Cours de mécanique générale

Polytech Nice Sophia UCA

BAT 3 – ROBO 3 jlburlet@unice.fr

Définition des systèmes réticulés

1. Définition

Un système réticulé (ou à treillis) est un système composé de barres droites articulées entre elles à leurs extrémités.
On appelle nœuds les points d'articulation communs à plusieurs barres.
Lorsque toutes les barres et les forces appliquées sont dans un même plan, le système est un système réticulé plan.
Un système triangulé est un système réticulé particulier formé de triangles juxtaposés.

2. Utilisation

Pourquoi l'utilisation de poutres de ce type ?
Ces poutres sont légères, économiques, leur inertie flexionnelle peut être adaptée par variation de hauteur de la poutre, disons que la matière de part sa distribution est bien utilisée.
Cependant elles exigent des temps de main-d'œuvre importants pour le découpage des éléments ainsi que la réalisation de nombreux assemblages qui ne les rendent plus compétitives que pour :

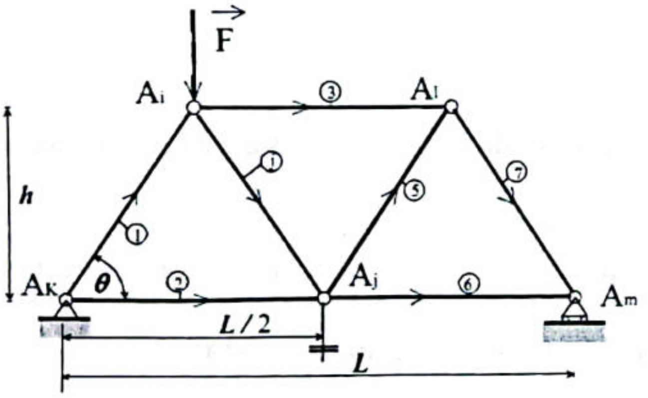
- les grandes portées,
- les bâtiments légers standardisés, produits en grande série en usine,
- optimiser le poids des robots,

Ces poutres sont constituées généralement de 2 membrures reliées par des diagonales (barres inclinées) et parfois des montants (barres verticales). La terminologie utilisée est variable et spécifique du matériau utilisé (acier, bois, ...). Lorsque les membrures sont horizontales on utilise la dénomination : poutre treillis. Les poutres treillis les plus utilisées sont du type : Poutres PRATT (N), HOWE (Z), WARREN (W), en K. Lorsque les membrures supérieures sont inclinées les treillis sont généralement dénommés : Ferme.

En ce qui concerne le comportement mécanique, en assimilant une poutre treillis à une poutre prismatique on constate que les membrures supportent l'essentiel du moment de flexion et les diagonales ainsi que les montants résistent à l'effort tranchant.

En règle générale, il faut faire coïncider les lignes moyennes aux nœuds afin d'éviter l'introduction de moments secondaires parasites.

Les matériaux utilisés sont : l'acier, le bois, l'aluminium et plus rarement le béton armé.
On peut aussi réaliser des poutres treillis spatiales pour des poutres de très grande longueur, ainsi que des nappes spatiales horizontales ou formant une voûte.
En robotique : acier, aluminium, carbon, kevlar,



Soit une poutre du type WARREN.
Les forces extérieures sont appliquées aux nœuds et appartiennent au plan de la structure.
Si on utilise une méthode analytique, il est souhaitable de numéroter les barres pour les repérer et définir un sens de parcours.
Il faut distinguer les barres des nœuds, ceux-ci sont alors considérés comme des solides.

3. Hypothèses

• **Pour déterminer les actions de liaison, on assimilera le système réticulé à un système matériel rigide.**

Par définition, un système matériel est constitué de solides au sens de la statique, ces solides sont donc indéformables, les barres ont une longueur invariante quel que soit l'intensité des efforts normaux et on néglige la déformation axiale des barres provenant des sollicitations de traction ou compression. Par rigide on entend que le treillis est stable (isostatique ou hyperstatique).

• **Les barres sont modélisées par leur ligne moyenne (ligne passant par le C.D.G. des sections droites).**

• **On suppose les barres articulées sans frottement aux nœuds(articulation parfaite d'axe z perpendiculaire au plan du treillis)**

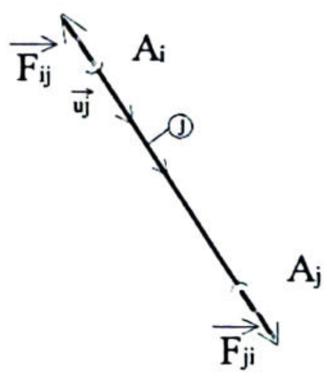
En pratique, en construction métallique le nœud est constitué d'une plaque nommée gousset sur laquelle les barres sont le plus souvent boulonnées ou soudées. De plus, certaines barres sont continues au passage d'un nœud, par exemple la barre ***AkAjAm*** de l'exemple ci-dessus. Parfois, lorsque les barres sont des profils creux, elles sont soudées au niveau de leurs intersections. En réalité les barres ne sont pas articulées sur le nœud, cependant cette hypothèse conduit à la simplification des calculs pour une précision raisonnable. Les résultats obtenus sont d'une précision suffisante pour le dimensionnement des ouvrages courants (erreur < 10%).

• **On néglige le poids propre des barres** devant les autres charges sollicitant le treillis. Dans le cas contraire, on adopte la méthode traitant des actions appliquées sur les barres et explicitée plus loin.

• **Les forces extérieures sont toujours ponctuelles et appliquées aux nœuds** Nous montrerons que cette hypothèse implique que les barres ne peuvent être soumises qu'à des efforts de traction ou de compression. Dans le cas contraire, on adopte la méthode traitant des actions appliquées sur les barres et explicitée plus loin.

• **Les calculs sont conduits exclusivement en élasticité.**

SOLLICITATION DES BARRES



Isolons une barre A_iA_j, (en excluant les nœuds)

C'est un solide soumis à 2 forces.

$\vec{F}_{ij}$ appliqué en A_i, action du noeud A_i sur la barre j. $\vec{F}_{ij} = F_{ij}.\vec{u}_j$

$\vec{F}_{ji}$ appliqué en A_j, action du noeud A_j sur la barre j. $\vec{F}_{ji} = F_{ji}.\vec{u}_j$

***Théorème:** Pour qu'un solide soumis à l'action de 2 forces soit en équilibre, il faut et il suffit que ces 2 forces soient de même intensité et directement opposées.*

$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad F_{ij} = -F_{ji} \quad \|\vec{F}_{ij}\| = \|\vec{F}_{ji}\|$

La barre A_iA_j ne peut être sollicitée que par une traction ou compression. Soit N_j l'effort normal dans la barre j, $\vec{u}_j$ un vecteur unitaire dont le sens coïncide avec celui du parcours prédéfini lors du tracé du schéma mécanique, nous pouvons écrire:

$$N_j = \vec{F}_{ji}.\vec{u}_j = -\vec{F}_{ij}.\vec{u}_j$$

ISOSTATIQUE, HYPERSTATIQUE

1. Définitions

Nous avons parlé en statique de cette question dans un chapitre antérieur consacré à la détermination du degré d'hyperstaticité. Cependant nous rappellerons les définitions suivantes. **Un système réticulé est extérieurement isostatique si les actions aux appuis peuvent être déterminées par les seules équations de la statique. Dans le cas contraire, le système réticulé est dit extérieurement hyperstatique. Un système réticulé est intérieurement isostatique si les actions aux appuis étant connues, les efforts normaux dans les barres peuvent être déterminés par les seules équations de la statique, dans le cas contraire il est dit intérieurement hyperstatique.**

2. Théorèmes fondamentaux (treillis plans)

Soit n le nombre de nœuds, soit b le nombre de barres.
Soit ie le nombre d'inconnues de liaison avec le milieu extérieur après l'isolement de la structure.
Soit Le le degré d'hyperstaticité extérieur, Li le degré d'hyperstaticité intérieur.

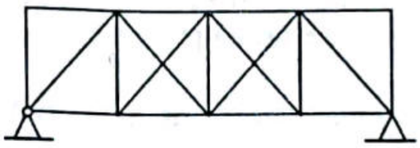
$L = Le + Li$ $\qquad$ $Le = ie - 3$ $\qquad$ $Li = L - Le = b + 3 - 2n$

Structure hypostatique intérieurement $b < 2n - 3$

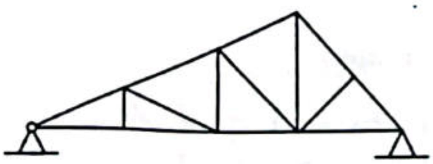
Structure isostatique $b = 2n - 3$

Structure hyperstatique intérieurement $b > 2n - 3$

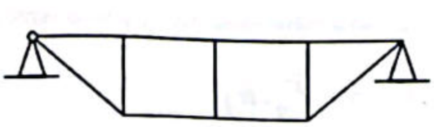
Vérifier l'isostatisme extérieur et intérieur des systèmes triangulés suivants.



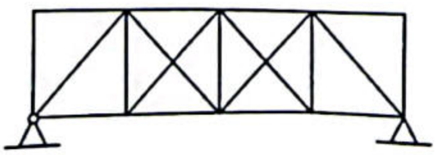
b = 19 barres
n = 10 nœuds
Li = 19 + 3 − 20
= 2 Hyper



b = 15
n = 9
Li = 15 + 3 − 18
= 0 iso



b = 11
n = 8
Li = 11 + 3 − 16
= −2 hypo



b = 19
n = 10
Li = 2 hyper

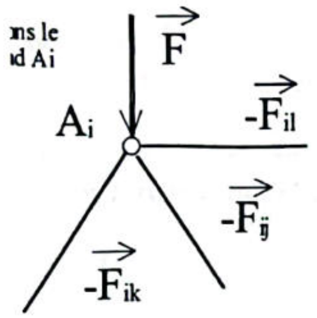
3. Détermination des efforts normaux dans les barres

Nous nous plaçons dans le cas des systèmes triangulés isostatiques.
On dispose de 2 méthodes :

• **Méthode dite des noeuds**, avec une solution analytique ou graphique, la plus utilisée étant **la solution graphique** plus connue sous le nom d'**Epure de CREMONA**.

• **Méthode dite des coupures ou des sections**, avec une solution analytique ou graphique, la plus utilisée étant la solution **analytique** plus connue sous le nom de **Méthode de RITTER**.

Méthode des nœuds



On isole le nœud Ai

On applique le PFS, ce qui donne l'équation vectorielle:

$$\vec{F} - \vec{F}_{il} - \vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ik} = \vec{0}$$

Cette équation donne 2 équations algébriques (problème plan)

La résolution est effective dans le cas ou le nombre de forces inconnues appliquées au nœud est inférieur ou égal à 2.

La démarche consiste à déterminer en premier lieu les actions de contact, détecter les barres non sollicitées, choisir le nœud ou le nombre de forces inconnues appliquées est inférieur ou égal à 2, puis isoler un nœud voisin et réitérer cette dernière opération jusqu'à épuisement des nœuds.

Marche à suivre pour tracer l'épure de CREMONA d'un système triangulé

1 - Choisir une échelle de dessin et modéliser le système triangulé (réseau des lignes moyennes).

2 - Vérifier l'isostatisme du système.

3 - Déterminer les forces extérieures appliquées aux nœuds, toujours les représenter sur le schéma mécanique à l'extérieur du treillis.

4 - Déterminer les actions aux liaisons avec l'extérieur : aux appuis (méthode graphique ou analytique).

5 - Repérer les zones extérieures et intérieures (zone = espace entre 2 forces ou triangle de barres).

6 - Choisir une échelle des forces et tracer l'épure de CREMONA.

Détectez les barres non sollicitées. L'ordre de résolution doit être tel qu'il n'y ait au maximum

que deux inconnues au noeud étudié. Si le système triangulé et le chargement sont

symétriques, on peut limiter l'étude à la demi-structure.

***ATTENTION** : Il est impératif de tourner, toujours dans le même sens, autour des noeuds*

(*convention:* par *sens* trigonométrique direct).

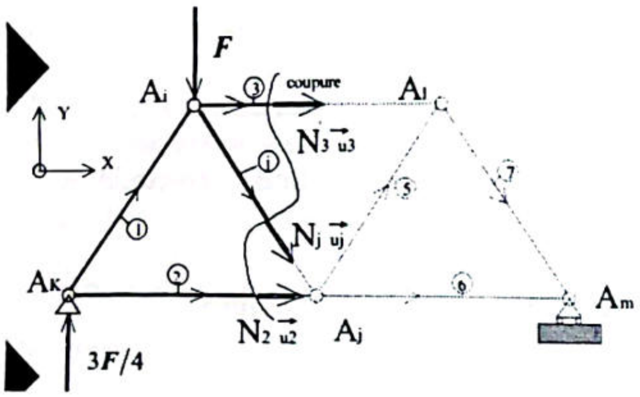
7 - Etablir un tableau récapitulatif des efforts normaux dans les barres. Un effort normal positif = traction, un effort normal négatif = compression.

Barre	Zones	Traction	Compression

Scanné avec CamScanner

Méthode des coupures ou des sections

Cette méthode admet une solution analytique ou graphique, la plus utilisée étant la solution analytique plus connue sous le nom de METHODE DE RITTER.
Cette méthode est intéressante car elle permet de déterminer les efforts normaux uniquement dans les barres que l'on a choisies.
Principe de la méthode : on pratique une coupure en veillant de couper les barres dont on cherche les efforts normaux.



On doit **couper au plus trois barres** dont l'effort normal est inconnu et de plus **non concourantes.**

On isole le tronçon de gauche (ou de droite) et on applique le **P.F.Statique au tronçon isolé**.

L'équation des moments, par un choix judicieux du point de calcul, permet la détermination directe des efforts normaux.

$M/Ai \Rightarrow N2$ $\quad$ $M/Aj \Rightarrow N3$ $\quad$ $M/Al \Rightarrow Nj$

ou projection sur l'axe des Y ou des X pour déterminer les efforts normaux dans les diagonales et montants.

Démarche

1 - Modéliser le système triangulé (réseau des lignes moyennes).

2 - Vérifier l'isostatisme du système :

extérieur : nb équations = nb inconnues,

intérieur : b = 2n - 3.

3 - Déterminer les forces extérieures appliquées aux nœuds

4 - Déterminer les actions aux liaisons avec l'extérieur (méthode graphique ou analytique).

5 - Choisir une coupure fictive dans laquelle doit apparaître l'effort normal recherché. Le choix de la coupure doit être tel que:

il y ait un maximum de trois inconnues, les deux inconnues non recherchées aient des directions concourantes ou que l'effort normal soit connu dans l'une ou plusieurs des barres coupées.

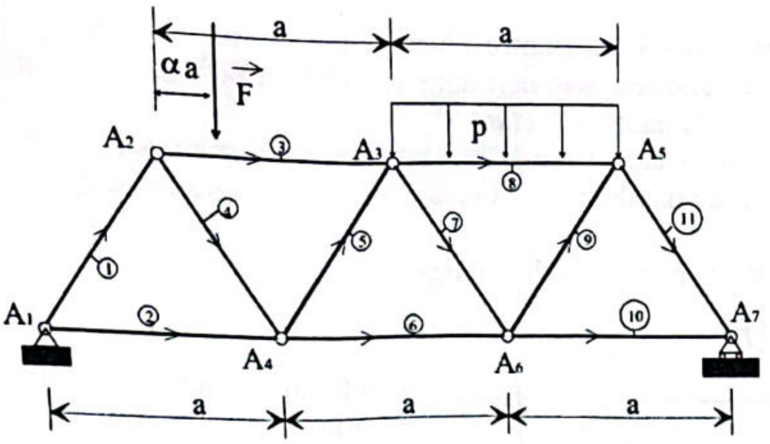
6 - Ecrire l'équation de moment par rapport au point de concours des directions des deux inconnues non recherchées.

Résoudre l'équation de moment. On peut aussi utiliser les 2 équations de projection des forces sur le repère principal de la statique.

7 - Etablir éventuellement un tableau récapitulatif des efforts normaux déterminés.

Barre	Zones	Traction	Compression

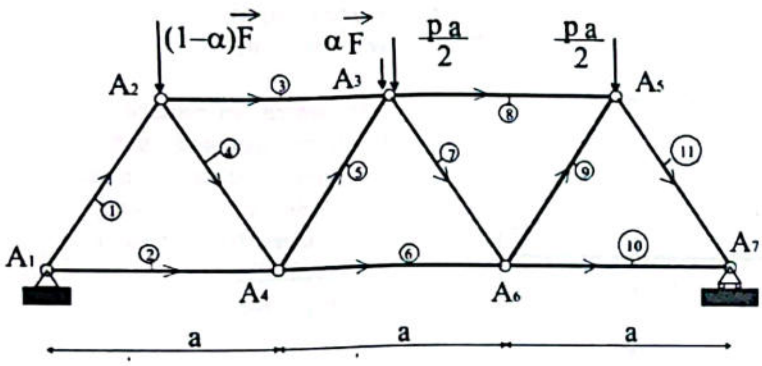
Cas particulier ou des charges sont appliquées sur les barres



Pour chacune des barres, on remplace la charge appliquée par 2 forces ponctuelles statiquement équivalentes appliquées aux nœuds d'extrémité de ces barres.

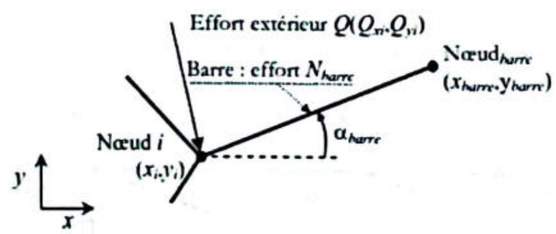
On détermine ensuite les efforts normaux dans les barres comme précédemment.

Pour les barres sollicitées par des charges il faut appliquer le principe de superposition pour déterminer le torseur des efforts.
Ici les barres 3 et 8 sont sollicitées à la flexion plus effort normal plus effort tranchant.



Méthode générale ou analytique

Cette méthode n'est pas vraiment intéressante lors d'un calcul manuel car elle nécessite la résolution d'un système dont le nombre d'équations devient vite important (2 équations par nœud). De plus, lors d'un calcul par ordinateur, on lui préférera la méthode des déplacements, nettement plus systématique et applicable également aux treillis hyperstatiques. Cette méthode est donc d'un intérêt limité.



Si on écrit ces 2 équations pour chaque nœud, on obtient un système dont la dimension est égale au double du nombre total de nœuds du treillis.

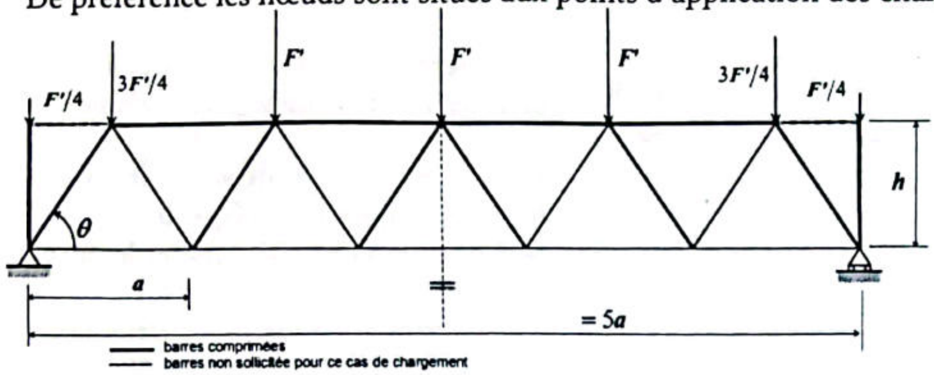
$$\begin{cases} Q_{x,i} + \sum\limits_{\substack{\text{barres}\\ \text{concourantes}\\ \text{au noeud } i}} N_{barre} \dfrac{x_{barre} - x_i}{L_{barre}} = 0 \\ Q_{y,i} + \sum\limits_{\substack{\text{barres}\\ \text{concourantes}\\ \text{au noeud } i}} N_{barre} \dfrac{y_{Barre} - y_i}{L_{barre}} = 0 \end{cases}$$

Si le nœud correspond à un appui, les équations ci-contre doivent être complétées par les composantes (Rxi, Ryi) de la réaction correspondante :

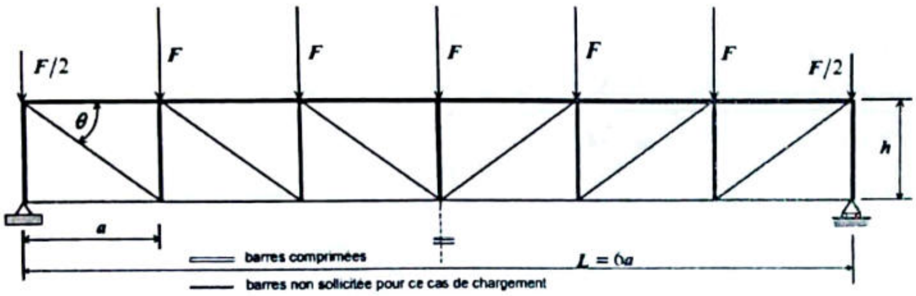
$$\begin{cases} R_{x,i} + Q_{x,i} + \sum\limits_{\substack{\text{barres}\\ \text{concourantes}\\ \text{au noeud } i}} N_{barre} \dfrac{x_{barre} - x_i}{L_{barre}} = 0 \\ R_{y,i} + Q_{y,i} + \sum\limits_{\substack{\text{barres}\\ \text{concourantes}\\ \text{au noeud } i}} N_{barre} \dfrac{y_{barre} - y_i}{L_{barre}} = 0 \end{cases}$$

Dispositions de treillis

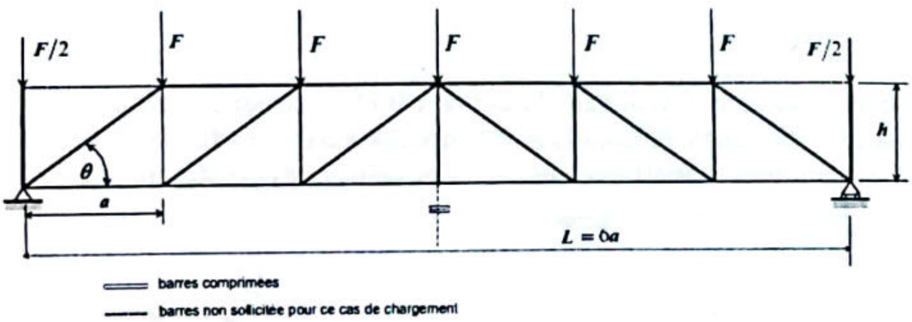
Mécaniquement, on peut assimiler une poutre treillis à une poutre à âme pleine. Les membrures supportent l'essentiel du moment de flexion, les diagonales et montants reprennent l'effort tranchant.
Ces poutres sont caractérisées par leur portée L, la hauteur h et a.
Un accroissement de h diminue les efforts normaux dans les membrures mais augmente la longueur des diagonales comprimées (d'où leur longueur de flambement). On doit veiller à limiter la longueur des barres comprimées.
De préférence les nœuds sont situés aux points d'application des charges.



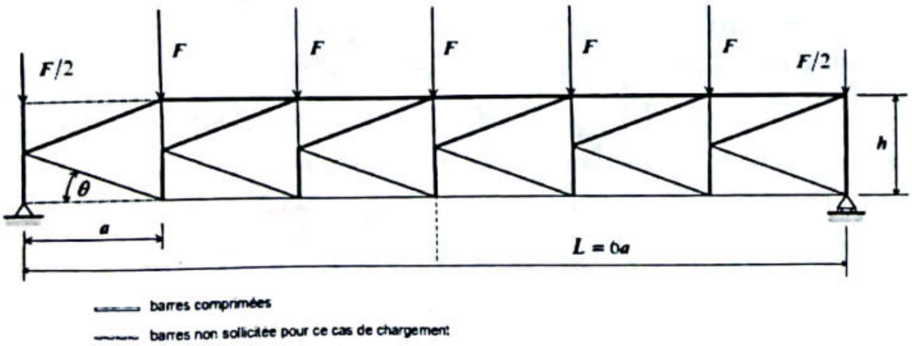
Treillis en V (poutre Warren) : les diagonales ayant même longueur c'est favorable en cas d'actions alternées (poids propre + neige et poids propre + vent au soulèvement).



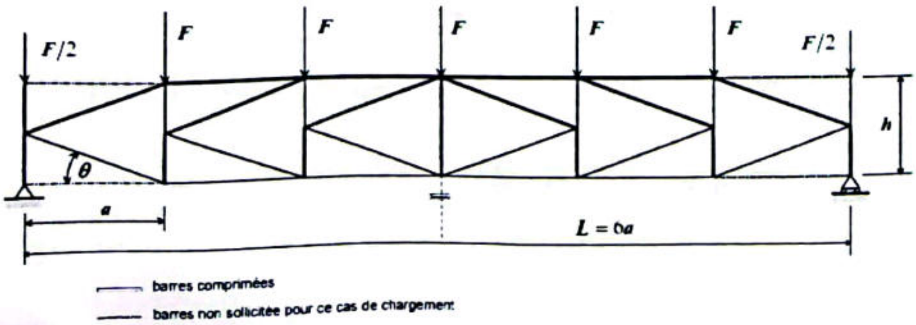
Treillis en N (poutre Pratt) : les diagonales sont tendues et les montants comprimés, c'est favorable en cas d'actions prépondérantes verticales Descendantes
(poids propre + neige).



Treillis en Z (poutre Howe) : Pour ce cas de chargement, forces appliquées à la membrure supérieure dues au poids propre + neige, les diagonales
sont comprimées et les montants tendus, c'est défavorable. Par contre c'est favorable si vent au soulèvement est prépondérant.

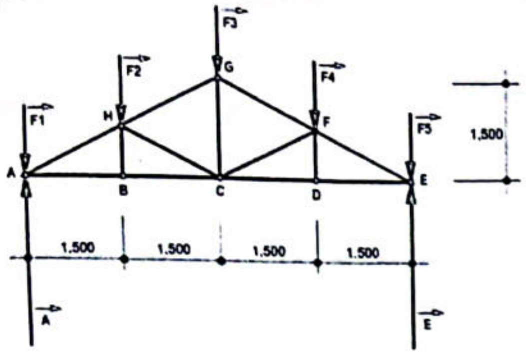


Treillis en K : Ce treillis est intéressant pour des poutres de grande hauteur, pour réduire la longueur des diagonales comprimées et dans le cas d'efforts alternés. Lorsque ce treillis est utilisé comme poutre au vent dans les toitures, les montants verticaux sont des pannes ; lorsque la pente de la toiture est importante, les pannes sont sujettes au déversement et ce système a l'avantage de maintenir efficacement les pannes



Treillis en K symétrique : Ce treillis est intéressant pour des poutres de grande hauteur pour réduire la longueur des diagonales comprimées et dans le cas d'efforts alternés

Application



Données : $\|\vec{F}_i\| = F_i = 10 \quad kN$

Déterminer l'effort normal dans les barres:

- AB
- AH
- BH
- BC
- HC

$b = 13$

$n = 8$

Meca chap4 treillis+p4

$l_i = 13 + 3 - 2.8 = 0$

$\Rightarrow$ iso.s.

AB :

$\vec{F_1} = \vec{F_{AH}} + \vec{F_{AB}}$