模块三：线性映射的迭代

教学要求：理解线性映射的思想，会用线性映射和特征值的思想方法解决诸如天气等实际问题。

3.1 对 $A=\begin{pmatrix} m & m-4 \\ 6-m & 10-m \end{pmatrix}$，$(x_1^{(0)},x_2^{(0)})^T=(1,2)^T$，求出 $\{x^{(n)}\}$ 的通项.

代码：
```
A= str2sym('[1011, 1011-4; 6-1011,10-1011]');
[p,d] = eig(A);
q=inv(p);
syms n;
x=[1;2];
p*(d.^n)*q*x
```

结果：
```
ans=
(3021*6^n)/2-(3019*4^n)/2-(5029*0^n)/1005
2*0^n+(3019*4^n)/2-(3015*6^n)/2
```

3.2 对于 3.1 题中的矩阵 A，记 $B=\frac{1}{10}A$，$(x_1^{(0)},x_2^{(0)})^T=(1,2)^T$，求出 $\{x^{(n)}\}$ 的通项.

代码：
```
A=str2sym('[1011, 1011-4; 6-1011, 10-1011]');
B=1/10.*A;
[p,d] = eig(B);
q= inv(p)
syms n
x=[1;2];
p*(d.^n)*q*x
```

结果：
```
ans=
(3021*(3/5)^n)/2 - (3019*(2/5)^n)/2-(5029*0^n)/1005
2*0^n+(3019*(2/5)^n)/2-(3015*(3/5)^n)/2
```

3.3 探究线性映射迭代：经过若干次迭代后稳定的迭代数列，其最终稳定值的特征与迭代矩阵之间的关系。

对 $A=\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$，初始向量取−1 与 1 之间的随机数 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T$，进行多次迭代。（例如：可以取 20 组随机数，每组随机数进行 40 次迭代）

（1）将每次迭代得到的向量，画在一张图中。写代码，贴图

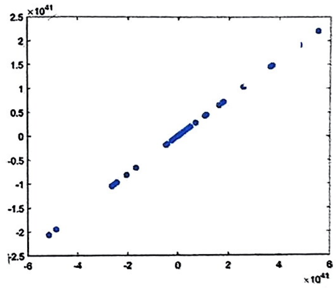
（2）观察图形，可以看出所有向量分布呈现什么特点？

（3）写代码判断数列 $\{\frac{x_2^{(n)}}{x_1^{(n)}}\}$ 是否有极限；如有极限，写出该极限值.（注意分母为零的点去除，不计算）

（4）思考：数列 $\{\frac{x_2^{(n)}}{x_1^{(n)}}\}$ 的极限值与（2）中图形之间有什么关系？

(1) 代码：

```
A=[9,5;2,6];
t=[];
for i=1:20
    x=2*rand(2,1)-1;
    t(length(t)+1,1:2)=x;
    for j=1:40
        x=A*x;
        t(length(t)+1,1:2)=x;
    end
end
plot(t(:,1),t(:,2),'.','MarkerSize',20)
grid on
```



(2) 分布呈一条近似过原点的直线.

(3) 代码：

```
A=[9,5;2,6];
t=[];
x=2*rand(2,1)-1;
for i=1:20
    t(i,1:2)=x;
    x=A*x;
end
```

```
for i=1:20
    if t(i,1)==0
    else s= t(i,2)/t(i,1);
    fprintf('%g. %g\n', i, s);
    end
end
```

结果：
1. -0.73976
2. -0.460002
3. -0.113435
4. 0.156459
5. 0.300416
6. 0.362071
7. 0.385966
8. 0.394864
9. 0.398128
10. 0.399319
11. 0.399752
12. 0.39991
13. 0.399967
14. 0.399988
15. 0.399996
16. 0.399998
17. 0.399999
18. 0.4
19. 0.4
20. 0.4

(4) 极限值与(2)中直线的斜率相等.

3.4 探讨线性映射迭代中，迭代矩阵对迭代结果的影响（以二维矩阵为例）. 要求：根据所给矩阵，取适当初始向量，根据所给矩阵，取适当初值进行迭代，由迭代结果判断迭代序列是否稳定，将相关输出结果填入下表，并以其中一个矩阵为例在下一页写出相应的代码.

迭代矩阵 A	$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{18} \\ \frac{1}{4} & \frac{11}{18} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} m & 6-m \\ m-2 & 8-m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} m & \frac{1}{4}-m \\ m-\frac{3}{4} & 1-m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} m-1 & m \\ 1-m & -m \end{pmatrix}$
特征值 λ	$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 0.3611$	$\lambda_1 = 6.0000$ $\lambda_2 = 6.0000$	$\lambda_1 = 0.7500$ $\lambda_2 = 0.2500$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -1$
特征向量 α	$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0.8412 \\ 0.5408 \end{pmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \end{pmatrix}$	$\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{pmatrix}$ $\vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0.7057 \\ 0.7085 \end{pmatrix}$	$\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0.7073 \\ 0.7069 \end{pmatrix}$ $\vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \end{pmatrix}$	$\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0.7075 \\ -0.7068 \end{pmatrix}$ $\vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \end{pmatrix}$
迭代后的稳定值	$\alpha = \begin{pmatrix} 0.6087 \\ 0.3913 \end{pmatrix}$	不稳定	$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -1010.5 \\ 1010.5 \end{pmatrix}$
与特征向量的关系	$\alpha = 0.7236\alpha_1$	无关	$\vec{\alpha} = 0\vec{\alpha}_1$	$\vec{\alpha} = 1428.356\vec{\alpha}_2$
迭代后是否稳定	是	否	是	是

代码：
```
A=[3/4, 7/18; 1/4, 11/18];
p=[0.5; 0.5];
[V,D] = eig(A);
diag(D)
V
for i=1:100
    p=A*p;
    disp(p)
end
```