Série $N^o 1$
Algèbre I : Logique et raisonnements

Exercice 1.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction. Nier les assertions suivantes.*

1. $\forall\ x \in \mathbb{R}\ :\ f(x) \neq 0.$
2. $\forall M > 0,\ \exists\ A > 0,\ \forall\ x \geq A, f(x) > M.$
3. $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \Longrightarrow x \leq 0.$

Exercice 2.

1. *Montrer par l'absurde qu'il n'existe aucun triplet* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *tel que :*
$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = ax^2 + bx + c.$$
(Indication : penser à calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$*).*
2. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, et tout* $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$*, on a :*
$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$
3. *Soit* $a \in \mathbb{N}$ *et* $n \in \mathbb{N}$*. Montrer que si* $a^2 + 9 = 2^n$ *alors* a *est impair.*
4. *Soit* $a, b \in \mathbb{Z}$*. Montrer que si* $a + b\sqrt{2} = 0$ *alors* $b = 0$*.*

Exercice 3.

1. *Soit* $x > -1$*. Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$*.*
2. *Montrer par l'absurde que l'équation* $9x^5 - 12x^4 + 6x - 1 = 0$ *n'admet aucune solution entière.*
(On pourra remplacer l'écriture $9x^5 - 12x^4 + 6x - 1 = 0$ *par* $x(9x^4 - 12x^3 + 6) = 1$*).*

Exercice 4.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$*. On considère la proposition :*
$$(P)\ :\ \textit{Si } a+b \textit{ est irrationnel alors } a \textit{ ou } b \textit{ sont irrationnels.}$$

1. *Donner la contraposée de* (P)*.*
2. *Démontrer alors* (P)*.*
3. *Est-ce que la réciproque de* (P) *est toujours vraie ?*