

確率解析勉強会発表資料

中津陽

2024 年 7 月 22 日

$I(\Delta)^2$ は条件付き期待値の Jensen の不等式により、非負の submartingale である。したがって、Karatzas, and Shreve より、 $I(\Delta)$ は一意な Doob-Meyer decomposition を持つ。

$$I_t(\Delta) = M_t + A_t, \quad 0 \leq t < \infty \quad (1)$$

ただし、 M は右連続な martingale で、 A は連続な増加過程である。

この時、 $I(\Delta)$ の 2 次変分 $\langle I(\Delta) \rangle_t$ を以下の様に定める。

$$\langle I(\Delta) \rangle_t := A_t \quad (2)$$

このことより、 $I(\Delta)$ の 2 次変分が、a.s. に同一なパスを持つという意味において、一意に存在するといえる。

この 2 次変分が教科書の定義と合致することは、Karatzas, and Shreve の以下の定理より分かる。

Theorem 0.0.0.1. Let $X \in \mathcal{M}_2^c$. For partitions Π of $[0, t]$, we have

$$\text{plim}_{\|\Pi\| \rightarrow 0} V_t^2(\Pi) = \langle X \rangle_t \quad (3)$$