分 10 分) 设曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=t(0<t<1)$ 分别于 $x=0,x=1$ 所围成的面积之和为 $S(t)$, 试判断 $S(t)$ 是否存在最小值, 若存在, 求出其最小值点。

五、 (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$, 求证: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $\xi f(\xi)+f(\xi)=0$。

六、 (本题满分 10 分) 设函数 $u=f\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$, 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$, 试求函数 f 的表达式。

七、 (本题满分 10 分) 计算二重积分 $I = \iint_D \sqrt{1-y^2}dxdy$, 其中 D 为 $x^2+y^2=1(y>0)$ 与 $y=|x|$ 围成区域。

八、 (本题满分 10 分) 求微分方程 $y'+y=y^2(\cos x-\sin x)$ 的通解。

九、 (本题满分 10 分) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(n+1)x^n$ 在收敛区间 $(-1,1)$ 内的核函数 $S(x)$, 并求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{3^n}$ 的和。

十、 (本题满分 10 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=1$, 且满足不等式 $f'(x)+f(x)-\frac{1}{1+x}\int_0^x f(t)dt=0$, 求 $f'(x)$ 的函数表达式, 并证明不等式:

$$e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 1 \quad (x \geqslant 0)$$

十一、 (本题满分 10 分) 设函数 $f(x),g(x)$ 具有二阶连续导数，曲线积分

$$\oint_C \left[y^2 f(x)+2ye^x+2yg(x)\right]dx+2[yg(x)+f(x)]dy=0$$

其中 C 为平面上任一简单封闭曲线。求上式中的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 使得 $f(0)=g(0)=0$。

中国科学院大学
2007 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 填空题 (本题满分 30 分，每小题 6 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\ln(1+x^3)}$ ＿＿＿＿＿＿。

(2) 设函数 $f(x,y)$ 可微，$f(0,0)=0, f_x'(0,0)=m, f_y'(0,0)=n, \phi(t)=f(t,f(t,t))$，则 $\phi'(0)=$ ＿＿＿＿＿＿。

(3) $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}=$ ＿＿＿＿＿＿。

(4) 微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足 $y(1)=2$ 的通解为 ＿＿＿＿＿＿。

(5) 设 Σ 是曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧, $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是其外法向量的方向余弦，则 $\iint_\Sigma\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dS=$ ＿＿＿＿＿＿。

二、 选择题 (本题满分 30 分，每小题 6 分)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x-1)}{e^{x-1}-a}\left(\frac{1}{x}-b\right) & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 则 (　)

A. $a=0,b=1$　　B. $a=1,b=-1$　　C. $a=-1,b=1$　　D. $a=1,b=0$

(2) 设 $f(x),g(x)$ 都在 x_0 处二阶可导, 且 $f(x_0)=g(x_0)=0, f'(x_0)\cdot g'(x_0)>0$, 则 (　)

A. x_0 不是 $f(x)\cdot g(x)$ 的驻点

B. x_0 是 $f(x)\cdot g(x)$ 的驻点, 但不是 $f(x)\cdot g(x)$ 的极值点

C. x_0 是 $f(x)\cdot g(x)$ 的驻点, 且是它的极小值点

D. x_0 是 $f(x)\cdot g(x)$ 的驻点, 且是它的极大值点

(3) 已知连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2a-x)(a\neq 0), c$ 为任意常数, $\int_{-c}^{c}f(a-x)dx=$ (　)

A. $2\int_0^c f(2a-x)dx$　　B. $2\int_{-c}^{c}f(2a-x)dx$

C. 0　　D. $2\int_0^c f(a-x)dx$

(4) 点 $P_1(-2,3,1)$ 关于直线 $L: x=y=z$ 的对称点 P_2 的坐标是 (　)

A. $\left(-\frac{2}{3},1,\frac{1}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{2}{3},-1,-\frac{1}{3}\right)$　　C. $\left(-\frac{10}{3},\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{10}{3},-\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$

(5) 设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且满足 $f(x+\pi)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2n}(n=1,2\cdots)$ 等于 (　)

A. 0　　B. π　　C. $\frac{1}{\pi}$　　D. $\frac{4}{\pi}$

三、 (本题满分 10 分) 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有二阶连续导数, 且 $f(0)=0$, 又

$$\varphi(x)=\begin{cases}f'(0) & x=0\\ \dfrac{e^x}{x}f(x) & x\neq 0\end{cases}$$

求 $\varphi(x)'$。

四、 (本题满分 10 分) 求满足 $x=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t-x)dt$ 的可微函数 $f(x)$。

五、 (本题满分 10 分) 若 $u=f(zyx), f(0)=0, f'(1)=1$, 且 $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=x^2y^2z^2f'''(xyz)$, 求函数 u。

六、 (本题满分 10 分) 设 L 是分段光滑的简单闭曲线, 且点 $(2,0),(-2,0)$ 均在闭曲线 L 所围成区域的内部, 计算曲线积分 $I=\oint_L\left[\frac{y}{(2-x)^2+y^2}+\frac{y}{(2+x)^2+y^2}\right]dx+\left[\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}+\frac{2+x}{(2+x)^2+y^2}\right]dy$, 其中 L 取正向。

七、 (本题满分 10 分) 求方程 $4x^4y'''-4x^3y''+4x^2y'=1$ 的形如 $y=ax^{-1}$ 的特解，进而求该方程的通解。

八、 (本题满分 10 分) 在曲线 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上找到一个位于第一象限的点, 使得该曲线在该点处的切线与该曲线以及 x 轴和 y 轴所围成的图形面积最小, 并求此最小面积。

九、 (本题满分 10 分) 当 $0<K=\sqrt{a^2+b^2}<r<R, \quad D: r^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant R^2$, 证明

$$\frac{\pi\left(R^2-r^2\right)}{R+K} \leqslant \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \leqslant \frac{\pi\left(R^2-r^2\right)}{r-K}$$

十、 (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明在区间 $[0,1]$ 上存在两点 x_1, x_2, 使得 $\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2$。

十一、 (本题满分 10 分) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的各项 $u_n>0, n=1,2,\cdots,\{v_n\}$ 为一项正实数数列, 记 $a_n=\frac{u_n v_n}{u_{n+1}}-v_{n+1}$, 证明: 如果 $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} a_n=a$, 且 a 为有限正数或者正无穷, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

中国科学院大学

2006 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 (本题满分 10 分) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$。

二、 (本题满分 10 分) 求 a,b 的值, 使得 $f(x)=\begin{cases}\sin a(x-1) & x\leqslant 1\\ \ln x+b & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导。

三、 (本题满分 10 分) 求 $y=(x-1)\left(\frac{(1-2x)\ln x}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ 的导数。

四、 (本题满分 10 分) 设 $z=f(u)$, 方程 $u=q(u)+\int_y^x p(t)dt$ 确定 u 是 x,y 的函数, 其中 $f(u),q(u)$ 可微, $p(t)$ 连续, 且 $q(u)\neq 1$, 求 $p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}$。

五、 (本题满分 10 分) 设函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2} & x\neq 0\\ A & x=0\end{cases}$$

连续, 且 $f(0)=0$ 。

(1) 求 A 的值, 使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

(2) 研究 $F'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

六、 (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 满足方程 $\int \sqrt{x}f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{x}} + \int x^{\frac{3}{2}} \sin x dx + C$, 求 $\int f(x)dx$。

七、 (本题满分 10 分) 当 $x > 0$ 时，$f(\ln x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ，求 $\int_{-2}^{2} xf'(x)dx$。

八、 (本题满分 10 分) 求经过原点且垂直于平面 $\pi_1 : x+2y+3z-2 = 0$ 及 $\pi_2 : 6x-y-5z+23 = 0$ 的平面方程。

九、 (本题满分 10 分) 将函数 $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ 展开成 $x-1$ 的幂级数。

十、 (本题满分 10 分) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1}$ 的核函数。

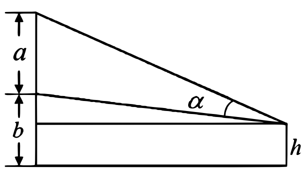
十一、 (本题满分 10 分) 计算 $I=\int_L \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$, 其中 L 是抛物线 $y=2x^2-1$ 从点 $A(-1,1)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段。

十二、 (本题满分 10 分) 设曲线积分 $\int_L \left(f'(x)+2f(x)+e^x\right)ydx+f'(x)dy$ 与路径无关，且 $f(0)=0, f'(0)=1$, 计算 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} \left(f'(x)+2f(x)+e^x\right)ydx+f'(x)dy$。

十三、 (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续在 (a,b) 内可导, 试证存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $2\xi[f(b)-f(a)]=\left(b^2-a^2\right)f'(\xi)$。

十四、 (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 为可导且周期为 2 的函数，满足 $f(1+x)+2f(1-x)=2x+\sin^2 x$, 求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=3$ 处的切线斜率。

十五、 (本题满分 10 分) 如图, 某公园有一座高为 a 的塑像, 其基座高为 b 米。今有一观赏者高为 h 米 $h<b$, 问他离基底多远时, 其视线对塑像张成的角最大?



中国科学院大学

2005 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 填空题 (本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分)

(1) 已知 $f'(x_0)=3$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-2x)}{x}=$ __________ 。

(2) 设 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{x^2}, 则 $\int xf'(x)dx=$ __________ 。

(3) 数量场 $u=x^2+2y^2+3z^2$ 在点 $(1,1,-1)$ 的最大方向微商值为 __________ 。

(4) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n+3^n}$ 的收敛半径为 __________ 。

(5) 微分方程 $y'+\frac{1}{x}=1$ 的通解为 __________ 。

二、 单项选择题 (本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分)

(1) 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为 (　)

A. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}f(t^2)$ 存在　　B. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}f(t-\sin t)$ 存在

C. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}f(\ln(1+t))$ 存在　　D. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}[f(2t)-f(t)]$ 存在

(2) 设曲面 $x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1$ 在点 $(1,1,2)$ 处的法线为 L, 又设 $L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{0}$; 　$\pi:x+y+4z=1$, 则 (　)

A. L 与 L_1 相交, 且 L 平行于 π　　B. L 与 L_1 相交, 且 L 垂直于 π

C. L 与 L_1 异面, 且 L 平行于 π　　D. L 与 L_1 异面, 且 L 垂直于 π

(3) 设 S 是柱面 $x^2+y^2=R^2(0\leqslant z\leqslant R)$ 的外侧, 则 $\iint_S(x^2+y^2)\,dxdy$ 的值为 (　)

A. $2\pi R^3$　　B. $2\pi R^4$　　C. πR^4　　D. 0

(4) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则下列结论中正确的是 (　)

A. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛　　B. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}a_n$ 收敛

C. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}a_n$ 收敛　　D. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛

(5) 设 $f(x)=x-L(0\leqslant x\leqslant 2L)$, 则其以 $2L$ 为周期的傅里叶级数在点 $x=-\frac{L}{2}$ 处收敛于 (　)

A. $-\frac{L}{2}$　　B. $-\frac{3L}{2}$　　C. $\frac{L}{2}$　　D. $\frac{3L}{2}$

三、 (5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

(1) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$。

(2) 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$。

(3) 利用欧拉积分计算 $\int_0^1\frac{x^6}{\sqrt[6]{1-x^6}}dx$。

(4) $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $z=f\left(xy^2,\frac{y}{x}\right)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

(5) 计算二重积分 $\int_0^1 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^1\cos y^2 dy$。

四、 (3 小题，每小题 12 分，满分 36 分)

(1) 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(x)=1, f'(0)=1$, 且曲线积分 $\int_L\left(e^x\sin y+2yf'(x)+2xy\right)dx+\left(f'(x)+f(x)+2x+e^x\cos y\right)dy$ 与路径无关。

i. 求 $f(x)$。

ii. 当 L 是从 $(0,0)$ 沿曲线 $y=x^4$ 到 $(1,1)$ 的有向曲线段时, 求该曲线积分的值。

(2) 将函数 $y=\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$ 在 $x=0$ 处展成泰勒级数, 并求收敛域及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$。

(3) 将函数 $f(x)=\begin{cases}\pi & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ \pi-x & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ 展开成傅里叶级数 (说明收敛情况), 并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$。

五、 (2 小题，每小题 12 分，共 24 分)

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导, $f(0)=0, f(1)=2$, 证明:

i. 存在 $\xi \in (0,1)$ 使 $f(\xi)=1$。

ii. 存在 $0<x_1<x_2<1$, 使 $\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=1$。

(2) i. 求 $F(x)=\int_0^a |t-x| dt$ (常数 $a>0$) 在 $[0,a]$ 上的最小值。

ii. 设 $f(x)$ 在 $[0,a](a>0)$ 连续，并且 $\int_0^a f(x)dx=0, \int_0^u xf(x)dx=1$, 求证: 存在一点 $x_0 \in [0,a]$ 使得 $|f(x_0)| \geqslant \frac{4}{a^2}$。

中国科学院大学

2004 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 填空题 (本题共 5 题，每小题 5 分，满分 25 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}}=$ __________ 。

(2) 设 $y-\epsilon\sin y=x$ (常数 $\epsilon\in(0,1)$), 则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$ __________ 。

(3) 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^\alpha}dx$ 的收敛域为 __________ 。

(4) 曲面 $z=\arctan\frac{y}{x}$ 在点 $\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$ 处的切平面方程为 __________ 。

(5) 微分方程 $y''-3y'+2y=\cos x$ 的通解为 __________ 。

二、 单项选择题 (本题共 5 题，每小题 5，满分 25 分)

(1) 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 外侧，则 $\oiint_S x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy=$ (　)

A. 0　　B. πR^4　　C. $2\pi R^4$　　D. $4\pi R^4$

(2) 曲线 $y=\sqrt{x^2+1}-x-1$ 的渐进线条数为 (　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(3) 给定严格递增数列 $\{A_n\}$, 且 $A_1=a, \lim\limits_{n\to\infty}A_n=+\infty$, 函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续且非负，则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}dx$ 收敛的 (　)

A. 充分条件但非必要条件　　B. 必要条件但非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分条件也非必要条件

(4) 如果级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$ $(p>0)$ 条件收敛，则 (　)

A. $0<\leqslant 1$　　B. $p>1$　　C. $\frac{1}{3}<p\leqslant 1$　　D. $\frac{1}{2}<p<\leqslant 1$

(5) 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ，则下列选项正确的是 (　)

A. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微，$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0,0)$ 处连续

B. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微，$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0,0)$ 处不连续

C. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0,0)$ 处连续

D. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0,0)$ 处不连续

三、 (本题共 5 题，每小题 8 分，满分 40 分)

(1) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\tan x}t(\tan t-t)dt}{\int_0^{\sin^2 x}\sin^{\frac{3}{2}}tdt}$。

(2) 计算积分 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$。

(3) 利用欧拉积分计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{\frac{2}{3}}dx$。

(4) 利用 Stokes 公式计算

$$\oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

其中 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ $(a>0)$，从 x 轴正向看 L 为逆时针走向。

(5) 设 $a,b>0$ 。证明：当 $y>x>0$ 时，有 $(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}>(a^y+b^y)^{\frac{1}{y}}$。

四、（本题共 3 题，每小题 12 分，满分 36 分）

(1) 求曲面 $x^2+y^2=az$ 和 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}(a>0)$ 所围成的立体体积。

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[n(n+1)-\frac{1}{n(n+1)}\right]x^n$ 的和函数, 并求收敛域。

(3) 求 k 的取值范围, 使得方程 $\frac{k}{r}+x^2=1$ 有唯一正根。

五、（本题共 2 题，每题 12 分，满分 24 分）

(1) 将函数 $f(x)=\begin{cases} x & -\pi\leqslant x\leqslant 0 \\ \pi x & 0<x\leqslant\pi \end{cases}$ 展开成傅里叶级数 (说明收敛情况), 并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$。

(2) 确定常数 λ, 使得 $\frac{x}{y}\left(x^2+y^2\right)^{\lambda}dx-\frac{x^2}{y^2}\left(x^2+y^2\right)^{\lambda}dy=0$ 在 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内为一全微分方程, 并利用曲线积分求此全微分方程的通解。

(1) $f(x)$ 可展开为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{4}(\pi-1)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{\pi-1}{n^2\pi}\left[(1-(-1)^n\right]\cos nx+\frac{\pi+1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx\right\} \\ &= \begin{cases} x, & -\pi<x\leqslant 0 \\ \pi x, & 0\leqslant x<\pi \\ \frac{\pi(\pi-1)}{2}, & x=\pm\pi \end{cases} \end{aligned}$$

利用 $x=0$ 的值有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$

(2) $\lambda=\frac{1}{2}$，通解为 $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}=C$

中国科学院大学
2003 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 填空题 (本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分)

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\tan x}-1}{2\sin^2 x-1}$ __________ 。

(2) 设 $\begin{cases} x=\displaystyle\int_1^{t^2} u\ln u du \\ y=\displaystyle\int_{t^2}^{1} u^2\ln u du \end{cases}$ $(t>0)$, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$ __________ 。

(3) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-2x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域为 __________ 。

(4) 椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的且平面方程为 __________ 。

(5) 微分方程 $y''+2y'-2y=4xe^x$ 的通解为 __________ 。

二、 选择题 (本题 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} |x|^a\arctan\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ x & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续但不可导, 则 a 的取值范围是 ( )

A. $a>0$　　B. $0<a\leqslant 1$　　C. $0<a<1$　　D. $a>1$

(2)

(3) “对任意给定的 $\epsilon>0$, 总存在正整数 N, 使得当 $n>N$ 时，就有 $|\,a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_N\,|<\epsilon$” 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的 ( )

A. 充分条件但非必要条件　　B. 必要条件但非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分条件也非必要条件

(4) 设 s 是柱面 $x^2+y^2=R^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=R$ 之间，$\iint_S(x^2+z^2)\,dS=$ ( )

A. $\frac{8}{3}\pi R^4$　　B. $\frac{5}{3}\pi R^4$　　C. $\frac{4}{3}\pi R^4$　　D. πR^4

(5) 设 L 是起点 $A(-1,0)$, 终点 $B(1,0)$ 的简单光滑曲线, 除 A,B 外其他点都在 x 轴上方, 则曲线积分 $\int_L\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ 的值为 ( )

A. 恒为 $-\pi$　　B. 恒为 0　　C. 恒为 π　　D. 与曲线 L 有关

(6) 广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx$ 的收敛域为 ( )

A. $p>-1$　　B. $0<p<3$　　C. $-1<p<1$　　D. $-1<p<3$

三、 (本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

(1) 求 $\int\max(x,1)dx$。

(2) 计算无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x^m+1)}dx$, 其中 m 为正整数。

(3) 设 $G=\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$, 求 $\lim\limits_{n\to}\frac{G_n}{n}$ 。

(4) 证明：当 $x>0$ 的时候，有 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 。

(5) 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有一阶连续导函数, 对所有 $x\geqslant 0$, 有 $f(x)\leqslant e^{-x}$, 且 $f(0)=1$ 。证明：存在 $\xi>0$, 使得 $f'(\xi)=-e^{-\xi}$。

四、（本题共 3 小题，每小题 12 分，满分 36 分）

(1) 求函数 $z=x^2y(3-x-y)$ 在闭区域 $D:x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 4$ 上的最大值和最小值。

(2) 设 $f(x)=\cos x+\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(2x-t)f\left(\frac{t}{2}\right)dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $f(x)$ 。

(3) 设 $a,b,c>0$, 求曲面 $x^2+y^2+\frac{a^2-b^2}{c^2}z^2=a^2$ 与 $|z|\leqslant c$ 所截物体的体积。

五、 (本题共 2 小题，每小题 12 分，满分 24 分)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-1}{2}x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{\pi-x}{2} & 1<x\leqslant\pi\end{cases}$, 将 $f(x)$ 展开为周期为 2π 的正弦级数, 并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}$。

(2) 设区域 c 由曲面 $2x^2+y^2-z^2=1$ 及平面 $z=1, z=-1$ 所围成, S 为 c 的全表面外侧, 又设 $\vec{v}=(2x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)$ 。

i. 求 $\operatorname{div}\vec{v}$。

ii. 求积分 $\iint_S \frac{adydz+ydzdx+zdxdy}{(2x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$。

中国科学院大学
2002 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 填空题 (本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^n} =$ __________ 。

(2) $\int\frac{\cos x dx}{1+e^{\sin x}}$ __________ 。

(3) 设 $z=z(x,y)$, 且有 $yz+zx+xy=1$, 则 $dz=$ __________ 。

(4) 含参变量广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}dx$ 的收敛域为 __________ 。

(5) 微分方程 $y''+4y'+4y=e^x$ 的通解为 __________ 。

二、 选择题 (本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设 $\begin{cases} ax+b & x\leqslant 9 \\ x^2\cos\frac{1}{x} & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则 (　)

A. $a=1,b=0$　　B. $a=0,b=0$　　C. $a=1,b=1$　　D. $a=0,b=1$

(2) $f(x)$ 在区间 $[-L,L]$ 内具有二阶导数，且 $f''(x)>0,\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, 则 (　)

A. 在 $(-L,0)$ 和 $0,L$ 内均有 $f(x)>x$

B. 在 $(-L,0)$ 和 $0,L$ 内均有 $f(x)<x$

C. 在 $(-L,0)$ 内, $f(x)>x$; 在 $0,L$ 内, $f(x)<x$

D. 在 $(-L,0)$ 内, $f(x)<x$; 在 $0,L$ 内, $f(x)>x$

(3) 设 L 为圆周 $\{\ x^2+y^2+z^2=a^2$, 则曲线积分 $\int_L(x^4+2y^2z^2)\,dL=$ $x+y+y=0$ (　)

A. $\frac{\pi a^5}{3}$　　B. $\frac{2\pi a5}{3}$　　C. πa^5　　D. $2\pi a^5$

(4) 下列级数中, 绝对收敛的级数是 (　)

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{\sqrt{n}}+1}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{e}+1}$

(5) $a+|x|=\pi-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, 其中 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi, a$ 为常数，则 $a=$ (　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $-\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. $-\pi$

三、 (3 小题，每小题 6 分，共 18 分)

(1) 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+e^x} dx$。

(2) 计算积分 $\int_0^1 (1-\sqrt{x})^n dx$。

(3) 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+[f'(x)]^2=\sin x$, 且 $f'(0)=0$ 。证明: $x=0$ 是 $f(x)$ 的拐点。

四、 (4 小题，每小题 7 分，共 28 分)

(1) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+e^{nx}+e^{-nx}}$。

(2) 计算曲线积分 $I=\oint_L z^2 dx+(x^2+xy-x)\,dy+2xzdz$, 其中 L 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 与圆柱面 $x^2+4y^2=1$ 的交线。从 z 轴正方向向下看, L 为顺时针方向。

(3) 把 $y=\arctan\frac{3+x}{3-x}$ 展为 x 的幂级数, 并求收敛域。

(4) 求微分方程 $(x-x^3y^2\ln y)\,y'=2y$ 的通解。

五、 (3 小题，每小题 8 分，共 24 分)

(1) 设曲面 $S:\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}(a>0)$, 在 S 上求一切平面, 使此切面与三坐标所围成的四面体体积最大，并求四面体体积的最大值。

(2) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 在 $(\pi,\pi]$ 内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ 1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 1<x\leqslant\pi\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展为傅里叶级数 (说明收敛情况), 并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n}{n^2}$。

(3) 设区域 Ω 由曲面 $x=0,y=0,x+y=1,z(x+y)=1$ 及 $z=1$ 围成。

i. 求 Ω 的体积 V。

ii. 证明 $\iiint_\Omega\frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\frac{V}{2}$。

中国科学院大学

2001 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 高等数学（甲）

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 填空题 (每小题 3 分，共 15 分)

(1) $F(x)=\frac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 连续, 则有 $\lim\limits_{x\to a} F(x)$ __________ 。

(2) 通过点 $(3,1,-1)$ 及直线 $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ 的平面方程为: __________ 。

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ __________ 。

(4) 方程 $y''+y'+y=0$ 的通解为 __________ 。

(5) 设方程 $f\left(\frac{z}{x},\frac{y}{z}\right)=0$ 确立了隐函数 $z=z(x,y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ __________ 。

二、 (本题满分 10 分) 设 $y=y(x), z=z(x)$ 由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数, 其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\frac{dz}{dx}$。

三、 (本题满分 12 分)

(1) (5 分) 计算

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-2a\cos\theta+a^2}},(a>1)$$

(2) (7 分) 计算曲面积分

$$I=\iint_S\left(x^2+y^2\right)dS$$

S : 曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=1$ 所围成立体的全表面。

四、 (本题满分 8 分) 将函数 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数。

五、 (本题满分 20 分) 今有常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y - z \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 2y + 2z \\ \frac{dz}{dt} = 3x + 6z - z \end{cases}$$

(1) 改写方程组为 $\frac{d}{dt}X(t) = AX(t)$ 形式，其中 $X(t) = (x(t), y(t), z(t))'$ 为列向量, A 为 3 阶方阵, 记号 "$'$" 表示转置。(2 分)

(2) 求矩阵 A 的特征值及对应的特征向量。(10 分)

(3) 给出非退化矩阵 T 和对角阵 D 使得 $T^{-1}AT = D$。(3 分)

(4) 给出此微分方程的通解。(5 分)

六、 (本题满分 5 分) 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, A 的秩为 $r > 0$ 。证明存在秩为 r 的 $m \times r$ 阶矩阵 B 和秩为 r 的 $r \times n$ 阶矩阵 C, 使得 $A = BC$。

七、 (本题满分 5 分) $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ 是区域 D 上的非常值解析函数, 试说明 $\overline{f(z)} = u-iv$ 和 $g(z) = v + iv$ 在 D 上的解析性。

八、 (本题满分 5 分) 计算积分

$$\int |z|=3\left[\bar{z}+(z-1)^5\cos\frac{1}{(z-1)^3}\right]dz$$

其中 $\bar{z}$ 为复数 z 的共轭复数。

九、 (本题满分 12 分) 用分离变量法解定解问题。

$$|x|=\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & (x,y)\in D, D:-\infty<x<0, 0<y<\pi \\ u|_{x=0}=\frac{y}{\pi}, u|_{x=-\infty} \text{ 有界} & (0<y<\pi) \\ u|_{y=0}=0, u|_{y=pi}=0 & (-\infty<x<0)\end{cases}$$

十、 (本题满分 8 分)

(1) 将上题中的区域 D 保形变换到上半平面。(6 分)

(2) 利用上半平面 Laplace 方程第一边值问题的 Green 函数，写出 Laplace 方程第一边值问题在区域 D 的 Green 函数，其中 $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数。(2 分)

$$G(z;z_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{|z-z_0|}-\ln\frac{1}{|z-\bar{z}|}\right)$$