15기 정규세션

ToBig's 14기 박준영

선형대수학 정리

▪ 1. 선형대수학 = 선형 + 대수학

선형(Linear)

- 선형 : ‘선형성’을 갖는다
- 선형성을 갖기 위해서는 2가지를 만족해야한다.
  - Homogeneity(동차성): 임의의 수 x와 a에 대해 옆의 식이 항상 성립할 때 $f(ax_1)=af(x_1)$
  - Additivity(가산성) : 임의의 수 x1과 x2에 대해 옆의 식이 항상 성립할때 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$

위 두조건을 만족할 때, 선형성을 가진다고 말한다!!!

▪ 2. 용어 정리

Vector : 벡터 공간의 원소

ex) 5차원 벡터 : $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$

Vector의 내적

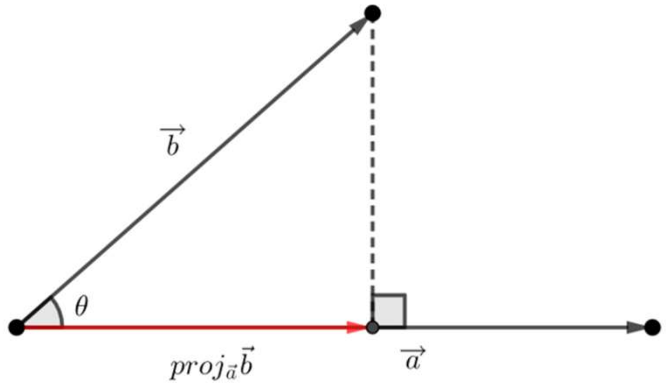
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \cos\theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

▪ 2. 용어 정리

정사영(orthographic projection)

Vector의 내적=0 ➡ 두 Vector는 서로 직교



▪ 2. 용어 정리

정방행렬(Square Matrix)

- 행과 열의 수가 같은 행렬(nxn)

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ii})$$

단위행렬(Identity Matrix)

$$AE=EA=A$$

- 주대각선 원소가 모두 1이고 다른 원소는 모두 0인 정방행렬

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

▪ 2. 용어 정리

전치행렬(Transpose of a Matrix)

- 행과 열을 교환하는 것, 이때 주대각선의 원소는 바뀌지 않는다.

A $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

A $\boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{matrix}}$

A^T $\boxed{\begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{matrix}}$

A^T $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

Appendix

▪ 2. 용어 정리

행렬식(Determinant)

- 정방행렬에서만 정의되며 역행렬의 존재 유무를 알아볼 때, 역행렬을 구할 때 사용된다
- det(A)=0 이면 A의 역행렬이 존재하지 않는다!

  0이 아니면 역행렬이 존재함을 뜻한다!

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow det(A)=ad-bc$$

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow det(A)=a(ei-fh)-b(di-fg)+c(dh-eg)$$

$det(AB)=det(A)det(B)$ (단, A,B는 동일크기의 정방행렬)

$det(A^T)=det(A)$

$$det(A^{-1})=\frac{1}{det(A)}$$

$det(PAP^{-1})=det(A)$

▪ 2. 용어 정리

역행렬(Inverse Matrix)

- 원래 행렬과 곱했을 때, 단위행렬이 되는 행렬

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

- 계산식

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

대각합(Trace)

- 정방행렬의 주대각선 성분들의 합
- 행렬의 대각합은 고유값들의 합과 같다

두 정사각행렬 A, B와 실수 c에 대해 아래가 성립한다.

1) $tr(A^T) = tr(A)$
2) $tr(cA) = c \cdot tr(A)$
3) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
4) $tr(A-B) = tr(A) - tr(B)$
5) $tr(AB) = tr(BA)$

▪ 2. 용어 정리

대각행렬(Diagonal Mat rix)

- 주대각원소 외의 원소가 모두 0인 행렬 (보통 정방행렬을 뜻함)
- 계산이 간단해지기 때문에 대각화를 통해 대각행렬로 사용한다

$$diag(1,2,3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

▪ 2. 용어 정리

대각행렬(Diagonal Matrix)

- 주대각원소 외의 원소가 모두 0인 행렬 (보통 정방행렬을 뜻함)
- 계산이 간단해지기 때문에 대각화를 통해 대각행렬로 사용한다

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \quad D^k = \begin{bmatrix} d_1^{\,k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^{\,k} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^{\,k} \end{bmatrix} \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/d_n \end{bmatrix}$$

Appendix

- 2. 용어 정리

*고유값(Eigen Value), 고유벡터(Eigen Vector)

- 수학적 의미: 정방행렬 A에 대해 아래 식을 만족하는 스칼라 λ와 열벡터 v

$$A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

- **Eigen value 고유값 = 스칼라 λ**
  - 선형 변환 A에 의해 벡터의 크기가 변하는 정도

- **Eigen vector 고유벡터 = 열벡터 v**
  - 정방행렬 A를 선형 변환으로 봤을 때,
  - 선형 변환 A에 의한 변환 결과가 자기자신의 λ배(상수배)가 되는 0이 아닌 벡터

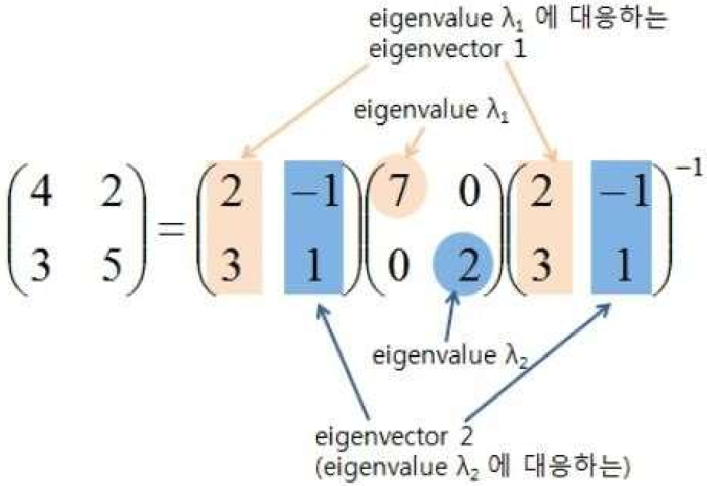
Appendix

▪ 2. 용어 정리

행렬의 대각화 = 고유값 분해 (Eigen decomposition)

- 행렬 A를 고유벡터들을 열벡터로 하는 행렬(P)와 고유값을 대각원소로 하는 행렬(Λ)의 곱으로 대각화 분해

$$A=P\Lambda P^{-1}$$



▪ 2. 용어 정리

행렬의 대각화 = 고유값 분해 (Eigen decomposition)

- 대각화 분해(Eigendecomposition)의 성질

1) $$\begin{aligned} det(A) &= det(P\Lambda P^{-1}) \\ &= det(P)det(\Lambda)det(P)^{-1} \\ &= det(\Lambda) \\ &= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} A^k &= (P\Lambda P^{-1})^k \\ &= (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1}) \\ &= P\Lambda^k P^{-1} \\ &= Pdiag(\lambda_1^k,\ldots,\lambda_n^k)P^{-1} \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} A^{-1} &= (P\Lambda P^{-1})^{-1} \\ &= P\Lambda^{-1}P^{-1} \\ &= Pdiag(1/\lambda_1,\ldots,1/\lambda_n)P^{-1} \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} tr(A) &= tr(P\Lambda P^{-1}) \\ &= tr(\Lambda) \quad (\because tr(AB)=tr(BA)) \\ &= \lambda_1+\ldots+\lambda_n \end{aligned}$$

Appendix

▪ 2. 용어 정리

행렬의 대각화 = 고유값 분해 (Eigen decomposit ion)

- 고유값분해 가능조건
  - N x N 정방행렬 A가 N개의 일차독립인 고유벡터를 가질 때 고유값 분해가 가능하다
  - **일차독립이란?,**
  - 어떤 벡터들의 집합에서 어느 한 벡터도 다른벡터들의 일차결합 (벡터들에 어떤 값을 곱하고 더한 형태) 으로 표현될 수 없다면 이 벡터들은 서로 일차독립이다
  - Ex) (1,0,0), (0,1,0). (0,0,1) -> 이 세개의 벡터는 일차독립이다!

Appendix

▪ 2. 용어 정리

직교행렬(Orthogonal Matrix)

- 행렬과 행렬의 전치행렬을 곱하면 단위행렬이 되는 경우

$A\,{}^tA = {}^tA\,A = I$인 행렬.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ 이라 두면,

$$A\,{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

대칭행렬(Symmetric Matrix)

- 정방행렬 중에서 대각원소를 중심으로 원소 값들이 대칭되는 행렬 $A^T = A$
- 대칭행렬은 항상 고유값 대각화가 가능하며 직교행렬로 대각화 가능하다

$$A = P\Lambda P^{-1} = P\Lambda P^T \qquad PP^T = E \quad (P^{-1} = P^T)$$

▪ 3. 역행렬(Inverse Matrix)과 행렬식(Determinant)

역행렬의 용도

선형방정식 풀이

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow AX=B \longrightarrow X=A^{-1}B$$

$\Rightarrow$ 역행렬은 존재할 수도 있고, 존재하지 않을 수도 있음!
$\Rightarrow$ 역행렬의 존재여부를 판단할 수 있는 것이 행렬식!

- 3. 역행렬(Inverse Matrix)과 행렬식(Determinant)

역행렬의 성질

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$$

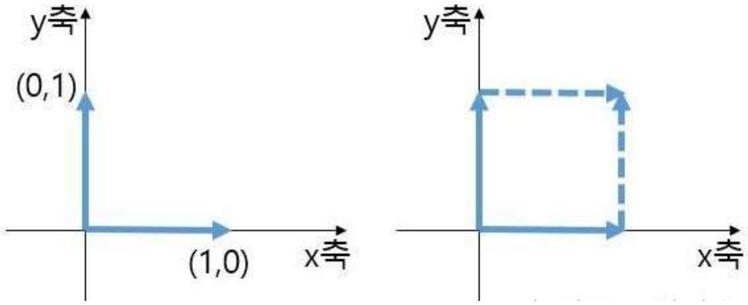
$$(sA)^{-1} = \frac{1}{s}A^{-1}$$

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

▪ 3. 역행렬(Inverse Matrix)과 행렬식(Determinant)

행렬식의 기하학적 의미

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



1. 2X2 행렬
   - 두 벡터를 이용해 만들 수 있는 도형의 면적이 해당 행렬의 행렬식의 절대값

2. 3X3 행렬
   - 3차원 공간에서 해당 행렬 속 벡터들로 구성된 3차원 도형의 부피

3. nXn 행렬
   - N차원 공간의 벡터들로 구성된 도형의 부피

▪ 3. 역행렬(Inverse Matrix)과 행렬식(Determinant)

행렬식의 용도

1. 역행렬의 존재유무

det(A) = 0 : 역행렬 없음

=> 연립방정식을 만족하는 유일한 해가 존재하지 X

=> 만족하는 해의 개수가 무한대(부정) 이거나 없다 (불능)

det(A) ≠ 0 : 역행렬 있음

=> 연립방정식을 만족하는 유일해가 존재

▪ 3. 역행렬(Inverse Matrix)과 행렬식(Determinant)

행렬식의 용도

2. 선형변환

$$P' = AP$$

- 행렬 P가 행렬 A와 곱해졌을 때 P'이 된다면, 행렬 A는 P를 P'으로 변환시켜주는 선형변환으로 해석할 수 있는데,
- 이 때 det(A)의 절대값은 선형변환의 크기를 나타내고, 부호는 도형의 방향의 보존유무를 나타낸다
- det(A) > 0 이면 도형의 방향 보존, det < 0 이면 도형의 방향 보존되지 않는다.

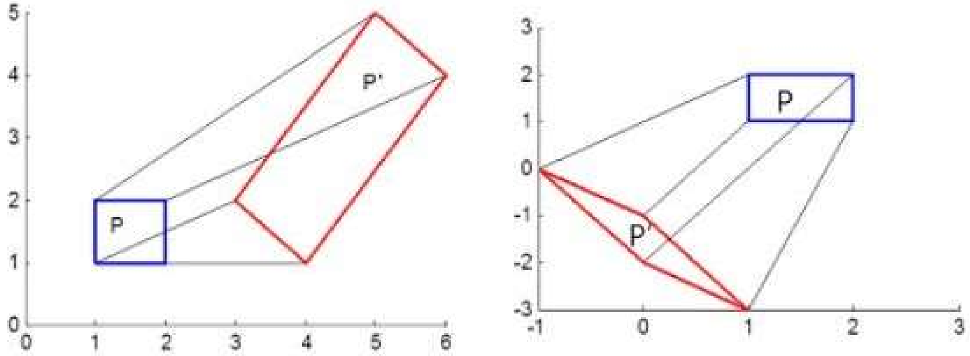
Appendix

■ 3. 역행렬(Inverse Matrix)과 행렬식(Determinant)

행렬식의 용도

2. 선형변환

면적$(P')=|det(A)|\times$면적(P) (2D의 경우)



$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, det(A)=5 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, det(A)=-1

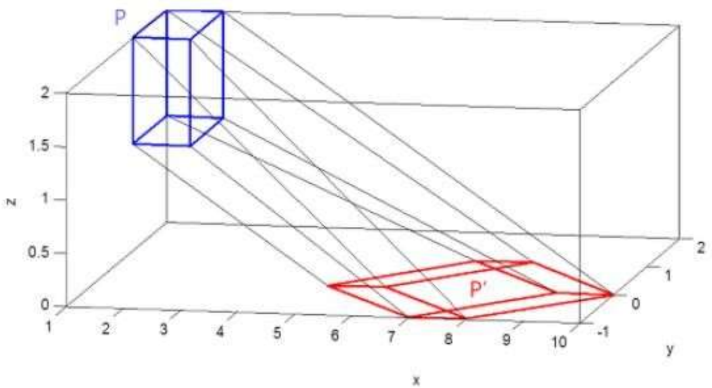
=> 왼쪽 그림은 P에서 P'이 될 때, 크기 5배 방향 보존
=>오른쪽 그림은 P에서 P'이 될 때, 크기 1배 방향 보존 X

▪ 3. 역행렬(Inverse Matrix)과 행렬식(Determinant)

행렬식의 용도

2. 선형변환

$$\text{부피}(P') = |det(A)| \times \text{부피}(P) \quad (3D\text{의 경우})$$



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 0$$

=> P에서 P'이 될 때, 크기는 0배
=> 즉 평면이 된다!

Appendix

▪ 3. 역행렬(Inverse Matrix)과 행렬식(Determinant)

행렬식의 성질

$$det(A^T)=det(A)$$

$$det(A^{-1})=\frac{1}{det(A)}$$

$$det(PAP^{-1})=det(A)$$

$$det(cA)=c^n det(A)$$ (단, A는 $n\times n$ 정방행렬)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$det(diag(a_{11},\ldots,a_{nn}))=\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Q & A

들어주셔서 감사합니다.

Appendix

- 참고자료

13기 최혜빈님 자료

#https://darkpgmr.tistory.com/103?category=460967

#https://m.blog.naver.com/PostView.nhn?blogId=tlaja&logNo=220720682588&proxyReferer=https:%2F%2Fwww.google.com%2F

#https://blog.naver.com/PostView.nhn?blogId=ao9364&logNo=221542210272