

目次	
1	テンプレート 2
2	グラフ 2
2.1	Lowest Common Ancestor . . . . . 2
2.2	Strongly Connected Components . . . . . 2
2.3	2-SAT . . . . . 3
3	フロー 3
3.1	dinic . . . . . 3
3.2	最小費用流 . . . . . 4
4	数学 5
4.1	拡張ユークリッド互除法 . . . . . 5
4.2	modint . . . . . 5
4.3	FFT . . . . . 5
4.4	高速ゼータ変換・メビウス変換 . . . . . 6
4.5	高速アダマール変換 . . . . . 6
5	データ構造 7
5.1	Fenwick Tree . . . . . 7
5.2	セグメント木 . . . . . 7
5.3	遅延評価セグメント木 . . . . . 8
5.4	Undo つき UnionFind . . . . . 10
6	文字列 11
6.1	Rolling Hash . . . . . 11
6.2	Trie 木 . . . . . 11
6.3	Suffix Array . . . . . 12
6.4	Z algorithm . . . . . 12
7	幾何 12
7.1	2D Geometry Template . . . . . 12
7.2	2D Points and Vectors . . . . . 13
7.3	2D Segments and Lines . . . . . 13
7.4	2D Polygon . . . . . 13

7.5	2D Closest Pair . . . . . 14
7.6	2D Circle . . . . . 14
7.7	3D Geometry Template . . . . . 16
7.8	3D Plane . . . . . 16
7.9	3D Point on the Triangle . . . . . 17
7.10	3D Libraries for Lines and Segments . . . . . 17
7.11	3D Intersection of Planes . . . . . 18

## 1 テンプレート

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 using ll = long long;
5 using P = pair<int, int>;
6 constexpr ll MOD = 1000000007;
7 constexpr int INF = 1 << 30;
8 #define REP(i, n) for (int i = 0, i_len = (n); i < i_len; i++)
9 #define ALL(v) (v).begin(), (v).end()
```

## 2 グラフ

### 2.1 Lowest Common Ancestor

木の最近共通祖先 (Lowest Common Ancestor: LCA) をダブリングにより求める。前計算：時間・空間ともに  $O(V \log V)$ 、クエリあたり： $O(\log V)$  である。

- $LCA(G, r)$  : 木  $G$  と根  $r$  から、前計算する。
- $\text{int query}(u, v)$  :  $LCA(u, v)$  を求める。
- $\text{bool is\_on\_path}(u, v, a)$  : 頂点  $a$  が頂点  $u, v$  を結ぶパス上に存在するかどうか

```
1 struct LCA {
2     vector<vector<int>>> parent;
3     vector<int> depth;
4     LCA() {}
5     LCA(const vector<vector<int>>& G, int r = 0) { init(G, r); }
6
7     void init(const vector<vector<int>>& G, int r = 0) {
8         int V = (int)G.size();
9         int h = 1;
10        while ((1 << h) < V) ++h;
11        parent.assign(h, vector<int>(V, -1));
12        depth.assign(V, -1);
13        dfs(G, r, -1, 0);
14        for (int i = 0; i + 1 < (int)parent.size(); ++i) {
15            for (int v = 0; v < V; ++v) {
16                if (parent[i][v] != -1) {
17                    parent[i + 1][v] = parent[i][parent[i][v]];
18                }
19            }
20        }
21    }
22
23    void dfs(const vector<vector<int>>& G, int v, int p, int d) {
24        parent[0][v] = p;
25        depth[v] = d;
26        for (auto e : G[v])
27            if (e != p) dfs(G, e, v, d + 1);
28    }
29
30    int query(int u, int v) {
31        if (depth[u] > depth[v]) swap(u, v);
```

```
32        for (int i = 0; i < (int)parent.size(); ++i) {
33            if ((depth[v] - depth[u]) & (1 << i)) v = parent[i][v];
34        }
35        if (u == v) return u;
36        for (int i = (int)parent.size() - 1; i >= 0; --i) {
37            if (parent[i][u] != parent[i][v]) {
38                u = parent[i][u];
39                v = parent[i][v];
40            }
41        }
42        return parent[0][u];
43    }
44
45    int dist(int u, int v) {
46        return depth[u] + depth[v] - 2 * depth[query(u, v)];
47    }
48
49    bool is_on_path(int u, int v, int x) {
50        return dist(u, x) + dist(x, v) == dist(u, v);
51    }
52};
```

### 2.2 Strongly Connected Components

有向グラフを強連結成分分解する。計算量は  $O(V + E)$

- $\text{SCC}(\text{int } V)$  : コンストラクタ。  $V$  頂点  $E$  辺の有向グラフを作る。
- $\text{void add\_edge}(\text{int from}, \text{int to})$  : 頂点  $\text{from}$  から 頂点  $\text{to}$  へ有向辺を足す。
- $\text{pair<int, vector<int>> scc\_ids}()$  :  
(SCC の個数, SCC の id) を返す。  $\text{id}[v] :=$  頂点  $v$  が属する連結成分の番号
- $\text{vector<vector<int>> graph.scc}()$  :  
次の条件を満たす「頂点のリスト」のリストを返す。
  - 全ての頂点がちょうど 1 つずつ、どれかのリストに含まれる。
  - 内側のリストと強連結成分が一对一に対応する。リスト内の順序は未定義。
  - リストはトポロジカルソートされている。

```
1 struct SCC {
2     int _n;
3     struct edge {
4         int to;
5     };
6     vector<pair<int, edge>> edges;
7
8     template <class E>
9     struct csr {
10        vector<int> start;
11        vector<E> elist;
12        csr(int n, const vector<pair<int, E>>& edges)
13            : start(n + 1), elist(edges.size()) {
14            for (auto e : edges) start[e.first + 1]++;
15            for (int i = 1; i <= n; i++) start[i] += start[i - 1];
16            auto counter = start;
17            for (auto e : edges) elist[counter[e.first]++] = e.second;
18        }
19    };
20};
```

```

19 };
20
21 SCC(int n) : _n(n) {}
22 SCC() : _n(0) {}
23
24 int num_vertices() { return _n; }
25
26 void add_edge(int from, int to) {
27     edges.push_back({from, {to}});
28 }
29
30 // return pair of (# of scc, scc id)
31 pair<int, vector<int>> scc_ids() {
32     auto g = csr<edge>(_n, edges);
33     int now_ord = 0, group_num = 0;
34     vector<int> visited, low(_n), ord(_n, -1), ids(_n);
35     visited.reserve(_n);
36     auto dfs = [&](auto self, int v) -> void {
37         low[v] = ord[v] = now_ord++;
38         visited.push_back(v);
39         for (int i = g.start[v]; i < g.start[v + 1]; i++) {
40             auto to = g.elist[i].to;
41             if (ord[to] == -1) {
42                 self(self, to);
43                 low[v] = min(low[v], low[to]);
44             } else {
45                 low[v] = min(low[v], ord[to]);
46             }
47         }
48         if (low[v] == ord[v]) {
49             while (true) {
50                 int u = visited.back();
51                 visited.pop_back();
52                 ord[u] = _n;
53                 ids[u] = group_num;
54                 if (u == v) break;
55             }
56             group_num++;
57         }
58     };
59     for (int i = 0; i < _n; i++)
60         if (ord[i] == -1) dfs(dfs, i);
61     for (auto& x : ids) x = group_num - 1 - x;
62     return {group_num, ids};
63 }
64
65 vector<vector<int>> scc() {
66     auto ids = scc_ids();
67     int group_num = ids.first;
68     vector<int> counts(group_num);
69     for (auto x : ids.second) counts[x]++;
70     vector<vector<int>> groups(ids.first);
71     for (int i = 0; i < group_num; i++) groups[i].reserve(counts[i]);
72     for (int i = 0; i < _n; i++) groups[ids.second[i]].push_back(i);
73     return groups;
74 }
75 };

```

## 2.3 2-SAT

$n$  変数  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  に関して、

$$(x_i = f) \vee (x_j = g)$$

というクローズを足し、これを全て満たす変数の割り当てがあるか、という問題を解く。

- two\_sat(n) :  $n$  変数の 2-SAT を作る。  $O(n)$
- void add\_clause(i, f, j, g) : クローズ  $(x_i = f) \vee (x_j = g)$  を足す。 ならし  $O(1)$
- bool satisfiable() :  
(割り当てが存在する ? true : false). クローズの個数を  $m$  として  $O(n + m)$
- vector<bool> answer() :  
最後に呼んだ satisfiable のクローズを満たす割り当てを返す。 satisfiable を呼ぶ前や、割り当てがない場合、中身が未定義の長さ  $n$  の vector を返す。  $O(n)$

```

1 struct TwoSAT {
2     public:
3         TwoSAT() : _n(0), scc(0) {}
4         TwoSAT(int n) : _n(n), _answer(n), scc(2 * n) {}
5
6         void add_clause(int i, bool f, int j, bool g) {
7             scc.add_edge(2 * i + (f ? 0 : 1), 2 * j + (g ? 1 : 0));
8             scc.add_edge(2 * j + (g ? 0 : 1), 2 * i + (f ? 1 : 0));
9         }
10
11         bool satisfiable() {
12             auto id = scc.scc_ids().second;
13             for (int i = 0; i < _n; i++) {
14                 if (id[2 * i] == id[2 * i + 1]) return false;
15                 _answer[i] = id[2 * i] < id[2 * i + 1];
16             }
17             return true;
18         }
19
20         vector<bool> answer() { return _answer; }
21
22     private:
23         int _n;
24         vector<bool> _answer;
25         SCC scc; // 強連結成分分解を用いる
26 };

```

## 3 フロー

### 3.1 dinic

最大流問題を解くアルゴリズム。計算量は  $O(VE^2)$  だが実用上かなり高速なことが多い。

- Dinic flow(V): 構造体の宣言。V は頂点数。
- flow.add\_edge(u, v, c):  $u \rightarrow v$  に容量  $c$  の辺を追加する

- `flow.max_flow(s, t)`:  $s \rightarrow t$  の最大流を返す

```

1 // Dinic法  $O(V^2E)$ 
2 struct Dinic {
3     int V; // 頂点数
4     vector<vector<long long>>> graph; // グラフ
5     vector<int> dis; // 始点からの距離
6     vector<int> next; // 次に処理する頂点のメモ
7     Dinic(int v) : V(v) { graph.resize(V); }
8     void add_edge(int from, int to, long long capacity) {
9         graph[from].push_back({to, capacity, (int)graph[to].size()});
10        graph[to].push_back({from, 0, (int)graph[from].size() - 1});
11    }
12    void bfs(int s) {
13        dis.assign(V, -1);
14        dis[s] = 0;
15        deque<int> pos = {s};
16        while (pos.size()) {
17            int now = pos[0];
18            pos.pop_front();
19            for (auto& to : graph[now]) {
20                if (dis[to[0]] < 0 and to[1] > 0) {
21                    dis[to[0]] = dis[now] + 1;
22                    pos.emplace_back(to[0]);
23                }
24            }
25        }
26    }
27    long long dfs(int v, int t, long long f) {
28        if (v == t) return f;
29        for (int& i = next[v]; i < graph[v].size(); i++) {
30            int to = graph[v][i][0];
31            long long& cap = graph[v][i][1];
32            int rev = graph[v][i][2];
33            if (cap > 0 and dis[v] < dis[to]) {
34                long long d = dfs(to, t, min(f, cap));
35                if (d > 0) {
36                    cap -= d;
37                    graph[to][rev][1] += d;
38                    return d;
39                }
40            }
41        }
42        return 0;
43    }
44    long long max_flow(int s, int t) {
45        long long flow = 0;
46        while (1) {
47            bfs(s);
48            if (dis[t] < 0) return flow;
49            next.assign(V, 0);
50            long long f;
51            while ((f = dfs(s, t, LLONG_MAX)) > 0) flow += f;
52        }
53    }
54 };

```

### 3.2 最小費用流

最小費用流問題を解くアルゴリズム。計算量は  $O(FE \log V)$

- `MinCostFlow flow(V)`: 構造体の宣言。V は頂点数。
- `flow.add_edge(u, v, c, d)`:  $u \rightarrow v$  に容量 c, コスト d の辺を追加する
- `flow.min_cost_flow(s, t, F)`:  $s \rightarrow t$  に流量 F を流すときの最小コストを返す。流せない場合は-1を返す。

```

1 // 最小費用流  $O(FE \log V)$ 
2 struct MinCostFlow {
3     int V;
4     vector<vector<vector<long long>>>> g; // g[from] = {{to, 容量, コスト, 逆辺のindex}
5     ... }
6     vector<long long> h, dis; // ポテンシャル, 最短距離
7     vector<int> prevv, preve; // 直前の頂点, 辺
8     MinCostFlow(int v) : V(v), g(v), dis(v), prevv(v), preve(v) {
9     }
10
11    void add_edge(int u, int v, long long c, long long d) {
12        g[u].push_back({v, c, d, (int)g[v].size()});
13        g[v].push_back({u, 0, -d, (int)g[u].size() - 1});
14    }
15
16    long long min_cost_flow(int s, int t, long long f) {
17        long long res = 0;
18        h.assign(V, 0);
19        using Q = pair<long long, int>;
20        while (f > 0) {
21            priority_queue<Q, vector<Q>, greater<Q>> que;
22            dis.assign(V, LLONG_MAX);
23            dis[s] = 0;
24            que.push({0, s});
25            while (que.size()) {
26                Q q = que.top();
27                int v = q.second;
28                que.pop();
29                if (dis[v] < q.first) continue;
30                for (int i = 0; i < g[v].size(); i++) {
31                    auto edge = g[v][i];
32                    int to = edge[0];
33                    long long cap = edge[1], cost = edge[2];
34                    if (cap > 0 and dis[to] > dis[v] + cost + h[v] - h[to]) {
35                        dis[to] = dis[v] + cost + h[v] - h[to];
36                        prevv[to] = v;
37                        preve[to] = i;
38                        que.push({dis[to], to});
39                    }
40                }
41            }
42            if (dis[t] == LLONG_MAX) return -1;
43            for (int i = 0; i < V; i++) h[i] += dis[i];
44            long long d = f;
45            for (int i = t; i != s; i = prevv[i]) d = min(d, g[prevv[i]][preve[i]][1]);
46            f -= d;
47            res += d * h[t];
48            for (int i = t; i != s; i = prevv[i]) {
49                auto& edge = g[prevv[i]][preve[i]];
50                edge[1] -= d;
51                g[i][edge[3]][1] += d;
52            }

```

```

53     }
54     return res;
55 }
56 };

```

## 4 数学

### 4.1 拡張ユークリッド互除法

2つの整数  $a, b$  について  $ax + by = \gcd(a, b)$  の整数解  $(x, y)$  を求めるアルゴリズム。計算量は  $O(\log \min(a, b))$ 。また、追加で以下の条件を満たす。

- すべての整数解  $(x, y)$  のうち、 $|x| + |y|$  が最小である解を求める。
- $\gcd(a, b) \neq \min(a, b)$  のとき  $|x| \leq \left\lfloor \frac{b}{2\gcd(a, b)} \right\rfloor, |y| \leq \left\lfloor \frac{a}{2\gcd(a, b)} \right\rfloor$

#### 使用方法

- `extgcd(a, b, x, y)` :  $x, y$  に解を格納する。返り値として  $\gcd(a, b)$  を返す。

```

1 template <class T>
2 T extgcd(T a, T b, T& x, T& y) {
3     if (b != 0) {
4         T d = extgcd(b, a % b, y, x);
5         y -= (a / b) * x;
6         return d;
7     } else {
8         x = 1;
9         y = 0;
10        return a;
11    }
12 }

```

### 4.2 modint

自動的に mod をとる構造体。mod が問題で固定かつ素数であるとき使用できる。

using `mint = modint<1000000007>;` 等のように定義して使用するのが推奨。

```

1 template <int64_t Modulus>
2 struct Modint {
3     using mint = Modint;
4     long long v;
5     Modint() : v(0) {}
6     Modint(long long x) {
7         x %= Modulus;
8         if (x < 0) x += Modulus;
9         v = x;
10    }
11    const long long& val() const { return v; }
12    // 代入演算子
13    mint& operator+=(const mint rhs) {
14        v += rhs.v;
15        if (v >= Modulus) v -= Modulus;
16        return *this;
17    }
18    mint& operator-=(const mint rhs) {

```

```

19    if (v < rhs.v) v += Modulus;
20    v -= rhs.v;
21    return *this;
22 }
23 mint& operator*=(const mint rhs) {
24     v = v * rhs.v % Modulus;
25     return *this;
26 }
27 mint& operator/=(const mint rhs) { return *this = *this * rhs.inv(); }
28 // 累乗, 逆元
29 mint pow(long long n) const {
30     mint x = *this, res = 1;
31     while (n) {
32         if (n & 1) res *= x;
33         x *= x;
34         n >>= 1;
35     }
36     return res;
37 }
38 mint inv() const { return pow(Modulus - 2); }
39 // 算術演算子
40 mint operator+(const mint rhs) const { return mint(*this) += rhs; }
41 mint operator-(const mint rhs) const { return mint(*this) -= rhs; }
42 mint operator*(const mint rhs) const { return mint(*this) *= rhs; }
43 mint operator/(const mint rhs) const { return mint(*this) /= rhs; }
44 mint operator-() const { return mint() - *this; } // 単項
45 // 入出力ストリーム
46 friend ostream& operator<<(ostream& os, const mint& p) { return os << p.v; }
47 friend istream& operator>>(istream& is, mint& p) {
48     long long t;
49     is >> t;
50     p = mint(t);
51     return (is);
52 }
53 };

```

### 4.3 FFT

- `encode(a)`: 整数型の配列  $a$  を `std::complex` 型に変換。
- `decode(a)`: `std::complex` 型の配列  $a$  を 64bit 整数型に変換。配列の要素毎に実部を丸めて整数に変換している。
- `FFT(a)`: `std::complex` 型で長さ  $n$  の配列  $a$  をフーリエ変換する。整数型の配列は引数にとれないため、`encode(a), decode(a)` 等で適宜変換を行うこと。
- `convolution(a, b)`: 長さ  $n$  の整数列  $a$ , 長さ  $m$  の整数列  $b$  の畳み込みを  $O((n + m) \log(n + m))$  で計算する。畳み込み後の配列の要素がすべて double に収まる必要がある。

```

1 // 整数配列を複素数へ
2
3 vector<complex<double>> encode(vector<long long>& a) {
4     int N = a.size();
5     vector<complex<double>> ret(N);
6     for (int i = 0; i < N; i++) {
7         ret[i] = complex<double>(a[i], 0);
8     }
9     return ret;

```

```

10 }
11
12 // 複素数配列を整数へ
13 vector<long long> decode(vector<complex<double>>& a) {
14     int N = a.size();
15     vector<long long> ret(N);
16     for (int i = 0; i < N; i++) {
17         ret[i] = (long long)round(a[i].real());
18     }
19     return ret;
20 }
21
22 // 非再帰
23 void FFT(vector<complex<double>>& a, int reverse = false) {
24     int n = a.size();
25     int h = 0;
26     for (int i = 0; 1 << i < n; i++) h++;
27     for (int i = 0; i < n; i++) {
28         int j = 0;
29         for (int k = 0; k < h; k++) j |= (i >> k & 1) << (h - 1 - k);
30         if (i < j) swap(a[i], a[j]);
31     }
32     for (int b = 1; b < n; b *= 2) {
33         for (int j = 0; j < b; j++) {
34             double p2 = 2 * acos(-1);
35             if (reverse) p2 *= -1;
36             complex<double> w = exp(complex<double>(0, p2 * j / (double)(2 * b)));
37             for (int k = 0; k < n; k += b * 2) {
38                 complex<double> s = a[j + k];
39                 complex<double> t = a[j + k + b] * w;
40                 a[j + k] = s + t;
41                 a[j + k + b] = s - t;
42             }
43         }
44     }
45     if (reverse)
46         for (int i = 0; i < n; i++) a[i] /= (double)n;
47     return;
48 }
49
50 vector<long long> convolution(vector<long long>& a, vector<long long>& b) {
51     vector<complex<double>> A = encode(a), B = encode(b);
52     int s = (int)a.size() + (int)b.size() - 1;
53     int t = 1;
54     while (t < s) t *= 2;
55     A.resize(t);
56     B.resize(t);
57     FFT(A, 0);
58     FFT(B, 0);
59     for (int i = 0; i < t; i++) {
60         A[i] *= B[i];
61     }
62     FFT(A, 1);
63     A.resize(s);
64     return decode(A);
65 }

```

#### 4.4 高速ゼータ変換・メビウス変換

部分集合に対するゼータ変換・メビウス変換を集合の要素数を  $n$  として  $O(n2^n)$  で行うアルゴリズム。

bitwise AND 畳み込みや bitwise OR 畳み込みを高速化できる。

- subset\_zeta(f, n, inv) : 長さ  $2^n$  の配列  $f$  の下位集合ゼータ変換  $F[S] = \sum_{X \subseteq S} f(X)$  を求める。
- supset\_zeta(f, n, inv) : 長さ  $2^n$  の配列  $f$  の上位集合ゼータ変換  $F[S] = \sum_{X \supseteq S} f(X)$  を求める。

inv=true のとき逆変換としてメビウス変換を行い、 $F$  から  $f$  を求める。

```

1 template <class T>
2 vector<T> subset_zeta(vector<T> f, int n, bool inv = false) {
3     for (int i = 0; i < n; i++) {
4         for (int S = 0; S < (1 << n); S++) {
5             if ((S & (1 << i)) != 0) { // if i in S
6                 if (!inv) {
7                     f[S] += f[S ^ (1 << i)];
8                 } else {
9                     f[S] -= f[S ^ (1 << i)];
10                }
11            }
12        }
13    }
14    return f;
15 }
16
17 template <class T>
18 vector<T> supset_zeta(vector<T> f, int n, bool inv = false) {
19     for (int i = 0; i < n; i++) {
20         for (int S = 0; S < (1 << n); S++) {
21             if ((S & (1 << i)) == 0) { // if i not in S
22                 if (!inv) {
23                     f[S] += f[S ^ (1 << i)];
24                 } else {
25                     f[S] -= f[S ^ (1 << i)];
26                }
27            }
28        }
29    }
30    return f;
31 }

```

#### 4.5 高速アダマール変換

クロネッカー冪行列をベクトルに掛ける計算を高速に行うアルゴリズム。

配列の長さは  $2^n$  であるとする。計算量は  $O(n2^n)$  である。

- fwht(a, inv) : 配列  $a$  を高速にアダマール変換する。inv=true のとき逆変換する。
- xor\_convolution(a, b) : bitwise XOR 畳み込み後の配列  $c$  を返す。
- and\_convolution(a, b) : bitwise AND 畳み込み後の配列  $c$  を返す。

- `or_convolution(a, b)` : bitwise OR 畳み込み後の配列 `c` を返す。

```

1 namespace Kronecker {
2
3 template <class T>
4 void mul(vector<T>& x, T a, T b, T c, T d) {
5     int n = x.size();
6     for (int j = 1; j < n; j <= 1) {
7         for (int i = 0; i < n; i++) {
8             if ((i & j) == 0) {
9                 T s = a * x[i] + b * x[i + j];
10                T t = c * x[i] + d * x[i + j];
11                x[i] = s;
12                x[i + j] = t;
13            }
14        }
15    }
16 }
17
18 template <class T>
19 void fwht(vector<T>& a, bool inv) {
20     mul(a, T(1), T(1), T(1), T(-1));
21     if (inv) {
22         for (T& x : a) x /= T(a.size());
23     }
24 }
25
26 template <class T>
27 vector<T> xor_convolution(vector<T>& a, vector<T>& b) {
28     fwht(a, false);
29     fwht(b, false);
30     int n = a.size();
31     vector<T> c(n);
32     for (int i = 0; i < n; i++) c[i] = a[i] * b[i];
33     fwht(c, true);
34     return c;
35 }
36
37 template <class T>
38 vector<T> and_convolution(vector<T>& a, vector<T>& b) {
39     mul(a, T(1), T(1), T(0), T(1));
40     mul(b, T(1), T(1), T(0), T(1));
41     int n = a.size();
42     vector<T> c(n);
43     for (int i = 0; i < n; i++) c[i] = a[i] * b[i];
44     mul(c, T(1), T(-1), T(0), T(1));
45     return c;
46 }
47
48 template <class T>
49 vector<T> or_convolution(vector<T>& a, vector<T>& b) {
50     mul(a, T(1), T(0), T(1), T(1));
51     mul(b, T(1), T(0), T(1), T(1));
52     int n = a.size();
53     vector<T> c(n);
54     for (int i = 0; i < n; i++) c[i] = a[i] * b[i];
55     mul(c, T(1), T(0), T(-1), T(1));
56     return c;
57 }
58

```

```

59 } // namespace Kronecker

```

## 5 データ構造

### 5.1 Fenwick Tree

一点更新・区間和取得のクエリを  $O(\log N)$  で処理するデータ構造。

- `add(i, x)` : 点更新  $a[i] \leftarrow a[i] + x$
- `sum(l, r)` : 区間和取得  $a[l] + a[l + 1] + \dots + a[r - 1]$

```

1 template <class T> struct FenwickTree {
2     int n;
3     vector<T> data;
4     FenwickTree() : n(0) {}
5     FenwickTree(int n) : n(n), data(n, 0) {}
6
7     // a[i] += x
8     void add(int i, T x) {
9         for (int p = i + 1; p <= n; p += p & -p) data[p - 1] += x;
10    }
11    // [0, r)
12    T sum(int r) {
13        T s(0);
14        for (int p = r; p > 0; p -= p & -p) s += data[p - 1];
15        return s;
16    }
17    // [l, r)
18    T sum(int l, int r) {
19        return sum(r) - sum(l);
20    }
21 };

```

### 5.2 セグメント木

モノイドを満たすデータ  $S$  に対し使用できるデータ構造。

長さ  $N$  の  $S$  の配列に対し、要素の 1 点更新、区間クエリを  $O(\log N)$  で行える。モノイド  $S$  同士の演算の計算量が  $O(f(n))$  のとき、すべての計算量が  $O(f(n))$  倍になる。

```

1 template <class S, S (*op)(S, S), S (*e)()>
2 struct SegmentTree {
3     private:
4         int _n, size, log;
5         vector<S> dat;
6         void update(int k) { dat[k] = op(dat[2 * k], dat[2 * k + 1]); }
7
8     public:
9         SegmentTree() : SegmentTree(0) {}
10        SegmentTree(int n) : SegmentTree(vector<S>(n, e())) {}
11        SegmentTree(const vector<S>& v) : _n(int(v.size())) {
12            log = 0;
13            while ((1 << log) < _n) log++;
14            size = 1 << log;
15            dat = vector<S>(2 * size, e());
16            for (int i = 0; i < _n; i++) dat[size + i] = v[i];

```

```

17     for (int i = size - 1; i >= 1; i--) {
18         update(i);
19     }
20 }
21 // a[p] = x
22 void set(int p, S x) {
23     p += size;
24     dat[p] = x;
25     for (int i = 1; i <= log; i++) update(p >> i);
26 }
27 // return a[p]
28 S get(int p) const {
29     return dat[p + size];
30 }
31 // return op(a[l], ..., a[r-1])
32 S prod(int l, int r) const {
33     S sml = e(), smr = e();
34     l += size;
35     r += size;
36     while (l < r) {
37         if (l & 1) sml = op(sml, dat[l++]);
38         if (r & 1) smr = op(dat[--r], smr);
39         l >>= 1;
40         r >>= 1;
41     }
42     return op(sml, smr);
43 }
44 S all_prod() const { return dat[1]; }
45
46 // SegmentTree上の二分探索 (必要な場合)
47 // return r, f(op(a[l], ..., a[r-1])) == true
48 template <bool (*f)(S)>
49 int max_right(int l) const {
50     return max_right(l, [](S x) { return f(x); });
51 }
52 template <class F>
53 int max_right(int l, F f) const {
54     assert(f(e()));
55     if (l == _n) return _n;
56     l += size;
57     S sm = e();
58     do {
59         while (l % 2 == 0) l >>= 1;
60         if (!f(op(sm, dat[l]))) {
61             while (l < size) {
62                 l = (2 * l);
63                 if (f(op(sm, dat[l]))) {
64                     sm = op(sm, dat[l]);
65                     l++;
66                 }
67             }
68             return l - size;
69         }
70         sm = op(sm, dat[l]);
71         l++;
72     } while ((l & -l) != 1);
73     return _n;
74 }
75 // return l, f(op(a[l], ..., a[r-1])) == true
76 template <bool (*f)(S)>

```

```

77 int min_left(int r) const {
78     return min_left(r, [](S x) { return f(x); });
79 }
80 template <class F>
81 int min_left(int r, F f) const {
82     assert(f(e()));
83     if (r == 0) return 0;
84     r += size;
85     S sm = e();
86     do {
87         r--;
88         while (r > 1 && (r % 2)) r >>= 1;
89         if (!f(op(dat[r], sm))) {
90             while (r < size) {
91                 r = (2 * r + 1);
92                 if (f(op(dat[r], sm))) {
93                     sm = op(dat[r], sm);
94                     r--;
95                 }
96             }
97             return r + 1 - size;
98         }
99         sm = op(dat[r], sm);
100     } while ((r & -r) != r);
101     return 0;
102 }
103 };

```

## 使用例

### Range Minimum Query (RMQ)

```

1 int op(int a, int b) { return min(a, b); }
2 int e() { return INT32_MAX; }
3
4 int n;
5 SegmentTree<int, op, e> seg(n);

```

### 5.3 遅延評価セグメント木

モノイド  $S$  と、 $S$  に対する作用素  $f: S \rightarrow S$  に対し利用できるデータ構造。

長さ  $N$  の  $S$  の配列に対し、

- 区間  $[l, r]$  の要素に一括で  $f$  を作用 ( $a_i \leftarrow f(a_i), l \leq i < r$ )
- 区間  $[l, r]$  の要素の総積の取得

を  $O(\log N)$  で行うことができる。

```

1 template <class S,
2         S (*op)(S, S),
3         S (*e)(),
4         class F,
5         S (*mapping)(F, S),
6         F (*composition)(F, F),
7         F (*id)()>
8 struct LazySegmentTree {
9     private:
10         int _n, size, log;

```



```

11 vector<S> dat;
12 vector<F> lz;
13 void update(int k) { dat[k] = op(dat[2 * k], dat[2 * k + 1]); }
14 void all_apply(int k, F f) {
15     dat[k] = mapping(f, dat[k]);
16     if (k < size) lz[k] = composition(f, lz[k]);
17 }
18 void push(int k) {
19     all_apply(2 * k, lz[k]);
20     all_apply(2 * k + 1, lz[k]);
21     lz[k] = id();
22 }
23 int lower_bits(int x, int k) { return x & ((1 << k) - 1); }
24
25 public:
26 LazySegmentTree() : LazySegmentTree(0) {}
27 LazySegmentTree(int n) : LazySegmentTree(vector<S>(n, e())) {}
28 LazySegmentTree(const vector<S>& v) : _n(int(v.size())) {
29     log = 0;
30     while ((1 << log) < _n) log++;
31     size = 1 << log;
32     dat = vector<S>(2 * size, e());
33     lz = vector<F>(size, id());
34     for (int i = 0; i < _n; i++) dat[size + i] = v[i];
35     for (int i = size - 1; i >= 1; i--) update(i);
36 }
37 // a[p] = x
38 void set(int p, S x) {
39     p += size;
40     for (int i = log; i >= 1; i--) push(p >> i);
41     dat[p] = x;
42     for (int i = 1; i <= log; i++) update(p >> i);
43 }
44 // return a[p]
45 S get(int p) {
46     p += size;
47     for (int i = log; i >= 1; i--) push(p >> i);
48     return dat[p];
49 }
50 // return op(a[l], ..., a[r-1])
51 S prod(int l, int r) {
52     if (l == r) return e();
53     l += size;
54     r += size;
55     for (int i = log; i >= 1; i--) {
56         if (lower_bits(l, i) > 0) push(l >> i);
57         if (lower_bits(r, i) > 0) push((r - 1) >> i);
58     }
59     S sml = e(), smr = e();
60     while (l < r) {
61         if (l & 1) sml = op(sml, dat[l++]);
62         if (r & 1) smr = op(dat[--r], smr);
63         l >>= 1;
64         r >>= 1;
65     }
66     return op(sml, smr);
67 }
68 S all_prod() { return dat[1]; }
69 // a[p] = f(a[p])
70 void apply(int p, F f) {

```

```

71     p += size;
72     for (int i = log; i >= 1; i--) push(p >> i);
73     dat[p] = mapping(f, dat[p]);
74     for (int i = 1; i <= log; i++) update(p >> i);
75 }
76 // i = l...r-1 について a[i] = f(a[i])
77 void apply(int l, int r, F f) {
78     if (l == r) return;
79     l += size;
80     r += size;
81     for (int i = log; i >= 1; i--) {
82         if (lower_bits(l, i) > 0) push(l >> i);
83         if (lower_bits(r, i) > 0) push((r - 1) >> i);
84     }
85     int l2 = l, r2 = r;
86     while (l < r) {
87         if (l & 1) all_apply(l++, f);
88         if (r & 1) all_apply(--r, f);
89         l >>= 1;
90         r >>= 1;
91     }
92     l = l2;
93     r = r2;
94     for (int i = 1; i <= log; i++) {
95         if (lower_bits(l, i) > 0) update(l >> i);
96         if (lower_bits(r, i) > 0) update((r - 1) >> i);
97     }
98 }
99 // SegmentTree上の二分探索 (必要な場合)
100 // return r, f(op(a[l], ..., a[r-1])) == true
101 template <bool (*g)(S)>
102 int max_right(int l) {
103     return max_right(l, [](S x) { return g(x); });
104 }
105 template <class G>
106 int max_right(int l, G g) {
107     assert(g(e()));
108     if (l == _n) return _n;
109     l += size;
110     for (int i = log; i >= 1; i--) push(l >> i);
111     S sm = e();
112     do {
113         while (l % 2 == 0) l >>= 1;
114         if (!g(op(sm, dat[l]))) {
115             while (l < size) {
116                 push(l);
117                 l = (2 * l);
118                 if (g(op(sm, dat[l]))) {
119                     sm = op(sm, dat[l]);
120                     l++;
121                 }
122             }
123             return l - size;
124         }
125         sm = op(sm, dat[l]);
126         l++;
127     } while ((l & -1) != 1);
128     return _n;
129 }
130 // return l, f(op(a[l], ..., a[r-1])) == true

```

```

131 template <bool (*g)(S)>
132 int min_left(int r) {
133     return min_left(r, [](S x) { return g(x); });
134 }
135 template <class G>
136 int min_left(int r, G g) {
137     assert(g(e()));
138     if (r == 0) return 0;
139     r += size;
140     for (int i = log; i >= 1; i--) push((r - 1) >> i);
141     S sm = e();
142     do {
143         r--;
144         while (r > 1 && (r % 2)) r >>= 1;
145         if (!g(op(dat[r], sm))) {
146             while (r < size) {
147                 push(r);
148                 r = (2 * r + 1);
149                 if (g(op(dat[r], sm))) {
150                     sm = op(dat[r], sm);
151                     r--;
152                 }
153             }
154             return r + 1 - size;
155         }
156         sm = op(dat[r], sm);
157     } while ((r & -r) != r);
158     return 0;
159 }
160 };

```

### 5.3.1 使用例

#### Range Update & Range Minimum Query

```

1 constexpr int INF = INT32_MAX;
2 constexpr int ID = INT32_MAX;
3
4 int op(int a, int b) { return min(a, b); }
5 int e() { return INF; }
6 int mapping(int f, int a) { return (f == ID ? a : f); }
7 int composition(int f, int g) { return (f == ID ? g : f); }
8 int id() { return ID; }
9
10 int n;
11 LazySegmentTree<int, op, e, int, mapping, composition, id> seg(n);

```

#### Range Add & Range Sum Query

```

1 using S = pair<ll, ll>;
2
3 S op(S a, S b) { return S(a.first + b.first, a.second + b.second); }
4 S e() { return P(0, 0); }
5 S mapping(ll f, S x) { return S(x.first + f * x.second, x.second); }
6 ll composition(ll f, ll g) { return f + g; }
7 ll id() { return 0; }
8
9 int n;
10 vector<S> a(n, S(0, 1));
11 LazySegmentTree<S, op, e, ll, mapping, composition, id> seg(a);

```

#### Range Add & Range Minimum Query

```

1 int op(int a, int b) { return min(a, b); }
2 int e() { return INT32_MAX; }
3 int mapping(int f, int x) { return x + f; }
4 int composition(int f, int g) { return f + g; }
5 int id() { return 0; }
6
7 vector<int> a(n, 0);
8 LazySegmentTree<int, op, e, int, mapping, composition, id> seg(a);

```

#### Range Update & Range Sum Query

```

1 using S = pair<ll, ll>;
2 constexpr int ID = INT32_MAX;
3
4 S op(S a, S b) { return S(a.first + b.first, a.second + b.second); }
5 S e() { return S(0, 0); }
6 S mapping(int f, S x) { return (f == ID ? x : S(f * x.second, x.second)); }
7 int composition(int f, int g) { return (f == ID ? g : f); }
8 int id() { return ID; }
9
10 int n;
11 vector<S> a(n, S(0, 1));
12 LazySegmentTree<S, op, e, int, mapping, composition, id> seg(a);

```

### 5.4 Undo つき UnionFind

経路圧縮を行わないことで undo 可能にした UnionFind。

- RollbackUnionFind(n) : 大きさ  $n$  の UnionFind を生成する。
- find(x) :  $x$  の根を返す。  $O(\log n)$
- unite(x, y) :  $x$  と  $y$  のマージに成功したら true 失敗したら false を返す。  $O(\log n)$
- undo() : 直前の unite 操作を取り消す。  $O(1)$
- time() : 現在までに unite() が呼ばれた回数を返す。  $O(1)$
- snapshot() : 現在の UnionFind の状態を保存する。  $O(1)$
- rollback(t) :
  - $t = -1$  のとき : snapshot() で保存した状態まで巻き戻す。
  - $t \neq -1$  のとき : unite() が  $t$  回 呼び出された時の状態まで巻き戻す。

```

1 struct RollbackUnionFind {
2     vector<int> data;
3     stack<pair<int, int>> history;
4     int inner_snap = 0;
5     RollbackUnionFind(int n) { data.resize(n, -1); }
6     int find(int x) { return data[x] < 0 ? x : find(data[x]); }
7     bool unite(int x, int y) {
8         x = find(x), y = find(y);
9         history.push({x, data[x]});
10        history.push({y, data[y]});
11        if (x == y) return false;
12        if (-data[x] < -data[y]) swap(x, y);
13        data[x] += data[y];

```

```

14     data[y] = x;
15     return true;
16 }
17 int same(int x, int y) { return find(x) == find(y); }
18 int size(int x) { return (-data[find(x)]); }
19 void undo() {
20     data[history.top().first] = history.top().second;
21     history.pop();
22     data[history.top().first] = history.top().second;
23     history.pop();
24 }
25 int time() { return int(history.size() >> 1); }
26 void snapshot() { inner_snap = time(); }
27 void rollback(int t = -1) {
28     if (t == -1) t = inner_snap;
29     while (t < time()) undo();
30 }
31 };

```

## 6 文字列

文字列  $s$  の  $l$  番目から  $r-1$  番目の要素から成る部分文字列を  $s[l, r)$  と表記する

### 6.1 Rolling Hash

文字列（または数列）を Hash 値に変換することで、部分文字列の一致判定を  $O(1)$  で行うアルゴリズム

- RollingHash(string str) : コンストラクタ。init(str) を実行する。
- void init(string str) : 長さ  $n$  の文字列  $str$  のハッシュ値を求める。計算量  $O(n)$
- bool match(rh1, l1, r1, rh2, l2, r2) : 文字列  $s_1, s_2$  の Rolling Hash を rh1, rh2 として、 $s_1[l_1, r_1), s_2[l_2, r_2)$  が一致しているか判定する

```

1 struct RollingHash {
2     static constexpr int M = 2;
3     static constexpr long long MODS[M] = {999999937, 1000000007};
4     static constexpr long long BASE = 9973;
5     vector<long long> powb[M], hash[M];
6     int n;
7     RollingHash() {}
8     RollingHash(const string& str) { init(str); }
9     void init(const string& str) {
10         n = str.size();
11         for (int k = 0; k < M; k++) {
12             powb[k].resize(n + 1, 1);
13             hash[k].resize(n + 1, 0);
14             for (int i = 0; i < n; i++) {
15                 hash[k][i + 1] = (hash[k][i] * BASE + str[i]) % MODS[k];
16                 powb[k][i + 1] = powb[k][i] * BASE % MODS[k];
17             }
18         }
19     }
20     // get hash str[l,r)
21     long long get(int l, int r, int k) {
22         long long res = hash[k][r] - hash[k][l] * powb[k][r - l] % MODS[k];

```

```

23         if (res < 0) res += MODS[k];
24         return res;
25     }
26 };
27
28 bool match(RollingHash& rh1, int l1, int r1, RollingHash& rh2, int l2, int r2) {
29     bool res = true;
30     for (int k = 0; k < RollingHash::M; k++) {
31         res &= rh1.get(l1, r1, k) == rh2.get(l2, r2, k);
32     }
33     return res;
34 }

```

### 6.2 Trie 木

文字列の集合  $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  に対して、文字列  $t$ 、または  $t$  の prefix と一致する文字列を高速に検索できる木構造。

各 node が文字列の prefix に対応している。

- add(string str) : 長さ  $n$  の文字列  $str$  を Trie 木に追加する。計算量  $O(n)$
- find(string str) : 長さ  $n$  の文字列  $str$  に対応する node の index を求める。存在しない場合、-1 を返す。計算量  $O(n)$

```

1 struct Trie {
2     private:
3         static constexpr int C_SIZE = 26; // C_SIZE : 文字の種類数
4         static constexpr int C_BEGIN = 'a'; // C_BEGIN : 開始文字
5         int root = 0;
6         struct Node {
7             int child[C_SIZE]; // 子ノードの番号, 存在しなければ-1
8             vector<int> ids; // そのノードが終端である文字列のIDリスト
9             Node() { fill(child, child + C_SIZE, -1); }
10        };
11
12    public:
13        vector<Node> nodes;
14        int cnt = 0; // 追加した文字列の個数
15        Trie() : nodes(1) {}
16        // nodes[idx]から文字cで遷移したときの頂点のindex
17        int next_index(int idx, char c) {
18            return nodes[idx].child[c - C_BEGIN];
19        }
20        // 文字列の追加
21        void insert(const string str) {
22            int now = root;
23            for (auto c : str) {
24                int k = c - C_BEGIN;
25                int& nxt = nodes[now].child[k];
26                if (nxt == -1) {
27                    now = nxt = int(nodes.size());
28                    nodes.push_back(Node());
29                } else {
30                    now = nxt;
31                }
32            }
33            nodes[now].ids.push_back(cnt++);

```

```

34 }
35 // 文字列に対応するnodeのindexを検索, 存在しなければ-1
36 int find(const string str) {
37     int now = root;
38     for (auto c : str) {
39         int nxt = next_index(now, c);
40         if (nxt == -1) return -1;
41         now = nxt;
42     }
43     return now;
44 }
45 };

```

### 6.3 Suffix Array

文字列の suffix(接尾辞) の開始位置の配列を suffix の辞書順でソートした配列を求めるアルゴリズム

- suffix\_array(str) : 長さ  $n$  の文字列  $str$  の suffix array を求める。計算量  $O(n \log^2 n)$
- contain(s, t, sa) : 文字列  $s, t$  と  $s$  の suffix array  $sa$  より  $s$  に  $t$  が含まれているかを判定する。 $O(|t| \log |s|)$

```

1 vector<int> suffix_array(const string& str) {
2     int n = str.size();
3     vector<int> sa(n + 1), rank(n + 1, -1); // sa[i] = 辞書順で
4     // 番号であるsuffixの開始位置
5     iota(sa.begin(), sa.end(), 0);
6     for (int i = 0; i < n; i++) rank[i] = str[i];
7     int k;
8     auto comp = [&](const int& i, const int& j) {
9         if (rank[i] != rank[j]) {
10             return rank[i] < rank[j];
11         } else {
12             int ri = i + k <= n ? rank[i + k] : -1;
13             int rj = j + k <= n ? rank[j + k] : -1;
14             return ri < rj;
15         }
16     };
17     for (k = 1; k <= n; k <= 1) {
18         sort(sa.begin(), sa.end(), comp);
19         vector<int> tmp(n + 1, 0);
20         for (int i = 0; i < n; i++) {
21             tmp[sa[i + 1]] = tmp[sa[i]];
22             if (comp(sa[i], sa[i + 1])) tmp[sa[i + 1]]++;
23         }
24         rank = tmp;
25     }
26     return sa;
27 }
28 // 文字列sに文字列tに含まれているか判定する
29 bool contain(const string& s, const string& t, vector<int>& sa) {
30     int l = 0, r = int(s.size());
31     while (r - l > 1) {
32         int mid = (l + r) / 2;
33         if (s.substr(sa[mid], t.size()) < t) {
34             l = mid;

```

```

35     } else {
36         r = mid;
37     }
38 }
39 return s.substr(sa[r], t.size()) == t;
40 }

```

### 6.4 Z algorithm

長さ  $n$  の文字列  $s$  に対して、 $s[0, n)$  と  $s[i, n)$  の最長共通接頭辞 (LCP : Longest Common Prefix) の長さ  $z[i]$  を全ての  $i$  について求めるアルゴリズム。

- z\_algorithm(s) : 長さ  $n$  の配列  $z$  を返す。計算量  $O(n)$

```

1 vector<int> z_algorithm(string& s) {
2     int n = int(s.size());
3     vector<int> z(n);
4     z[0] = n;
5     for (int i = 1, l = 0, r = 0; i < n; i++) {
6         int& k = z[i];
7         k = (r <= i ? 0 : min(r - i, z[i - l]));
8         while (i + k < n && s[k] == s[i + k]) k++;
9         if (r < i + k) l = i, r = i + k;
10    }
11    return z;
12 }

```

## 7 幾何

### 7.1 2D Geometry Template

二次元幾何のライブラリを利用するために必要となる構造体や関数などをまとめたものです。

```

1 using Real = double;
2 using Point = complex<Real>;
3 using Polygon = vector<Point>;
4 const Real EPS = 1e-8, PI = acos(-1);
5
6 Point operator*(const Point& p, const Real& d) {
7     return Point(p.real() * d, p.imag() * d);
8 }
9
10 Point operator/(const Point& p, const Real& d) {
11     return Point(p.real() / d, p.imag() / d);
12 }
13
14 istream& operator>>(istream& is, Point& p) {
15     Real a, b;
16     is >> a >> b;
17     p = Point(a, b);
18     return is;
19 }
20
21 ostream& operator<<(ostream& os, const Point& p) {
22     return os << fixed << setprecision(20) << p.real() << " " << p.imag();
23 }
24

```

```

25 int sign(const Real& r) {
26     if (r <= -EPS) return -1;
27     if (r >= +EPS) return +1;
28     return 0;
29 }
30
31 bool equals(const Real& a, const Real& b) {
32     return sign(a - b) == 0;
33 }
34
35 namespace std {
36     bool operator<(const Point& a, const Point& b) {
37         if (equals(a.real(), b.real())) return a.imag() < b.imag();
38         return a.real() < b.real();
39     }
40 } // namespace std
41
42 Real dot(const Point& a, const Point& b) {
43     return conj(a) * b.real();
44 }
45
46 Real cross(const Point& a, const Point& b) {
47     return conj(a) * b.imag();
48 }
49
50 struct Line {
51     Point a, b;
52     Line() = default;
53     Line(Point a, Point b) : a(a), b(b) {}
54 };
55 using Segment = Line;

```

## 7.2 2D Points and Vectors

- projection( $l, p$ ) : 直線  $l$  に対する点  $p$  の射影を求める
- reflection( $l, p$ ) : 直線  $l$  に対する点  $p$  の反射を求める
- ccw( $a, b, c$ ) : 点  $a$  から見た、点  $b, c$  の位置関係を求める
  - +1 :  $a, b, c$  が反時計回りになる
  - -1 :  $a, b, c$  が時計回りになる
  - +2 :  $c, a, b$  がこの順で同一直線上にある
  - -2 :  $a, b, c$  がこの順で同一直線上にある
  - 0 :  $a, c, b$  がこの順で同一直線上にある

```

1 Point projection(const Line& l, const Point& p) {
2     return l.a + (l.a - l.b) * dot(p - l.a, l.a - l.b) / norm(l.a - l.b);
3 }
4
5 Point reflection(const Line& l, const Point& p) {
6     return p + (projection(l, p) - p) * 2.0;
7 }
8
9 int ccw(const Point& a, Point b, Point c) {
10     b -= a, c -= a;
11     if (sign(cross(b, c)) == +1) return +1;
12     if (sign(cross(b, c)) == -1) return -1;

```

```

13     if (sign(dot(b, c)) == -1) return +2;
14     if (norm(b) < norm(c)) return -2;
15     return 0;
16 }

```

## 7.3 2D Segments and Lines

- is\_orthogonal( $a, b$ ) : 直線  $a, b$  が直交するか判定する
- is\_parallel( $a, b$ ) : 直線  $a, b$  が平行か判定する
- is\_intersect\_ss( $s, t$ ) : 線分  $s, t$  が交差するか判定する
- cross\_point\_ll( $l, m$ ) : 直線  $l, m$  の交点を求める
- distance\_sp( $s, p$ ) : 線分  $s$  と点  $p$  の距離を求める
- distance\_ss( $a, b$ ) : 線分  $a, b$  の距離を求める

```

1 bool is_orthogonal(const Line& a, const Line& b) {
2     return equals(dot(a.b - a.a, b.b - b.a), 0);
3 }
4
5 bool is_parallel(const Line& a, const Line& b) {
6     return equals(cross(a.b - a.a, b.b - b.a), 0);
7 }
8
9 bool is_intersect_ss(const Segment& s, const Segment& t) {
10     return ccw(s.a, s.b, t.a) * ccw(s.a, s.b, t.b) <= 0 &&
11            ccw(t.a, t.b, s.a) * ccw(t.a, t.b, s.b) <= 0;
12 }
13
14 Point cross_point_ll(const Line& l, const Line& m) {
15     Real A = cross(l.b - l.a, m.b - m.a);
16     Real B = cross(l.b - l.a, l.b - m.a);
17     if (equals(abs(A), 0) && equals(abs(B), 0)) return m.a;
18     return m.a + (m.b - m.a) * B / A;
19 }
20
21 Real distance_sp(const Segment& s, const Point& p) {
22     Point r = projection(s, p);
23     if (ccw(s.a, s.b, r) == 0) return abs(r - p);
24     return min(abs(s.a - p), abs(s.b - p));
25 }
26
27 Real distance_ss(const Segment& a, const Segment& b) {
28     if (is_intersect_ss(a, b)) return 0;
29     return min({distance_sp(a, b.a), distance_sp(a, b.b), distance_sp(b, a.a), distance_sp(b, a.b)});
30 }

```

## 7.4 2D Polygon

- area( $p$ ) : 多角形  $p$  の面積を求める
- is\_convex( $p$ ) :  $p$  が凸多角形か判定する
- contains( $Q, p$ ) : 多角形  $Q$  が点  $p$  を含んでいる ? 2 : 辺上にある ? 1 : 0
- convex\_hull( $p$ ) : 点集合  $p$  の凸包を求める
- convex\_diameter( $p$ ) : 凸多角形  $p$  の直径を求める

- convex\_cut(p, l) : 凸多角形  $p$  を直線  $l$  で切断し、左にできた図形の面積を求める

```

1 Real area(const Polygon& p) {
2     Real S = 0;
3     int n = p.size();
4     for (int i = 0; i < n; i++) {
5         S += cross(p[i], p[(i + 1) % n]);
6     }
7     return S * 0.5;
8 }
9
10 bool is_convex(const Polygon& p) {
11     int n = p.size();
12     for (int i = 0; i < n; i++) {
13         if (ccw(p[(i - 1) % n], p[i], p[(i + 1) % n]) == -1) return false;
14     }
15     return true;
16 }
17
18 int contains(const Polygon& Q, const Point& p) {
19     int n = Q.size();
20     bool in = false;
21     for (int i = 0; i < n; i++) {
22         Point a = Q[i] - p, b = Q[(i + 1) % n] - p;
23         if (sign(a.imag() - b.imag()) == +1) swap(a, b);
24         if (sign(a.imag()) <= 0 && sign(b.imag()) == +1 && sign(cross(a, b)) == -1) in = !in;
25         if (sign(cross(a, b)) == 0 && sign(dot(a, b)) <= 0) return 1;
26     }
27     return in ? 2 : 0;
28 }
29
30 Polygon convex_hull(Polygon p) {
31     int n = p.size(), k = 0;
32     if (n <= 2) return p;
33     sort(p.begin(), p.end());
34     Polygon ch(2 * n);
35     for (int i = 0; i < n; ch[k++] = p[i++]) {
36         while (k >= 2 && sign(cross(ch[k - 1] - ch[k - 2], p[i] - ch[k - 1])) == -1) --k;
37     }
38     for (int i = n - 2, t = k + 1; i >= 0; ch[k++] = p[i--]) {
39         while (k >= t && sign(cross(ch[k - 1] - ch[k - 2], p[i] - ch[k - 1])) == -1) --k;
40     }
41     ch.resize(k - 1);
42     return ch;
43 }
44
45 Real convex_diameter(const Polygon& p) {
46     int n = p.size(), is = 0, js = 0;
47     for (int i = 1; i < n; i++) {
48         if (sign(p[i].imag() - p[is].imag()) == +1) is = i;
49         if (sign(p[i].imag() - p[js].imag()) == -1) js = i;
50     }
51     Real maxdis = norm(p[is] - p[js]);
52     int maxi, maxj, i, j;
53     i = maxi = is;
54     j = maxj = js;
55     do {
56         if (sign(cross(p[(i + 1) % n] - p[i], p[(j + 1) % n] - p[j])) >= 0) {
57             j = (j + 1) % n;

```

```

58         } else {
59             i = (i + 1) % n;
60         }
61         if (norm(p[i] - p[j]) > maxdis) {
62             maxdis = norm(p[i] - p[j]);
63             maxi = i;
64             maxj = j;
65         }
66     } while (i != is || j != js);
67     return sqrt(maxdis);
68 }
69
70 Polygon convex_cut(const Polygon& p, const Line& l) {
71     int n = p.size();
72     Polygon ret;
73     for (int i = 0; i < n; i++) {
74         Point now = p[i], nxt = p[(i + 1) % n];
75         if (ccw(l.a, l.b, now) != -1) ret.push_back(now);
76         if (ccw(l.a, l.b, now) * ccw(l.a, l.b, nxt) < 0) {
77             ret.push_back(cross_point_ll(Line(now, nxt), l));
78         }
79     }
80     return ret;
81 }

```

## 7.5 2D Closest Pair

- closest\_pair(ps) : 点集合  $ps$  について、最も近い 2 点の距離を求める

```

1 Real closest_pair(Polygon ps) {
2     sort(ps.begin(), ps.end());
3     Polygon a(ps.size());
4
5     function<Real(int, int)> rec = [&](int left, int right) -> Real {
6         if (right - left <= 1) return 1e18;
7         int mid = (left + right) / 2;
8         Real x = ps[mid].real();
9         Real ret = min(rec(left, mid), rec(mid, right));
10        inplace_merge(ps.begin() + left, ps.begin() + mid, ps.begin() + right,
11            [&](const Point& a, const Point& b) { return a.imag() < b.imag(); });
12
13        int pos = 0;
14        for (int i = left; i < right; i++) {
15            if (fabs((ps[i].real() - x) >= ret) continue;
16            for (int j = 0; j < pos; j++) {
17                auto tar = ps[i] - a[pos - j - 1];
18                if (tar.imag() >= ret) break;
19                ret = min(ret, abs(tar));
20            }
21            a[pos++] = ps[i];
22        }
23        return ret;
24    };
25    return rec(0, (int)ps.size());
26 }

```

## 7.6 2D Circle

- intersection.cc(c1, c2) : 円  $c1, c2$  の共通接線の個数を求める

- incircle(a, b, c) : 三角形  $abc$  の内接円を求める
- circumscribed\_circle(a, b, c) : 三角形  $abc$  の外接円を求める
- cross\_point\_cl(c, l) : 円  $c$  と直線  $l$  の交点を求める
- cross\_point\_cc(c1, c2) : 円  $c1, c2$  の交点を求める
- tangent\_cp(c, p) : 点  $p$  を通る円  $c$  の接線を求める
- tangent\_cc(c1, c2) : 円  $c1, c2$  の共通接線を求める
- area\_poly\_c(p, c) : 多角形  $p$  と円  $c$  の共通部分の面積を求める
- area\_cc(c1, c2) : 円  $c1, c2$  の共通部分の面積を求める

```

1 struct Circle {
2     Point p;
3     Real r;
4     Circle() = default;
5     Circle(Point p, Real r) : p(p), r(r) {}
6 };
7
8 int intersection_cc(Circle c1, Circle c2) {
9     if (c1.r < c2.r) swap(c1, c2);
10    Real d = abs(c1.p - c2.p);
11    if (sign(c1.r + c2.r - d) == -1) return 4;
12    if (equals(c1.r + c2.r, d)) return 3;
13    if (sign(c1.r - c2.r - d) == -1) return 2;
14    if (equals(c1.r - c2.r, d)) return 1;
15    return 0;
16 }
17
18 Circle incircle(const Point& a, const Point& b, const Point& c) {
19     Real A = abs(b - c), B = abs(c - a), C = abs(a - b);
20     Point x = Point((a * A + b * B + c * C) / (A + B + C));
21     Real r = distance_sp(Segment(a, b), x);
22     return Circle(x, r);
23 }
24
25 Circle circumscribed_circle(const Point& a, const Point& b, const Point& c) {
26     Point m1((a + b) / 2.0), m2((b + c) / 2.0);
27     Point v((b - a).imag(), (a - b).real()), w((b - c).imag(), (c - b).real());
28     Line s(m1, Point(m1 + v)), t(m2, Point(m2 + w));
29     Point x = cross_point_ll(s, t);
30     return Circle(x, abs(a - x));
31 }
32
33 pair<Point, Point> cross_point_cl(const Circle& c, const Line& l) {
34     Point pr = projection(l, c.p);
35     if (equals(abs(pr - c.p), c.r)) return {pr, pr};
36     Point e = (l.b - l.a) / abs(l.b - l.a);
37     Real k = sqrt(norm(c.r) - norm(pr - c.p));
38     return {pr - e * k, pr + e * k};
39 }
40
41 pair<Point, Point> cross_point_cc(const Circle& c1, const Circle& c2) {
42     Real d = abs(c1.p - c2.p);
43     Real a = acos((c1.r * c1.r + d * d - c2.r * c2.r) / (2 * c1.r * d));
44     Real t = atan2(c2.p.imag() - c1.p.imag(), c2.p.real() - c1.p.real());
45     Point p1 = c1.p + Point(cos(t + a), sin(t + a)) * c1.r;
46     Point p2 = c1.p + Point(cos(t - a), sin(t - a)) * c1.r;

```

```

47     return {p1, p2};
48 }
49
50 pair<Point, Point> tangent_cp(const Circle& c, const Point& p) {
51     return cross_point_cc(c, Circle(p, sqrt(norm(c.p - p) - c.r * c.r)));
52 }
53
54 vector<Line> tangent_cc(Circle c1, Circle c2) {
55     vector<Line> ret;
56     if (c1.r < c2.r) swap(c1, c2);
57     Real g = norm(c1.p - c2.p);
58     if (equals(g, 0.0)) return ret;
59     Point u = (c2.p - c1.p) / sqrt(g);
60     Point v = u * Point(cos(PI * 0.5), sin(PI * 0.5));
61     for (int s : {-1, 1}) {
62         Real h = (c1.r + s * c2.r) / sqrt(g);
63         if (equals(1 - h * h, 0.0)) {
64             ret.emplace_back(c1.p + u * c1.r, c1.p + (u + v) * c1.r);
65         } else if (sign(1 - h * h) == +1) {
66             Point uu = u * h, vv = v * sqrt(1 - h * h);
67             ret.emplace_back(c1.p + (uu + vv) * c1.r, c2.p - (uu + vv) * c2.r * s);
68             ret.emplace_back(c1.p + (uu - vv) * c1.r, c2.p - (uu - vv) * c2.r * s);
69         }
70     }
71     return ret;
72 }
73
74 Real area_poly_c(const Polygon& p, const Circle& c) {
75     int n = p.size();
76     if (n < 3) return 0.0;
77     function<Real(Circle, Point, Point)> cross_area = [&](const Circle& c, const Point& a,
78         const Point& b) {
79         Point va = c.p - a, vb = c.p - b;
80         Real f = cross(va, vb), ret = 0.0;
81         if (equals(f, 0.0)) return ret;
82         if (max(abs(va), abs(vb)) < c.r + EPS) return f;
83         if (distance_sp(Segment(a, b), c.p) > c.r - EPS) return c.r * c.r * arg(vb * conj(va));
84         auto u = cross_point_cl(c, Segment(a, b));
85         vector<Point> tot{a, u.first, u.second, b};
86         for (int i = 0; i + 1 < (int)tot.size(); i++) {
87             ret += cross_area(c, tot[i], tot[i + 1]);
88         }
89         return ret;
90     };
91     Real S = 0;
92     for (int i = 0; i < n; i++) {
93         S += cross_area(c, p[i], p[(i + 1) % n]);
94     }
95     return S * 0.5;
96 }
97
98 Real area_cc(const Circle& c1, const Circle& c2) {
99     Real d = abs(c1.p - c2.p);
100    if (c1.r + c2.r <= d + EPS) return 0.0;
101    if (d <= fabs(c1.r - c2.r) + EPS) {
102        Real r = min(c1.r, c2.r);
103        return r * r * PI;
104    }
105    Real rc = (d * d + c1.r * c1.r - c2.r * c2.r) / (2.0 * d);

```



```

105 Real theta = acos(rc / c1.r);
106 Real phi = acos((d - rc) / c2.r);
107 return c1.r * c1.r * theta + c2.r * c2.r * phi - d * c1.r * sin(theta);
108 }

```

## 7.7 3D Geometry Template

三次元幾何のライブラリを利用するために必要となるクラスや関数などをまとめたものです。

```

1 #define EPS (1e-7)
2 #define equals(a, b) (fabs((a) - (b)) < EPS)
3
4 class Point3d {
5 public:
6     double x, y, z;
7
8     Point3d(double x = 0, double y = 0, double z = 0) : x(x), y(y), z(z) {}
9
10    Point3d operator+(const Point3d& a) {
11        return Point3d(x + a.x, y + a.y, z + a.z);
12    }
13    Point3d operator-(const Point3d& a) {
14        return Point3d(x - a.x, y - a.y, z - a.z);
15    }
16    Point3d operator*(const double& d) {
17        return Point3d(x * d, y * d, z * d);
18    }
19    Point3d operator/(const double& d) {
20        return Point3d(x / d, y / d, z / d);
21    }
22
23    bool operator<(const Point3d& p) const {
24        if (!equals(x, p.x)) return x < p.x;
25        if (!equals(y, p.y)) return y < p.y;
26        if (!equals(z, p.z)) return z < p.z;
27        return false;
28    }
29
30    bool operator==(const Point3d& p) const {
31        return equals(x, p.x) && equals(y, p.y) && equals(z, p.z);
32    }
33 };
34
35 struct Segment3d {
36     Point3d p[2];
37     Segment3d(Point3d p1 = Point3d(), Point3d p2 = Point3d()) {
38         p[0] = p1, p[1] = p2;
39     }
40     bool operator==(const Segment3d& seg) const {
41         return (p[0] == seg.p[0] && p[1] == seg.p[1]) || (p[0] == seg.p[1] && p[1] == seg.p[0]);
42     }
43 };
44
45 using Line3d = Segment3d;
46 using Vector3d = Point3d;
47
48 ostream& operator<<(ostream& os, const Point3d& p) {
49     return os << "(" << p.x << ", " << p.y << ", " << p.z << ")";
50 }

```

```

51
52 ostream& operator<<(ostream& os, const Segment3d& seg) {
53     return os << "(" << seg.p[0] << ", " << seg.p[1] << ")";
54 }
55
56 double dot(const Point3d& a, const Point3d& b) {
57     return a.x * b.x + a.y * b.y + a.z * b.z;
58 }
59
60 Vector3d cross(const Point3d& a, const Point3d& b) {
61     return Vector3d(a.y * b.z - a.z * b.y, a.z * b.x - a.x * b.z, a.x * b.y - a.y * b.x);
62 }
63
64 inline double norm(const Point3d& p) {
65     return p.x * p.x + p.y * p.y + p.z * p.z;
66 }
67
68 inline double abs(const Point3d& p) {
69     return sqrt(norm(p));
70 }
71
72 inline double toRad(double theta) {
73     return theta * M_PI / 180.0;
74 }
75
76 double distanceLP(Line3d line, Point3d p) {
77     return abs(cross(line.p[1] - line.p[0], p - line.p[0])) / abs(line.p[1] - line.p[0]);
78 }
79
80 Point3d project(Segment3d seg, Point3d p) {
81     Vector3d base = seg.p[1] - seg.p[0];
82     double t = dot(p - seg.p[0], base) / norm(base);
83     return seg.p[0] + base * t;
84 }
85
86 Point3d reflect(Segment3d seg, Point3d p) {
87     return p + (project(seg, p) - p) * 2.0;
88 }
89
90 bool on_line3d(Line3d line, Point3d p) {
91     return equals(abs(cross(line.p[1] - p, line.p[0] - p)), 0);
92 }
93
94 bool on_segment3d(Segment3d seg, Point3d p) {
95     if (!on_line3d(seg, p)) return false;
96     double dist[3] = {abs(seg.p[1] - seg.p[0]), abs(p - seg.p[0]), abs(p - seg.p[1])};
97     return on_line3d(seg, p) && equals(dist[0], dist[1] + dist[2]);
98 }
99
100 double distanceSP(Segment3d seg, Point3d p) {
101     Point3d r = project(seg, p);
102     if (on_segment3d(seg, r)) return abs(p - r);
103     return min(abs(seg.p[0] - p), abs(seg.p[1] - p));
104 }

```

## 7.8 3D Plane

平面に対する操作をまとめたクラスファイルです。

```

1 class Plane3d {

```



```

2 public:
3     Point3d normal_vector; // 法線ベクトル
4     double d;             // 平面方程式  $normal\_vector = (a,b,c), a*x + b*y + c*z + d = 0$ 
5
6     Plane3d(Point3d normal_vector = Point3d(), double d = 0) : normal_vector(normal_vector
7     ), d(d) {}
8     Plane3d(Vector3d a, Vector3d b, Vector3d c) {
9         Vector3d v1 = b - a;
10        Vector3d v2 = c - a;
11        Vector3d tmp = cross(v1, v2);
12        normal_vector = tmp / abs(tmp);
13        set_d(a);
14    }
15
16    // 法線ベクトル  $normal\_vector$  と平面上の 1 点から  $d$  を計算する
17    void set_d(Point3d p) {
18        d = dot(normal_vector, p);
19    }
20
21    // 平面と点  $p$  の距離を求める
22    double distanceP(Point3d p) {
23        Point3d a = normal_vector * d; // 平面上の適当な点をつくる
24        return abs(dot(p - a, normal_vector));
25    }
26
27    // 平面上でもっとも点  $p$  と近い点を求める
28    Point3d nearest_point(Point3d p) {
29        Point3d a = normal_vector * d;
30        return p - (normal_vector * dot(p - a, normal_vector));
31    }
32
33    // 平面と線分が交差するか
34    bool intersectS(Segment3d seg) {
35        Point3d a = normal_vector * d;
36        double res1 = dot(a - seg.p[0], normal_vector);
37        double res2 = dot(a - seg.p[1], normal_vector);
38        if (res1 > res2) swap(res1, res2);
39        if ((equals(res1, 0.0) || res1 < 0) && (equals(res2, 0.0) || res2 > 0)) return
40            true;
41        return false;
42    }
43
44    // 平面と線分の交点を求める
45    Point3d crosspointS(Segment3d seg) {
46        Point3d a = normal_vector * d;
47        double dot_p0a = fabs(dot(seg.p[0] - a, normal_vector));
48        double dot_p1a = fabs(dot(seg.p[1] - a, normal_vector));
49        if (equals(dot_p0a + dot_p1a, 0)) return seg.p[0];
50        return seg.p[0] + (seg.p[1] - seg.p[0]) * (dot_p0a / (dot_p0a + dot_p1a));
51    }
52 };

```

## 7.9 3D Point on the Triangle

平面上の三角形 (tri1, tri2, tri3) と点 (p) を入力として受け取り、その点が三角形上に存在するかどうか判定します。

```

1 bool point_on_the_triangle3d(Point3d tri1, Point3d tri2, Point3d tri3, Point3d p) {
2     // 線分上に  $p$  があった場合、三角形内とみなす場合は以下のコメントアウトを外す
3     /*

```

```

4         if( on_segment3d(Segment3d(tri1,tri2),p) ) return true;
5         if( on_segment3d(Segment3d(tri2,tri3),p) ) return true;
6         if( on_segment3d(Segment3d(tri3,tri1),p) ) return true;
7         */
8
9     vector<Point3d> vec(3);
10    vec[0] = tri1, vec[1] = tri2, vec[2] = tri3;
11    double area = 0;
12    {
13        double a = abs(vec[0] - vec[1]), b = abs(vec[1] - vec[2]), c = abs(vec[2] - vec
14        [0]);
15        double s = (a + b + c) / 2;
16        area = sqrt(s * (s - a) * (s - b) * (s - c));
17    }
18    double sum = 0;
19    for (int i = 0; i < 3; ++i) {
20        double a = abs(vec[i] - vec[(i + 1) % 3]), b = abs(vec[(i + 1) % 3] - p), c = abs(
21        p - vec[i]);
22        double s = (a + b + c) / 2;
23        sum += sqrt(s * (s - a) * (s - b) * (s - c));
24    }
25    return equals(sum, area);
26 }

```

## 7.10 3D Libraries for Lines and Segments

平面上の直線と線分に関するライブラリです。ライブラリ中では直線は Line3d、線分は Segment3d として表記されます。

```

1 // 直線  $l1$  と  $l2$  は平行か?
2 bool isParallel(Line3d l1, Line3d l2) {
3     Vector3d A = l1.p[0], B = l1.p[1], C = l2.p[0], D = l2.p[1];
4     Vector3d AB = B - A, CD = D - C;
5     Vector3d n1 = AB / abs(AB), n2 = CD / abs(CD);
6     double tmp = dot(n1, n2);
7     tmp = 1 - tmp * tmp;
8     return equals(tmp, 0.0);
9 }
10
11 // 直線  $l1$  と  $l2$  を結ぶような線分であって最も距離が短いものを返す
12 // Note:  $l1$  と  $l2$  が平行な時には使用できないので注意
13 Segment3d nearest_segmentLL(Line3d l1, Line3d l2) {
14     assert(!isParallel(l1, l2)); // 平行な場合は使用不可
15     //  $l1.p[0] = A, l1.p[1] = B, l2.p[0] = C, l2.p[1] = D$ 
16     Vector3d AB = l1.p[1] - l1.p[0];
17     Vector3d CD = l2.p[1] - l2.p[0];
18     Vector3d AC = l2.p[0] - l1.p[0];
19     Vector3d n1 = AB / abs(AB), n2 = CD / abs(CD);
20     double d1 = (dot(n1, AC) - dot(n1, n2) * dot(n2, AC)) / (1.0 - pow(dot(n1, n2), 2));
21     double d2 = (dot(n1, n2) * dot(n1, AC) - dot(n2, AC)) / (1.0 - pow(dot(n1, n2), 2));
22     return Segment3d(l1.p[0] + n1 * d1, l2.p[0] + n2 * d2);
23 }
24
25 // 直線  $l1$  と  $l2$  は交差するか?
26 bool intersectLL(Line3d l1, Line3d l2) {
27     Vector3d A = l1.p[0], B = l1.p[1], C = l2.p[0], D = l2.p[1];
28
29     // そもそも  $l1, l2$  が直線じゃない
30     if (equals(abs(B - A), 0.0) || equals(abs(D - C), 0.0)) {
31         // この場合は注意

```

```

32 // そもそも与えられた線分が線分になっていないので、交差するかどうかは判定できない
33 return false;
34 }
35
36 Vector3d AB = B - A, CD = D - C;
37 Vector3d n1 = AB / abs(AB), n2 = CD / abs(CD);
38 double tmp = dot(n1, n2);
39 tmp = 1 - tmp * tmp;
40
41 if (equals(tmp, 0.0)) return 0; // 直線が平行
42
43 Segment3d ns = nearest_segmentLL(l1, l2);
44 if (ns.p[0] == ns.p[1]) return true;
45 return false;
46 }
47
48 // 線分 seg1 と seg2 は交差しているか?
49 bool intersectSS(Segment3d seg1, Segment3d seg2) {
50     if (isParallel(seg1, seg2)) return false;
51     Segment3d seg = nearest_segmentLL(seg1, seg2);
52     if (!(seg.p[0] == seg.p[1])) return false;
53     Point3d cp = seg.p[1];
54     return on_segment3d(seg1, cp) && on_segment3d(seg2, cp);
55 }

```

```

32 /*
33 34 35 36 37 38 39
40 41 42 43 44 45 46 47 48
49 50 51 52 53 54 55
56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99
100
101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200
201
202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300
301
302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400
401
402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 458 459 460 461 462 463 464 465 466 467 468 469 470 471 472 473 474 475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 486 487 488 489 490 491 492 493 494 495 496 497 498 499 500
501
502 503 504 505 506 507 508 509 510 511 512 513 514 515 516 517 518 519 520 521 522 523 524 525 526 527 528 529 530 531 532 533 534 535 536 537 538 539 540 541 542 543 544 545 546 547 548 549 550 551 552 553 554 555 556 557 558 559 560 561 562 563 564 565 566 567 568 569 570 571 572 573 574 575 576 577 578 579 580 581 582 583 584 585 586 587 588 589 590 591 592 593 594 595 596 597 598 599 600
601
602 603 604 605 606 607 608 609 610 611 612 613 614 615 616 617 618 619 620 621 622 623 624 625 626 627 628 629 630 631 632 633 634 635 636 637 638 639 640 641 642 643 644 645 646 647 648 649 650 651 652 653 654 655 656 657 658 659 660 661 662 663 664 665 666 667 668 669 670 671 672 673 674 675 676 677 678 679 680 681 682 683 684 685 686 687 688 689 690 691 692 693 694 695 696 697 698 699 700
701
702 703 704 705 706 707 708 709 710 711 712 713 714 715 716 717 718 719 720 721 722 723 724 725 726 727 728 729 730 731 732 733 734 735 736 737 738 739 740 741 742 743 744 745 746 747 748 749 750 751 752 753 754 755 756 757 758 759 760 761 762 763 764 765 766 767 768 769 770 771 772 773 774 775 776 777 778 779 780 781 782 783 784 785 786 787 788 789 790 791 792 793 794 795 796 797 798 799 800
801
802 803 804 805 806 807 808 809 810 811 812 813 814 815 816 817 818 819 820 821 822 823 824 825 826 827 828 829 830 831 832 833 834 835 836 837 838 839 840 841 842 843 844 845 846 847 848 849 850 851 852 853 854 855 856 857 858 859 860 861 862 863 864 865 866 867 868 869 870 871 872 873 874 875 876 877 878 879 880 881 882 883 884 885 886 887 888 889 890 891 892 893 894 895 896 897 898 899 900
901
902 903 904 905 906 907 908 909 910 911 912 913 914 915 916 917 918 919 920 921 922 923 924 925 926 927 928 929 930 931 932 933 934 935 936 937 938 939 940 941 942 943 944 945 946 947 948 949 950 951 952 953 954 955 956 957 958 959 960 961 962 963 964 965 966 967 968 969 970 971 972 973 974 975 976 977 978 979 980 981 982 983 984 985 986 987 988 989 990 991 992 993 994 995 996 997 998 999 1000
1001
1002 1003 1004 1005 1006 1007 1008 1009 1010 1011 1012 1013 1014 1015 1016 1017 1018 1019 1020 1021 1022 1023 1024 1025 1026 1027 1028 1029 1030 1031 1032 1033 1034 1035 1036 1037 1038 1039 1040 1041 1042 1043 1044 1045 1046 1047 1048 1049 1050 1051 1052 1053 1054 1055 1056 1057 1058 1059 1060 1061 1062 1063 1064 1065 1066 1067 1068 1069 1070 1071 1072 1073 1074 1075 1076 1077 1078 1079 1080 1081 1082 1083 1084 1085 1086 1087 1088 1089 1090 1091 1092 1093 1094 1095 1096 1097 1098 1099 1100
1101
1102 1103 1104 1105 1106 1107 1108 1109 1110 1111 1112 1113 1114 1115 1116 1117 1118 1119 1120 1121 1122 1123 1124 1125 1126 1127 1128 1129 1130 1131 1132 1133 1134 1135 1136 1137 1138 1139 1140 1141 1142 1143 1144 1145 1146 1147 1148 1149 1150 1151 1152 1153 1154 1155 1156 1157 1158 1159 1160 1161 1162 1163 1164 1165 1166 1167 1168 1169 1170 1171 1172 1173 1174 1175 1176 1177 1178 1179 1180 1181 1182 1183 1184 1185 1186 1187 1188 1189 1190 1191 1192 1193 1194 1195 1196 1197 1198 1199 1200
1201
1202 1203 1204 1205 1206 1207 1208 1209 1210 1211 1212 1213 1214 1215 1216 1217 1218 1219 1220 1221 1222 1223 1224 1225 1226 1227 1228 1229 1230 1231 1232 1233 1234 1235 1236 1237 1238 1239 1240 1241 1242 1243 1244 1245 1246 1247 1248 1249 1250 1251 1252 1253 1254 1255 1256 1257 1258 1259 1260 1261 1262 1263 1264 1265 1266 1267 1268 1269 1270 1271 1272 1273 1274 1275 1276 1277 1278 1279 1280 1281 1282 1283 1284 1285 1286 1287 1288 1289 1290 1291 1292 1293 1294 1295 1296 1297 1298 1299 1300
1301
1302 1303 1304 1305 1306 1307 1308 1309 1310 1311 1312 1313 1314 1315 1316 1317 1318 1319 1320 1321 1322 1323 1324 1325 1326 1327 1328 1329 1330 1331 1332 1333 1334 1335 1336 1337 1338 1339 1340 1341 1342 1343 1344 1345 1346 1347 1348 1349 1350 1351 1352 1353 1354 1355 1356 1357 1358 1359 1360 1361 1362 1363 1364 1365 1366 1367 1368 1369 1370 1371 1372 1373 1374 1375 1376 1377 1378 1379 1380 1381 1382 1383 1384 1385 1386 1387 1388 1389 1390 1391 1392 1393 1394 1395 1396 1397 1398 1399 1400
1401
1402 1403 1404 1405 1406 1407 1408 1409 1410 1411 1412 1413 1414 1415 1416 1417 1418 1419 1420 1421 1422 1423 1424 1425 1426 1427 1428 1429 1430 1431 1432 1433 1434 1435 1436 1437 1438 1439 1440 1441 1442 1443 1444 1445 1446 1447 1448 1449 1450 1451 1452 1453 1454 1455 1456 1457 1458 1459 1460 1461 1462 1463 1464 1465 1466 1467 1468 1469 1470 1471 1472 1473 1474 1475 1476 1477 1478 1479 1480 1481 1482 1483 1484 1485 1486 1487 1488 1489 1490 1491 1492 1493 1494 1495 1496 1497 1498 1499 1500
1501
1502 1503 1504 1505 1506 1507 1508 1509 1510 1511 1512 1513 1514 1515 1516 1517 1518 1519 1520 1521 1522 1523 1524 1525 1526 1527 1528 1529 1530 1531 1532 1533 1534 1535 1536 1537 1538 1539 1540 1541 1542 1543 1544 1545 1546 1547 1548 1549 1550 1551 1552 1553 1554 1555 1556 1557 1558 1559 1560 1561 1562 1563 1564 1565 1566 1567 1568 1569 1570 1571 1572 1573 1574 1575 1576 1577 1578 1579 1580 1581 1582 1583 1584 1585 1586 1587 1588 1589 1590 1591 1592 1593 1594 1595 1596 1597 1598 1599 1600
1601
1602 1603 1604 1605 1606 1607 1608 1609 1610 1611 1612 1613 1614 1615 1616 1617 1618 1619 1620 1621 1622 1623 1624 1625 1626 1627 1628 1629 1630 1631 1632 1633 1634 1635 1636 1637 1638 1639 1640 1641 1642 1643 1644 1645 1646 1647 1648 1649 1650 1651 1652 1653 1654 1655 1656 1657 1658 1659 1660 1661 1662 1663 1664 1665 1666 1667 1668 1669 1670 1671 1672 1673 1674 1675 1676 1677 1678 1679 1680 1681 1682 1683 1684 1685 1686 1687 1688 1689 1690 1691 1692 1693 1694 1695 1696 1697 1698 1699 1700
1701
1702 1703 1704 1705 1706 1707 1708 1709 1710 1711 1712 1713 1714 1715 1716 1717 1718 1719 1720 1721 1722 1723 1724 1725 1726 1727 1728 1729 1730 1731 1732 1733 1734 1735 1736 1737 1738 1739 1740 1741 1742 1743 1744 1745 1746 1747 1748 1749 1750 1751 1752 1753 1754 1755 1756 1757 1758 1759 1760 1761 1762 1763 1764 1765 1766 1767 1768 1769 1770 1771 1772 1773 1774 1775 1776 1777 1778 1779 1780 1781 1782 1783 1784 1785 1786 1787 1788 1789 1790 1791 1792 1793 1794 1795 1796 1797 1798 1799 1800
1801
1802 1803 1804 1805 1806 1807 1808 1809 1810 1811 1812 1813 1814 1815 1816 1817 1818 1819 1820 1821 1822 1823 1824 1825 1826 1827 1828 1829 1830 1831 1832 1833 1834 1835 1836 1837 1838 1839 1840 1841 1842 1843 1844 1845 1846 1847 1848 1849 1850 1851 1852 1853 1854 1855 1856 1857 1858 1859 1860 1861 1862 1863 1864 1865 1866 1867 1868 1869 1870 1871 1872 1873 1874 1875 1876 1877 1878 1879 1880 1881 1882 1883 1884 1885 1886 1887 1888 1889 1890 1891 1892 1893 1894 1895 1896 1897 1898 1899 1900
1901
1902 1903 1904 1905 1906 1907 1908 1909 1910 1911 1912 1913 1914 1915 1916 1917 1918 1919 1920 1921 1922 1923 1924 1925 1926 1927 1928 1929 1930 1931 1932 1933 1934 1935 1936 1937 1938 1939 1940 1941 1942 1943 1944 1945 1946 1947 1948 1949 1950 1951 1952 1953 1954 1955 1956 1957 1958 1959 1960 1961 1962 1963 1964 1965 1966 1967 1968 1969 1970 1971 1972 1973 1974 1975 1976 1977 1978 1979 1980 1981 1982 1983 1984 1985 1986 1987 1988 1989 1990 1991 1992 1993 1994 1995 1996 1997 1998 1999 2000
2001
2002 2003 2004 2005 2006 2007 2008 2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015 2016 2017 2018 2019 2020 2021 2022 2023 2024 2025 2026 2027 2028 2029 2030 2031 2032 2033 2034 2035 2036 2037 2038 2039 2040 2041 2042 2043 2044 2045 2046 2047 2048 2049 2050 2051 2052 2053 2054 2055 2056 2057 2058 2059 2060 2061 2062 2063 2064 2065 2066 2067 2068 2069 2070 2071 2072 2073 2074 2075 2076 2077 2078 2079 2080 2081 2082 2083 2084 2085 2086 2087 2088 2089 2090 2091 2092 2093 2094 2095 2096 2097 2098 2099 2100
2101
2102 2103 2104 2105 2106 2107 2108 2109 2110 2111 2112 2113 2114 2115 2116 2117 2118 2119 2120 2121 2122 2123 2124 2125 2126 2127 2128 2129 2130 2131 2132 2133 2134 2135 2136 2137 2138 2139 2140 2141 2142 2143 2144 2145 2146 2147 2148 2149 2150 2151 2152 2153 2154 2155 2156 2157 2158 2159 2160 2161 2162 2163 2164 2165 2166 2167 2168 2169 2170 2171 2172 2173 2174 2175 2176 2177 2178 2179 2180 2181 2182 2183 2184 2185 2186 2187 2188 2189 2190 2191 2192 2193 2194 2195 2196 2197 2198 2199 2200
2201
2202 2203 2204 2205 2206 2207 2208 2209 2210 2211 2212 2213 2214 2215 2216 2217 2218 2219 2220 2221 2222 2223 2224 2225 2226 2227 2228 2229 2230 2231 2232 2233 2234 2235 2236 2237 2238 2239 2240 2241 2242 2243 2244 2245 2246 2247 2248 2249 2250 2251 2252 2253 2254 2255 2256 2257 2258 2259 2260 2261 2262 2263 2264 2265 2266 2267 2268 2269 2270 2271 2272 2273 2274 2275 2276 2277 2278 2279 2280 2281 2282 2283 2284 2285 2286 2287 2288 2289 2290 2291 2292 2293 2294 2295 2296 2297 2298 2299 2300
2301
2302 2303 2304 2305 2306 2307 2308 2309 2310 2311 2312 2313 2314 2315 2316 2317 2318 2319 2320 2321 2322 2323 2324 2325 2326 2327 2328 2329 2330 2331 2332 2333 2334 2335 2336 2337 2338 2339 2340 2341 2342 2343 2344 2345 2346 2347 2348 2349 2350 2351 2352 2353 2354 2355 2356 2357 2358 2359 2360 2361 2362 2363 2364 2365 2366 2367 2368 2369 2370 2371 2372 2373 2374 2375 2376 2377 2378 2379 2380 2381 2382 2383 2384 2385 2386 2387 2388 2389 2390 2391 2392 2393 2394 2395 2396 2397 2398 2399 2400
2401
2402 2403 2404 2405 2406 2407 2408 2409 2410 2411 2412 2413 2414 2415 2416 2417 2418 2419 2420 2421 2422 2423 2424 2425 2426 2427 2428 2429 2430 2431 2432 2433 2434 2435 2436 2437 2438 2439 2440 2441 2442 2443 2444 2445 2446 2447 2448 2449 2450 2451 2452 2453 2454 2455 2456 2457 2458 2459 2460 2461 2462 2463 2464 2465 2466 2467 2468 2469 2470 2471 2472 2473 2474 2475 2476 2477 2478 2479 2480 2481 2482 2483 2484 2485 2486 2487 2488 2489 2490 2491 2492 2493 2494 2495 2496 2497 2498 2499 2500
2501
2502 2503 2504 2505 2506 2507 2508 2509 2510 2511 2512 2513 2514 2515 2516 2517 2518 2519 2520 2521 2522 2523 2524 2525 2526 2527 2528 2529 2530 2531 2532 2533 2534 2535 2536 2537 2538 2539 2540 2541 2542 2543 2544 2545 2546 2547 2548 2549 2550 2551 2552 2553 2554 2555 2556 2557 2558 2559 2560 2561 2562 2563 2564 2565 2566 2567 2568 2569 2570 2571 2572 2573 2574 2575 2576 2577 2578 2579 2580 2581 2582 2583 2584 2585 2586 2587 2588 2589 2590 2591 2592 2593 2594 2595 2596 2597 2598 2599 2600
2601
2602 2603 2604 2605 2606 2607 2608 2609 2610 2611 2612 2613 2614 2615 2616 2617 2618 2619 2620 2621 2622 2623 262
```