HUAWEI APPLIED MATHEMATICAL CONTEST

CONTEST THESIS

Low Dissipation and Self-adapting FIR Filter Algorithms

Author:
Chai Hao,
Li Minghao,
Wang Xiyuan

Team:
REK3000

A thesis submitted in fulfillment of the requirements for the HUAWEI Applied Mathematics ContestApplied Mathematics Contest

in August 2023

Fudan University, Nanjing University
Chai Hao in SMCS,Fudan University,
Li Minghao in EIE,Nanjiing University,
Wang Xiyuan in SMS,Fudan University

华为领航杯应用数学大赛论文
低功耗自适应有限脉冲滤波器算法

柴昊

2023.8

摘要

这里是写摘要的地方。

参考文献是https://handwiki.org/wiki/Start和 Knapp 的李群一书。

前置知识是基本的分析学代数学，以及光滑流形的一般理论。可参考 [Lee12]。

目录

1 问题背景阐述

1.1 回顾极坐标下黎曼度量

简扼讲黎曼流形 (M,g) 是一个光滑流形上带有对称的度量 $g\in \mathrm{Sym}_2(TM)\subset T^*M\otimes T^*M$ 。现在考虑局部坐标 $(x^i)_i$ 和 $(y^i)_i$ 以及其坐标变换 $F:(x^i)_i\to(y^i)_i$ 的 Fréchet 导数 $D_F=(\frac{\partial y^i}{\partial x^j})_ij$。在两个坐标下度量有不同形式

$$g=g_{ij}dx^idx^j=\tilde{g}_{kl}dy^kdy^l=g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial x^j}{\partial y^l}dy^kdy^l$$

沿袭 Einstein 求和约定 (相同指标代表求和) 利用唯一性可知 $\tilde{g}_{kl}=g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial x^j}{\partial y^l}$ 记 $G=(g_{ij})_{ij}$ 为度量矩阵而 $G^{-1}=(g^{ij})_{ij}$ 为其逆可知 $\tilde{G}=(\tilde{g}_{ij})_{ij}=D^t_{F^{-1}}GD_{F^{-1}}$。再次利用 Fréchet 导数和切映射的联系

$$D_FD_{F^{-1}}=I_n,\quad n=\dim M,$$

从而体积元 $dV_g=\sqrt{|detG_x|}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 具有协变性 (在 F 保定向的情况下此时 $\det D_F>0$)

$$\begin{aligned}
&dV_g=\sqrt{|detG|}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n \qquad \text{(V1)}\\
&d\widetilde{V_g}=\sqrt{|det\tilde{G}|}dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n\\
&d\widetilde{V_g}=\sqrt{|detG|}|\det D_F|^{-1}|\det D_F|dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\sqrt{|detG|}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=dV_g
\end{aligned}$$

协变性表示公式形式不依赖于坐标选择，从而 dV_g 是一个内蕴的几何量只和度量 g 有关。对于流形上的函数 $f\in C^\infty(M)$ 定义其梯度是内蕴量

$$\langle\nabla f,X\rangle_g=X(f),\quad forallX\in X(M)$$

代入坐标即 $g_{ij}(\nabla f)^iX^j=\sum_i X^i\partial_i f$ 有 $(\nabla f)^i=\partial^i f=g^{ij}\partial_j f$。这个梯度公式是协变的一方面可以从其定义的内蕴性得到另一方面可以直接计算

下面为了求和规则记 $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x^i},\tilde{\partial}_i=\frac{\partial}{\partial y^i}$ 或者用合适下标表示偏导变量类如 $\partial_{x,i}$ 等

$$\begin{aligned}
\tilde{g}^{ij}\tilde{\partial}_jf\tilde{\partial}_i&=\partial_ky_ig^{kl}\partial_ly_j\partial_mf\tilde{\partial}_jx^m\tilde{\partial}_ix^n\partial_n\\
&=g^{kl}\partial_mf\partial_n(\partial_ky_i\tilde{\partial}_ix^n)(\partial_ly_j\tilde{\partial}_jx^m)\\
&=\delta_{kn}\delta_{lm}g^{kl}\partial_mf\partial_n=g^{ij}\partial_jf\partial_i
\end{aligned}$$

$\nabla f=\mathrm{grad}f$ 具有协变公式 $\nabla f=g^{ij}\partial_jf\partial_i$。次考虑切向量场 $X(M)$ 的散度 $\mathrm{div}X$ 其可以内蕴地定义为

$$d(X\lrcorner dV_g)=(\nabla X)dV_g$$

利用李导数的 Cartan 公式和 $d(dV_g)=0$ 也可得到 $L_X(dV_g)=d(\iota_X(dV_g))=\iota_X(d(dV_g))=d(X\lrcorner dV_g)=(\nabla X)dV_g$

这里 $X\lrcorner dV_g=\iota_X(dV_g)$ 是切向量场的缩并运算。

简记 $|g|=|\det G|$ 表示黎曼测度的体积膨胀性质。显式计算出

$$\nabla\cdot X=\mathrm{div}X=\star(\frac{1}{\sqrt{|g|}}d(\sum_i\sqrt{|g|}X^i(-1)^{i-1}dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n))$$

$$
\begin{aligned}
&= \star(\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}X^i)dV_g) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}X^i)
\end{aligned}
$$

可以直接计算上述公式的内蕴性质，只需要利用矩阵微积分中的性质

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\det A(t) = \mathrm{Tr}(A^{adj}(t)\frac{dA(t)}{dt}) = \det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}(t)\frac{dA(t)}{dt}) \\
&\frac{d}{dt}\ln|\det A(t)|\frac{1}{\det A(t)}\frac{d}{dt}\det A(t) = \mathrm{Tr}(A^{-1}(t)\frac{dA(t)}{dt})
\end{aligned} \tag{A1}
$$

上述关系称为 Jacobi Formula。本质来自于矩阵群 $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 的切向量满足 $\nabla_T\det(I_n) = \mathrm{Tr}T$ 从而计算记 $H = F^{-1}$

$$
\begin{aligned}
\nabla X &= \frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}|}}\tilde{\partial}_k(\sqrt{|\tilde{g}|}Y^k) = \frac{1}{|\det D_H|}\frac{1}{\sqrt{|g|}}\tilde{\partial}_k x^i\partial_i(\sqrt{|g|}|\det D_H|\partial_j y^k X^j) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}X^j)\partial_j y^k\tilde{\partial}_k x^i + X^i(\partial_i\ln|\det D_H| + \tilde{\partial}_k x^j\partial_{ij}y^k) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}X^j)\delta_{ij} + X^i(\mathrm{Tr}(D_F(\partial_i D_H)) + \tilde{\partial}_k x^j\partial_{ij}y^k) \quad \text{利用矩阵微积分 A1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}X^j) + X^i(\partial_k y^j\partial_i(\tilde{\partial}_j x^k) + \tilde{\partial}_j x^k\partial_i(\partial_k y^j)) \quad \text{展开} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}X^j) + X^i\partial_i(\partial_k y^j\tilde{\partial}_j x^k), \quad \text{莱布尼兹法则} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}X^j) + X^i\partial_i(\dim M) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}X^j)
\end{aligned} \tag{A2}
$$

从而说明了散度公式的协变性。

从梯度和散度出发，对于函数 $f\in C^\infty(M)$ 定义 Laplace-Beltrami 算子是两者复合

$$\Delta_g f := \mathrm{div}\circ\mathrm{grad}f$$

写成协变的形式就是

$$\Delta_g f := \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j f)$$

根据梯度和散点的协变性可知 $\Delta_g f$ 不依赖于坐标选择，事实上算子

$$\Delta_g := \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j) \tag{V3}$$

也是协变的，只需类似验证散点的协变性计算。

利用 $\tilde{g}^{ij}\tilde{\partial}_j = \partial_j y^i(g^{jk}\partial_k)$ 如果取 $Y^i = \tilde{g}^{ij}\tilde{\partial}_j$ 和 $X^i = g^{ij}\partial_j$ 则自然满足协变性 $Y^i = \partial_j y^i X^j$。这正是切向量的坐标变换方式，代入在 (A2) 中的计算可知

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Delta_g} &= \frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}|}}\tilde{\partial}_i(\sqrt{|\tilde{g}|}\tilde{g}^{ij}\tilde{\partial}_j) = \frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}|}}\tilde{\partial}_k(\sqrt{|\tilde{g}|}Y^k) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}X^i) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j)
\end{aligned}
$$

就得到了 Laplace-Beltrami 算子的协变性。

对于典范的黎曼模型 (M,g) 其度规在标准坐标下是 $g = g_ijdx^idx^j$ 换算成极坐标 (r,θ) 下可以写成

$$g_M := dr^2 + \psi(r)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$
$$g_{\mathbb{S}^{n-1}} = \langle \nabla_\theta \frac{x}{r}, \nabla_\theta \frac{x}{r} \rangle = (\sum_k \partial_{\theta_i}(\frac{x_k}{r})\partial_{\theta_j}(\frac{x_k}{r}))d\theta^i d\theta^j = \gamma_{ij}d\theta^i d\theta^j$$

是球面的标准欧式度量

那么可以计算出 (M,g) 的体积形式，其不依赖于坐标，选择极坐标 (r,θ) 其度量矩阵形如

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \psi^2(r)G_{\mathbb{S}^{n-1}} \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \psi^{-2}(r)G^{-1}_{\mathbb{S}^{n-1}} \end{pmatrix}$$

从而利用上述的内蕴公式 (V1) 计算出此时

$$d\nu = dV_g = \sqrt{|\det G|}dr \wedge d\theta = \psi^{n-1}(r)dr \wedge (\sqrt{|\det G_{\mathbb{S}^{n-1}}|}d\theta) = \psi^{n-1}(r)dr \wedge d\sigma_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

其中 $d\sigma_{\mathbb{S}^{n-1}} = \sqrt{|\det g_{\mathbb{S}^{n-1}|}}d\theta$ 是标准球面的黎曼测度。另外利用此矩阵结构计算极坐标下的 Laplace 算子利用协变公式 (V3) 可以得到

$$\Delta_g := \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j) = \frac{\partial_r(\psi^{n-1}|g_{\mathbb{S}^{n-1}}|\partial_r)}{\psi^{n-1}|g_{\mathbb{S}^{n-1}}|} + \frac{\partial_{\theta_i}(\psi^{n-1}\psi^{-2}g^{ij}_{\mathbb{S}^{n-1}}\partial_{\theta_j})}{\psi^{n-1}|g_{\mathbb{S}^{n-1}}|} = \frac{1}{\psi^{n-1}}\partial_r(\psi^{n-1}\partial_r) + \frac{1}{\psi^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

也就是

$$\Delta_g := \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}(\ln \psi^{n-1}(r))\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\psi^2(r)}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

1.2 李导数和流形上的李代数

1.3 流形积分和 Hodge 对偶

2　经典方法复现

3 理论及算法

3.1 Levi 分解

考虑任何一个有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 总能分解成可解李代数 $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ 和半单李代数 $\mathfrak{s} =$ 的半直积。

3.2 可解李代数刻画

如果记

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{n+1} := [\mathfrak{g}\mathfrak{g}^n], \quad \mathfrak{g}^{(n+1)} := [\mathfrak{g}^{(n)}\mathfrak{g}^{(n)}], \quad n \in \mathbb{N}$$

那么可解李代数是那些有限导代数为零 $(\exists n \in \mathbb{N}, \mathfrak{g}^{(n)})$ 的李代数。从矩阵李代数来看这些李代数在有限维时都可以表示到上三角矩阵的子代数。原因本质上是 Lie 定理

定理 3.1 (Lie 定理)**.** 代数闭域 F 上有限维可解李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示都是一维的。特别地不可约有限可解李代数是一维的。

证明. 不妨归纳，作为线性空间假设 $\dim \mathfrak{g} = n, n > 1$。 □

3.3 幂零李代数刻画

幂零李代数可以用伴随映射来刻画，这是一个不平凡的定理称为 Engel 定理

定理 3.2 (Engel 定理)**.** 有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 幂零当且仅当对所有 $g \in \mathfrak{g}$ 都有 ad_g 幂零

3.4 Borchred 代数

考虑更加数学物理化的代数结构。例如

Possion n-**代数**

4 实验数据及软硬件介绍

使用 Cartan 子代数

4.1 特殊线性群的表示

本节内容选自 Schur 的论文和李群一书 [Bum13]。

考虑紧群 G 的表示给出的一些多项式不变量如

$$F(x) = \frac{\det A_i}{\det A}$$

5 实验结果及主要结论

5.1 Fourier 方法

6 总结及展望

附录

这是附录文件。

The color of links can be changed to your liking using:

`\hypersetup{urlcolor=red}`, or

`\hypersetup{citecolor=green}`, or

`\hypersetup{allcolor=blue}`.

If you want to completely hide the links, you can use:

`\hypersetup{allcolors=.}`, or even better:

`\hypersetup{hidelinks}`.

If you want to have obvious links in the PDF but not the printed text, use:

`\hypersetup{colorlinks=false}`.

参考文献

[Bum13] Daniel Bump. *Lie Groups*. Springer New York, 2013. DOI: 10.1007/978-1-4614-8024-2 (cit. on p. 8).

[Lee12] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer New York, 2012. DOI: 10.1007/978-1-4419-9982-5 (cit. on p. 2).