Cours de mécanique générale

Polytech Nice Sophia UCA

Chapitre 1 Lois fondamentale de la mécanique du point et du solide

Rappels de vecteur position, vitesse, accélération
Définition d'un solide
Distribution des vitesses
Composition des mouvements
Eléments cinétiques d'un solide
Forces s'exerçant sur un solide
Dynamique du solide

Chapitre 2 Système de forces

Forces résultantes et couples
Principe fondamental de la statique
Liaisons mécaniques
Réactions d'appuis

Chapitre 3 Propriétés des sections

Barycentre
Moment d'inertie
Rayon de giration
Théorème d'Huygens
Axes principaux d'inertie

Chapitre 4 Treillis

Barres, câbles, poutres
Méthode analytique
Méthode des sections
Méthode des nœuds

Chapitre 5 Câbles

Câbles sous charges
Câbles réels, parabole, chaînette

Chapitre 6 Hydrostatique

Pression
Masse volumique, densité
Statique des fluides
Principe de Pascal,
Principe d'Archimède,
Tension superficielle

BAT 3 – ROBO 3

jlburlet@unice.fr

Moments statiques – Centres de gravité

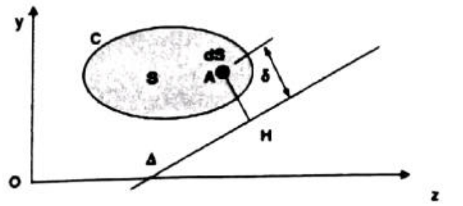
1. Calcul de l'aire d'une section

$S = \iint f \, ds$

Le calcul d'une aire S d'une section quelconque s'effectue à l'aide de la formule : $S = \int f(z)\, dz$
F(z) étant l'équation mathématique qui définit la forme de la section.

2. Moment statique d'une aire plane par rapport à un axe

Considérons dans un plan, un contour fermé (C) qui délimite une aire que nous désignerons par S et un axe Δ quelconque :



Soit A un point situé à l'intérieur du contour et δ la distance AH de ce point A à l'axe Δ. Cette distance sera comptée positive pour tous les points A situés d'un côté de Δ et négative pour ceux situés de l'autre côté.

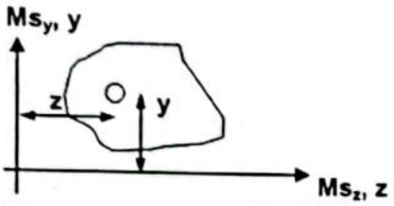
Considérons autour de A un élément d'aire infiniment petit dont nous désignerons la grandeur par dS.

On appelle moment statique de l'aire Ms par rapport à l'axe Δ, la quantité :

$$Ms_\Delta = \sum \delta \cdot dS$$

En posant les distances du point A aux axes Oy et Oz égales à l'ordonnée y et à l'abscisse z de ce point, les moments statiques par rapport aux axes de coordonnées s'exprimeront :

$$Ms_\Delta = \iint_S \delta \cdot dS$$



$$Ms_y = \sum z \cdot dS \qquad Ms_y = \iint_S z.dS$$

$$Ms_z = \sum y \cdot dS \qquad Ms_z = \iint_S y.dS$$

On notera que la quantité "δ . dS" est le produit d'une longueur δ par une surface dS. Du point de vue des unités, il en résulte qu'un moment statique s'exprime en unité de longueur au cube, par exemple m^3 ou cm^3.

On peut dire que le moment statique d'une section par rapport à l'axe des z, noté Msz, est égal au produit de l'aire de la section par la distance de l'axe des y au centre de gravité de cette Section.

3. Centre de gravité

On appelle centre de gravité de l'aire S le point G qui a pour coordonnées :

$$Y_G = \frac{\sum y.dS}{\sum dS} ; Z_G = \frac{\sum z.dS}{\sum dS}$$

En remarquant que l'expression ΣdS peut être remplacée par l'aire S car elle est égale à la somme de tous les éléments d'aire dS contenus à l'intérieur du contour C et en tenant compte des relations définissant les moments statiques, on déduit que :

$$Y_G = \frac{Ms_z}{S} ; Z_G = \frac{Ms_y}{S}$$

Ces expressions sont valables quels que soient les axes de coordonnées Oy et Oz choisis.

Sous formes intégrales, les coordonnées du centre de gravité deviennent :

$$y_G = \frac{1}{S}\iint_S y dS \text{ et } z_G = \frac{1}{S}\iint_S z dS$$

La notion de centre de gravité correspond à la notion de moyenne en statistique.

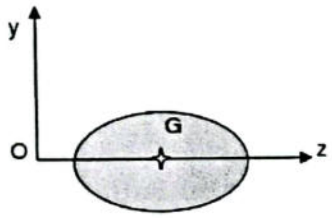
4. Propriétés des moments statiques

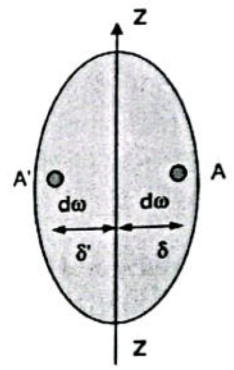
A- Le moment statique d'une aire plane par rapport à un axe Δ passant par son centre de gravité est nul.

B- Le moment statique d'une aire plane par rapport à un axe Δ est égal au produit de la grandeur S de cette aire par la distance de son centre de gravité G à l'axe Δ.

C- Si une aire présente un axe de symétrie ZZ, son centre de gravité se trouve obligatoirement sur cet axe.

D- Pour calculer le moment statique d'une aire plane par rapport à un axe Δ, on pourra décomposer l'aire S en aires élémentaires S1, S2, S3 ... puis calculer les moments statiques Ms1 ,Ms2 ,Ms3 plus aisément.



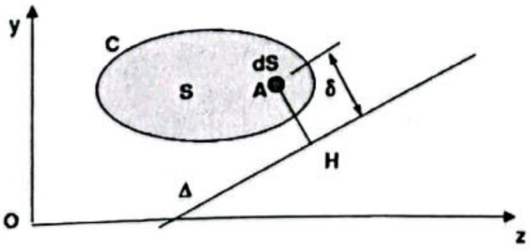


Moment d'inertie

1. Définition du moment d'inertie

Dans les études du comportement des éléments des structures, s'introduisent dans les calculs les intégrales sur des surfaces des carrés des coordonnées d'un point ou des produits des coordonnées. Des intégrales semblables sont introduites en mécanique lorsque l'on utilise l'inertie d'un solide par rapport à un point, un axe ou un plan. Dans le cas des **sections** ces intégrales doubles sont appelées **moments d'inertie** (appelés plus communément inerties) ou moment quadratique.

Considérant la courbe C, contour d'une surface, on appelle moment d'inertie de l'aire S par rapport à l'axe Δ la quantité : $I_\Delta = \sum \delta^2 \cdot dS$ $\quad I_y = \sum z^2 \cdot dS$ $\quad I_z = \sum y^2 \cdot dS$



$$I_\Delta = \iint_S \delta^2 \cdot dS$$

$$I_{Oy} = \iint_S z^2 dS$$

$$I_{Oz} = \iint_S y^2 dS$$

Cette somme étant étendue à l'ensemble des éléments dS compris à l'intérieur du contour C.

Remarque :
La quantité δ^2 dS est le produit du carré d'une longueur par une surface. Il en résulte qu'au point de vue des unités, un moment d'inertie s'exprime en unité de longueur à la puissance 4 soit des m4, des cm4, etc...

On remarquera également qu'un moment d'inertie est toujours positif.

2. Rayon de giration

On appelle rayon de giration de l'aire S autour de l'axe Δ , la quantité r_Δ tel que :

$$r_\Delta^2 = \frac{I_\Delta}{S} \qquad r_y^2 = \frac{I_y}{S} ; r_z^2 = \frac{I_z}{S}$$

3. Produit d'inertie

On appelle produit d'inertie de l'aire S par rapport aux axes de coordonnées, la quantité :

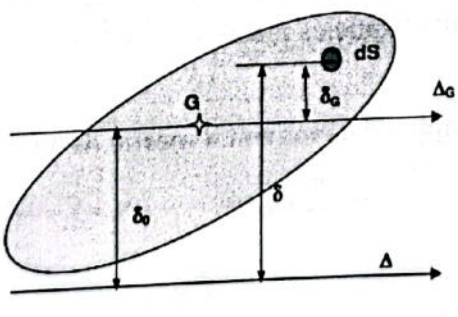
$$I_{yz} = \sum y \cdot z \cdot dS$$

$$I_{Oyz} = \iint_S yz dS$$

Cette somme étant étendue à l'ensemble des éléments dS compris à l'intérieur du contour C.
Le produit d'inertie est une grandeur algébrique qui peut être positive ou négative.

4. Calcul du moment d'inertie par rapport à un axe Δ, transport du moment d'inertie

Théorème de HUYGHENS : Le moment d'inertie d'une aire plane S par rapport à un axe quelconque Δ est égal au moment d'inertie de S par rapport à un axe ΔG parallèle à Δ et passant par le centre de gravité G de l'aire augmenté du produit de la grandeur S par le carré de la distance qui sépare Δ et G.



$$I_\Delta = \sum \delta^2 \cdot dS$$

Ou

$$I_\Delta = \iint_S \delta^2 \cdot dS$$

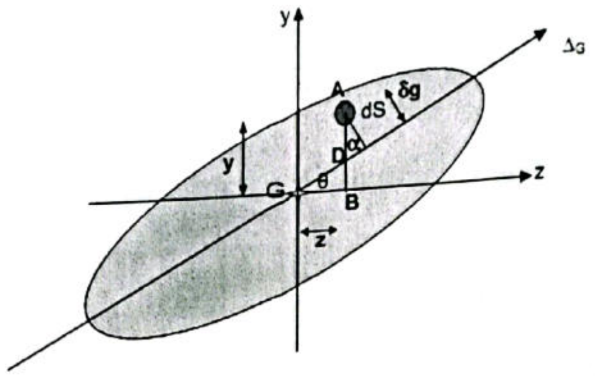
$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + \delta_0^2 \cdot S$$

L'inertie est minimal en son centre de gravité

5. Variation du moment d'inertie

Nous venons de voir que le moment d'inertie I_Δ par rapport à un axe Δ quelconque se ramène au calcul du moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle à Δ et passant par le centre de gravité G.

Nous allons étudier la variation du moment d'inertie par rapport à un axe tournant θ autour du centre de gravité G.



Rapportons l'aire S à deux axes de coordonnées fixes Gy et Gz passant pas le centre de gravité G et désignons par θ l'angle que fait Gz avec l'axe ΔG par rapport auquel on veut déterminer le moment d'inertie.

L'inertie par rapport à Δ s'écrit alors :

$$I_{\Delta_G} = I_z \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - I_{yz} \sin 2\theta \qquad tg 2\theta = -\frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}$$

6. Axes principaux d'inertie

Au cours de cette variation, $I_{\Delta G}$ passera donc par deux valeurs l'une plus grande que toutes les autres, l'autre plus petite que toutes les autres.

C'est ce que confirme l'étude de variation de $I_{\Delta G}$ définie par la formule ci dessus. Il existe deux valeurs de θ différent de π/2, c'est à dire deux positions rectangulaires de l'axe ΔG qui correspondent l'une à un maximum de $I_{\Delta G}$ et l'autre à un minimum.

Ces positions de l'axe Δ_G s'appellent les axes principaux d'inertie et les moments d'inertie correspondants, les moments d'inertie principaux.

On démontre que le produit d'inertie est nul par rapport à ces axes principaux.

Les valeurs des inerties principales, notées I1 et I2, se calculent donc à partir de la formule précédente en injectant la valeur de θ, définie par

$$tg 2\theta = -\frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}$$

L'inertie I1 est calculée en prenant θ.
L'inertie I2 est calculée en prenant θ + π/2

$$I_1 = I_Z \cos^2\theta + I_Y \sin^2\theta - \sin 2\theta I_{YZ}$$

En partant du fait que sin θ = cos(θ + π/2), on obtient:

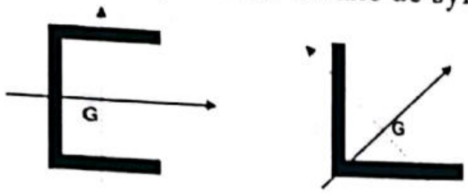
$$I_2 = I_Z \cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + I_Y \sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) I_{YZ}$$

$$I_2 = I_Z \sin^2\theta + I_Y \cos^2\theta + \sin 2\theta I_{YZ}$$

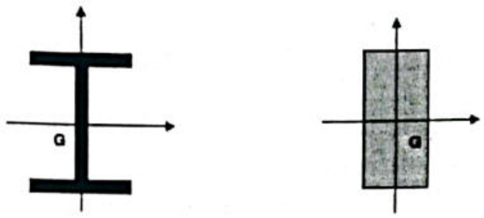
Si l'on considère tous les axes passant par G et les moments d'inertie correspondants, il existe deux axes perpendiculaires l'un à l'autre appelés axes principaux d'inertie pour lesquels les moments d'inertie sont pour l'un maximum et pour l'autre minimum.

7. Propriétés des axes principaux d'inertie

A- Si une aire plane présente un axe de symétrie, cet axe est un axe principal d'inertie.



B- Si une aire plane présente deux axes de symétrie. Ceux ci sont les axes principaux d'inertie.



C- Si une aire plane présente plus de deux axes de symétrie, tous les axes de symétrie passant par le centre de gravité G sont des axes principaux d'inertie et tous les moments d'inertie par rapport à ces axes sont égaux.

Démarche pratique pour une section quelconque

1. Calcul dans un repère Oyz donné des six quantités : aire(S), moments statiques par rapport aux axes Oy et Oz (MSY et MSZ), inerties par rapport aux axes Oy et Oz (IOy et IOz), moment quadratique IOyz) dans le repère Oyz.

2. Recherche de la position du centre de gravité.

$$Y_G = \frac{1}{S}\iint_S y.dS = \frac{1}{S}.M_{SZ} \quad \text{et} \quad Z_G = \frac{1}{S}\iint_S z.dS = \frac{1}{S}.M_{SY}$$

3. Calcul des inerties dans le repère Gyz centré en G et dont les axes sont parallèles à ceux du repère Oyz. Les expressions utilisées sont les formules de Huygens mises sous la forme indiquée ci-dessous:

$$I_{GY} = I_{OY} - S.z_G^2 \quad \text{et} \quad I_{GZ} = I_{OZ} - S.y_G^2$$

4. Calcul de l'angle θ entre les axes du repère Gyz avec les axes principaux d'inertie du repère GYZ.

$$\theta = \frac{1}{2}atctg\left(-\frac{2I_{Gyz}}{I_{Gz} - I_{Gy}}\right)$$

5. Calcul des inerties par rapport aux axes principaux d'inertie.

$$I_1 = I_Z \cos^2(\theta) + I_Y \sin^2(\theta) - I_{YZ}.\sin(2\theta)$$
$$I_2 = I_Z \sin^2(\theta) + I_Y \cos^2(\theta) + I_{YZ}.\sin(2\theta)$$

Section avec un axe de symétrie

Lorsque la section comporte un axe de symétrie, les directions des axes principaux d'inertie sont connues et l'on sait que le centre de gravité est situé sur l'axe de symétrie. Les calculs sont simplifiés.

Dans la démarche qui suit, on considère l'axe Oy (axe vertical) comme axe de symétrie.

Les étapes, dans ce cas, sont les suivantes :

1. Calcul dans un repère Oyz donné des quatre quantités : aire(S), moment statique par rapport à l'axe Oz (M_{SZ}) car par définition le moment statique par rapport à Y est nul, inerties par rapport aux axes Oy et Oz.

2. Recherche de la position du centre de gravité. Cette position est donnée par l'expression :

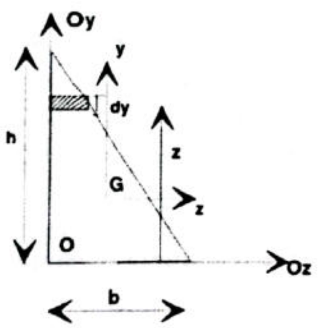
$$Y_G = \frac{1}{S}\iint_S y.dS = \frac{1}{S}.M_{SZ}$$

Rappelons que ce centre de gravité est situé sur l'axe de symétrie Oy.

3. Calcul du moment d'inertie par rapport à l'axe Gz passant par G et perpendiculaire à l'axe de symétrie. L'expression utilisée est la formule de Huyghens mise sous la forme indiquée ci-dessous :

$$I_{GZ} = I_{OZ} - S \times y_G^2$$

Exemple de calcul de section particulière : le triangle



Date: /