中国科学院大学

811 量子力学

考研真题集 2003–2022

说　　明

一年的时光已然匆匆，于此感谢各位小伙伴的帮助和分享。量子力学的真题我只从 2010 刷到了 2016，对真题的校对也只是从 2010 到 2016，顺道，我也给出了 2010 到 2016 的简明参考答案。其余年份的真题，可能会有一些错误，包括但不限于：错别字，用词错误，句子表达问题，公式的错误，字形的问题，标点符号的错误，版面的问题，排版的问题，答案的错误等等。这些遗留的问题，有待各位共同发现修改。当各位在刷各年的真题时，若能顺手，发现错误，给出简明答案，提交到码云，或者直接拿此源文件修改后分享出来，鄙人不胜感激。愿:

“古今共载树，天下齐乘凉”

水

2022 年 6 月 18 日

本文档使用 LaTeX 编写而成，源码地址 `https://gitee.com/ylxdxx/QM811-kaoyan`

中国科学院大学
2022 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 (1) 已知 $[\hat{A},\hat{B}]=C$，其中 C 为常数，$\hat{B}$ 为厄米算符。求 $\left[\hat{A},e^{\hat{B}}\right]$ 的值, 并说明在什么条件下, $\left[\hat{A},e^{\hat{B}}\right]$ 是厄米算符?

(2) 若 $\hat{A}$、$\hat{B}$ 为厄米算符, 判断以下是否为厄米算符, 并说明理由。

i. $\hat{A}+i\hat{B}$

ii. $(\hat{A}+i\hat{B})(\hat{A}-i\hat{B})$

iii. $(\hat{A}+\hat{B})^n$

iv. $(\hat{A}+\hat{B})(\hat{A}-\hat{B})$

解:

二、 有一质量为 m 的粒子处在 $V_1(x)=\frac{1}{2}kx^2$ 的一维势场中, 并处于 $V_1(x)$ 的基态。

(1) 若在 t 时刻 $V_1(x)$ 突然变为 $V_2(x)=kx^2$, 求 t 时刻粒子处于 $V_2(x)$ 基态的概率。

(2) 若在 $t=0$ 时刻, 粒子所处的势场突然由 $V_1(x)$ 变为 $V_2(x)$, 经历时间 τ 后, 势场又突然变回 $V_1(x)$, 问 τ 取什么值时粒子刚好恢复到势场 V_1 的基态。

解: 参见陈鄂生 1.19, 1.20。

三、 有一质量为 m 的粒子在长度为 L 的圆环上自由运动:

(1) 求定态波函数和能级。

(2) 若引入微扰 $H'=-V_0\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$，其中 $0<x<L$，$a<<L$，求能级的一级修正。

解:

四、 一自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子处于 x 方向的磁场中, 其哈密顿量为 $H=-\gamma BS_x$，在 $t=0$ 时刻, 粒子处于 $S_z=+\frac{1}{2}$ 的态。

(1) 求粒子能量的本征函数和本征值。

(2) 求在 t 时刻测得 $S_z=+\frac{1}{2}$ 的概率。

(3) 若在时间 $\frac{t}{2}$ 与 t 相继两次测量粒子的自旋，求两次测得 S_z 分量均为 $+\frac{1}{2}$ 的概率。

(4) 若在 $\frac{t}{N},\frac{2t}{N},\frac{3t}{N},\cdots,t$ 相继进行 N 次测量粒子的自旋, 求 N 次测得 S_z 分量均为 $+\frac{1}{2}$ 的概率。当 $N\to+\infty$ 时, 求其极限。

解：

五、 有一质量为 m 的粒子在电磁场中运动，哈密顿量为 $H=\frac{1}{2m}(\vec{p}-q\vec{\mathrm{A}})^2+q\varphi$，其中有

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\partial\vec{\mathrm{A}}}{\partial t}\qquad \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{A}}$$

(1) 求 $\frac{d\langle\vec{r}\rangle}{dt}$，其中 $\langle\vec{r}\rangle$ 为半径 $\vec{r}$ 的平均值。

(2) 若定义 $\langle\vec{v}\rangle=m\frac{d\langle\vec{r}\rangle}{dt}$, 写出粒子处于均匀电场 $\vec{E}$ 和均匀磁场 $\vec{B}$ 中的 $\frac{d\langle\vec{v}\rangle}{dt}$ 表达式。(将结果写成类似洛伦兹力的形式)

解： 参见量子力学曾书课本电磁场一章或者参见格里菲斯第二版 4.59

中国科学院大学

2021 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 量子力学

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、（30 分）能量为 E 的粒子, 从负无穷远处沿着 x 轴入射, 势场为

$$V(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ V_0, & 0<x<a\\ \infty, & x>a\end{cases}$$

其中 $E>V_0>0$, 求全空间的波函数 $\psi(x)$ 。

解:

二、（30 分）已知 H 的两个本征态为 $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ 分别对应于能量 E_1, E_2。力学量 A 的本征态为 $|\phi_1\rangle=\frac{|u_1\rangle+|u_2|}{\sqrt{2}}$ 和 $|\phi_2\rangle=\frac{|u_1\rangle-|u_2\rangle}{\sqrt{2}}$, 分别对应本征值 $a_1, a_2, t=0$ 时, 粒子处于 $|\phi_1\rangle$ 态。求:

(1) t 时刻的态 $|\psi(t)\rangle$;

(2) t 时刻力学量 A 的期望值 $\langle A\rangle(t)$。

解:

三、（30 分）对于自旋 $\frac{1}{2}$ 的体系, 已知哈密顿量 $H=S_x+S_y$。

(1) 求 H 的本征值和本征态;

(2) 求在 (1) 问的低能级态 $|\psi_-\rangle$ 下测到 $S_z=+\frac{\hbar}{2}$ 的概率;

(3) 设 $t=0$ 时体系初态为 $|\psi_-\rangle$。$t>0$ 时加入 z 方向磁场 $\vec{B}=(0,0,B)$, 求 t 时刻粒子处于初态的概率。

解:

四、（30 分）在宽度为 $2a$ 的一维无限深势井中存在两个粒子, 忽略相互作用。

(1) 求能级 E_{n_1,n_2};

(2) 若两粒子为自旋 $\frac{1}{2}$ 的全同粒子，求基态与第一激发态的能级简并度以及相应的波函数;

(3) 若两粒子为自旋 $\frac{1}{2}$ 的全同粒子，求基态与第一激发态的能级简并度以及相应的波函数。

解：

五、（30 分）氢原子处于基态, 受到脉冲电场

$$\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0\delta(t)$$

作用, $\mathscr{E}_0$ 为常数。已知波尔半径为 a_0, 矩阵元 $z_{n1} = \iiint \psi_n^* z \psi_1 \mathrm{dV}$。

(1) 利用选择定则判断粒子会跃迁到哪些激发态上;

(2) 计算越签到各个激发态的概率;

(3) 计算 t 时刻粒子处于基态的概率。

解：

中国科学院大学

2020 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 量子力学

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、（共 30 分）考虑一维束缚态。

(1) 证明 $\langle\psi(x,t)\mid\psi(x,t)\rangle$ 不随时间变化, 此处波函数 ψ 不必是定态。

(2) 证明对于定态, 动量的期望值为零。

(3) 证明如果粒子在 $t=0$ 时刻处于定态, 则在以后时刻永远保持定态。

解:

二、（共 30 分）设波函数 $\psi(x)=(1/\sqrt{2\pi})e^{ip(x+\beta)\hbar}$, 而 $\hat{x},\hat{p}$ 分别为 x 方向的坐标和动量算符，其中 β 为实常数。

(1) 说明 $\psi(x)$ 是否为 $\hat{p}$ 的归一化本征态。

(2) 证明 $\langle x'|\,e^{i\alpha\hat{p}/\hbar}=\langle x'+\alpha|$, 及 $e^{i\alpha\hat{p}/\hbar}\,|x'\rangle=|x'-\alpha\rangle$, 其中 α 为实常数。

(3) 化简算符 $e^{i\alpha\hat{p}/\hbar}\hat{x}e^{-i\alpha\hat{p}/\hbar}$ 。

(4) 化简算符 $e^{i\alpha\hat{p}/\hbar}\hat{x}^2e^{-i\alpha\hat{p}/\hbar}$ 。

解:

三、（共 30 分）一个无自旋粒子的波函数为 $\psi=K(x+iy+2z)e^{-\alpha r}$，此处 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 其中 K,α 为实常数。(球谐函数: $Y_0^0=\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$, $Y_1^0=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$, $Y_1^{\pm1}=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}$)

(1) 求粒子的总角动量。

(2) 求角动量 z 分量即 $\hat{L}_z$ 的期望值, 及测得 $L_z=\hbar$ 的概率。

(3) 求发现粒子在 (θ,φ) 方向上 $d\Omega$ 立体角内的概率。

解:

四、（共 30 分）

(1) 一个电子在 $t=0$ 的时刻处于自旋态 $\chi = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-2i \\ 2 \end{pmatrix}$。在 $t>0$ 时刻，在外界加一个磁场 $\vec{B} = B_0(\sin\theta\hat{e}_x + \cos\theta\hat{e}_z)$, 此时电子的哈密顿量为 $\hat{H} = -2\mu_B \hat{\vec{S}} \bullet \vec{B}$, 其中 $\hat{\vec{S}}$ 为自旋算符, μ_B 为玻尔磁子，求此粒子在任意 t 时刻的波函数。

(2) 考虑两个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子处于磁场中，此时系统的哈密顿量为

$$\hat{H} = a\hat{\sigma}_{1z} + b\hat{\sigma}_{2z} + c_0\hat{\vec{\sigma}}_1 \bullet \hat{\vec{\sigma}}_2$$

其中 a, b, c_0 为常数, $\hat{\vec{\sigma}}$ 是泡利算符，前两项为粒子处于磁场中的势能，最后一项为两粒子自旋-自旋相互作用能。求系统的能级。

解：

五、（共 30 分）考虑谐振子问题。

(1) 一维谐振子的哈密顿量为 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}k\hat{x}^2$，证明由不确定性关系得到的能量最小值与该谐振子的基态能量一致。

(2) 若 (1) 中的基态波函数是高斯型 $e^{-\beta x^2}$, 用变分法求 β 。

(3) 利用升、降算符写出 (1) 中的第一激发态的波函数（不必归一）。

(4) 对于三维各向同性谐振子，第一激发态是三重简并的。现有一微扰

$$\hat{H}' = b\hat{x}\hat{y} = \frac{\hbar b}{2m\omega}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

写出该微扰引起的第一激发态的能级分裂。

解：

中国科学院大学
2019 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 设 1 维线性谐振子的初始状态为 $\psi(x,0)=A\left[3\psi_0(x)+4\psi_1(x)\right]$，其中 $\psi_0(x),\psi_1(x)$ 分别为体系的归一化的基态和第一激发态的波函数。

(1) 求归一化常数 A。

(2) 计算 $\psi(x,t)$、$|\psi(x,t)|^2$。

(3) 求粒子能量的可取值，各可取值出现的概率，及能量的平均值。

解：

二、 设体系由 3 个无相互作用粒子组成，3 个粒子分别处于正交归一单粒子态 ψ_a,ψ_b,ψ_c。

(1) 若 3 个粒子为自旋为 0 的非全同玻色子，求出其波函数。

(2) 若 3 个粒子为自旋为 0 的全同玻色子，求出其波函数。

(3) 若 3 个粒子为自旋 1/2 的全同费米子，自旋处于 $|\uparrow\rangle$，求出其波函数。

解：

三、 设粒子的轨道角动量量子数 $l=1$（取 $\hbar=1$）。

(1) 写出 $(\hat{L}^2,\hat{L}_z)$ 表象中 $\hat{L}_y$ 的矩阵表示。

(2) 证明 $\hat{L}_y^3=\hat{L}_y$。

(3) 证明算符 $e^{-i\lambda\hat{L}_y}=1-i\hat{L}_y sin\lambda-(1-cos\lambda)\hat{L}_y^2$。

(4) 求出 $e^{-i\lambda\hat{L}_y}$ 在 $(\hat{L}^2,\hat{L}_y)$ 表象中的矩阵表示。

解：

四、 一个质量为 m 的粒子处在一维无限深方势阱 $\left(-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}\right)$ 中，其中哈密顿量记为 H_0。

(1) 求 H_0 的本征值和对应的波函数 $\psi(x)$。

(2) 记受到微扰 $H'(x) = \lambda\delta(x)(\lambda > 0)$，求基态能量和基态波函数的一级修正。

(3) 严格求 $H = H_0 + H'$ 下的能级方程，并考虑 $\lambda \ll \frac{2\hbar^2}{mL}$ 的极限并与上述一级微扰论的基态能量比较。

解：

五、 由 3 个电子组成的体系，设其自旋哈密顿量为 $(\hbar = 1)$ $\hat{H} = a(\hat{S}_1^x\hat{S}_2^x + \hat{S}_1^y\hat{S}_2^y + \hat{S}_2^y\hat{S}_3^y + \hat{S}_2^x\hat{S}_3^x + \hat{S}_1^x\hat{S}_3^x + \hat{S}_1^y\hat{S}_3^y) - b\hat{S}_T^z$ 其中 $\hat{S}_i^\alpha$ 代表第 i 个电子自旋算符的 α 分量，$\hat{S}_T^z$ 代表体系总自旋算符 $\vec{S}_T = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$ 的 z 分量。

(1) 求出总自旋平方算符 $\hat{S}_T^2$ 的最大和最小本征值

(2) 计算以下两个对易式：$\left[\hat{S}_T^2, \hat{H}\right]$、$\left[\hat{S}_T^z, \hat{H}\right]$

(3) 求出 $\hat{H}$ 的所有本征值。

解：

中国科学院大学
2018 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 质量为 m 的粒子在一维无限深方势阱 $(0<\mathrm{x}<\mathrm{a})$ 中运动，设初始波函数 $\psi(x,0)=A\left[\phi_1(x)+\phi_2(x)\right]$, 其中 $\phi_1(x),\phi_2(x)$ 分别表示归一化的基态和第一激发态波函数。

(1) 写出 $\phi_1(x),\phi_2(x)$ 和归一化因子 A。

(2) 求 $t=0$ 时的 $\psi(x,t)$。

(3) 计算 $t=0$ 时粒子坐标算符 x 和动量算符 p 的平均值。

(4) 计算 $t>0$ 时粒子能量的可取值，对应概率和平均值。

解:

二、 考虑 $|lm>$ 态矢量空间中 $l=1$ 的子空间。在 $\left(\hat{l},\hat{l}_x\right)$ 表象中角动量分量算符的矩阵表示为:

$$\mathrm{L_x}=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\mathrm{L_y}=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}=\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{bmatrix},\mathrm{L_z}=\hbar=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

(1) 求 $\mathrm{L_x}$ 矩阵的本征值和本征矢;

(2) 求联系 $\left(\hat{l}^2,\hat{l}_z\right)$ 表象和 $\left(\hat{l}^2,\hat{l}_x\right)$ 表象的么正变换矩阵 S;

(3) 利用幺正变换矩阵 S, 求出 $\left(\hat{l},\hat{l}_x\right)$ 表象中的矩阵表示 $\hat{l}_x,\hat{l}_y,\hat{l}_z$ 。

解:

三、 一个磁矩为 $\vec{\mu}=\mu_0\vec{\sigma}$ 的自旋 1/2 粒子在 $\mathrm{t}=0$ 时处于沿 z 正方向的均匀磁场 $\overrightarrow{\mathrm{B}}_0$ 中, 其中 $\vec{\sigma}$ 为 Pauli 算符。当 $\mathrm{t}>0$ 时再加上一个旋转磁场 $\vec{B}_1(\mathrm{t})$, 其方向和 z 轴垂直: $\overrightarrow{\mathrm{B}}_1(t)=\mathrm{B}_1\cos\left(2\omega_0t\right)\vec{\mathrm{e}}_x-\mathrm{B}_1\sin\left(2\omega_0t\right)\vec{\mathrm{e}}_y$, 其中 $\omega_0=\frac{\mu_0B_0}{\hbar}$ 。

(1) 求 $t>0$ 时的哈密顿算符 $\mathrm{H}=-\vec{\mu}\cdot\left[\overrightarrow{\mathrm{B}}_0+\overrightarrow{\mathrm{B}}_1(t)\right]$ 的本征值。

(2) 若当 $t=0$ 时刻测得其自旋向下，求 t 时刻自旋向上的概率。

解:

四、 一个质量为 m 带电为 $-e$ 的粒子在 $X-Y$ 平面内，做半径为 r 的圆周运动。

(1) 求该粒子做圆周运动的能量本征值和本征函数。

(2) 若在外场中添加一个微扰电场 $\vec{\mathscr{E}}=-\mathscr{E}\vec{e}_x$，运用微扰理论, 求第一、第二激发能量的二级近似。

解：

五、 质量为 m 的粒子在长度为 a 的一维无限深对称垒势阱 $(|x|<a/2)$ 中处于基态。设 $t=0$ 时刻突然添加一高度为 c, 宽度为 $b(<a)$ 的方形微扰势 H', 在 $t=T$ 时刻突然撤去该微扰势。

(1) 写出一维无限深对称方势阱哈密顿算符 H_0 的本征值和归一化本征函数。

(2) 写出 $\mathrm{t}>\mathrm{T}$ 时刻态矢量 $|\varphi(\mathrm{t})\rangle$ 的表达式。

(3) 试用一级微扰近似计算在 $t>\mathrm{T}$ 后体系跃迁到第一、第二、第三激发态的概率，并算出当微扰势的宽带 b 取何值时对应跃迁概率取最大值。

解：

中国科学院大学

2017 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 量子力学

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 (共 30 分) 一个粒子在一维无限深势阱

$$V(x)=\begin{cases}0 & 0<x<a\\ \infty & x<0,x>a\end{cases}$$

中运动, 其势阱内定态波函数为 $\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$。设 $t=0$ 时刻粒子势阱内的波函数为 $\Psi(x,0)=Ax(a-x)$

(1) 求归一化常数 A。

(2) 求 $t>0$ 时刻粒子的波函数 $\Psi(x,t)$。

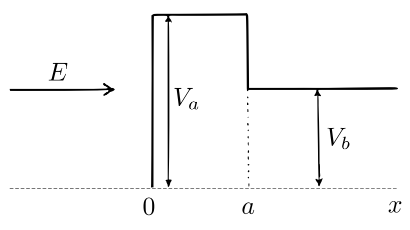
(3) 求 $t>0$ 时刻粒子处于系统基态及第一激发态的概率。

(4) 计算 $t>0$ 时刻粒子位置的平均值。（提示：$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2m-1)^6}=\dfrac{\pi^6}{960}$）

二、 (共 30 分) 一个能量为 E 的粒子, 沿 x 轴从左侧入射。阶梯势垒为

$$V(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ V_a, & 0<x<a\\ V_b, & x>a\end{cases}$$

如图所示。



(1) 取入射波函数为 $\psi_i(x)=e^{ik_1x}$, $k_1=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, 求入射粒子流密度。

(2) 选择题: 若 $E=V_b$, 透射系数 T 是多少?

A. 1　　B. $0<T<1$　　C. 0

(3) 选择题: 要增大透射系数 T, 以下哪种做法是正确的?

A. $V_b=E$, 减小 V_a, 但保持 $V_b<V_a$　　B. 减小 $V_b(V_b<E)$, 但保持 V_a 不变

C. $V_b=E$, 减小 V_a, 使 $V_a<V_b$

(4) 选择题: 设 $E > V$, 反射波函数为 $\psi_r(x) = Be^{-ik_1x}$, 透射波函数为 $\psi_t(x) = Ce^{ik_2x}$，其中 $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V_b)}{\hbar^2}}$。问透射系数 T 是多少?

A. $|C|^2$　　B. $1-|B|^2$　　C. 以上都不是

三、 (共 30 分)

(1) 设质量为 m 的粒子在一维势场 $V(x)$ 运动, 试证明 Ehrenfest 定理:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\langle x\rangle = \dfrac{\langle p\rangle}{m} \\ \dfrac{d}{dt}\langle p\rangle = -\left\langle \dfrac{\partial V}{\partial x}\right\rangle \end{cases}$$

其中，$\langle F\rangle = \int \psi^*(x,t)F(x,p)\psi(x,t)dx$ 表示算符 F 的平均值。

(2) 设二维各向异性谐振子在均匀电场 $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$ 中运动, 哈密顿量为

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_x^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2y^2 - q\left(\mathcal{E}_xx + \mathcal{E}_yy\right)$$

2 m^2m2 其中 q 为粒子电荷。试写出无电场情形下体系的束缚态能级, 并以 q 为参数用 Hellmann-Feynman 定理计算存在电场情形下体系的束缚态能级。

解:

四、 (共 30 分) 设哈密顿算符的矩阵表示为 $H = H_0+\lambda H'$,$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$,$H' = \begin{pmatrix} 0 & ia \\ -ia & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $E_1 < E_2$，$\left|\frac{\lambda a}{E_2-E_1}\right| << 1$。

(1) 以 $\lambda H'$ 作为微扰, 用微扰论求 H 的准确至二级的本征值以及准确至一级的归一化本征矢。

(2) 精确求解 H 的本征值, 并与近似结果比较。

解:

五、 (共 30 分) 电子 1 和 2 分别局域于两个空间格点上。设体系哈密顿量为

$$H = -2C\left(s_x^{(1)}s_x^{(2)} + s_y^{(1)}s_y^{(2)}\right)$$

其中, $\vec{s}^{(i)}(i=1,2)$ 为自旋算符,C 是一个常数。令 $\hbar = 1$。

(1) 写出体系的总自旋 $\vec{s} = \vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(2)}$ 的平方算符 $\vec{s}^2$ 和 $S_z = S_z^{(1)} + S_z^{(2)}$ 的可取值。

(2) 用 $\vec{s}^2$ 和 s_z 表示体系的哈密顿量。

(3) 求出体系所有能级的能量。

(4) 沿 z 方向施加一磁场, 强度为 B, 求出体系所有能级的能量。

解:

中国科学院大学
2016 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知:
1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 一个质量为 m 的粒子限制在半径为 a 的圆周上运动。

(1) 求相应的本征值和本征函数。

(2) $t=0$ 时，$\Psi = A\sin^2\theta$，其中 θ 为极角，A 为归一化因子，求 t 时刻的波函数 $\Psi(t)$。

(3) 求 t 时刻垂直于圆周角动量的平均值。

解:

(1) 波函数：$\psi_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\varphi}$；能量本征值：$E_n = \frac{\hbar^2}{2ma^2}n^2$。其中 $n = 0, \pm1, \pm2\ldots$

(2) 将波函数分解成能量本征态可得：

$$\psi(\theta,t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i2\theta}\cdot e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} - \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i2\theta}\cdot e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}$$

(3) 能量本征态也是 $\hat{L}_z$ 本征态: $\hat{L}_z\psi_n = n\hbar\psi_n$，得 $\bar{l}_z = 0$

二、 已知一质量为 m 的粒子处于 δ 势阱中, $\mathrm{V}(x) = -V_0\delta(x), (V_0 > 0)$ 中运动。

(1) 求束缚态能量粒子，以及归一化的束缚态波函数。

(2) 利用 Feynman-Hellmann 定理和 virial 定理, 求束缚态粒子的平均动能和平均势能。

解:

(1) 体系只存在一个束缚态，且是偶宇称态

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{mV_0}}{\hbar}e^{+kx}, & x<0 \\ \frac{\sqrt{mV_0}}{\hbar}e^{-kx}, & x>0 \end{cases}$$

束缚态能量为 $E = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2}$

(2) 动能平均值：$\bar{T} = \frac{mV_0^2}{2\hbar^2}$；势能平均值：$\bar{V} = -\frac{mV_0^2}{\hbar^2}$。

笔记 这里利用 $\bar{V} + \bar{T} = \bar{E}$，可以分别用两个定理各自独立求解出来。

三、 二维各向同性谐振子系统哈密顿算符为 $\mathrm{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2\right)$。设谐振子又受到微扰作用，总哈密顿量变成 $\mathrm{H} = H_0 + H', H' = \lambda\left(xy + y^2\right)$（$\lambda$ 是小常数）。

(1) 写出 $\mathrm{H_0}$ 的第 n 级激发态能量及其简并度。

(2) 求 $\mathrm{H_0}$ 基态能量的一级微扰修正。

(3) 求 $\mathrm{H_0}$ 第一激发态能量的一级微扰修正。

提示: 一维情况下有 $\langle \mathrm{n'_x}|\hat{x}|n_x\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n_x+1}\delta_{n'_x,n_x+1} + \sqrt{n_x}\delta_{n'_x,n_x-1}\right)$。

解:

(1) $E_n^{(0)} = (n+1)\hbar\omega$，$n = n_1 + n_2 = 0, 1, 2\ldots$，简并度为 $f_n = n+1$。

(2) $E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)} = \hbar\omega + \frac{\lambda\hbar}{2m\omega}$

(3) 微扰矩阵为

$$H' = \frac{\lambda\hbar}{2m\omega}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_1^{(1)} = \frac{\lambda\hbar}{2m\omega}(2 \pm \sqrt{2})$，能级分裂为两条：

i. $E_{11} = 2\hbar\omega + \frac{\lambda\hbar}{2m\omega}(2-\sqrt{2})$；

ii. $E_{12} = 2\hbar\omega + \frac{\lambda\hbar}{2m\omega}(2+\sqrt{2})$

四、 已知一粒子自旋为 1/2 、磁矩为 μ 的粒子置于 z 方向的恒定磁场 $\mathrm{B} = B_0 = (0, 0, \mathrm{B}_0)$ 中。系统哈密顿算符 $\mathrm{H}_0 = -\mu B \cdot \sigma$, 其中 σ 为泡利矩阵。$t < 0$ 时粒子处于基态。设系统再受到 x 方向的微小脉冲磁场 $\mathrm{B}_1 = (\mathrm{B}_1, 0, 0)\,\delta(\mathrm{t})$ 作用。请使用微扰（一级近似）进行计算:

(1) 粒子 $t > 0$ 时处于激发态的概率和仍处于基态的概率。

(2) 粒子 $t > 0$ 时的波函数。

(3) 粒子 $t > 0$ 时分别处于 σ_x 的两个本征态的概率（精确到 B_1 的平方阶）。

解:

(1) σ_z 表象：基态 $|\psi_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$E_1 = -\mu B_0$；激发基态 $|\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$E_2 = +\mu B_0$。

$t > 0$ 时刻处在激发态的概率为 $P_{12}(t) = \left(\frac{\mu B_1}{\hbar}\right)^2$；仍处在基态的概率 $P_{11}(t) = 1 - \left(\frac{\mu B_1}{\hbar}\right)^2$

(2) 波函数

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{1 - \left(\frac{\mu B_1}{\hbar}\right)^2} \cdot e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\,|\psi_1\rangle + i\frac{\mu B_1}{\hbar} e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\,|\psi_2\rangle$$

(3) $\sigma_x = -1$ 态的概率为

$$\begin{aligned} P_{-1} &= \frac{1}{2}\left|\sqrt{1 - \left(\frac{\mu B_1}{\hbar}\right)^2} \cdot e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + i\frac{\mu B_1}{\hbar} e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + 2\frac{\mu B_1}{\hbar}\sqrt{1 - \left(\frac{\mu B_1}{\hbar}\right)^2} \cdot \sin\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t\right) \\ &\approx \frac{1}{2}\left(1 + 2\frac{\mu B_1}{\hbar} \cdot \sin\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\mu B_1}{\hbar} \cdot \sin\frac{2\mu B_0}{\hbar}t \end{aligned}$$

其中用到了 $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$ 近似。得到 $\sigma_x = +1$ 态的概率为

$$P_{+1} = \frac{1}{2} - \frac{\mu B_1}{\hbar} \cdot \sin\frac{2\mu B_0}{\hbar}t$$

五、 考虑原子中处于同一个单电子能级 E_{nl} 上的两个电子, 以 l_1、s_1 及 l_2、s_2 分别表示电子 1、2 的轨道角动量算符和自旋角动量算符, 则总轨道角动量算符 $\mathrm{L} = l_1 + l_2$, 总自旋算符 $\mathrm{S} = s_1 + s_2$。

(1) 写出总轨道角动量量子数 L 的可取值。

(2) 写出总自旋角动量量子数 S 的可取值, 并求出 S^2 和 S_z 的共同本征态。

(3) 根据两个电子的全同性，讨论 $\mathrm{L} + \mathrm{S}$ 的奇偶性。

解:

(1) $\mathrm{L} = l_1 + l_2$，L 可能的取值为 $L = 0, 1, 2, \ldots, 2l$

(2) $S=s_1+s_2$，S 可能的取值为 $0,1$。S^2 和 S_z 的共同本征态 $|sm\rangle$ 有四个：

$$
\begin{aligned}
|1,1\rangle \quad &= |\uparrow\uparrow\rangle \\
|1,0\rangle \quad &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\rangle) \\
|1,-1\rangle \quad &= |\downarrow\downarrow\rangle \\
|0,0\rangle \quad &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle)
\end{aligned}
$$

(3) 利用 $C-G$ 系数关于交换的关系式

$$\langle j_1m_1j_2m_2|j_3m_3\rangle=(-1)^{j_1+j_2-j_3}\langle j_2m_2j_1m_1|j_3m_3\rangle$$

由于 $l_1=l_2=l$，故当 L 为偶数时，空间部分关于两个粒子交换对称；当 L 为奇数时，空间部分关于两个粒子交换反对称。可得 $\mathrm{L}+\mathrm{S}$ 为偶数。

中国科学院大学
2015 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 质量为 μ 的粒子限制在长度为 L 的一维匣子 $(0<x<L)$ 中自由运动, 在 $x=0$ 与 $x=L$ 处其定态波函数满足条件 $\Psi(0)=\Psi(L), \Psi'(0)=\Psi'(L)$。

(1) 求体系能级；

(2) 将第一激发态归一化波函数表示为动量本征态的线性组合, 并求动量平均值 $\bar{p}$ 为 0 时组合系数满足的条件。

> 解:
>
> (1) 可将方程的解表示为
> $$\psi(x)=A\sin kx+B\cos kx$$
> 这里最终只能得到 $kL=2n\pi$，系数 A 和 B 定不出来，说明这个体系的能量本征态存在简并情况。另外，关于 n 的取值范围为 $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,,\cdots$。能量为
> $$E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(2n)^2$$
>
> (2) 第一激发态 $n=\pm1$，$k=\pm\frac{2\pi}{L}$，利用欧拉关系式，波函数可为
> $$\psi(x)=c_1e^{ikx}+c_2e^{-ikx}$$
> 得到系数关系为 $|c_1|=|c_2|=\frac{1}{\sqrt{2}}$。

二、 粒子在球对称谐振子势阱 $V(r)=\frac{1}{2}\mu\omega^2\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 中运动, 受到微扰作用

$$H'=\lambda\left(xyz+x^2y+xy^2\right)$$

其中 λ 为常数。求准确到二级微扰修正的基态能量。

提示：粒子数表象下, $\langle n_x'|\hat{x}|n_x\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\left(\sqrt{n_x+1}\delta_{n_x',n_x+1}+\sqrt{n_x}\delta_{n_x',n_x-1}\right)$。

> 解:
>
> (1) 设 $|\psi\rangle=|n_xn_yn_z\rangle$，$E_n=\left(n_x+n_y+n_z+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega$。
> ①显然 $\langle000|H'|000\rangle=0$
> ②矩阵元 $\langle n_xn_yn_z|H'|000\rangle$ 不为零的情况如下
>
> | | | | | |
> |---|---|---|---|---|
> | $\langle111\|xyz\|000\rangle$ | $\langle010\|x^2y\|000\rangle$ | $\langle210\|x^2y\|000\rangle$ | $\langle001\|xy^2\|000\rangle$ | $\langle120\|xy^2\|000\rangle$ |

基态能量的二级修正为 $E=\frac{3}{2}\hbar\omega-\frac{11(\lambda\hbar)^2}{24\mu^3\omega^4}$

三、 两个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子组成的体系，$\hat{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{1}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{2}}$ 分别表示两个粒子的自旋算符，$\hat{\boldsymbol{S}}$ 为两粒子的总自旋算符，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 表示两粒子相对运动方向的单位矢量。设系统的相互作用哈密顿量为 $H=3\left(\hat{\boldsymbol{S}}_{1}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\right)\left(\hat{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{2}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\right)-\hat{\boldsymbol{S}}_{1}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_{2}$。

(1) 证明：

i. $\hat{\boldsymbol{S}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_2=\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{S}}^2-\frac{3}{4}\hbar^2$

ii. $\left(\hat{\boldsymbol{S}}_{1}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\right)\left(\hat{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{2}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\right)=\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})^2-\frac{1}{4}\hbar^2$

(2) 证明 $\left[H,\hat{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{2}}\right]=0$

解：

(1) 证明略。其中会遇到 $(\hat{S}_1\cdot\hat{n})^2$ 的表达式。处理这个有两种方法：①利用 $S_1=\frac{\hbar}{2}\sigma_1$；②利用 $\hat{S}_1\cdot\hat{n}$ 的本征值。得到

$$(\hat{S}_1\cdot\hat{n})^2=\frac{1}{4}\hbar^2$$

(2) 证明略

四、 质量为 μ 的粒子在一维势 $V(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ Bx & x>0\end{cases}$ 中运动, 其中 $B>0$ 是常数。

(1) 试从下列波函数中选择一个合理的束缚态试探波函数, 并说明理由。

A. $e^{-\frac{x}{a}}$　　B. $xe^{-\frac{x}{a}}$　　C. $1-e^{-\frac{x}{a}}$

其中 $a>0$ 为变分参数。

(2) 取所选的试探波函数，用变分法估算体系基态能量。

解：

(1) 选 $xe^{-\frac{x}{a}}$，理由略。

(2) 先归一化：

$$\psi=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{2}{\sqrt{a^3}}xe^{-x/a} & x\geq 0\end{cases}$$

得到

$$E=\frac{\hbar^2}{2\mu a^2}+B\frac{3a}{2}$$

当 $a=\left(\frac{2\hbar^2}{3B\mu}\right)^{1/3}$ 时 $\frac{\partial E}{\partial a}=0$，此时 $E=\frac{9}{4}\cdot B\cdot\left(\frac{2\hbar^2}{3B\mu}\right)^{1/3}$

五、 一个二能级体系, 哈密顿算符的矩阵表达式为 $H_0=\begin{pmatrix}E_1^{(0)} & 0\\ 0 & E_2^{(0)}\end{pmatrix}$, $\left(E_1^{(0)}<E_2^{(0)}\right)$。设 $t=0$ 时刻体系处于 H_0 的基态上, 后受微扰 H' 的作用, $H'=\begin{pmatrix}0 & \gamma\\ \gamma & 0\end{pmatrix}$, γ 为常数。

(1) 求出在 $t>0$ 时刻, 体系处于 H_0 激发态的几率 $P_{E_2^{(0)}}(t)$ 的精确表达式。

(2) 利用一阶含时微扰论求 $P_{E_2^{(0)}}(t)$, 并与精确表达式比较, 讨论所得结果的适用条件。

解：

(1) 可用含时薛定谔方程解，或者利用 $H=H_0+H'$ 的本征态来解。

$$H=\begin{bmatrix}E_1^{(0)} & \gamma\\ \gamma & E_2^{(0)}\end{bmatrix}$$

本征值为

$$\varepsilon_1=\frac{E_1^{(0)}+E_2^{(0)}-\sqrt{\left(E_1^{(0)}-E_2^{(0)}\right)^2+4\gamma^2}}{2}\qquad \varepsilon_2=\frac{E_1^{(0)}+E_2^{(0)}+\sqrt{\left(E_1^{(0)}-E_2^{(0)}\right)^2+4\gamma^2}}{2}$$

ε_1 对应的本征态为 φ_1，ε_2 对应的本征态为 φ_2

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}\dfrac{\gamma}{\sqrt{\left(\varepsilon_1-E_1^{(0)}\right)^2+\gamma^2}}\\ \dfrac{\varepsilon_1-E_1^{(0)}}{\sqrt{\left(\varepsilon_1-E_1^{(0)}\right)^2+\gamma^2}}\end{pmatrix}\qquad \varphi_2=\begin{pmatrix}\dfrac{\gamma}{\sqrt{\left(\varepsilon_2-E_1^{(0)}\right)^2+\gamma^2}}\\ \dfrac{\varepsilon_2-E_1^{(0)}}{\sqrt{\left(\varepsilon_2-E_1^{(0)}\right)^2+\gamma^2}}\end{pmatrix}$$

初态 $|\psi_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 随时间演化为

$$|\psi(t)\rangle = ae^{-i\frac{\varepsilon_1}{2}t}\varphi_1 + be^{-i\frac{\varepsilon_2}{2}t}\varphi_2$$

其中 $a = \langle\varphi_1|\psi_1\rangle$，$b = \langle\varphi_2|\psi_1\rangle$。处于 H_0 的激发态 $|\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的概率为

$$\begin{aligned} P_{E_2^{(0)}}(t) &= \langle\psi_2|\psi(t)\rangle \\ &= \left| \frac{\gamma}{\sqrt{\left(\varepsilon_1 - E_1^{(0)}\right)^2 + \gamma^2}} \cdot \frac{\varepsilon_1 - E_1^{(0)}}{\sqrt{\left(\varepsilon_1 - E_1^{(0)}\right)^2 + \gamma^2}} \cdot e^{-i\frac{\varepsilon_1}{2}t} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\gamma}{\sqrt{\left(\varepsilon_2 - E_1^{(0)}\right)^2 + \gamma^2}} \cdot \frac{\varepsilon_2 - E_1^{(0)}}{\sqrt{\left(\varepsilon_2 - E_1^{(0)}\right)^2 + \gamma^2}} \cdot e^{-i\frac{\varepsilon_2}{2}t} \right|^2 \end{aligned}$$

(2) 利用一阶含时微扰论计算 $P_{E_2^{(0)}}(t)$ 的结果为

$$P_{E_2^{(0)}}(t) = \frac{4\gamma^2}{(E_2^{(0)} - E_1^{(0)})^2} \sin^2\left(\frac{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}}{2\hbar}\right)t$$

中国科学院大学
2014 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 已知算符 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}-1 \end{pmatrix}$， $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, 其中 c 为实常数，当 $\mathrm{c} = \mathrm{c}_0$, 有共同本征态。

(1) 求 c_0 的值;

(2) 求当 $\mathrm{c} = \mathrm{c}_0$ 时算符 A 和 B 共同本征态;

(3) 求当 $\mathrm{c} \neq \mathrm{c}_0$, 由 A 表象到 B 表象的变换矩阵。

解：

(1) $c_0 = 2$

(2) $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$; $|-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

(3) 过渡矩阵为

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

笔记 由于基矢量的选择问题，过渡矩阵不唯一。

二、 两个质量为 μ 的非全同粒子被紧闭在 $0 \leq x \leq L$ 的无限深势阱中。

(1) 忽略两个粒子间的相互作用, 求系统的三个最低能量和相应的归一化波函数；

(2) 假设粒子间的相互作用 $\mathrm{V} = \lambda\delta(x_1 - x_2)$ 的微弱相互作用, 求系统的三个最低能量（λ 的一级近似）及相应的归一化波函数。

解：

(1) 两粒子的波函数和能量为

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{2}{L}\sin\frac{n_1\pi}{L}x_1 \sin\frac{n_2\pi}{L}x_2 \quad E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(n_1^2 + n_2^2)$$

基态波函数无简并，第一激发态二重简并，第二激发态无简并。

(2) 基态：$E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\lambda}{L}$，波函数存疑。
第一激发态：分裂成两条。

第一条 $E_{11}=\frac{5}{2}\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2}$，$\psi'_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{11}-\psi_{12})$
第一条 $E_{11}=\frac{5}{2}\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2}+2\cdot\frac{\lambda}{L}$，$\psi'_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{11}+\psi_{12})$

三、 一个质量为 μ、电荷为 q、自旋为 0 的粒子被限制在 xOy 平面内半径为 a 的圆周上运动。

(1) 求该粒子的哈密顿量 $\hat{H}$ 及角动量算符的 L_z 的本征值及相应的归一化本征函数；

(2) 若在 Z 轴加一磁场 $\vec{B}$, 求系统哈密顿量 $\hat{H}$ 的本征值及相应的归一化本征函数, 讨论加入磁场后能级简并度的变化。（提示取矢势 $\vec{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$）

解：

(1) $\hat{H}=\frac{L_z^2}{2\mu a^2}$ 与 L_z 有共同本征函数

$$\psi_m(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}\quad E_m=\frac{\hbar^2m^2}{2\mu a^2}$$

$m=0,\pm1,\pm2,\cdots$，除了 $m=0$ 以外, 其他能级均二重简并

(2) 加上磁场后

$$\begin{aligned}\hat{H}=\frac{1}{2\mu}\left(\hat{\vec{p}}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2&=\frac{1}{2\mu}\left[\hat{\vec{p}}^2+\left(\frac{q}{c}\right)^2\vec{A}^2-\frac{q}{c}(\hat{\vec{p}}\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\hat{\vec{p}})\right]\\&=\frac{1}{2\mu}\left[\frac{{L_z}^2}{a^2}+\left(\frac{q}{c}\right)^2\frac{a^2B^2}{4}-\frac{q}{c}BL_z\right]\end{aligned}$$

能量为

$$E_m=\frac{1}{2\mu}\left[\frac{(m\hbar)^2}{a^2}+\left(\frac{q}{c}\right)^2\frac{a^2B^2}{4}-\frac{q}{c}Bm\hbar\right]$$

简并解除

四、 一个质量为 μ 、电荷为 q 的谐振子在外电场 ε 的作用下 $\hat{\mathrm{H}}=\frac{p^2}{2\mu}+\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2-q\varepsilon x$。

(1) 若已知 $\hat{H}_0=\frac{P^2}{2\mu}+\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2$ 的本征能量为 $\mathrm{E_n}$ 的相应本征函数为 $|n\rangle$, 求 $\hat{\mathrm{H}}$ 的本征能量 $\widetilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{n}}$ 及相应的本征函数 $|\tilde{n}\rangle$。

(2) 若 $\mathrm{t}=0$ 时刻处于系统 $\hat{H}_0$ 的初态 $|0\rangle$, 求 $\mathrm{t}>0$ 时任处 $\hat{H}_0$ 的初态 $|0\rangle$ 几率 P_0。

解：

(1) $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2\mu}+\frac{1}{2}\mu\omega^2\left(\hat{x}-x_0\right)^2-\frac{q^2\varepsilon^2}{2\mu\omega^2}$，其中 $x_0=\frac{q\varepsilon}{\mu\omega^2}$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{n}}=\mathrm{E_n}--\frac{q^2\varepsilon^2}{2\mu\omega^2}\qquad|\tilde{n}\rangle=e^{-i\frac{x_0}{\hbar}\hat{p}}|n\rangle$$

(2) 先将 $|0\rangle$ 用 $|\tilde{n}\rangle$ 表示出来，得到在 t 时刻的波函数 $|\tilde{\psi}(t)\rangle$，再将 $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ 用 $|n\rangle$ 表示出来，得到波函数 $|\psi(t)\rangle$，最后得到相应的概率

$$P_0=e^{2\cdot\frac{\omega}{\hbar}\cdot mx_0^2\cdot\sin\frac{\omega}{2}t}$$

五、 三个电子做一维运动, 相互之间的作用可以忽略。单粒子的能量本征值为 ε_n, 相应的归化一波函数为 $\psi_{n\sigma}=\psi_n(x)\chi_\sigma,\varepsilon_0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\ldots$, $n=0,1,2\ldots\ldots$; 其中 σ 为单粒子自旋 $\hat{s}$ 的第三分量 $\hat{s}_z$ 的本征态。

(1) 求该全同体系的基态能量及相应的归化一化本征函数。

(2) 求系统总自旋的 $\hat{S}$ 的第三分量 $\hat{S}_z = \hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} + \hat{S}_{3z}$ 在基态的平均值。

解：

(1) 基态能量 $E_0 = 2\varepsilon_0 + \varepsilon_1$，二重简并

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix} \psi_{0+}(1) & \psi_{0+}(2) & \psi_{0+}(3) \\ \psi_{0-}(1) & \psi_{0-}(2) & \psi_{0-}(3) \\ \psi_{1+}(1) & \psi_{1+}(2) & \psi_{1+}(3) \end{vmatrix} \quad |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix} \psi_{0+}(1) & \psi_{0+}(2) & \psi_{0+}(3) \\ \psi_{0-}(1) & \psi_{0-}(2) & \psi_{0-}(3) \\ \psi_{1-}(1) & \psi_{1-}(2) & \psi_{1-}(3) \end{vmatrix}$$

(2) $\langle\varphi_1\,|S_z|\,\varphi_1\rangle = \frac{\hbar}{2}$，$\langle\varphi_2\,|S_z|\,\varphi_2\rangle = -\frac{\hbar}{2}$

中国科学院大学

2013 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 量子力学

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、（共 30 分）质量为 μ 的粒子在一个无限深球方势阱

$$V(r)=\begin{cases}0, & r\le a\\ \infty, & r>a\end{cases}$$

中运动。

(1) 写出径向波函数 $R_l(r)$ 满足的方程（已知: $\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r-\frac{\hat{l}^2}{\hbar^2 r^2}$ ）。

(2) 求其中 $l=0$ 的归一化能量本征函数和能量本征值。

解:

(1) 设波函数为 $\psi=R_l(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$，分离变量时产生的常数为 $l(l+1)\hbar^2$，得径向波函数为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}R_l(r)+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R_l(r)+\left[\frac{2\mu}{\hbar^2}(E-V(r))-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R_l(r)=0$$

可作变量替换 $R_l(r)=\chi_l(r)/r$，进一步化简为

$$\chi''{}_l(r)+\left[\frac{2\mu}{\hbar^2}(E-V(r))-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\chi_l(r)=0$$

(2) $l=0$ 时能量本征函数在 $r>a$ 区域为 0，在 $r\le a$ 区域为

$$\psi_n=\frac{1}{\sqrt{2a\pi}}\cdot\frac{\sin\frac{n\pi}{a}r}{r}$$

能量本征值为

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}$$

其中 $n=1,2,3,\cdots$

二、（共 30 分）考虑一质量为 m 的自由粒子的一维运动。设初始 $(t=0)$ 时刻波函数为 $\psi(x,0)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}e^{ik_0x-\alpha x^2/2}$（$k_0$ α 为实常数；$\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-ax^2}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $\quad a>0$）。

(1) 求 $t>0$ 时刻动量表象波函数 $\tilde{\Psi}(k,t)$ 及粒子动量几率分布 $\Pi(k,t)$ 。

(2) 求 $t>0$ 时刻波函数 $\Psi(x,t)$ 及粒子位置几率分布 $\mathrm{P}(x,t)$ 。

(3) 简述粒子动量几率分布 $\Pi(k,t)$ 及位置几率分布 $\mathrm{P}(x,t)$ 随时间演化的特性。

解：

(1) 对自由粒子而言动量是个守恒量，首先变换到动量表象计算较为简单：

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(k,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}(k',0)\delta(k-k')e^{-i\frac{\hbar k'^2}{2m}t}dk' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot e^{-\frac{(k_0-k)^2}{2\alpha}}\cdot e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t}\end{aligned}$$

动量几率分布 $\Pi(k,t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}e^{-\frac{(k_0-k)^2}{\alpha}}$

笔记 这里求波函数，也可以直接在动量表象中用时间演化算符来做。

(2) 波函数为

$$\psi(x,t)=\left(\frac{1}{\alpha\pi}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{-k_0^2/2\alpha}\sqrt{\frac{2\pi\alpha\mu}{\mu+i\alpha\hbar t}}\exp\left[\alpha\mu\frac{k_0^2/\alpha^2+2ixk_0/\alpha-x^2}{2(\mu+i\alpha\hbar t)}\right]$$

粒子位置几率分布 $\mathrm{P}(x,t)$ 为

$$\mathrm{P}(x,t)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+(\alpha\hbar t)^2}}e^{-k_0^2/\alpha}\exp\left[\alpha\mu\frac{-\mu\left(x-k_0\hbar t/\mu\right)^2+\left(k_0\hbar t\right)^2/\mu+\mu k_0^2/\alpha^2}{\mu^2+(\alpha\hbar t)^2}\right]$$

(3) 动量分布几率不随时间变化，即波包所包含的各动量成分不发生变化，自由粒子动量守恒；但是坐标空间的几率分布随时间变化，波包峰值位置向前移动的同时，波峰随时间衰减，波峰坐标 $x_m(t)=\frac{k_0\hbar}{\mu}t$，波包速度 $v=\frac{k_0\hbar}{\mu}=\frac{p_0}{\mu}$。

三、（共 30 分）一自旋为 1/2 的粒子的归一化自旋态为 $|\lambda\rangle$ 。设自旋态 $|\lambda\rangle$ 下测量自旋角动量 $\hat{s}_z$ 得到 $\frac{\hbar}{2}$ 的几率是 9/25, 测量 $\hat{s}_x$ 得到 $\frac{\hbar}{2}$ 的几率是 1/2 。

(1) 求自旋态 $|\lambda\rangle$ 。

(2) 求该自旋态下自旋角动量 $\hat{s}_y$ 的平均值。

解：

(1) 在 s_z 表象中求解，如果采用这种设法

$$|\lambda\rangle=\frac{3}{5}e^{i\phi_1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\frac{4}{5}e^{i\phi_2}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

展开系数有一个相位的不确定性，其间的关系为 $\phi_1=\phi_2+\frac{\pi}{2}+n\pi$，取值不能随意，要考虑各种情况。可以这样设

$$|\lambda\rangle=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ x+iy\end{pmatrix}$$

解得 $x=0, y=\pm 4/5$。得

$$|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{4i}{5} \end{pmatrix} \qquad |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} \\ -\dfrac{4i}{5} \end{pmatrix}$$

(2) 于是得到 $\langle \lambda_1 |\hat{s}_y| \lambda_1 \rangle = \frac{12}{25}\hbar$ 和 $\langle \lambda_2 |\hat{s}_y| \lambda_2 \rangle = -\frac{12}{25}\hbar$

四、（共 30 分）两个质量均为 m 的非全同粒子在一维无限深势阱

$$V(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le a\\ \infty, & |x|>a\end{cases}$$

中运动。

(1) 不考虑两个粒子间的相互作用, 求该体系的能级和归一化能量本征态。

(2) 设两个粒子之间的相互作用为

$$H'(x_1,x_2)=\begin{cases}V, & (|x_2-x_1|\le b)\\ 0, & (|x_2-x_1|>b)\end{cases}$$

其中 x_1 和 x_2 分别为两个粒子的坐标, $b\le a, V$ 为常数。以 H' 作为微扰, 求基态能量的一级修正, 结果只保留至 b/a 的一次项。

解：

(1) 波函数为

$$\psi_{n_1,n_2}(x_1,x_2)=\frac{2}{a}\sin\frac{n_1\pi x_1}{a}\sin\frac{n_2\pi x_2}{a}$$

能量为

$$E_{n_1,n_2}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(n_1^2+n_2^2\right)$$

(2) 基态能量 $E_{1,1}=\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}$，基态包函数 $\psi_{1,1}^{(0)}(x_1,x_2)=\frac{2}{a}\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{a}$，无简并，能量一级修正项为

$$E^{(1)}=\iint\frac{2}{a}\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{a}H'\frac{2}{a}\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{a}dx_1dx_2$$

直接计算这个积分相当复杂，但考虑到答案只要求我们保留至 b/a 的一次项即可，便可通过让 $b\to 0$ 的形式来化简。首先化简积分区域的表达式

$$E^{(1)}=V\left(\frac{2}{a}\right)^2\int_0^a\sin^2\frac{\pi x_1}{a}\int_{x_1-b}^{x_1+b}\sin^2\frac{\pi x_2}{a}dx_2dx_1$$

其次，化简积分表达式

$$\begin{aligned}E^{(1)}&=V\left(\frac{2}{a}\right)^2\int_0^a\sin^2\frac{\pi x_1}{a}\int_{x_1-b}^{x_1+b}\sin^2\frac{\pi x_2}{a}dx_2dx_1\\&=V\left(\frac{2}{a}\right)^2\int_0^a\sin^2\frac{\pi x_1}{a}\cdot 2b\cdot\sin^2\frac{\pi x_1}{a}dx_1\\&=3V\frac{b}{a}\end{aligned}$$

笔记 此题,其它能级的简并很复杂。举个例子:$33^2+4^2=31^2+12^2=23^2+24^2=9^2+32^2$

五、（共 30 分）

(1) 考虑由两个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的非全同粒子组成的系统, 两个粒子的自旋算符分别记为 $\hat{S}_1$ 和 $\hat{S}_2$。求系统总自旋算符 $\hat{S}_{12}^2$、$\hat{S}_{12,z}$ $\left(\hat{S}_{12}=\hat{S}_1+\hat{S}_2\right)$ 的所有共同本征态和对应的本征值。

(2) 考虑由三个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的非全同粒子组成的系统，第三个粒子的自旋记为 $\hat{S}_3$ 。求总自旋算符 $\hat{S}^2$ 、$\hat{S}_z$ $\left(\hat{S}=\hat{S}_{12}+\hat{S}_3\right)$ 的所有共同本征态和对应的本征值。

解：

(1) 共有 4 个本征态，$\{S_{12}^2, S_{12z}\}$ 对应 $|lm\rangle$ 态如下

$$\begin{aligned}
|11\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle \\
|10\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\rangle\right) \\
|1,-1\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle \\
|00\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle\right)
\end{aligned}$$

(2) 共有 8 个本征态，以 $\{S_{12}^2, S^2, S_z\}$ 为完全集，对应态为 $|ljm\rangle$ 如下

$$\begin{aligned}
|1,\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle &= |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \\
|1,\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle+|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle+|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle\right) \\
|1,\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle+|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle+|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle\right) \\
|1,\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle &= |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle \\
|0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle-|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle\right) \\
|0,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle\right) \\
|1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{6}}\left(|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle+|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle-2\,|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle\right) \\
|1,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{6}}\left(-\,|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle-|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle+2\,|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle\right)
\end{aligned}$$

这八个态，前六个态都是很好写出来的，后面两个态的求法需要点技巧。例如 $|1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ 这个态，首先通过分析知道是 $|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle+|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle+|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle$ 这三个态的组合，然后设出三个系数，利用归一性，外加与 $|1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle$ 和 $|0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ 这两个态正交，列出三个方程，解之可得。

中国科学院大学
2012 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、（共 30 分）质量为 μ 的粒子在一维无限深势阱中运动, 势能

$$V=\begin{cases}0, & 0\le x\le a\\ \infty, & x<0 \text{ 或} x>a\end{cases}$$

(1) 求粒子的能级和归一化波函数。

(2) 画出处于第二、第三激发态的粒子的概率密度的示意图。

(3) 求坐标算符在能量表象下的矩阵元。

解：

(1) 在 $0\le x\le a$ 区域 $\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x$，其它区域为零。能量 $E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

(2) 第二激发态，$\rho_2=\frac{2}{a}\sin^2\frac{3\pi}{a}x$，第三激发态，$\rho_3=\frac{2}{a}\sin^2\frac{4\pi}{a}x$，图略。

(3) $n\ne m$：$\langle n|\hat{x}|m\rangle=\frac{a}{\pi^2}\left[\frac{(-1)^{m-n}-1}{(m-n)^2}-\frac{(-1)^{m+n}-1}{(m+n)^2}\right]$；$n=m$：$\langle n|\hat{x}|n\rangle=\frac{a}{2}$

二、（共 30 分）质量为 μ 的一维谐振子, 带电量为 q，初始 $t=-\infty$ 时处于基态 $|0\rangle$。设加上微扰 $H'=-qEx\exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)$, 其中 E 为外电场强度，τ 为参数。求 $t=+\infty$ 时谐振子仍停留在基态的概率。

解： $\langle m|H'|0\rangle=-qEe^{-\frac{t^2}{\tau^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}\delta_{m1}$，跃迁到 $|m\rangle$ 态的系数为

$$\begin{aligned}a_m(t)&=\frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{qE}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}\right)\delta_{m1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{\tau^2}+i\omega_{m0}t}dt\\ &=\frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{qE}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}\right)\delta_{m1}\cdot\tau e^{-\frac{\omega_{m0}^2\tau^2}{4}}\cdot\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

故只可能跃迁到 $|1\rangle$，在 $t=+\infty$ 仍然停留在基态的概率为（注意到 $\omega_{10}=\omega$）

$$\begin{aligned}P_0=1-a^*a&=1-\frac{q^2E^2\tau^2}{\mu\omega_{10}\hbar}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot e^{-\frac{\omega_{10}^2\tau^2}{2}}\\ &=1-\frac{q^2E^2\tau^2}{\mu\omega\hbar}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{2}}\end{aligned}$$

三、（共 30 分）设一转动惯量为 I 、电偶极矩为 D 的转子自由地在 $X-Y$ 平面内转动，相对 X 轴正向的转角为 φ 。

(1) 试求其能量本征值和本征态。

(2) 设沿 X 方向加上电场 $\mathscr{E}$, 即微扰哈密顿量为 $H' = -D\mathscr{E}\cos\varphi$, 试用微扰论求其基态能量的一级和二级微扰修正。

解：

(1) $\psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad E_m = \frac{m^2\hbar^2}{2I}$

(2) 易知 $E_0^{(1)} = 0$。而

$$\langle m|H'|0\rangle = \frac{1}{2\pi} \cdot (-D\mathscr{E}) \cdot \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos\varphi d\varphi$$

只有当 $m = \pm 1$ 时才不为零，故 $E_0^{(2)} = -\frac{D^2\mathscr{E}^2 I}{\hbar^2}$

四、（共 30 分）

(1) 写出角动量算符的三个分量 J_x、J_y、J_z 相互间满足的所有对易关系。

(2) 试利用这些对易关系, 证明矩阵元 $\langle m|J_x|n\rangle$ 仅当 $m=n\pm1$ 时不为零。其中 $|m\rangle$ 、$|n\rangle$ 分别为 J_z 的本征值为 $m\hbar$、$n\hbar$ 的本征态。

(3) 设角动量量子数 $j=1$ 。已知在 J_z 的某一个本征态 $|m\rangle$ 中, J_x 取值为 0 的概率为 1/2。求 J_x 取值为 $-\hbar$ 的概率。

解:

(1) 对易关系略

(2) 证明略

(3) $P_{-1}=\frac{1}{4}$

五、（共 30 分）氢原子的哈密顿量为 $H_0=\frac{p^2}{2\mu}-\frac{e^2}{r}$，基态波函数及基态能量为

$$\psi_0(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}}e^{-\frac{r}{a_0}} \qquad E_0=-\frac{e^2}{2a_0}=-\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}$$

其中 $a_0=\frac{\hbar^2}{\mu e^2}$ 为第一 Bohr 轨道半径。设体系受到微扰 $H'=e\varepsilon z$ 的作用（沿 z 方向加上均匀电场 ε), 哈密顿量变成 $H=H_0+H'$。

(1) 计算对易关系: $[H_0,H']$ 及 $[H',[H_0,H']]$ 。

(2) 计算 ψ_0 下的平均值：$\langle H'\rangle_0$ 及 $\langle H'^2\rangle_0$ 。

(3) 取基态试探波函数为 $\psi(\lambda)=N\,(1+\lambda H')\,\psi_0$, 其中 N 为归一化常数。试以 λ 为变分参数，用变分法求 H 的基态能量上限（准确到 ε^2 量级）。

解:

(1) $[H_0,H']=-i\hbar\frac{e\varepsilon}{\mu}p_z$，$[H',[H_0,H']]=\frac{e^2\varepsilon^2\hbar^2}{\mu}$

笔记 这里直接采用直角坐标系运算，采用球坐标系反而麻烦了。球坐标系下的结果是

$$[H_0,H']=-\frac{e\varepsilon\hbar^2}{\mu}(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})$$

(2) $\langle 0|H'|0\rangle=0$，$\langle 0|{H'}^2|0\rangle=e^2\varepsilon^2a_0^2$

(3) $E=E_0+2\varepsilon^2a_0^3$

中国科学院大学
2011 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 (1) 氢原子基态的能量为 $-13.6V$，那么第一激发态的氢原子电离能为 (B)

A. 13.6 eV　　B. 3.39 eV　　C. 7.8 eV　　D. 10.2 eV

(2) 普朗克常数 h 的数值为 (D)

A. 1.05×10^{-34}　　B. 6.63×10^{-34}

C. $1.05 \times 10^{-34}\ J \cdot s$　　D. $6.63 \times 10^{-34}\ J \cdot s$

(3) A、B 为厄米算符，那么下列各选项为厄米算符的是 (B)

A. $\frac{1}{2}(BA - AB)$　　B. $\frac{i}{2}(BA - AB)$　　C. $AB + iBA$　　D. $\frac{i}{2}(BA + AB)$

(4) 对于中心力场，下列各式正确的是 (C)

A. $\int_0^\infty \mu^2(r) r^2 dr = 1$　　B. $\int_0^\infty \mu^2(r) 4\pi r^2 dr = 1$

C. $\int_0^\infty R_l^2(r) r^2 dr = 1$　　D. $\int_0^\infty R_l^2(r) 4\pi r^2 dr = 1$

其中：$\mu(r) = R_l(r) r$

(5) 经典力学中有 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -\vec{p} \times \vec{r}$，那么在量子力学中 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -\vec{p} \times \vec{r}$ 是否也成立。请说明理由。

> 解： 成立，写成分量形式可证

(6) 在 $(\vec{S}^2, S_z)$ 的共同的本征态 Y_{10} 中，写出 S_x, S_y 的矩阵表示，并说明是否可以找到这样的一个表象，使得 S_x, S_y, S_z 在该表象中的矩阵表示均为实矩阵，并说明理由。

> 解： 可用升降算符写出矩阵元，再写出矩阵。或者直接套用泡利矩阵的形式
>
> $$S_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
>
> 不存在，因为实矩阵不可能使得对易关系 $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$ 成立

(7) 写出氢原子、一维简谐振子、一维无限深势阱的能级，并用示意图表示。

> 解： 氢原子: $E_n = -\frac{e^2}{2a}\frac{1}{n^2}\left(a = \frac{\hbar^2}{me^2}\right)$
>
> 一维简谐振子：$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$
>
> 一维无限深势阱：$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$
>
> 图略

(8) 两个非全同粒子处于态 $\psi(x_1, x_2)$，求出一个粒子处于 p_1', p_1'' 之间，另一个粒子处于 x_2', x_2'' 之间的几率。

解：　$P = \frac{\int_{x_2'}^{x_2''} \int_{p_1'}^{p_1''} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_1,x_2) e^{-\frac{i x_1 p}{\hbar}} dx_1 \right|^2 dp_1 dx_2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x_1,x_2)|^2 dx_1 dx_2}$

二、　已知 $\hat{p}_r = \frac{1}{2}(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r})$

(1) $\hat{p}_r$ 是否为厄米算符，为什么？

(2) 写出 $\hat{p}_r$ 的算符表示。

(3) 求出 $[\hat{r}, \hat{p}_r] =$?

解：

(1) 是厄米算符，易证

(2) $\hat{p}_r = -i\hbar\left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right)$

(3) $[r, p_r] = i\hbar$

三、（30）有一质量为 m 的粒子在半径为 R 的圆周上运动，现加一微扰：

$$H' = V(\varphi) = \begin{cases} V_1, & -\alpha < \varphi < 0; \\ V_2, & 0 < \varphi < \alpha; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\alpha < \pi$，求对最低两能级的一级修正。

解： 哈密顿算符 $\hat{H}_0 = \frac{l_z^2}{2I}$，$\Psi_n^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}$，$E_0^{(0)} = \frac{m^2\hbar^2}{2I}$

$n = 0$ 时无简并，$E_0 = (v_1 + v_2)\alpha$

$n = 1$ 时二重简并，分裂成两条，

$E_{11} = \frac{\hbar^2}{2I} + (v_1 + v_2)\alpha + 2\sin\alpha\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos 2\alpha}$

$E_{12} = \frac{\hbar^2}{2I} + (v_1 + v_2)\alpha - 2\sin\alpha\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos 2\alpha}$

其中 $I = mR^2$

四、（30）一粒子在一维无限深方势阱 $(0 < x < a)$ 中运动，时间 $t = 0$ 时处在基态。此时加入一个高为 V_0，宽为 $b(b \ll a)$，中心在 $\frac{a}{2}$ 的方势垒微扰。求 $t_0(t_0 > 0)$ 时撤去微扰，体系处于前三个激发态的概率。

解：

$$\begin{aligned} < m|H'|1 > &= \frac{2}{a} \cdot V_0 \cdot \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{a+b}{2}} \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{\pi}{a}x dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot V_0 \cdot \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\frac{b}{a}} \sin m\theta \sin\theta d\theta \\ &\approx \frac{2}{\pi} \cdot V_0 \cdot \frac{1}{m} \cdot \cos m\theta \Big|_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

这里，很容易得到 $\langle 2|H'|1\rangle = 0$，$\langle 3|H'|1\rangle = \frac{2}{\pi} V_0 \frac{-2}{3} \sin(\frac{3}{2}\pi\frac{b}{a}) \approx -2\frac{b}{a}V_0$，$\langle 4|H'|1\rangle = 0$。

这里也可以采用和差化积的方式来进行精确的计算

$$< m|H'|1 >= \frac{V_0}{\pi}\left(\frac{1}{m-1}\sin(m-1)t - \frac{1}{m+1}\sin(m+1)t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\frac{b}{a}}$$

得到的结果除 $\langle 3|H'|1\rangle = -\frac{V_0}{\pi}\left(\sin\pi\frac{b}{a} + \frac{1}{2}\sin 2\pi\frac{b}{a}\right) \approx -2\frac{b}{a}V_0$ 外其余一样，不过也可以看到取近似后两者的结果是一致的。

$P_{1\to 2} = 0$，$P_{1\to 3} = \left|\frac{H'_{31}}{\hbar\omega_{31}}\right|^2 \cdot (1 - \cos\omega_{31} t_0)$，$P_{1\to 4} = 0$

五、 在 (l^2, l_z) 的共同表象中，粒子处于 Y_{20} 态，求 l_x 的可能值及相应的几率。

解： l_x 的可能测值及相应的概率为:

l_x	$2\hbar$	$\hbar$	0	$-\hbar$	$-2\hbar$
P	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$

解法有几种。共五个概率值，五个未知数，找五个独立方程即可，找方程的过程中，可充分利用 $l_z|10\rangle = 0$ 的性质，用 l_x 本征态的升降算符来表示 l_z。l_x 本征值为 m 的本征态是 $e^{-i\frac{\pi}{2}l_y}|lm\rangle$，也可以推导相应矩阵元 $\langle lm'|e^{-i\frac{\pi}{2}l_y}|lm\rangle$ 的关系式。

中国科学院大学
2010 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 (1) 设 $\hat{A}, \hat{B}$ 与 Pauli 算符对易，证明：$(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$

(2) 试将 $(\hat{I}+\hat{\sigma}_x+i\hat{\sigma}_y)^{\frac{1}{2}}$ 表示成 $\hat{I}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ 的线性叠加，$\hat{I}$ 为单位算符。

解：

(1) 证明略

(2) $\sqrt{I+\sigma_x+i\sigma_y} = I + \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)$ 或者 $\sqrt{I+\sigma_x+i\sigma_y} = -I - \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)$

笔记 表示方法不唯一，这是由于根号的多值性决定的

二、 设一维谐振子的初态为 $\psi(x,0) = \cos\frac{\theta}{2}\varphi_0(x) + \sin\frac{\theta}{2}\varphi_1(x)$，即基态与第一激发态的叠加，其中 θ 为实参数：

(1) 求 t 时刻的波函数 $\psi(x,t)$；

(2) 求 t 时刻粒子处于基态及第一激发态的概率；

(3) 求 t 时刻粒子的势能算符 $\hat{V} = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ 的平均值；

(4) 求演化成 $-\psi(x,0)$ 所需的最短时间 t_{min}。

解：

(1) $\psi(x,t) = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle e^{-\frac{i\omega t}{2}} + \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle e^{-\frac{3i\omega t}{2}}$

(2) $P_0 = \cos^2\frac{\theta}{2} \qquad P_1 = \sin^2\frac{\theta}{2}$

(3) $\langle V\rangle = \frac{m\omega^2}{2}\langle x^2\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{3\hbar\omega}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}$

(4) $t_{\min} = \frac{2\pi}{\omega}$

三、 设基态氢原子处于弱电场中，微扰哈密顿量为：

$$\hat{H}' = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ \lambda z e^{-\frac{t}{T}}, & t > 0 \end{cases}$$

其中 λ, T 为常数。

(1) 求很长时间后 ($t \gg T$) 电子跃迁到激发态的概率。基态和激发态波函数为:

$$\psi_{100}(\vec{r}) = R_{10}(r)Y_{00}(\theta,\varphi) = \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{r}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$
$$\psi_{210}(\vec{r}) = R_{21}(r)Y_{10}(\theta,\varphi) = \frac{1}{(2a)^{\frac{3}{2}}}\frac{r}{\sqrt{3}a}e^{-\frac{r}{2a}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

其中 a 为玻尔半径。

(2) 基态电子跃迁到下列哪个激发态的概率等于零？简述理由。

A. ψ_{200}　　B. ψ_{211}　　C. $\psi_{21,-1}$　　D. ψ_{210}

解: 采用球坐标: $\hat{H}' = \lambda z e^{-\frac{t}{T}} = \lambda e^{-\frac{t}{T}} r\cos\theta$，注意到

$$\cos\theta Y_{lm} = \sqrt{\frac{(l+1)^2-m^2}{(2l+1)(2l+3)}}\mathrm{Y}_{l+1,m} + \sqrt{\frac{l^2-m^2}{(2l-1)(2l+1)}}\mathrm{Y}_{l-1,m}$$

$$a_{mn} = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t H'_{mn}e^{i\omega_{mn}t'}dt'$$

(1)

$$H'_{21} = \left\langle \psi_{210} \middle| \hat{H}' \middle| \psi_{100} \right\rangle = 4\sqrt{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot a \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

$$P = 2^5\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\lambda^2 \cdot \frac{a^2}{\hbar^2}\cdot\frac{T^2}{1+\omega_{21}^2T^2}$$

(2) 根据 $\cos\theta Y_{lm}$ 的性质，此时的选择定则为 $\Delta m = 0, \Delta l = \pm 1$，所以基态电子跃迁到激发态 $\psi_{200}, \psi_{211}, \psi_{21,-1}$ 的概率均等于零。

四、 两个质量为 m 的粒子处于一个边长为 $a>b>c$ 的不可穿透的长盒子中，求下列条件下，该体系能量最低态的波函数（只写出空间部分）及对应能量。

(1) 非全同粒子。

(2) 零自旋全同粒子。

(3) 自旋为 $\frac{1}{2}$ 的全同粒子。

解： 一个粒子处于长盒子中的波函数及相应能量为

$$\phi(x,y,z)=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{abc}}\sin\frac{n_1\pi x}{a}\sin\frac{n_2\pi x}{b}\sin\frac{n_3\pi z}{c}\quad e_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}+\frac{n_3^2}{c^2}\right)$$

(1) 非全同粒子基态：

$$\psi_1\left(r_1,r_2\right)=\phi_1\left(r_1\right)\phi_1\left(r_2\right)=\frac{8}{abc}\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi y_1}{b}\sin\frac{\pi z_1}{c}\sin\frac{\pi x_2}{a}\sin\frac{\pi y_2}{b}\sin\frac{\pi z_2}{c}$$

$$E=e_1+e_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{m}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

(2) 零自旋全同粒子基态，零自旋粒子可以处于同一态，与非全同粒子基态相同：

$$\psi_1\left(r_1,r_2\right)=\frac{1}{2}\left[\phi_1\left(r_1\right)\phi_1\left(r_2\right)+\phi_1\left(r_2\right)\phi_1\left(r_1\right)\right]=\phi_1\left(r_1\right)\phi_1\left(r_2\right)$$

(3) 自旋为 $\frac{1}{2}$ 的全同粒子需满足泡利不相容原理, 由于 $a>b>c$，故第一激发态为

$$\phi_2(r)=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{abc}}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\sin\frac{\pi z}{c}$$

$$\psi_1\left(r_1,r_2\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_1\left(r_1\right)\phi_2\left(r_2\right)-\phi_2\left(r_1\right)\phi_1\left(r_2\right)\right]\quad E=\frac{\pi^2\hbar^2}{m}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

笔记 此题要求只写出空间部分，一般情况下还有自旋部分。当盒子是方盒子即 $a=b=c$ 时，第二激发态 ϕ_2 存在简并，三重，对应的波函数有 3 个。另外波函数的形式随着坐标原点的选择不同而不同（也可将坐标原点选在中心）。

五、 粒子在宽度为 $2a$ 的一维无限深势阱中运动

$$V(x)=\begin{cases}0, & 0<x<2a\\ \infty, & x\leq 0, x\geq 2a\end{cases}$$

设该体系受到 $\hat{H}'=\lambda\delta(x-a)$ 的微扰作用。

(1) 利用微扰理论，求第 n 能级精确到二级的近似表达式。

(2) 指出所得结果的适用条件。

解： 无微扰时波函数和能级为

$$\phi_n^{(0)}=\sqrt{\frac{1}{a}}\sin\frac{n\pi x}{2a}\quad E_n^{(0)}=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}$$

(1) 第 n 能级精确到二级的近似表达式为：

$$\begin{aligned}E_n &= E_n^{(0)}+E_n^{(1)}+E_n^{(2)} \\ &= \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}+\langle\psi_n^0|H'|\psi_n^0\rangle+\sum_k{}'\frac{|H'_{kn}|^2}{E_n^0-E_k^0}\end{aligned}$$

当 n 为奇数的时候

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}+0+0$$

当 n 为偶数的时候

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}+\frac{\lambda}{a}+\frac{8m\lambda^2}{\pi^2\hbar^2}\left[\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2-n^3}+\frac{1}{n^2-5^2}+\cdots\right]$$

其中：

$$\begin{aligned}H'_{kn}&=\langle\phi_k^0|H'|\phi_n^0\rangle=\frac{\lambda}{a}\int_0^{2a}\delta(x-a)\sin\frac{k\pi x}{2a}\sin\frac{n\pi x}{2a}dx \\ &=\frac{\lambda}{a}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases} n\text{ 为偶数}, k\neq n, & 0 \\ n\text{ 为奇数}, k\text{ 为奇数}, k\neq n, & \frac{\lambda}{a} \\ n\text{ 为奇数}, k\text{ 为偶数}, k\neq n, & 0\end{cases}\end{aligned}$$

(2) 适用条件：$\left|\frac{H'_{kn}}{E_n^0-E_k^0}\right|\ll 1$ 即: $\left|\frac{\frac{\lambda}{a}}{E_n^0-E_k^0}\right|\ll 1$, λ 很小，能级无简并或无近似简并。

中国科学院大学
2009 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、（30′）已知在 (l^2, l_z) 的表象中，

$$l_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

求：

(1) l_x 的本征值和相应的本征函数；

(2) l_y 的矩阵表示。

解：

二、 已知一粒子处于一维谐振子势场中运动，势能为 $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 (k > 0)$，求：

(1) 粒子的基态本征函数 $\psi_0(x)$；

(2) 若势场突然变为 $V'(x) = kx^2$，则粒子仍然处于基态的概率。

提示：用湮灭算符 $\hat{a}_- = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}), \sqrt{2} = 1.414, \sqrt[4]{2} = 1.189$。

解：

三、（30′）若已知 $[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0, [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$，其中 $i, j = 1, 2$。设 $J_x = \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1), J_y = \frac{i}{2}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1), J_z = \frac{1}{2}(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1)$，求：

(1) J_x, J_y, J_z 的关系式；

(2) $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$，试用 $\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger$ 表示 J^2。

解：

四、（30′）已知两种中微子的本征态为 $|V_1\rangle$ 和 $|V_2\rangle$，能量本征值为 $E = pc + \frac{m_i^2 c^4}{pc}$（其中 $i = 1, 2$），电子中微子的本征态为 $|V_e\rangle = \cos\theta|V_1\rangle + \sin\theta|V_2\rangle$，$\mu$ 子中微子的本征态为 $|V_\mu\rangle = -\sin\theta|V_1\rangle + \cos\theta|V_2\rangle$，其中 θ 是混合角。某体系中在 $t = 0$ 时，电子中微子处于态 $|V_e\rangle$，求：

(1) t 时刻中微子所处的状态；

(2) t 时刻电子中微子处于基态的概率。

解：

五、（30′）设在氘核中，质子和中子的作用表示成 $V(r) = -V_0 e^{-\frac{r}{a}}$，试用 $\psi = e^{-\frac{\lambda r}{2a}}$（$\lambda$ 为变数）为试探波函数，以变分法求：

(1) 基态能量的近似值；

(2) 若 $V_0 = 32.7$ Mev, $a = 2.16$ fm，试确定 λ 的值。

解：

中国科学院大学
2008 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知:
1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、（$30'$）写成氢原子的束缚态能级，所有量子数以及取值范围，求出其简并度。

解:

二、（$30'$）一个粒子质量为 μ，在一势能环中运动，势能

$$V=\begin{cases}0, & 0<\varphi<\varphi_0\\ \infty, & other\end{cases}$$

求粒子运动的本征值和本征函数。

解:

三、（$30'$）求在 $H=\begin{pmatrix}1 & \lambda & 0\\ \lambda & 3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$ 中粒子的本征值，设 $\lambda\ll 1$，利用微扰求其本征值（精确到二级近似）并与精确求解相比较。

解:

四、（30′）两个自旋为 $\frac{1}{2}\hbar$ 的粒子，两个粒子分别为 $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\chi_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta e^{-i\omega t} \\ \sin\theta e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$，求系统处于单态和三态的概率。

解：

五、（30′）处在一维谐振子势基态的粒子受到微扰 $H' = \lambda x \delta(t_0)$ 作用，求跃迁到其他各激发态的总概率和仍处在基态的概率。已知：$xH_n = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}H_{n-1} + \sqrt{\frac{n+1}{2}}H_{n+1}\right]$。

解：

中国科学院大学
2007A 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、(30′) 在一维无限深方势阱 $(0 < x < a)$ 中运动的粒子受到微扰

$$H'(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{a}{3}, \frac{2a}{3} < x < a \\ -V_1, & \frac{a}{3} < x < \frac{2a}{3} \end{cases}$$

作用。试求基态能量的一级修正。

解:

二、(30′) 粒子在势场 $V(x)$ 中运动并处于束缚定态 $\psi_n(x)$ 中。试证明粒子所受势场的作用力的平均值为 0。

解:

三、(30′)

(1) 考虑自旋为 $\frac{1}{2}$ 的系统。试在 $(\hat{S}^2, \hat{S}_z)$ 表象中求算符 $A\hat{S}_y + B\hat{S}_z$ 的本征值及归一化的本征态。其中 $\hat{S}_y, \hat{S}_z$ 是自旋角动量算符，而 A, B 为实常数。

(2) 假定此系统处于以上算符的一个本征态上，求测量 $\hat{S}_y$ 得到结果为 $\frac{\hbar}{2}$ 的概率。

解:

四、（$30'$）两个无相互作用的粒子置于一维无限深势阱中 $(0 < x < a)$ 中，对下列两种情况写出两粒子体系具有的两个最低总能量，相应的简并度以及上述能级对应的所有二粒子波函数。

(1) 两个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的可区分粒子；

(2) 两个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的全同粒子。

解：

五、（$30'$）一个质量为 m 的粒子被限制在 $r = a$ 和 $r = b$ 的两个不可穿透的同心球面之间运动。不存在其它势，求粒子的基态能量和归一化波函数。（1996 年第四题）

解：

中国科学院大学

2007B 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 量子力学

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、(30′)考虑一维阶梯势 $V(x)=\begin{cases} V_0, & x>0(V_0>0) \\ 0, & x<0 \end{cases}$，设粒子从右边向左边入射，试求反射系数和透射系数。

解:

二、(30′)电子处于沿 $+z$ 方向、大小为 B 的均匀磁场中。设 $t=0$ 时刻电子自旋沿 $+y$ 方向。

(1) 试求 $t=0$ 时电子自旋波函数;

(2) 试分别求 $t>0$ 时，电子自旋沿 $+x,+y,+z$ 方向的概率。

解:

三、(30′)粒子在势场 $V(x)=\begin{cases} V_0\delta(x), & |x|<a \\ \infty, & |x|\geq a \end{cases}$ 中运动 $(V_0>0)$。试求系统能级和能级方程。

解:

四、（$30'$）设系统哈密顿算符为 $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\vec{r})$，粒子处于归一化的束缚定态 ψ_n 中。试证明 Virial 定理：

$$\langle\psi_n|\frac{\hat{p}^2}{2m}|\psi_n\rangle=\frac{1}{2}\langle\psi_n|\vec{r}\cdot\nabla V(\vec{r})|\psi_n\rangle$$

解：

五、（$30'$）一维谐振子系统哈密顿量为 $\hat{H}_0=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$，设受到微扰 $H'=-\lambda\hat{p}_x^4$ 的作用。试求对第 n 个谐振子能级的一级微扰修正。

（已知矩阵元 $\langle n'|\hat{x}|n\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}+\sqrt{n}\delta_{n',n-1})$）

解：

中国科学院大学
2006 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 一个质量为 μ 的粒子被限制在 $-a \leqslant x \leqslant a$ 内运动，$t=0$ 时处于基态。现势阱突然向两边对称地扩展一倍，即在 $-2a \leqslant x \leqslant 2a$ 内运动。问：

(1) $t=t_0(>0)$ 时粒子处于新系统基态的几率；

(2) $t=t_0$ 时粒子能量的平均值。

解：

二、 一维谐振子的哈密顿量为 $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2$。在坐标表象中，它的能量本征函数为：

$$\psi_n(x)=N_n e^{\frac{-a^2x^2}{2}}H_n(ax) \qquad a=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$$

试在动量表象中求出它的能量本征值和相应的本征函数。

解：

三、 电子处于自旋 $\vec{S}$ 在方向 $n=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$ 上投影 $\vec{S}\cdot\vec{n}$ 的本征态，本征值为 $\frac{\hbar}{2}$。

(1) 求出相应的本征函数；

(2) 若在上面的态中，自旋的 x 分量和 y 分量有相等的均方差，请求出方向角 θ,φ。

解：

四、 自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子处于磁场 $\vec{B}$ 中，该粒子绕磁场进动的角频率记为 $\omega = -r\vec{B}$。设 $t=0$ 时粒子处于自旋朝下态 $|\psi(0)\rangle = |-\rangle$，求 t 时刻粒子仍处于该态的几率。

解：

五、 在谐振子的哈密顿量 $\hat{H}_0 = \frac{1}{2\mu}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$ 上加上 x^3 的微扰项 $H' = \lambda x^3$，求能量的二级修正。

解：

六、 有一量子力学体系，哈密顿量 $\hat{H}$ 的本征值与本征矢分别为 E_n 与 $|n\rangle$，$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$。设 $\hat{F}$ 为任一算符 $\hat{F} = \hat{F}(x, \hat{p})$，试证明：

$$\langle k|[F^+, [H, F]]|k\rangle = \sum_n (E_n - E_k)(|\langle n|\hat{F}|k\rangle|^2 + |\langle k|\hat{F}|n\rangle|^2)$$

解：

中国科学院大学
2006 甲 A 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、（30′）两个线性算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 满足下列关系：$\hat{A}^2=0,\quad \hat{A}\hat{A}^\dagger+\hat{A}^\dagger\hat{A}=1,\quad \hat{B}=\hat{A}^\dagger\hat{A}$。

(1) 求证 $\hat{B}^2=\hat{B}$;

(2) 求在 $\hat{B}$ 表象中 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 的表达式。

解:

二、（30′）粒子在势场 $V(x)=A|x|^n \quad (-\infty<x<\infty, A>0)$ 中运动，试用不确定度关系估算基态能量。

解:

三、（30′）设体系的哈密顿量 $\hat{H}$ 从依赖于某一参量 λ，又设体系处于某一束缚定态，其能量和本征函数分别记为 E_n 和 $\psi_n(r)$。

(1) 证明费曼——海尔曼定理:

$$\frac{\partial E_n}{\partial\lambda}=\int\psi_n^*(\vec{r})\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\psi_n(\vec{r})d\vec{r}$$

(2) 利用费曼——海尔曼定理，求氢原子各束缚态的平均动能。
（提示：氢原子能级公式 $E_n=-\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2}$）

解:

四、（$30'$）粒子在二维无限深方势阱中运动，$V=\begin{cases}0, & 0<x<a, 0<y<a \\ \infty, & \text{其他}\end{cases}$。加上微扰 $H'=\lambda xy$ 后，求基态和第一激发态能级的一级微扰修正。

解：

五、（$30'$）设粒子所处的外场均匀但与时间有关。即 $V=V(t)$，与坐标 $\vec{r}$ 无关。试将体系的含时薛定鄂方程分离变量，求方程解 $\psi(\vec{r},t)$ 的一般形式，并取 $V(t)=V_0\cos(\omega t)$，以一维情况为例说明 $V(t)$ 的影响是什么。

解：

中国科学院大学
2006 甲 B 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、(30′)已知谐振子处于第 n 个定态中,试导出算符 $\hat{x},\hat{p},(\hat{x})^2,(\hat{p})^2$ 的平均值及不确定度 $\Delta x,\Delta p$,并求出 $\Delta x\cdot\Delta p$ 值。

解:

二、(30′)设 $\hat{\mu}$ 为幺正算符,若存在两个厄米算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 使 $\hat{\mu}=\hat{A}+i\hat{B}$。试证:

(1) $\hat{A}^2+\hat{B}^2=1$,且 $[\hat{A},\hat{B}]=0$;

(2) 进一步再证明 $\hat{\mu}$ 可表示成 $\hat{\mu}=e^{i\hat{H}}$,$\hat{H}$ 为厄米算符。

解:

三、(30′)一个质量为 m 的粒子被限制在 $0\leqslant x\leqslant a$ 的一维无穷深势阱中。初始时刻其归一化波函数为 $\psi(x,0)=\sqrt{\frac{8}{5a}}(1+\cos\frac{\pi x}{a})\sin\frac{\pi x}{a}$,求:

(1) $t>0$ 时粒子的状态波函数;

(2) 在 $t=0$ 与 $t>0$ 时在势阱的左半部发现粒子的概率是多少?

解:

四、（$30'$）粒子在一维无限深方势阱中运动，受到微扰 $H' = \frac{V_0}{a}(a - |2x - a|)$ 的作用。求第 n 个能级的一级近似，并分析所的结果的适用条件。

解：

五、 一个质量为 m 的粒子被限制在 $r = a$ 和 $r = b$ 的两个不可穿透的同心球面之间运动, 不存在其它势。求粒子的基态能量和归一化的波函数。

解：

中国科学院大学
2006 乙 A 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知：
1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、（30′）粒子以能量 E 入射方势垒，$V(x)=\begin{cases} V_0>0, & 0\leqslant x\leqslant a \\ 0, & x<0, x>0 \end{cases}$。设能量 $E>V_0$，求透射系数 T。

解：

二、（30′）自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子置于势场 $V(x)$ 中，$V(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x<a \\ \infty, & x<0, x>a \end{cases}$。设粒子所处状态为 $\psi(x,s_z)=\sqrt{\frac{5}{18}}\varphi_3(x)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}+\sqrt{\frac{2}{9}}\varphi_5(x)\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$，其中 $\varphi_n(x)$ 为系统空间部分的第 n 个能量本征函数（已归一化）。求能量的可测值及相应的取值概率。

解：

三、 用不确定度关系估算一维谐振子的基态能量。

解：

四、（$30'$）各向同性的三维谐振子哈密顿算符为 $\hat{H}^0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{m\omega^2}{2}r^2$。加上微扰 $\hat{H}' = \lambda(xy + yz + zx)$ 后，求第一激发态的一级能量修正。

解：

五、（$30'$）自旋为 $\frac{1}{2}$，磁矩为 μ，电荷为零的粒子置于磁场中。$t = 0$ 是磁场为 $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$，粒子处于 $\hat{\sigma}_z$ 的本征值为 -1 的本征态 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。设在 $t > 0$ 时，再加上弱磁场 $\vec{B}_1 = (B_1, 0, 0)$，求 $t > 0$ 时的波函数，以及测到自旋反转的概率。

解：

中国科学院大学
2006 乙 B 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、（30′）粒子以能量 E 入射方势垒，$V(x)=\begin{cases} V_0>0, & 0\leqslant x\leqslant a \\ 0, & x<0, x>0 \end{cases}$。设能量 $E<V_0$，求透射系数 T。

解:

二、（30′）粒子在一维对称无限深方势阱 $(-\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant \frac{a}{2})$ 中运动。设 $t=0$ 时粒子所处状态为 $\psi(x,t=0)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]$，其中 $\varphi_n(x)$ 为系统第 n 个能量本征态。求 $t>0$ 时的以下量:

(1) 概率密度 $|\psi(x,t)|^2$；

(2) 能量的可取值及相应的概率。

解:

三、（30′）设氢原子所处状态为 $\psi(r,\theta,\phi,S_z)=\begin{cases} \frac{1}{2}R_{21}(r)Y_{11}(\theta,\phi) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}R_{21}(r)Y_{10}(\theta,\phi) \end{cases}$。

(1) 求轨道角动量 z 分量 $\hat{L}_z$ 和自旋角动量 z 分量 $\hat{S}_z$ 的平均值;

(2) 求总磁矩 $\vec{M}=-\frac{e}{2\mu}\vec{L}-\frac{e}{\mu}\vec{S}$ 的 z 分量的平均值。

解:

四、 对于一维谐振子的基态，求坐标和动量的不确定度的乘积 $\Delta x \cdot \Delta p$。

解：

五、（$30'$）两个自旋为 $\frac{1}{2}$ 非全同粒子，自旋间相互作用为 $\hat{H} = J\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$，其中 $\vec{s}_1$ 和 $\vec{s}_2$ 分别为粒子 1 和粒子 2 的自旋算符。设 $t = 0$ 时粒子 1 的自旋沿 z 轴正方向，粒子 2 的自旋沿 z 轴负方向。求 $t > 0$ 时，测到粒子 2 的自旋仍处于 z 轴负方向的概率。

解：

中国科学院大学

2005 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 量子力学

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、（20′）1800 个电子经 1000V 电势差加速后从 $x=-\infty$ 处射向势阶 $V(x)=\begin{cases}V_0, & x<0\\ 0, & x>0\end{cases}$，其中 $V_0=750V$。试问在 $x=\infty$ 处能观察到多少个电子？如果势阶翻转一下，即电子射向势阶 $V(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ V_0, & x>0\end{cases}$，则结果如何？

解：

二、（20′）质量为 m，电荷为 q 的粒子在三维各向同性谐振子势 $V(r)=\frac{1}{2}m\omega^2r^2$ 中运动，同时受到一个沿 x 方向的均匀常电场 $\vec{E}=E_0\vec{i}$ 作用。求粒子的能量本征值和第一激发态的简并度。此时轨道角动量是否守恒？如回答是，则请写出此守恒力学量的表达式。

解：

三、（40′）一个质量为 m 的粒子在下面的无限深方势阱中运动。$V(x)=\begin{cases}\infty, & x<0, x>a\\ 0, & a>x>0\end{cases}$ 开始时 $(t=0)$，系统处于状态，$\psi(x)=A\sin\frac{\pi x}{2a}\cos^3\frac{\pi x}{2a}$，其中 A 为常数。请求出 t 时刻系统：

(1) 处于基态的几率；

(2) 能量平均值；

(3) 动量平均值；

(4) 动量的均方差根（不确定度）。

解：

四、（30′）两个具有相同质量 m 和频率 ω 的谐振子，哈密顿量为

$$H^0 = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2((x_1 - a)^2 + (x_2 + a)^2)$$

（$\pm a$ 为两个谐振子的平衡位置），受到微扰作用 $H' = \lambda m\omega^2(x_1 - x_2)^2, |\lambda| \ll 1$，试求该体系的能级。

解：

五、（30′）已知氢原子基态波函数为：$\psi_{100} = \frac{1}{(\pi a_0^3)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{r}{a_0}}$，试对坐标 x 及动量 p_x，求：$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x^2\rangle}, \Delta p = \sqrt{\langle p_x^2\rangle - \langle p_x\rangle^2}$，由此验证不确定关系。

解：

六、 考虑自旋 $\vec{s}$ 与角动量 $\hat{\vec{L}}$ 的耦合, 体系的哈密顿量为

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r) + \lambda\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}$$

λ 是耦合常数, 试证该体系的总角动量 $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \overrightarrow{\mathrm{S}}$ 守恒。

公式提示：在球坐标系内,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2}\right), \quad \nabla f(r) = \frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}f(r), \quad \int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n!$$

解：

中国科学院大学
2004 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称: 量子力学

考生须知：
1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、（30′）粒子在一维无限深方势阱 $V(x)$ 中运动，$V(x)=\begin{cases}\infty, & |x|>a\\ 0, & |x|<a\end{cases}$ 处于状态 $\psi=\phi_1+\phi_3+2\phi_4$。这里 $\phi_n, n=1,2,3,\cdots$ 是系统归一化的能量本征态。请问：

(1) 粒子具有基态能量 E_1 几率；

(2) 粒子的平均能量（用基态能量 E_1 的倍数表示）；

(3) 态 ϕ_4 中的节点数（在节点处，找到粒子的几率密度为零）；

(4) 态 ϕ_3 的宇称。

解：

二、 考虑一维体系 $\hat{H}=\frac{p^2}{2\mu}+V(x)$, $\quad V(x)=V_0x^\lambda$, $\quad V_0>0$, $\quad \lambda=2,4,6\cdots$。设 $\hat{H}$ 的本征波函数为 ψ_n。

(1) 证明动量在态 ψ_n 中的平均值为零；

(2) 求在态 ψ_n 中的动能平均值和势能平均值之间的关系。

解：

三、 设归一化的状态波函数 $|\psi\rangle$ 满足薛定鄂方程 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle=\hat{H}|\psi\rangle$，定义密度算符（矩阵）为 $\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$。

(1) 证明任意力学量 $\hat{F}$ 在态 $|\psi\rangle$ 中的平均值可表示为 $Tr(\rho F)$；

(2) 求出 ρ 的本征值；

(3) 导出随时间演化的方程。

解：

四、 质量为 μ 的粒子在三维各向同性谐振子势为 $V(r)=\frac{kr^2}{2}=\frac{k(x^2+y^2+z^2)}{2}$ 中运动。求：

(1) 第二激发态的能量；

(2) 第一激发态的简并度；

(3) 在基态中的不确定量 $\Delta r\cdot\Delta p$，这里 Δr 是位置矢量的均方差根。定义类似。

解：

五、 两个自旋都是 1/2 的粒子 **1** 和 **2** 组成的系统, 处于由波函数 $|\psi\rangle=a|0\rangle_1|1\rangle_2+b|1\rangle_1|0\rangle_2$ 描写的状态, 其中 $|0\rangle$ 表示自旋朝下（沿 $-z$ 方向), $|1\rangle$ 表示自旋朝上。当数 **a** 和 **b** 都不为 **0** 时, 此态不能表示成两个单个粒子状态的直接乘积形式 $|\rangle_1|\rangle_2$ 时称为纠洭态。试求在上面的纠缠态。试求在上面的纠洭态中

(1) 两个粒子的自旋互相平行的几率;

(2) 两个粒子的自旋互相反平行的几率;

(3) 此系统处于总自旋为 **0** 的几率;

(4) 测量得到粒子 1 自旋朝上的几率多大; 发现粒子 1 自旋朝上时，粒子 2 处于什么状态?

解：

六、 考虑到自旋轨道耦合的氢原子，其哈密顿量为 $\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+c(r)+\xi(r)\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}$。

(1) 证明轨道角动量 $\hat{\vec{L}}$ 和 $\hat{\vec{S}}$ 不是此系统的守恒量, 而总角动量 $\hat{\vec{J}}=\hat{\vec{L}}+\hat{\vec{S}}$ 是守恒量。

(2) 若自旋一轨道相互作用 $\xi(r)\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}$ 可当作微扰，计算此系统基态能量的一级修正。（$\hat{H}_0=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+V(r)$ 的本征能量为 $E_n^{(0)}$, 本征函数: $\psi_{nlms}=R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)\chi_s,\chi_s$ 为自旋波函数）

解：

中国科学院大学

2003 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 量子力学

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 (1) 如果厄密算符 $\hat{A}$ 对任何矢量 $|u\rangle$, 有 $\langle u|\hat{A}|u\rangle \geq 0$, 则称 $\hat{A}$ 为正定算符, 求证：算符 $\hat{A} = |a\rangle\langle a|$ 是厄密正定算符。

解:

(2) 如果 $\hat{A}$ 是任一线性算符, 求证 $A^{+}A$ 是正定的厄密算符, 它的迹等于 $\hat{A}$ 在任意表象中的矩阵元的模平方之和。试推导, 当且仅当 $\hat{A} = 0$ 时, $\mathrm{Tr}\,(A^{+}A) = 0$ 才成立。

解:

(3) 求证：如果 $[[\hat{A},\hat{B}],\hat{A}] = [[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}] = 0$, 则 $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$。

解:

(4) 求证：任一可观测的平均值对时间的导数由下式给出：

$$i\hbar\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \langle[\hat{A},\hat{H}]\rangle + i\hbar\left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle$$

解:

二、 把传导电子限制在金属内势的一种平均势, 对于下列一维模式（如图）

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

试就:

(1) $E > 0$,

(2) $-V_0 < E < 0$

两种情况计算接近金属表面的传导电子的反射和透射几率。

解:

三、 对于一维谐振子, 求消灭算符 a 的本征态, 将其表示成各能量本征态 $|n\rangle$ 的线性叠加。

解:

四、 给定 (θ,φ) 方向单位矢量 $\vec{n}=(n_x,n_y,n_z)=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$。求 $\sigma_n=\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ 的本征值和本征函数。(取 σ_z 表象)

解:

五、 有一个定域电子(不计及其轨道运动)受到均匀磁场作用，磁场 B 指向正 x 方向, 磁作用势为:

$$\hat{H}=\frac{eB}{\mu c}\cdot\hat{S}_x=\frac{e\hbar B}{2\mu c}\hat{\sigma}_x$$

设 $t=0$ 时电子的自旋“向上”, 即 $S_x=\hbar/2$, 求 $t>0$ 时 $\vec{S}$ 的平均值。

解: