

# Resumen-completo-Tema-5.pdf



Sonic022



Variable Compleja



3º Grado en Matemáticas



Facultad de Ciencias  
Universidad de Málaga

antes



Descarga sin publi  
con 1 coin



Después



**WUOLAH**

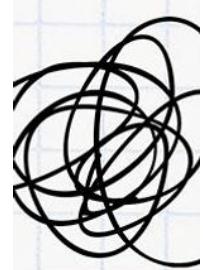
Importante

Puedo eliminar la publi de este documento con 1 coin

→ Plan Turbo: barato  
→ Planes pro: más coins

30/3/2023

pierdo  
espacio



Necesito  
concentración

ali ali ooooh  
esto con 1 coin me  
lo quito yo...

wuolah

## TEMA 5: INTEGRACIÓN COMPLEJA

### VERSIONES SIMPLES DEL TEOREMA DE CAUCHY

#### PRIMITIVAS

**Definición (Primitiva):** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  abierto,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Decimos que  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es primitiva de  $f$  en  $\Omega$  si  $F$  es holomorfa en  $\Omega$  y  $F' = f$  en  $\Omega$ .

#### Propiedades

① Si  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  es una serie de potencias convergente absolutamente en  $\Omega$ , entonces  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$  es primitiva de  $f$  en  $\Omega(a, r)$  siendo  $F$  una serie de potencias holomorfa en  $\Omega(a, r)$ .

② Si  $F$  es primitiva de  $f$  en  $\Omega$ , entonces  $F + \lambda$  es primitiva de  $f$  en  $\Omega$  para cualquier que sea  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

③ Si  $D \subseteq \mathbb{C}$  dominio  $\ni F_1, F_2$  son primitives de  $f$  en  $D$ , entonces  $F_1 - F_2 = \lambda = cte \in D$   
 $F_2 = F_1 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}$

④ Una primitive de  $\frac{1}{z}$  en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  es  $\log z$ .  
¿Tiene otra primitive en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ? NO

⑤ **Proporcional:** Sea  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domino. Existe una rama de  $\log z$  en  $D$  si y solo si  $\frac{1}{z}$  tiene primitive en  $D$ .

• Una vez dada rama del log  $\log z$  en  $D$  se continua automáticamente derivable  $\Rightarrow \psi'(z) = \frac{1}{z}$   
Se verifica  $e^{\psi(z)} = z$

⑥ **Generalización:** Sea  $D$  domino en  $\mathbb{C} \ni$  sea  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa y continua en  $D$ . Entonces existe una rama del  $\log(f)$  en  $D$  si y solo si  $\frac{f'}{f}$  tiene primitive en  $D$ .

• Primitiva de  $e^{f(z)}$  en  $\mathbb{C}$ . Primitiva de  $a_0 + a_1 z^n + a_2 z^{n+1} + \dots + a_m z^{m+n}$  es  $a_0 z + a_1 \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots + a_m \frac{z^{m+n}}{m+n}$  en  $\mathbb{C}$

• La teoría no es como la variable real (función continua tiene primitiva), aquella función continua puede no tener primitive en su dominio si las que restan de dicho dominio.

#### INTEGRACIÓN DE FUNCIONES COMPLEJAS DEFINIDAS SOBRE UN INTERVALO

**Definición (Integral de una función continua sobre un intervalo real):** Sea  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo en  $\mathbb{R}$ . Decimos que una función  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es integrable Riemann (cuadratura) en  $[a, b]$  si es Riemann y Riemann, es decir, si tal caso existimos

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \text{real part} + i \int_a^b \text{imaginary part}$$

wuolah

## Notas

- ④ **Linealidad:** Si  $\varphi_1, \varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  integables,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Entonces  $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es integrable en  $[a, b]$  y  $\int_a^b (\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) dt = \lambda \int_a^b \varphi_1 dt + \mu \int_a^b \varphi_2 dt$
- ⑤ Si  $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  integrable (severa), entonces  $\psi$  es integrable en  $[c, d] \subset [a, b]$  y  $\int_a^b \psi dt = \int_a^c \psi dt + \int_c^d \psi dt$
- ⑥ **Notación:**  $\int_a^a \psi dt = 0$        $\int_a^a \psi dt = - \int_a^b \psi dt$
- ⑦ Si  $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es integrable, entonces  $|\psi| = \sqrt{\operatorname{Re}(\psi)^2 + \operatorname{Im}(\psi)^2}$  es integrable en  $[a, b]$  y  $|\int_a^b \psi dt| \leq \int_a^b |\psi| dt$
- ⑧ Si  $\psi$  es continua en  $[a, b]$  ( $\psi$  continua salvo en un conjunto finito de puntos donde sea discontinua en los límites laterales finitos) entonces  $\psi$  es integrable en  $[a, b]$   
que  $\psi$  sea acotada
- ⑨ Del TFC, si  $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es derivable,  $\psi'$  es integrable en  $[a, b]$  entonces  
 $\int_a^b \psi' dt = \psi(b) - \psi(a)$   
 $\psi$  se da de otra forma en  $[a, b]$ , entonces  $\psi'$  es integrable en  $[a, b]$  y  
 $\int_a^b \psi' dt = \psi(b) - \psi(a)$  **regla de Barrow!**
- ⑩ **Cambio de variable:** Si  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  a trozos,  $\psi: \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  integrable en  $\mathbb{R} \times [a, b]$  entonces  $\int_a^b \psi(\alpha(t)) \alpha'(t) dt = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \psi(s) ds$   
 $S = R(\alpha)$   
 $dS = \alpha'(t) dt$
- ⑪ **Integración por partes:**  $\psi, \psi': [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  de clase  $C^1$  a trozos, entonces  
 $\int_a^b \psi \psi' dt = [\psi \psi']_{a}^b - \int_a^b \psi' \psi dt$

B

## CURVAS Y CAMINOS

### (3.1) CURVAS

- C consiste de todos los rutas  $(\tau, \psi)$  donde  $\tau$  es un intervalo compacto en  $\mathbb{R}$  y  $\psi: \tau \rightarrow \mathbb{C}$  es continua

$$\tau \xrightarrow{\text{a}} \xrightarrow{\text{b}} \cdots \xrightarrow{\text{c}} \xrightarrow{\text{d}}$$

Definimos la relación  $R$  en  $C$ :  $(\tau, \psi) R (\tau', \psi')$  si existe un homeomorfismo  $\varphi: \tau \rightarrow \tau'$  tal que  $\psi = \psi' \circ \varphi$ .  $R$  es relación de equivalencia en  $C$ .

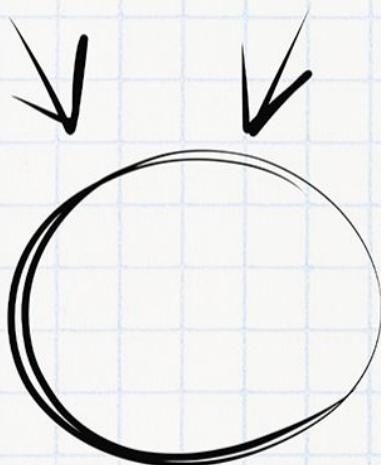
- Definición (curva):**
- Una curva  $\gamma$  en  $\mathbb{C}$  es un elemento de  $C/R$
  - Cada representante de una curva  $\gamma \in C/R$  se llama parametrización de  $\gamma$
  - Cada homeomorfismo creciente relacionando dos parametrizaciones se llama cambio de parámetro

# Imagínate aprobando el examen

## Necesitas tiempo y concentración

Planes	PLAN TURBO	PLAN PRO	PLAN PRO+
diamond Descargas sin publi al mes	10 🟡	40 🟡	80 🟡
clock Elimina el video entre descargas	✓	✓	✓
folder Descarga carpetas	✗	✓	✓
download Descarga archivos grandes	✗	✓	✓
circle Visualiza apuntes online sin publi	✗	✓	✓
glasses Elimina toda la publi web	✗	✗	✓
€ Precios	Anual <input type="checkbox"/>	0,99 € / mes	3,99 € / mes
			7,99 € / mes

Ahora que puedes conseguirlo,  
¿Qué nota vas a sacar?



**WUOLAH**

## Más definiciones

① Sea  $\gamma$  una curva de  $\mathbb{C}$   $\Rightarrow$  sea  $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2] \rightarrow \mathbb{C}$  una parametrización de  $\gamma$ . Entonces, podemos definir los siguientes elementos de  $\gamma$  independientes de  $\varphi$ :

1.1 Origen ( $\gamma$ ) =  $\varphi(0)$

1.2 Extremo ( $\gamma$ ) =  $\varphi(t_1)$

1.3 Símiente o bisectrizia de  $\gamma$ ,  $Sym(\gamma) = \varphi([t_0, t_1])$  es la traza, lo que sea conocida la curva en el plano.

② Una curva  $\gamma$  se dice injektiva si una parametrización cualquiera de  $\gamma$  es inyectiva.  
(Todas las demás parametrizaciones son inyectivas).

Nota: Si  $\varphi_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}, \varphi_2 : [a_2, b_2]$  continuas e inyectivas con  $\varphi_1(a_1) = \varphi_2(b_1), \varphi_1(b_1) = \varphi_2(a_2)$ , y  $\varphi_1([a_1, b_1]) = \varphi_2([a_2, b_2])$ , entonces representan a la misma curva simple (o sea, no dos curvas simples tiene el mismo origen, el mismo extremo o el mismo símiente, entonces son la misma curva).

③ Una curva  $\gamma$  se dice cerrada si  $\text{Origen}(\gamma) = \text{Extremo}(\gamma)$  conocido  $\gamma$ .

④ Decimos que  $\gamma$  es una curva de Jordan si para cualquier parametrización  $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2]$  se tiene que  $\varphi(0) = \varphi(b_1)$  y la inversa es  $\varphi(a_1, b_1)$ .

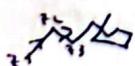
⑤ El segmento  $[z_1, z_2]$  de origen  $z_1 \in \mathbb{C}$  y extremo  $z_2 \in \mathbb{C}$  puede ser parametrizado por  $\varphi = [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \varphi(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$

⑥ La circunferencia  $C(z_0, r)$  de centro  $z_0 \in \mathbb{C}$  y radio  $r > 0$ , de orden  $2\pi r$  se reconoce una sola vez en sentido antihorario (sentido positivo) puede ser parametrizada por  $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \varphi(t) = z_0 + re^{it}$ . Si damos dobletes, la parametrización es en  $[0, 4\pi]$ . En sentido horario sería  $\varphi(t) = z_0 + re^{-it}$ .

⑦ Suma de curvas: Si  $(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}, \varphi_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$  son dos parametrizaciones de las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  respectivamente, su "suma" extremo ( $\gamma_1 + \gamma_2$ ) = Origen ( $\gamma_1$ ) = Origen ( $\gamma_2$ ), entonces la aplicación dada por  $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & x \in [a_1, b_1] \\ \varphi_2(x - b_1 + a_2) & x \in [b_1, b_2] \end{cases}$  es la suma de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ .

Definida y continua en  $[a_1, b_2] = [a_1, b_1 + b_2 - a_2]$ , la suma y parametrización de la curva  $\gamma$  de origen  $\varphi(0) = \varphi_1(0) = \text{Origen}(\gamma_1)$ , extremo  $\varphi(b_2) = \varphi_1(b_1) + \varphi_2(b_2 - a_2) = \varphi_1(b_1) + \text{extremo}(\gamma_2) = \text{extremo}(\gamma_1 + \gamma_2)$ ,  $\text{Símiente}(\gamma_1 + \gamma_2) = \varphi_1(a_1) + \varphi_2(b_2 - a_2) = \text{Símiente}(\gamma_1) + \text{Símiente}(\gamma_2)$ .

⑧ Polygona de vértices  $z_1, z_2, \dots, z_n$  recorridos en el orden, a la curva suma se le llaman símbolos o extremos estos vértices en el orden que están:  $[z_1, z_2, \dots, z_n] = [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + \dots + [z_{n-1}, z_n]$



⑨ Curva cerrada: Si  $\gamma$  es una curva parametrizada por  $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2]$ , entonces la curva cerrada  $\gamma + (-\gamma)$  viene parametrizada por  $\tilde{\varphi} : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}, \tilde{\varphi}(t) = \varphi(-t)$ . Origen ( $\gamma + \tilde{\gamma}$ ) = extremo ( $\gamma + \tilde{\gamma}$ ), símiente ( $\gamma + \tilde{\gamma}$ ) =  $\varphi_1(a) - \varphi_1(b)$ ,  $\text{Extremo}(-\gamma) = \varphi_2(b)$ ,  $\text{Símiente}(-\gamma) = \varphi_2(b) - \varphi_1(a)$ .

Nota:  $\gamma + (-\gamma)$  no es un punto. Si una curva cerrada de orden  $n$  tiene al orden  $n+1$  igual a  $\text{Extremo}(\gamma)$ , solo que recorrida una vez en sentido contrario a la vuelta en el sentido inverso. En integración sobre curvas podemos cancelarlos.

### 3.2) FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA, CURVAS RECTIFICABLES, CAMINOS

Definición (Variación de una función respecto de una partición, variación total, función de variación acotada): Sea  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una función.

Para una partición de  $[a, b]$ ,  $\Pi := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  definimos la variación de  $\varphi$  respecto de la partición  $\Pi$  como

$$\text{Var}_\Pi(\varphi, \Pi) := \sum_{i=1}^n |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})|$$

La variación total de  $\varphi$  en  $[a, b]$  se define como  $\text{Var}_{[a, b]}(\varphi) := \sup_{\Pi} \text{Var}_\Pi(\varphi, \Pi)$  (partición de  $[a, b]$ )

Dicimos que  $\varphi$  es de variación acotada en  $[a, b]$  si  $\text{Var}_{[a, b]}(\varphi) < \infty$ , conocida también como el  $\varphi$  constante no está acotado superiormente el numero  $\infty$ .

#### Notas y resultados

- ① No se dice  $\varphi$  sea continua ~~no continua~~
- ② Si  $\varphi$  es continua, entonces es una parametrización de una curva d. Entonces  $\text{Var}(\varphi, \Pi) = \sum_{i=1}^n \text{long}(x_{i-1}, x_i)$  entendiendo por  $\text{long}(x_{i-1}, x_i) = |x_i - x_{i-1}|$  ~~continua~~
- ③ Si  $\Pi_1 \subset \Pi_2$  entonces  $\text{Var}_\Pi(\varphi, \Pi_1) \leq \text{Var}_\Pi(\varphi, \Pi_2)$
- ④ Si  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\varphi : [d, p] \subset [a, b]$ , entonces  $\text{Var}_{[d, p]}(\varphi) \leq \text{Var}_{[a, b]}(\varphi)$  más si  $\varphi \in C([a, b])$ , entonces  $\text{Var}_{[a, b]}(\varphi) = \text{Var}_{[a, b]}(\varphi) + \text{Var}_{[c, b]}(\varphi)$
- ⑤ Si  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\varphi : [d, p] \rightarrow [a, b]$  y homeomorfismo, entonces  $\text{Var}_{[d, p]}(\varphi) = \text{Var}_{[a, b]}(\varphi)$  ~~(y o)~~
- Diagrama:
- El homeomorfismo puede ser creciente o decreciente. Dato que son inversos.
- ⑥ Si  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es monótona, entonces  $\varphi \in V.A.$
- ⑦  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es  $V.A.$  si solo si  $\varphi$  es diferencia de dos funciones crecientes.
- ⑧ Hay funciones continuas que no son de  $V.A.$  Por ejemplo,  $\varphi : [-\frac{\pi}{2}, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\varphi(x) = x + i \tan \frac{x}{4}$ , con  $-\frac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0$
- ⑨ Si  $\varphi \in C([a, b])$ , entonces  $\varphi \in V.A.$  en  $[a, b] \Leftrightarrow \text{Var}_{[a, b]}(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(x)| dx$  la longitud del camino
- ⑩ Si  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es de clase  $C^1$  en todos en  $[a, b]$ , entonces  $\varphi$  es de variación acotada en  $[a, b] \Leftrightarrow \text{Var}_{[a, b]}(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(x)| dx$

# Importante

Puedo eliminar la publi de este documento con 1 coin

¿Cómo consigo coins? → Plan Turbo: barato  
→ Planes pro: más coins

pierdo  
espacio



Necesito  
concentración

ali ali ooooh  
esto con 1 coin me  
lo quito yo...



Definición (Longitud de una curva, curva rectificable, camino): Sea  $\gamma$  una curva en  $\mathbb{C}$ . Definimos

- La longitud de  $\gamma$  como  $\text{long}(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma, \epsilon_n)$ , donde  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$  es una parametrización cualquiera de  $\gamma$ .
- Decimos que  $\gamma$  es rectificable si  $\text{long}(\gamma)$  es finita.
- Decimos que  $\gamma$  es continuo si admite una parametrización de clore  $\gamma$  a trozos en  $[a, b]$ .

### Notas

- $\text{long}(\gamma)$  es independiente de la parametrización.
- Todo camino es rectificable.
- Si  $\gamma$  es una curva, entonces  $\text{long}(\gamma) = \text{long}(-\gamma)$  porque parametrizaciones de  $\gamma$  y  $-\gamma$  están conectadas por homosotomías.
- Si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son dos curvas y  $\text{extremo}(\gamma_1) = \text{origen}(\gamma_2)$ , entonces podemos labrar de  $\gamma_1, \gamma_2$  el caso,  $\text{long}(\gamma_1 + \gamma_2) = \text{long}(\gamma_1) + \text{long}(\gamma_2)$ .



## INTEGRACIÓN SOBRE CAMINOS

Definición (Integral de una función sobre un camino): Sea  $\gamma$  un camino y  $f$  una función continua sobre  $S_{\gamma}(t)$ . Definimos la integral de  $f$  a lo largo de  $\gamma$  como

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma}^b f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt$$

donde  $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una parametrización de clore  $\gamma$  a trozos de  $\gamma$ .

Lema:

$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} g(z) dz$  si  $f$  y  $g$  son continuas sobre  $S_{\gamma}(t)$  y  $g$  es continua sobre  $S_{\gamma}(t)$ .

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \text{particiones}}} \sum_{P \in S_{\gamma}(t)} \int_{\gamma(P)} f(z) dz, \quad \text{donde}$$

$S_{\gamma}(t)$  es el conjunto de todos los particiones de  $[a, b]$  y para  $P = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  y  $P \in S_{\gamma}(t)$ , se definen  $\gamma(P) = \text{mosc}_{\gamma(t_i)} \gamma(t_i, t_{i+1}) \approx \sum_{j=1}^n \int_{\gamma(t_j)} f(z) dz = \sum_{j=1}^n f(\psi(t_j)) (\psi(t_{j+1}) - \psi(t_j))$

Lema: Sean  $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una función de clore  $\gamma$  a trozos y  $f$  una función continua sobre  $S_{\gamma}(t)$ . Si  $\psi: [d, P] \rightarrow [a, b]$  es un homeomorfismo creciente, entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt$$

- La definición dada anteriormente no depende de la parametrización elegida.
- La definición de integral de una función a lo largo de un camino se basa en aquella otra de integral de una función sobre un intervalo real.

**WUOLAH**

### Notas

①  $\int_{\gamma} (fz + pg) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + p \int_{\gamma} g(z) dz$

② Si  $\gamma$  es un camino en  $C$  y  $f$  es continua en  $S\cap(\gamma)$  entonces para  $\varphi: [a, b] \rightarrow C$  parametrización de  $\gamma$  a trozos de  $\gamma$ ,  $\widehat{\varphi}: [-b, a] \rightarrow C$ ,  $\widehat{\varphi}(t) = \varphi(-t)$  se tiene que a trozos  $\widehat{f}(\widehat{z}) dt = -f(z) dz$   $\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = -\int_{\gamma} \widehat{f}(\widehat{z}) dz$

③ Si podemos construir  $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ , entonces  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$

Utilidad: Hacer irrelevantes el origen a la hora de integrar sobre caminos cerrados  
→ igual en que punto empieza el signo determina la orientación!

④ Regla de Barrow: Si  $\gamma$  es un camino en  $C$  y  $f$  es de clase  $C^1$  en un entorno de  $S\cap(\gamma)$  entonces  $\int_{\gamma} f(z) dz = f(\text{ultimo}(\gamma)) - f(\text{origen}(\gamma))$

⑤ Aproximación de la integral:  $|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq \sup_{z \in S\cap(\gamma)} |f(z)| \cdot \text{long}(\gamma)$   
cada los caminos tienen longitud finita

⑥ Intercambio de la integral y el límite: Si  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  uniformemente en  $S\cap(\gamma)$ , entonces  $\int_{\gamma} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\gamma)$

⑦ Intercambio de la integral y serie: Si  $\sum f_n$  converge uniformemente a  $f$  en  $S\cap(\gamma)$

$$\int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz$$

Definición (otras integrales de camino): Sea  $\gamma$  un camino en  $C$  representado por una parametrización  $\varphi: [a, b] \rightarrow C$  de clase  $C^1$  a trozos, sea  $f$  una función continua en  $S\cap(\gamma)$ . Definimos:

Integral de  $f$  respecto del elemento (enclosed) de longitud de arco  $\gamma$ :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt$$

$$\text{long}(\gamma) = \int_{\gamma} |dz|$$

Integrals de  $f$  respecto de los componentes real e imaginaria de  $\gamma$ :

$$\int_{\gamma} \operatorname{Re} z dz = \int_a^b \operatorname{Re} \varphi(t) \operatorname{Re} \varphi'(t) dt$$

$$\int_{\gamma} \operatorname{Im} z dz = \int_a^b \operatorname{Im} \varphi(t) \operatorname{Im} \varphi'(t) dt$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dx + i \int_{\gamma} f(z) dy$$

Las integrales a lo largo de caminos distintos ( $\gamma$ ) no se calculan la función sin dientes

Definición (integral independiente del camino): Sea  $D$  un dominio de  $C$  y sea  $f: D \rightarrow C$  continua. Decimos que la integral de  $f$  es independiente del camino en  $D$  si para todo par de puntos  $z_1, z_2 \in D$  se tiene que para cualquier par de caminos  $\gamma_1, \gamma_2$  en  $D$  con origen  $(z_1)_1 = z_1$  y destino  $(z_2)_1 = z_2$  se tiene

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Equivalentemente, la integral de  $f$  es independiente del camino en  $D$  si  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  para todo camino cerrado  $\gamma$  en  $D$ .

**Teorema (Equivocencia entre tener primitiva y tener integral independiente del camino):** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Son equivalentes:

i) La integral de  $f$  es independiente del camino en  $D$

ii)  $f$  tiene primitiva en  $D$

- Si  $n \in \mathbb{Z}$  con  $n \geq 0$ , entonces  $z^n$  tiene primitiva en  $\mathbb{C} \setminus \left\{ z \frac{2\pi i}{n+1} \right\} \rightarrow \int_D z^n dz = 0$  para todo camino cerrado  $\gamma$  en  $\mathbb{C}$

-  $\int_D P(z) dz = 0$  para todo  $\gamma$  camino cerrado en  $\mathbb{C} \rightarrow$  todo polinomio  $P$

- Si  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  es una serie de potencias con radio de convergencia  $R > 0$  entonces  $\int_D f(z) dz = 0$  para cualquier que sea el camino cerrado  $\gamma$  en  $\Delta(a, R)$

- Si  $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$ ,  $z^n$  tiene primitiva en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ( $\rightarrow \int_D z^n dz = 0$ ). De modo,  $\int_D z^{-1} dz = 0$  para cualquier camino cerrado  $\gamma$  en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  (los que absurso sea 0)

-  $\frac{1}{z}$  no tiene primitiva en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Entonces existe camino cerrado  $\gamma$  en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $\int_\gamma \frac{1}{z} dz \neq 0$

#### (4.1) INDICE DE UN PUNTO RESPECTO DE UN CAMINO CERRADO

**Definición (Índice de un punto respecto de un camino cerrado):** Si  $\gamma$  es un camino cerrado, definimos para  $z \notin \text{Int}(\gamma)$  el índice de  $z$  respecto de  $\gamma$  como

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-\xi} d\xi$$

= número vueltas netas que  $\gamma$  da alrededor de  $z$

**Nota:**  $n(\gamma, z)$  también scrito a veces como  $\text{Ind}_\gamma(z)$ , es una función de  $z$  con  $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Int}(\gamma)$ , y será el número de vueltas netas que  $\gamma$  da al rededor de  $z$ , luego solo toma valores enteros.

**Teorema:** Sea  $\gamma$  un camino cerrado en  $\mathbb{C}$ . Entonces:

i) Para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Int}(\gamma)$ ,  $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$

ii)  $n(\gamma, \cdot)$  es una función continua en  $\mathbb{C} \setminus \text{Int}(\gamma)$ , luego es constante en cada componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \text{Int}(\gamma)$

iii) Si  $z$  está en la componente conexa no acotada de  $\mathbb{C} \setminus \text{Int}(\gamma)$  entonces  $n(\gamma, z) = 0$

El soporte de  $\gamma$  es compacto, esto acotado!

## 5

## EL TEOREMA DE CAUCHY PARA DOMINIOS CONVEXOS

**Definición:** Sea  $D \subseteq \mathbb{C}$ . Decimos que  $D$  es convexo si para todo  $z_1, z_2 \in D$  el segmento  $[z_1, z_2]$  es

**Segmento sin orientación:**  $[z_1, z_2] = \{t_1 z_1 + t_2 z_2 : t_1, t_2 \in [0, 1], t_1 + t_2 \leq 1\}$

**Segmento con orientación:**  $[z_1, z_2] : \varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad \varphi(t) = (1-t)z_1 + t z_2$

**Triángulo T de vértices  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ :**  $T = \overline{[z_0 + z_1, z_2, z_3]} = \{x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 : x_1, x_2, x_3 \in [0, 1], x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$

$x_1, x_2, x_3 \in [0, 1], x_1 + x_2 + x_3 = 1$



• Extendemos por  $\partial T$  el camino que bordea a  $T$ . Si  $T = \overline{[z_1, z_2, z_3]}$

$\partial T : [z_1, z_2, z_3] = [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + [z_3, z_1]$  Camino no clásico  
y sea "confundido" con orientación

• A efectos de integración,  $f$  es continua en  $\partial T$ ,

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \int_{[z_1, z_2, z_3]} f(z) dz = \int_{[z_2, z_3, z_1]} f(z) dz = \int_{[z_3, z_1, z_2]} f(z) dz = - \int_{[z_1, z_2, z_3]} f(z) dz$$

cambio de sentido

**Teorema de Cauchy para triángulos:** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  abierto, sea  $P \in \Omega$  y sea  $T$  un triángulo en  $\Omega$ . Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  continua en  $\Omega$  y derivable en  $\Omega \setminus \{P\}$ . Entonces

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

- Siempre que bocan un triángulo en  $\Omega$ , la integral sobre el borde = 0

**Teorema de Cauchy para dominio convexo:** Sea  $D \subseteq \mathbb{C}$  un dominio convexo. Sea  $P \in D$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  continua en  $D$  y derivable en  $D \setminus \{P\}$ . Entonces  $\int_D f(z) dz = 0$  para todo camino cerrado  $\gamma$  en  $D$ .

## Notas

① Si  $D$  es dominio convexo en  $\mathbb{C}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  es continua en  $D$  y  $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$  para todo triángulo  $T$  en  $D$   $\rightarrow$  entonces  $f$  tiene primitives en  $D$  ( $\Rightarrow \int_D f(z) dz = 0$ , para todo camino cerrado  $\gamma$  en  $D$ )

**Consecuencia:**  $f$  es derivable en  $D$  (Teorema de Morera para triángulos)

② El Teorema de Cauchy es también cierto para dominios estrellados ( $D$  es dominio estrellado respecto a un punto  $z_0$  si para cada  $z \in D$ , el segmento  $[z_0, z]$  está en  $D$ )

Dominio convexo vs D dominio estrellado También cierto para dominios simplemente conexos (sin agujeros)

③ En  $D$  dominio general el Teorema de Cauchy no es cierto  $E : D = \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \int_{\gamma_1, \gamma_2} \frac{1}{z} dz = \pi i \neq 0$

④ El Teorema de Cauchy puede aplicarse a veces si que el dominio sea convexo, si usamos bien.

• Utilizamos este tipo de caminos:   $\text{Método: } \frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{z-z_1}{z_1^2}$

# Importante

Puedo eliminar la publi de este documento con 1 coin

¿Cómo consigo coins? → Plan Turbo: barato  
→ Planes pro: más coins

pierdo  
espacio



Necesito  
concentración

ali ali ooooh  
esto con 1 coin me  
lo quito yo...

wuolah

⑤ **Ecuación de conjugada armónica en dominios convexos:** Si  $D$  es un dominio convexo  $\Rightarrow u: D \rightarrow \mathbb{R}$  es armónica, entonces su triple conjugada armónica es  $\bar{D}$ .

⑥ **Carenecia:** Si  $u$  es armónica en el abierto  $\Omega$ , entonces  $u$  localmente la parte real de una función holomorfa (para que los discos sea dominios convexos).

## 6. LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY PARA DOMINIOS CONVEXOS

**Teorema (Fórmula integral de Cauchy para dominios convexos):** Sea  $D \subseteq \mathbb{C}$  un dominio convexo. Sea  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en  $D$ . Sea  $\gamma$  un círculo cerrado en  $D$ . Para cada  $z \in D$  tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

### 6.7 CONSECUENCIAS INMEDIATAS DE LA F. I. CAUCHY

- Conducción por inducción → la integral se convierte a media integral

**Teorema (Propiedad del valor medio para funciones holomorfas):** Sea  $f$  holomorfa en un abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Sean  $a \in \Omega$  y  $r > 0$  tales que  $\Delta(a, r) \subseteq \Omega$ . Entonces:

i) Sobre círculos:  $f(a) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$ , para todo  $r \in \mathbb{C}, r \neq 0$

ii) Sobre discos:  $f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Delta(a, r)} f(z) dA(z)$ , para todo  $r \in \mathbb{C}, r \neq 0$

**Corolario (Propiedad del valor medio para funciones armónicas):** Sea  $u$  armónica en el abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  y sean  $a \in \Omega$  y  $r > 0$  tales que  $\Delta(a, r) \subseteq \Omega$ . Entonces:

i) Sobre círculos:  $u(a) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta$ ,  $r \in \mathbb{C}, r \neq 0$

ii) Sobre discos:  $u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) dA(z)$ ,  $r \in \mathbb{C}, r \neq 0$

**Teorema (Forma débil del Principio del Mínimo Modulo):** Sea  $f$  holomorfa en el abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Si  $|f|$  alcanza su máximo local en  $a \in \Omega$ , entonces  $f$  es constante en un entorno de  $a$ .

**Corolario (Forma débil del Principio del Mínimo Modulo para funciones holomorfas):** Sea  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{C}$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Supongamos que f nunca vale cero en  $\Omega$ . Si  $|f|$  alcanza su mínimo local en  $a \in \Omega$ , entonces  $f$  es cte en un entorno de  $a$ .

**Corolario (Forma débil del principio del máximo → del mínimo para funciones armónicas):** Sea  $u$  una función armónica en un abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$

i) Si  $u$  alcanza su máximo local en  $z_0 \in \Omega$ , entonces  $u$  es cte en un entorno de  $z_0$

ii) Si  $u$  alcanza su mínimo local en  $z_0 \in \Omega$ , entonces  $u$  es cte en un entorno de  $z_0$

wuolah

## 7) ANALITICIDAD DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS

**Teorema (Diferenciación bajo el signo integral):**  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  abierto,  $\gamma$  continuo en  $\Omega$ .

Supongamos  $R: \text{Sor}(\gamma) \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  satisface:

a)  $R$  es continua en  $\text{Sor}(\gamma) \times \Omega$

b) Para cada  $\xi \in \text{Sor}(\gamma)$ , la función  $R_\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $R_\xi(z) = R(\xi, z)$  es holomorfa en  $\Omega$

c) La función  $H: \text{Sor}(\gamma) \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $H(\xi, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} R(\xi, \eta) d\eta$  es continua en  $\text{Sor}(\gamma) \times \Omega$

Entonces,  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $F(z) = \int_{\gamma} H(\xi, z) d\xi$  es holomorfa en  $\Omega$  para  $z \in \Omega$ .

$$F'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial \xi} H(\xi, z) d\xi$$

**Caso especial:**  $H(\xi, z) = \frac{\psi(\xi)}{z - \xi}$

- continua en  $\text{Sor}(\gamma) \times (\mathbb{C} \setminus \text{Sor}(\gamma))$
- holomorfa respecto de la otra variable a  $\mathbb{C} \setminus \text{Sor}(\gamma)$
- $\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\psi'(\xi)}{(z - \xi)^2}$  es continua en  $\text{Sor}(\gamma) \times (\mathbb{C} \setminus \text{Sor}(\gamma))$

Por tanto,  $F(z) = \int_{\gamma} \frac{\psi(\xi)}{z - \xi} d\xi$  integral de Cauchy en  $\Omega$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \text{Sor}(\gamma) \ni z$

$$F'(z) = \int_{\gamma} \frac{\psi(\xi)}{(z - \xi)^2} d\xi$$

**Análtico:** Desarrollable en serie de potencias

En un camino el soporte siempre es correcto

**Teorema (Analiticidad de la integral de Cauchy):** Sea  $\gamma$  continuo en  $\Omega$ ,  $\psi$  función continua en  $\text{Sor}(\gamma)$ . Consideremos la integral de Cauchy de  $\psi$ ,  $F(z) = \int_{\gamma} \frac{\psi(\xi)}{z - \xi} d\xi$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{C} \setminus \text{Sor}(\gamma)$ .

Entonces  $F$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \text{Sor}(\gamma)$ . Además, para  $a \in \mathbb{C} \setminus \text{Sor}(\gamma)$ ,

$$F^{(n)}(a) = n! \int_{\gamma} \frac{\psi(\xi)}{(z - \xi)^{n+1}} d\xi$$

Los funciones holomorfas son analíticas, infinitamente derivables y desarrollables en serie de potencias alrededor de cualquier punto.

**Dervada logarítmica:**  $\frac{d^k}{dz^k} \psi(z) = g \cdot A$ ,  $\frac{d^k}{dz^k} \psi = \frac{g^k}{k!} + \frac{g^k}{k!} A$

**Teorema (Analiticidad de las funciones holomorfas):** Sea  $f$  holomorfa en un abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Entonces  $f$  es analítica en  $\Omega$ . Esto es, si  $a \in \Omega$ ,  $f$  es desarrollable en serie de potencias alrededor de  $a$ , con radio de convergencia al menos  $R = \text{dist}(a, \Omega^c)$



distancia entre punto en  $\Omega$  y parte  $f$  discontinua el borde, parte  $f$  discontinua el borde, parte  $f$  sea holomorfa

**Nota:** Coeficiente de Taylor  $n$ -ésimo de  $f$  en  $a$ :  $\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$

**Teorema (Fórmula integral para la derivada n-ésima en dominios conexos):** Sea  $D$  dominio conexo en  $\mathbb{C}$ ,  $f$  holomorfa en  $D$  y continuo cerrado a  $\partial D$ . Entonces

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \text{para todo } z \in D \quad \text{Si } f(z)$$

- Alguna función analítica = función holomorfa
- Radio convergencia en cada punto: al menos el mismo en cada punto

## 2.2 CONSECUENCIAS DE LA ANALITICIDAD DE FUNCIONES HOLOMORFAS

**Teorema (Singulalridad evitable):** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  abierto,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  continua en  $\Omega$  y holomorfa en  $\Omega \setminus \Gamma$ . Entonces,  $f$  es holomorfa en  $\Omega$ .

- Puntos aislados donde las continuidad pero no holomorfia desaparecen

**Teorema:** Si  $f$  es holomorfa en el abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ , entonces  $\operatorname{Re}(f)$  y  $\operatorname{Im}(f)$  son funciones armónicas en  $\Omega$  de clase  $C^\infty$

**Corolario:** Si  $u$  es armónica en el abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ , entonces  $u = \operatorname{Re}(f)$

**Teorema de Morera:**  $f$  continua en el abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ , satisface  $\int_T f(z) dz = 0$  para todo círculo cerrado  $T$  en  $\Omega$ . Entonces  $f$  es holomorfa en  $\Omega$ .

**Teorema de Morera para triángulos:** Sea  $f$  continua en el abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Supongamos que  $\int_T f(z) dz = 0$  siempre que  $T$  sea triángulo cerrado contenido en  $\Omega$ . Entonces  $f$  es holomorfa en  $\Omega$ .

- holomorfia = propiedad local
- Para probar que  $f$  es holomorfa basta encontrar una primitiva

**Teorema de Liouville:** Si  $f$  es entera y acotada, entonces  $f$  es constante  
y holomorfa en todo  $\mathbb{C}$

**Corolario (También Teorema de Liouville):** Si  $f$  es entera y no cte., entonces  $f(\mathbb{C})$  es denso en  $\mathbb{C}$ .

En un disco, dentro de él los puntos de  $f(\mathbb{C})$ . No hay huecos

### EXAMEN

**Teorema (También Teorema de Liouville):**  $f$  entera  $\Rightarrow$  satisface  $|f(z)| \leq M|z|^n$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| \geq R_0$  ( $\Rightarrow |f(z)| = O(|z|^n)$ )  
dado que  $|f(z)| \leq M|z|^n$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| \geq R_0$  ( $\Rightarrow |f(z)| = O(|z|^n)$ )

Entonces  $f$  es un polinomio de grado en lo sumo  $n$ .

La  $f$  es entera  $\Rightarrow$  se comporta como un polinomio  $\Rightarrow f$  es un polinomio



## SUCESIONES DE FUNCIONES HOLOMORFAS

- La holomorfia se conserva para la convergencia normal.

**Definición (Convergencia normal, o uniforme en compactos):** Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones holomorfas en un dominio  $D \subseteq \mathbb{C}$ , sea  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Decimos que  $\{f_n\}$  converge normalmente a  $f$  en  $D$  (o que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en compactos) si y solo si para todo compacto  $K \subset D$ ,  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $K$ . O sea, si para cada compacto  $K \subset D$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > N$  entonces  $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$  para todo  $z \in K$ .

- Sobre la función límite no se dice ni un carajo nada. El límite normal de una sucesión de funciones holomorfas es continuo.

**Lema (Convergencia uniforme e compactos es equivalente a convergencia local uniforme):** Convergencia normal en  $D$  es convergencia uniforme en todos los compactos de  $D$  o es convergencia localmente uniforme en  $D$ .

**Convergencia local uniforme:** Para cada  $z_0 \in D$ , existe  $r_0 > 0$  tal que  $D(z_0, r_0) \subseteq D$  y  $f_n$  converge a  $f$  uniformemente a  $D(z_0, r_0)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Teorema de Convergencia de Weierstrass:**  $D \subseteq \mathbb{C}$  dominio,  $\{f_n\}$  sucesión de funciones holomorfas en  $D$  que converge normalmente en  $D$  a  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f$  es continua en  $D$ . Entonces  $f$  es holomorfa en  $D$ . Es más,  $\{f_n\}$  sucesión de derivadas en  $D$  que converge normalmente a  $f'$  en  $D$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ .



## RAMAS HOLOMORFAS DE LOGARITMOS Y RAÍCES

**Teorema:**  $D \subseteq \mathbb{C}$  dominio,  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa y nunca cero en  $D$ .

a) Si  $g$  es rama del  $\log(f)$  en  $D$ , entonces cualquier otra rama del  $\log(f)$  en  $D$  es de la forma  $g + 2k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (solo  $D$  es conexo).

*(es devanadera logarítmica de  $f$ )*

b) Existe rama del  $\log(f)$  en  $D$  si  $\frac{f'}{f}$  tiene primitives en  $D$  ( $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$  para todo camino cerrado  $\gamma$  en  $D$ ).

En este caso, si  $G$  es primitive de  $\frac{f'}{f}$  en  $D$ , entonces existe un  $c \in \mathbb{C}$  tal que  $G + c$  es rama holomorfa del  $\log(f)$  en  $D$ .

**Nota:**  $\frac{f'}{f}$  es la devanadera logarítmica de  $f$ , la cual tiene sentido porque  $f$  es holomorfa y nunca cero. Tenemos las siguientes reglas:

$$\bullet \quad \left( \frac{cdz}{dz} \right)' = \frac{d^2z}{dz^2} + \frac{cd'}{dz}$$

$$\bullet \quad \left( \frac{f'}{f} \right)' = \frac{f''}{f} - \frac{f'^2}{f^2}$$

$$\bullet \quad \left( \frac{cdm}{dz} \right)' = \frac{cd'}{dz}$$

# Importante

Puedo eliminar la publi de este documento con 1 coin

- ¿Cómo consigo coins? → Plan Turbo: barato
- Planes pro: más coins

pierdo  
espacio



Necesito  
concentración

ali ali ooooh  
esto con 1 coin me  
lo quito yo...

wuolah  
~~wuolah~~

**Teorema:** Sean  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .  $D \subseteq \mathbb{C}$  dominio.  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa y nula en  $z = 0$ .

a) Si  $g$  es una norma del log (pl en  $D$ ), entonces  $h := e^{g(z)}$  es norma de  $\mathcal{D}f$  en  $D$  y cumple que  $h$  es de la forma  $\frac{f'(z)}{z^n}$  para alguna otra norma de  $\mathcal{D}f$  en  $D$ .

b) Si  $h$  es norma de  $\mathcal{D}f$  en  $D$ , entonces  $h$  es holomorfa en  $0$  y  $h' = \frac{f''(0)}{n!}$  en  $D$ .

c) Si existe una norma de  $\mathcal{D}f$  en  $D$ , entonces para todo  $\epsilon$  como cuando  $f$  en  $D$ ,  
 $\frac{1}{2\pi\omega} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f'(z)}{z^{n+1}} dz$  es un múltiplo entero de  $n$ .

**Nota:** Si  $f$  y  $g$  son comunes parametrizadas por  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ( $\varphi$  de clase  $C^1$  a trozos), si  $h$  es holomorfa en  $\text{Im}(\varphi)$ , entonces  $h \circ \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  vuelve a ser de clase  $C^1$  a trozos y representa a un común  $T$  que se nula llamarse **el común nula de  $f$  mediante  $\varphi$** , si que a veces se denota como  $T = h \circ \varphi$ . Observamos que si cambiamos de parametrización  $\varphi$  a  $\psi$ , entonces obtenemos la misma de parametrización en  $T$  de la forma  $h \circ \psi$ .

En esta misma linea, si  $T = h \circ \varphi$  es un común que no pasa por  $0$ , tiene sentido hablar de la variación del argumento a lo largo de  $T$ , lo que da lugar a la definición de la variación del argumento de  $h$  a lo largo de  $\varphi$  como

$$\text{Var}_\varphi(Carg(T)) = \text{Var}_{\psi}(Carg(\psi))$$