確率解析勉強会第 1 回

中津陽

2024 年 6 月 5 日

概要

この資料は、「」著「」を元に、確率解析の学習を行うために作成された。

1　一般的な確率論

1.1　無限確率空間

なぜ σ-加法族を考える必要があるか。

Definition 1.1.1 (σ-加法族)**.** $\Omega \neq \phi$, $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ とする。$\mathcal{F}$ が σ 加法族であるとは、次を満たすことである。

(i) $\phi \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}[A_n \in \mathcal{F}] \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Definition1.1.1(i), (iii) より、$A \in \mathcal{F} \wedge B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ が成立する。

Proof. 集合列 $A, B, \phi, \phi, \ldots$ を考える。ただし、$A, B \in \mathcal{F}$ である。Definition1.1.1(i) より、$\phi \in \mathcal{F}$ である。したがって、Definition1.1.1(iii) より、$A \cup B = A \cup B \cup \phi \cup \phi \cdots \in \mathcal{F}$ が言える。 □

同様にして、ある自然数 N に対し、$\forall n \in \{1, 2, \ldots, N\}[A_n \in \mathcal{F}] \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{N} A_n \in \mathcal{F}$ が成立する。

Proof. $N = k$ において、題意が満たされるものと仮定する。したがって、$\bigcup_{n=1}^{k} A_n \in \mathcal{F}$ である。$A_{k+1} \in \mathcal{F}$ をとる。この時、上述の証明より $\bigcup_{n=1}^{k+1} A_n = \bigcup_{n=1}^{k} A_n \cup A_{k+1} \in \mathcal{F}$ $N = 1$ の場合は自明なので、以上から再起的に題意は示された。 □

Definition1.1.1(ii),(iii) より、$\forall n \in \mathbb{N}[A_n \in \mathcal{F}] \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ が示される。

Proof. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c$ より、Definition1.1.1(ii),(iii) から、$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c \in \mathcal{F}$ である。 □

同様にして、ある自然数 N に対し、$\forall n \in \{1, 2, \ldots, N\}[A_n \in \mathcal{F}] \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{N} A_n \in \mathcal{F}$ が成立する。

Proof. 略 □

$\Omega = \phi^c$ なので、$\Omega \in \mathcal{F}$ が言える。

Definition 1.1.2 (確率測度)**.** $\Omega \neq \phi$ を集合、$\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ を σ-加法族とする。以下を満たすとき、関数 $\mathbb{P} : \mathcal{F} \in A \to x \in [0,1]$ を確率測度という。

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(ii) $\{A_n\}$ が $\mathcal{F}$ に属する互いに素な集合列ならば、($i.e.\ \forall n, m \in \mathrm{N}(n \neq m), A_n \cap A_m = \phi$) 次が成立する。

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) \tag{1}$$

この時、$\mathrm{P}(A) \in [0,1]$ の値を A の確率と呼ぶ。また、(ii) の性質のことを可算加法性という。

Example 1.1.3. $[0,1]$ から、無作為に実数を選ぶことに対する数学モデルを、その確率が区間上に一様に分布するよう考える。開区間 $[a,b]$ の確率は以下のように定義される。

$$\mathrm{P}[a,b] = b - a,\ 0 \leq a \leq b \leq 1 \tag{2}$$

$[0,1]$ 上のこの確率測度は Lebesgue 測度と呼ばれ、$\mathcal{L}$ とも記される。$\mathcal{P}[a,a] = 0$ より、区間上の 1 点に対する確率は 0 であるとわかる。従って、$\mathcal{P}(a,b) = \mathcal{P}[a,b]$ であると言える。

2 と確率測度の性質より、確率が決まる集合の全体を考えると、それは開区間の全体を含む最小の σ-加法族であるとわかる。