Cours de mécanique générale

Polytech Nice Sophia
UCA

Chapitre 1 Lois fondamentale de la mécanique du point et du solide

Rappels de vecteur position, vitesse, accélération
Définition d'un solide
Distribution des vitesses
Composition des mouvements
Eléments cinétiques d'un solide
Forces s'exerçant sur un solide
Dynamique du solide

Chapitre 2 Système de forces

Forces résultantes et couples
Principe fondamental de la statique
Liaisons mécaniques
Réactions d'appuis

Chapitre 3 Propriétés des sections

Barycentre
Moment d'inertie
Rayon de giration
Théorème d'Huygens
Axes principaux d'inertie

Chapitre 4 Treillis

Barres, câbles, poutres
Méthode analytique
Méthode des sections
Méthode des nœuds

Chapitre 5 Câbles

Câbles sous charges
Câbles réels, parabole, chaînette

Chapitre 6 Hydrostatique

Pression
Masse volumique, densité
Statique des fluides
Principe de Pascal,
Principe d'Archimède,
Tension superficielle

BAT 3 – ROBO 3

jlburlet@unice.fr

Définitions des actions mécaniques

Une action mécanique peut être exercée sur un solide *S1* pour le maintenir au repos, le déplacer ou le déformer. On peut par exemple recenser : le pied d'un footballeur qui frappe un ballon, les champs électriques et magnétiques qui dévient l'électron, le rotor qui entraîne l'axe d'une turbine.
Ces actions sont exercées par *S2* sur *S1*.

Définitions On appelle force la grandeur vectorielle décrivant une interaction capable de produire un mouvement ou de créer une déformation. On dit alors que *S2* exerce une action mécanique sur *S*1 si relativement à un référentiel les mouvements (ou déformations) de *S1* par rapport à ce référentiel sont différents selon que *S*2 est présent ou absent.

Ces actions se classent en deux grandes catégories :
Actions à distance : elles sont liées à des champs d'accélération (pesanteur), électromagnétiques ...
Actions de contact : de pression (le pied qui frappe un ballon, le gaz qui maintient le ballon sous Pression).

Ces actions s'exercent soit sur :
Une surface : contact solide solide, action d'un gaz sur un solide,
Un volume : c'est le cas de la gravité.

Elles peuvent être pour le système considéré :
Externes : la gravité agit sur un véhicule (avec tous les éléments internes),
Internes : si on veut comprendre le fonctionnement de certains organes internes (roues par exemple)
on pourra alors faire apparaître non seulement les efforts extérieurs appliqués par le sol sur cette roue mais aussi des efforts exercés par le système de fixation de la roue sur le véhicule.

Cette dernière classification dépend du système que nous allons isoler.

Modélisation des actions mécaniques

Si on considère un solide matériel comme un ensemble de points matériels (c'est à dire de points M auxquels on attache une petite quantité de matière dm) on peut alors écrire que toute action (à distance ou de contact) se résume à un effort représenté par un vecteur. On notera $d\underline{f}(Ext \longrightarrow M(dm))$ cet effort appliqué au point M dont la masse élémentaire est dm.

Définitions **Une force se représente par un vecteur lié (attaché au point *M*).**

Principe On sait que la puissance P, dans le repère R d'un effort $d\underline{f}$ appliqué en un point M dans une vitesse de déplacement de M notée $\underline{V}(M/R)$ se définit comme le produit scalaire : $P\,(d\underline{f}, \underline{V}(M/R) = d\underline{f}\,.\,\underline{V}(M/R)$

Comme le champ des vitesses d'un solide est celui donné par le torseur cinématique {V} on définit le torseur statique (F $(Ext \longrightarrow S)$ des efforts exercés sur un solide S tel que la puissance (par rapport au repère R) de ces efforts dans le champ de vitesse est donné par le comoment des deux torseurs :

$$P = \{\mathcal{V}\}\,.\,\{\mathcal{F}\} = \left\{ \begin{array}{c} \Omega(S/R) \\ \underline{V}(M/R) \end{array} \right\} . \left\{ \begin{array}{c} \underline{F} \\ \underline{M}(M,\, \underline{F}) \end{array} \right\}$$

Résultante : Elle se détermine comme la somme de tous les actions élémentaires $d\underline{f}$.

$$\underline{F}(Ext \to S) \quad = \quad \int_{S} d\underline{f}(Ext \to M) \quad \forall M \in S$$

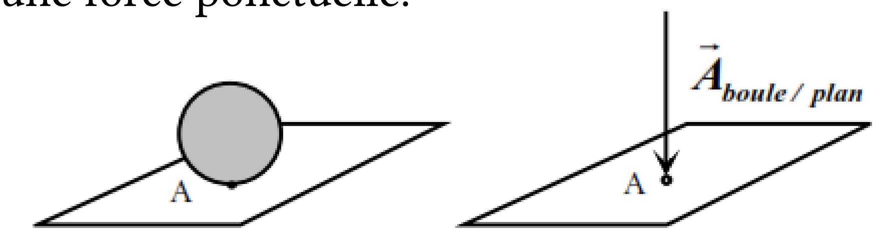
Moment : De la même manière on obtient :

$$\underline{M}(A) \quad = \quad \int_{S} \underline{AM} \wedge d\underline{f}(Ext \to M) \quad \forall M \in S$$

ACTIONS DE CONTACT

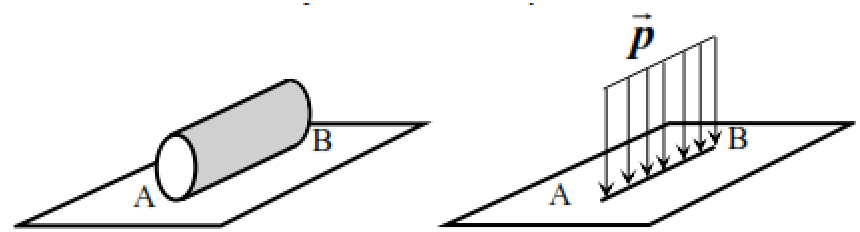
Action ponctuelle

Action appliquée en un point matériel, par exemple une force ponctuelle.
L'unité de force ponctuelle est N (Newton)
Ex.: l'action d'une boule (sphère) sur un plan



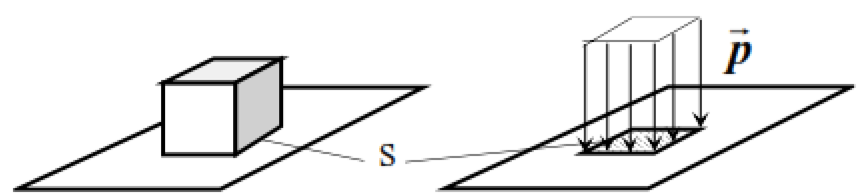
Action linéique

Exemple d’une force linéique, force appliquée sur un ensemble de points matériels formant une ligne droite ou courbe.
L'unité de force linéique est : *N/m*
Ex.: l'action d'un cylindre sur un plan



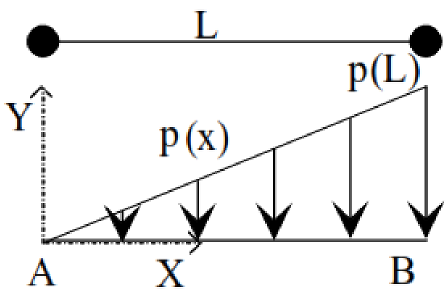
Action surfacique

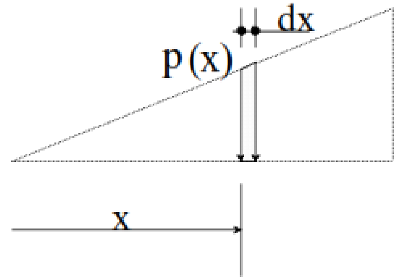
Exemple d’une force surfacique, force appliquée sur un ensemble de points matériels formant une surface.
L'unité de l'action surfacique est : N/m2
Ex.: l'action d'un cube sur un plan



Lorsque la force est toujours perpendiculaire à la surface de contact, on nomme cette force ‘’une pression ’’, celle-ci peut être d’intensité variable (pression de l’eau sur les parois du récipient).

Exemple : détermination du torseur des efforts de p(x) en A



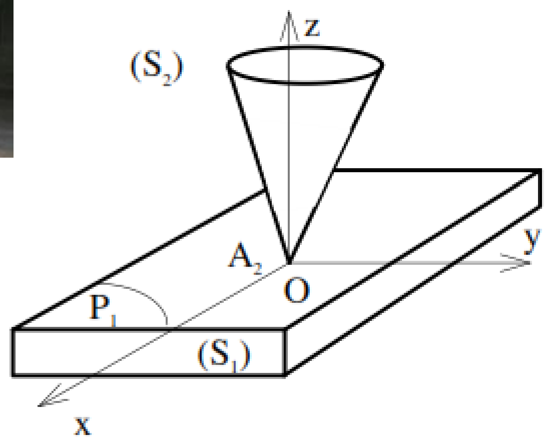


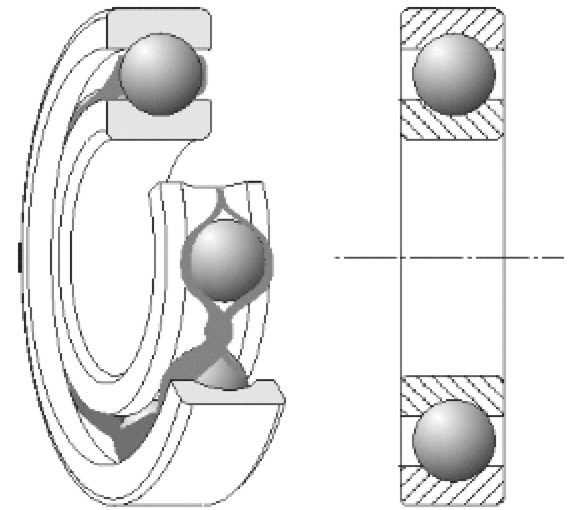
Liaisons mécaniques

Liaison ponctuelle

$$\{\mathcal{T}(S_2 \to S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

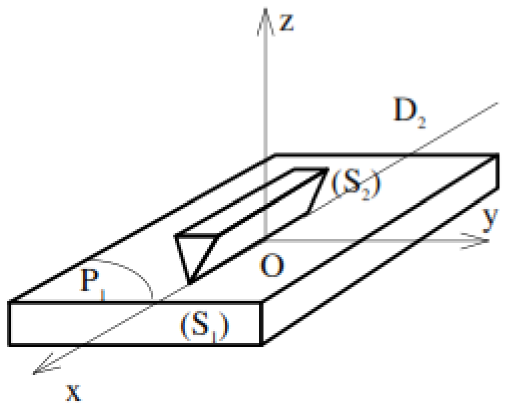
$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ V_x(O \in S_2/S_1) & V_y(O \in S_2/S_1) & 0 \end{Bmatrix}_O$$





Roulement à une rangée de billes

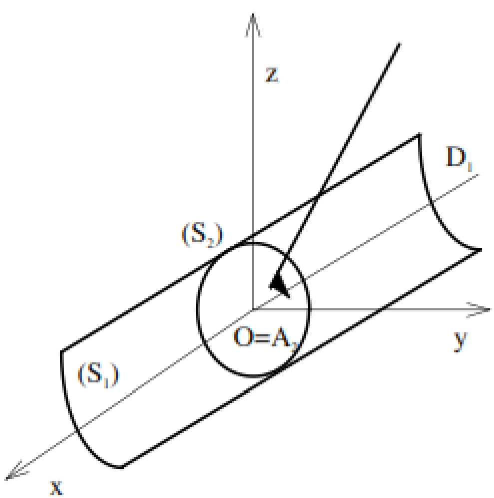
Liaison linéaire rectiligne



$$\{\mathcal{T}(S_2 \to S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & Z \\ 0 & M_y & 0 \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 & \Omega_z \\ V_x & V_y & 0 \end{Bmatrix}_O$$

Liaison linéaire annulaire



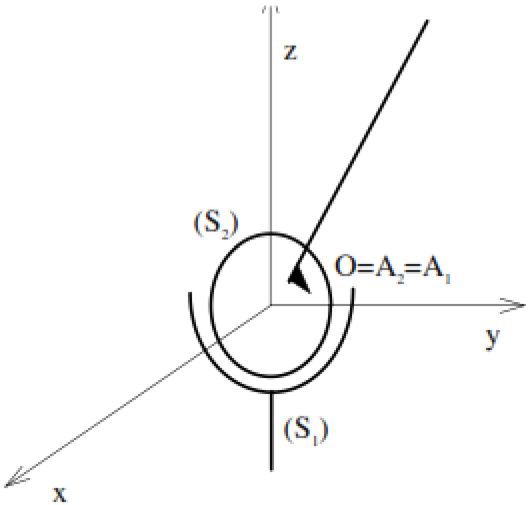
$$\{\mathcal{T}(S_2 \to S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & Y & Z \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ V_x & 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

Liaison rotule

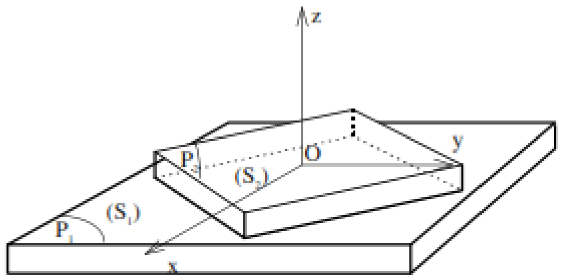
$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} Z & Y & Z \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}_O$$

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}_O$$



Liaison appui plan

$$\{\mathcal{T}(S_2 \to S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & Z \\ M_x & M_y & 0 \end{Bmatrix}_O$$

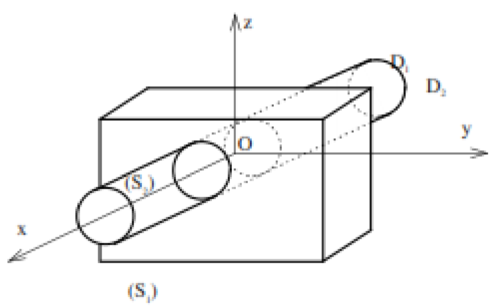


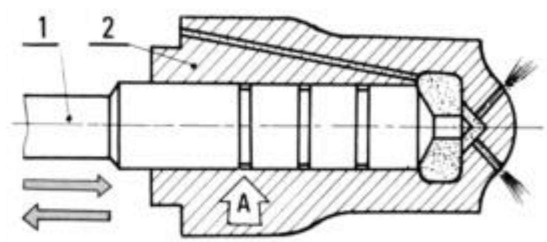
$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \Omega_z \\ V_x & V_y & 0 \end{Bmatrix}_O$$

Liaison pivot glissant

$$\{\mathcal{T}(S_2 \to S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & Y & Z \\ 0 & M_y & M_z \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 & 0 \\ V_x & 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

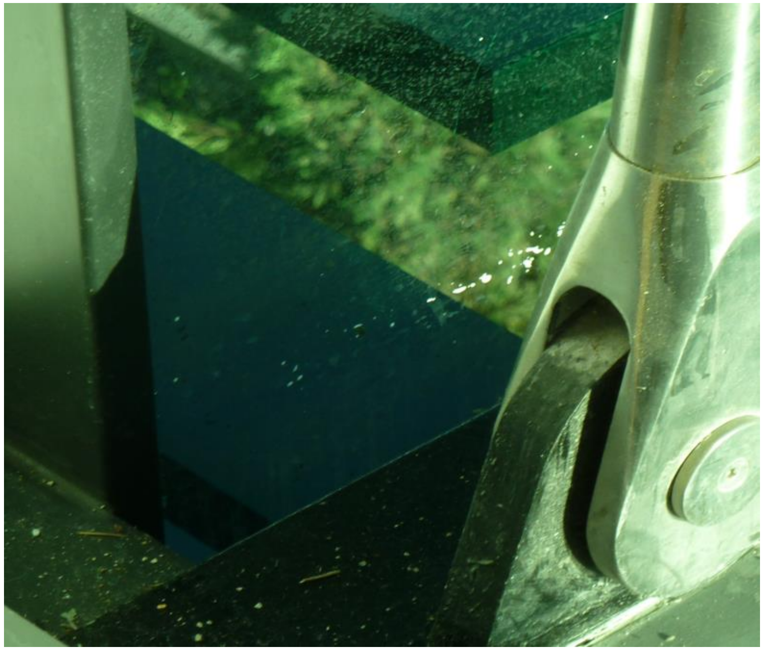


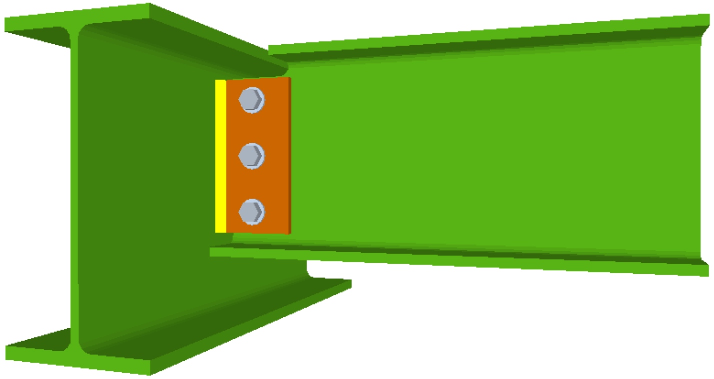


Liaison pivot ou articulation

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} X & Y & Z \\ M_x & M_y & 0 \end{array} \right\}_O$$

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}_O$$

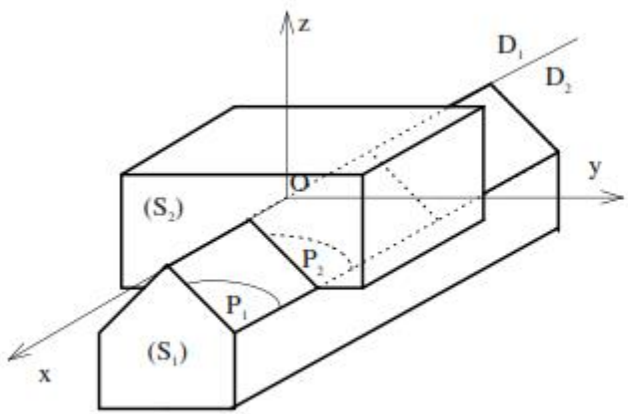


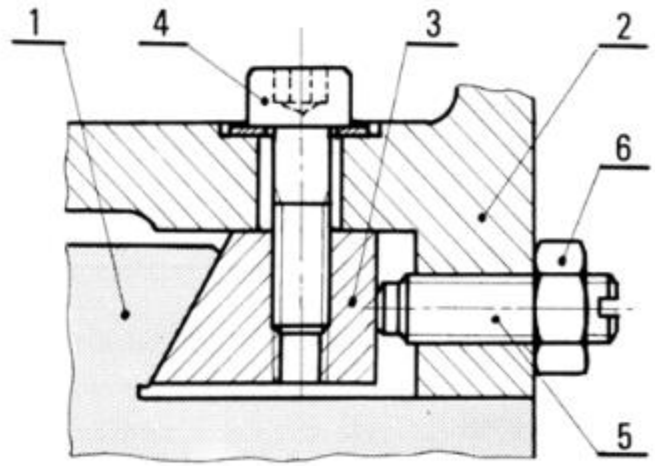


Liaison glissière

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & Y & Z \\ M_x & M_y & M_z \end{Bmatrix}_O$$

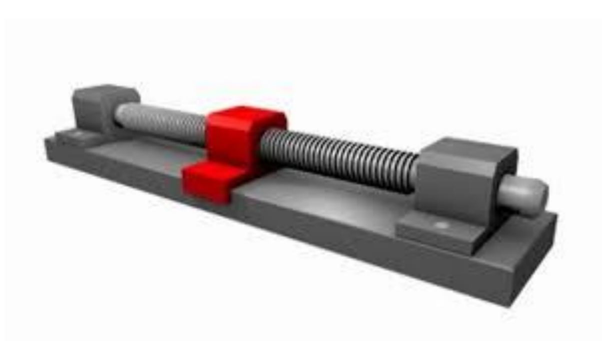
$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ V_x & 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$





Liaison glissière hélicoïdale

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} X & Y & Z \\ M_x & M_y & M_z \end{Bmatrix}_O \qquad M_x = p\,X$$

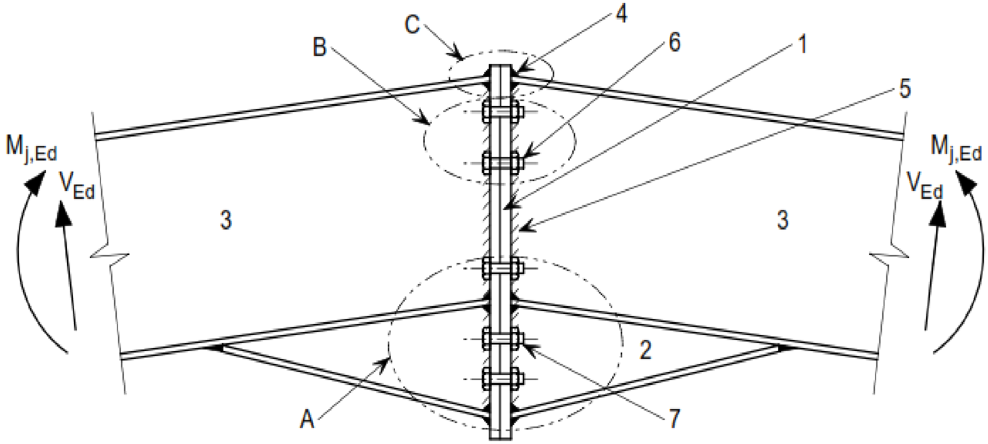


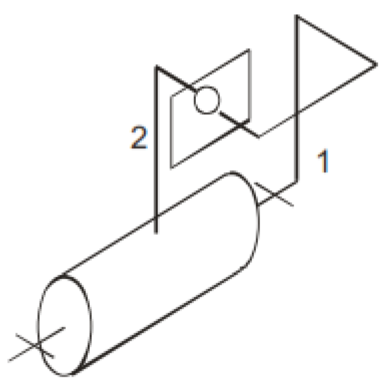
$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 & 0 \\ V_x & 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \qquad V_x = p\,\Omega_x.$$

Liaison encastrement

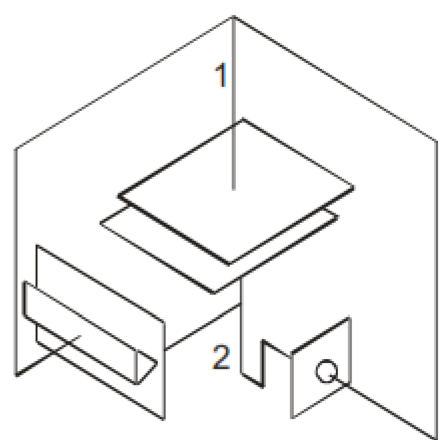
$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} X & Y & Z \\ M_x & M_y & M_z \end{array} \right\}_O$$

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}_O$$

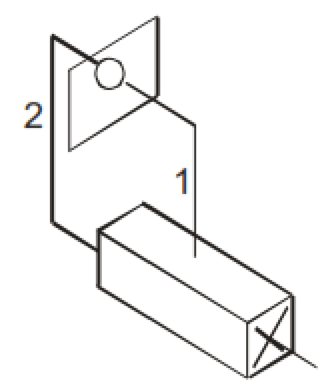


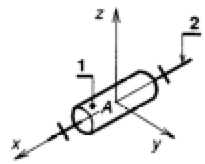
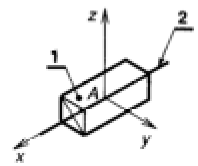
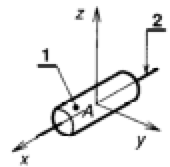
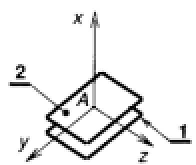
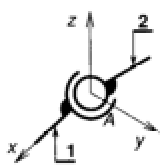
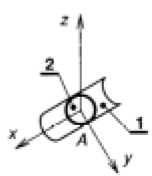
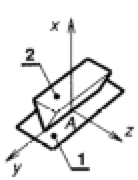


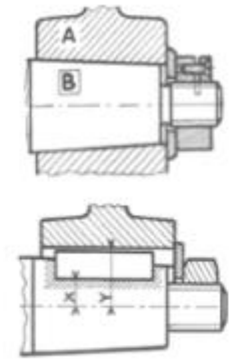
Liaisons pivot et ponctuelle en parallèle

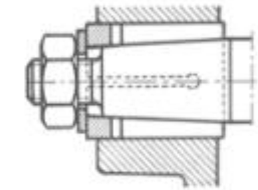


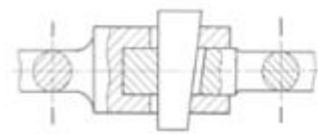
Liaisons appui plan, linéaire rectiligne et ponctuelle en parallèle

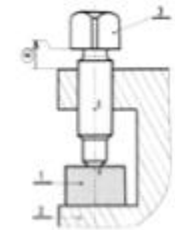


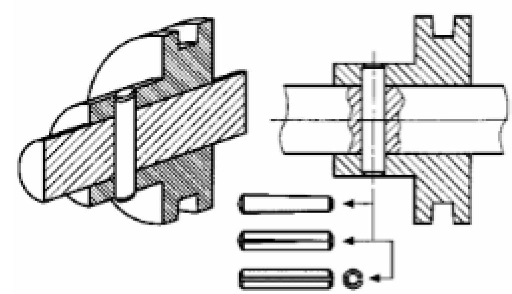
Désignation de la liaison	Schématisation spatiale	Mobilités	Torseur d'action mécanique transmissible
Pivot d'axe $(A, \vec{x})$		$\vec{Tr}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}\quad \vec{Rot}\begin{vmatrix}Rx\\0\\0\end{vmatrix}$	$_A\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\ Y_{12} & M_{12}\\ Z_{12} & N_{12}\end{matrix}\right\}$
Glissière d'axe $(A, \vec{x})$		$\vec{Tr}\begin{vmatrix}Tx\\0\\0\end{vmatrix}\quad \vec{Rot}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$	$_A\left\{\begin{matrix}0 & L_{12}\\ Y_{12} & M_{12}\\ Z_{12} & N_{12}\end{matrix}\right\}$
Pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$		$\vec{Tr}\begin{vmatrix}Tx\\0\\0\end{vmatrix}\quad \vec{Rot}\begin{vmatrix}Rx\\0\\0\end{vmatrix}$	$_A\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{12} & M_{12}\\ Z_{12} & N_{12}\end{matrix}\right\}$
Appui plan de normale $(A, \vec{x})$		$\vec{Tr}\begin{vmatrix}0\\Ty\\Tz\end{vmatrix}\quad \vec{Rot}\begin{vmatrix}Rx\\0\\0\end{vmatrix}$	$_A\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\ 0 & M_{12}\\ 0 & N_{12}\end{matrix}\right\}$
Rotule de centre A		$\vec{Tr}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}\quad \vec{Rot}\begin{vmatrix}Rx\\Ry\\Rz\end{vmatrix}$	$_A\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\ Y_{12} & 0\\ Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}$
Linéaire annulaire d'axe $(A, \vec{x})$		$\vec{Tr}\begin{vmatrix}Tx\\0\\0\end{vmatrix}\quad \vec{Rot}\begin{vmatrix}Rx\\Ry\\Rz\end{vmatrix}$	$_A\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{12} & 0\\ Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}$
Linéaire rectiligne de normale $(A, \vec{x})$ et de contact $(A, \vec{y})$		$\vec{Tr}\begin{vmatrix}0\\Ty\\Tz\end{vmatrix}\quad \vec{Rot}\begin{vmatrix}Rx\\Ry\\0\end{vmatrix}$	$_A\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & N_{12}\end{matrix}\right\}$

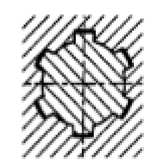


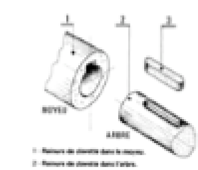


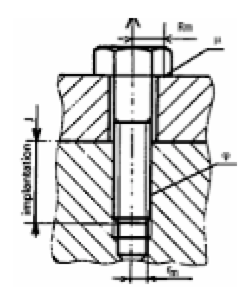












Remarque : Puissance des actions de liaisons

On a constaté que les torseurs cinématique des liaisons et des actions transmissibles sont de la Forme :

$$\{\mathcal{V}(I \in S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \Omega_y & 0 \\ V_x & V_y & 0 \end{array} \right\}_I$$

avec comme torseur statique :

$$\{\mathcal{T}(IS_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & R_z \\ M_x & 0 & M_z \end{array} \right\}_I$$

Les termes nuls et non nuls se correspondent dans les deux torseurs. Si l'on calcule le comoment de ces deux torseurs nous allons retrouver par définition du torseur mécanique la puissance des actions mécaniques de $S2$ sur $S1$ dans son mouvement par rapport à $S1$. Ce comoment est nul. Cette puissance nulle correspond donc à la puissance des actions de liaison. Il est facile de constater que l'hypothèse qui permet d'obtenir ce résultat est celle de contact parfait (sans frottement).

Théorème Dans une liaison parfaite, la puissance des actions de liaisons est nulle.

Statique

C'est l'étude de l'équilibre des ensembles de corps solides dans leur géométrie initiale; c'est-à-dire dans la structure non déformée par rapport à un repère Galiléen.
Le solide sera considéré comme infiniment rigide.

Définition : On dira qu'un solide *S* ou un ensemble de solides *Si* est en équilibre par rapport à un repère *R* si le vecteur position de chaque point (du ou des solides) est indépendant du temps.

Principe fondamental de la statique

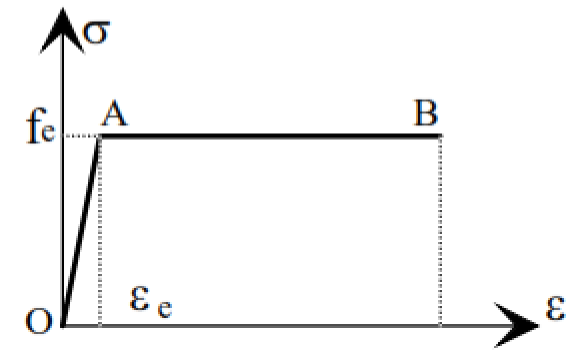
Énoncé. Il existe un repère galiléen tel que pour tout sous système S de l'ensemble de solides *Si* étudié le torseur des actions extérieures appliqué à ce sous système est nul.

$$\{\mathcal{T}(Ext \rightarrow s)\} = \{O\} \quad \forall s$$

Avec {O} le torseur nul.
La notion de repère galiléen dépend de l'objectif visé. Une étude d'un mécanisme sur terre se fait avec un repère local attaché à la terre, repère supposé galiléen. Par contre envoyer une fusée sur la lune exige de considérer comme galiléen un autre repère.
De l'équation précédente on en déduit les deux équations :

$$\begin{aligned} \underline{R}(Ext \rightarrow s) &= \underline{0} \\ \underline{M}(A, Ext \rightarrow s) &= \underline{0} \quad \forall A \end{aligned}$$

Principe de superposition

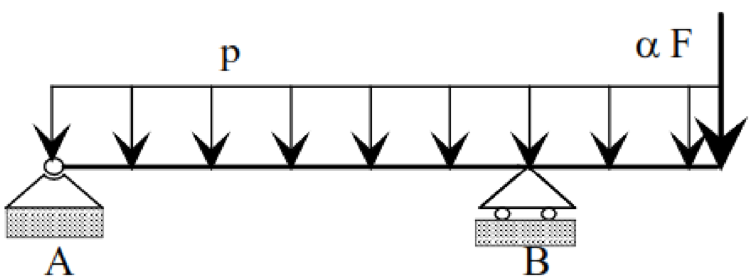


Domaine de validité

Le matériau est linéairement élastique, si les contraintes sont proportionnelles aux déformations.

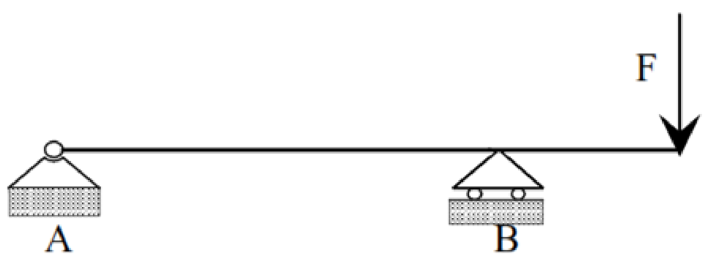
Formulation

Les actions de liaison dues à l'application de plusieurs forces sont égales à la somme vectorielle des actions de liaison dues à chacune des forces agissant isolément.



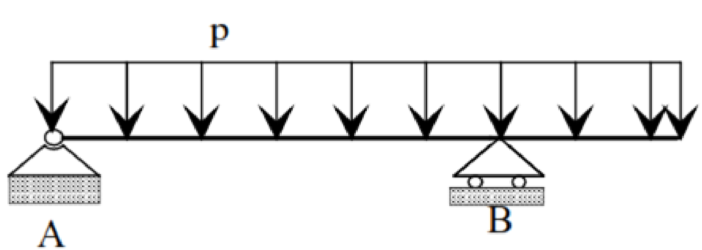
$$S(p, \alpha F) = S(p) + \alpha . S(F)$$

$$=$$



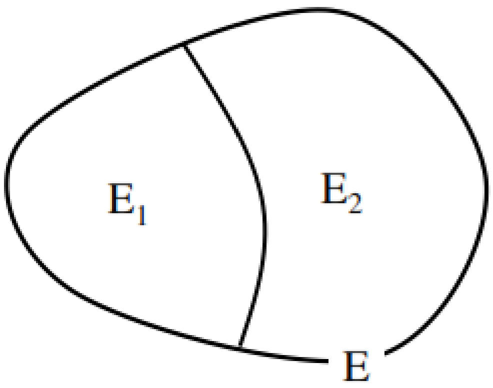
$$\alpha . S(F)$$

$$+$$



$$S(p)$$

Théorème des actions réciproques



$$\{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} = -\{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\}$$

Le torseur des actions mécaniques exercées par *E*1 sur *E2* est opposé à celui des actions exercées par *E2* sur *E*1.

Analyse des mécanismes

Nous allons nous intéresser à des systèmes de solides en liaison les uns avec les autres par des liaisons sans frottement (liaisons parfaites), les solides sont indéformables.

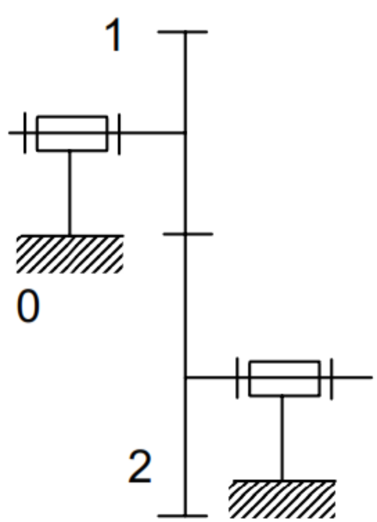
Le PFS s'applique donc à chaque solide du mécanisme étudié.

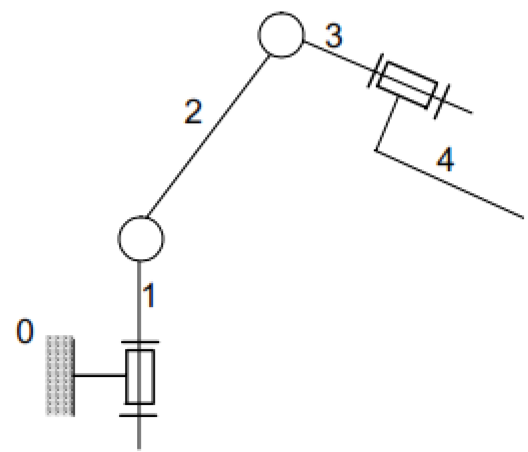
L'objectif est à la fois d'étudier la cinématique d'un mécanisme (relation entrée sortie) et les actions mécaniques entre les solides du système étudié.

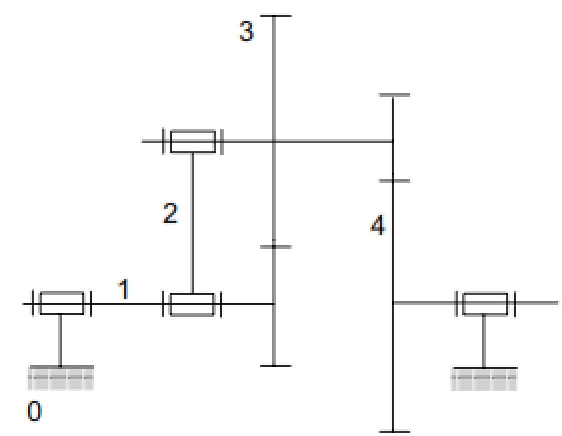
Chaque solide étant en contact avec un ou plusieurs autres, on retrouvera une des liaisons élémentaires pour chaque liaison entre deux solides. On pourra donc tracer le graphe des liaisons.

Il existe trois possibilités :

Graphe fermé
Graphe ouvert
Graphe complexe

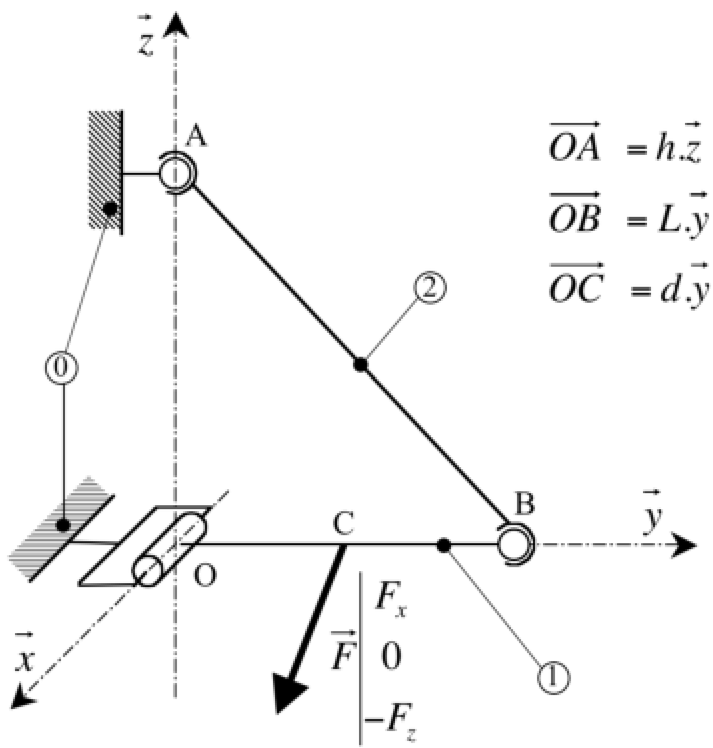




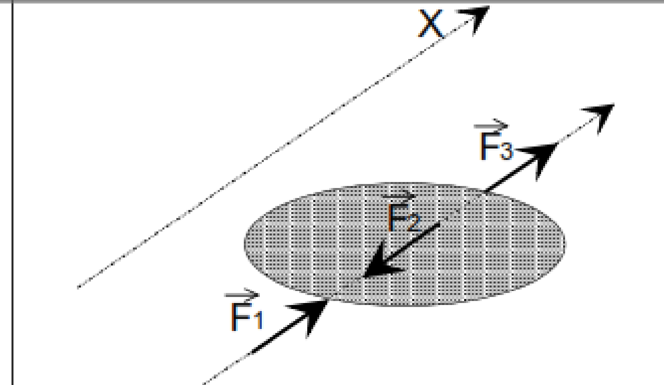
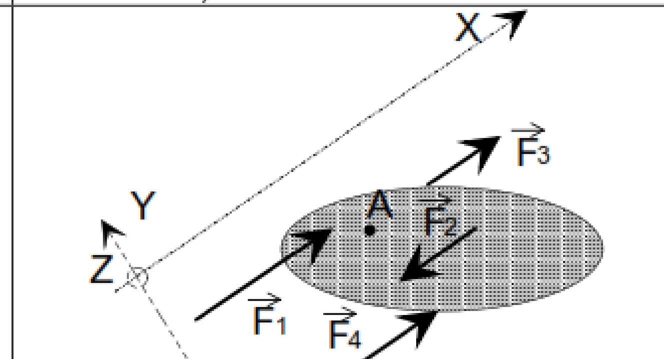
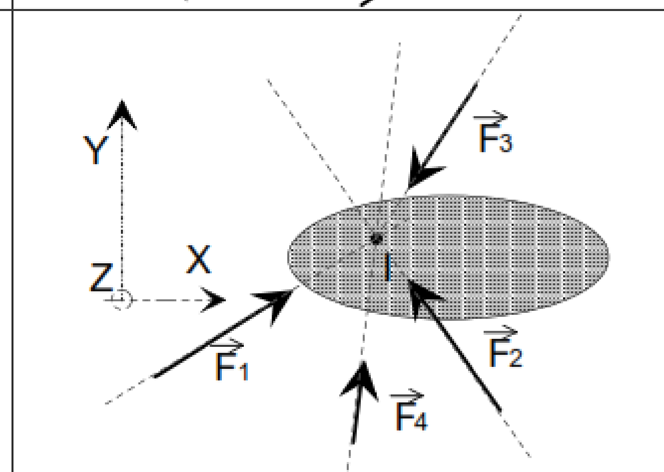
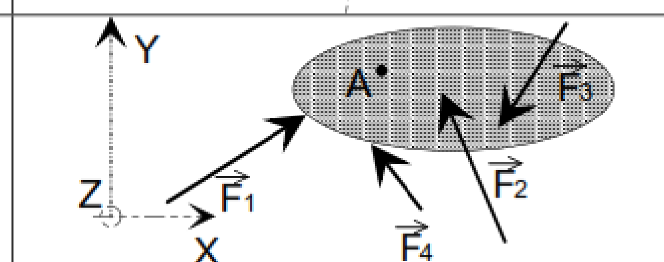


Exemple

Nous allons étudier un portique, constitué d'un mur noté 0, d'une barre métallique notée 2 en liaison rotule avec le mur en A et une autre tige métallique en B, d'une barre de forte section 1 en articulation pivot avec le mur en O. Les vecteurs $\underline{OA}$, $\underline{OB}$ et $\underline{OC}$ valent respectivement $h\,\underline{z}$, $L\,\underline{y}$ et $d\,\underline{y}$. Toutes les liaisons sont supposées parfaites. Le tirant 2 étant une barre de section faible, nous négligerons l'action de la gravité sur cette barre devant les efforts mis en jeu. L'objectif est de calculer les actions mécaniques en O, A et B en fonction des différents paramètres d, h *et* $\underline{F}$ qui représente l'effort extérieur appliqué au système.



Cas des problèmes plans

Principaux cas d'équilibre	Solide isolé	Equations indépendantes	Nombre d'inconnues déterminables
Forces colinéaires		$X(S)=0$	1
Forces parallèles		$X(S)=0$ $M_A(S)=0$	2
Forces concourantes (même point)		$X(S)=0$ $Y(S)=0$	2
Cas général		$X(S)=0$ $Y(S)=0$ $M_A(S)=0$	3

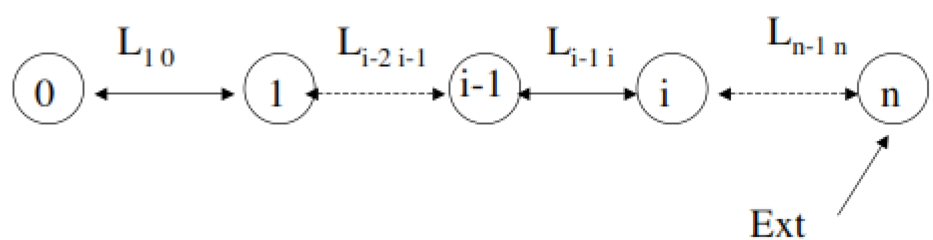
Mobilité – hyperstatisme

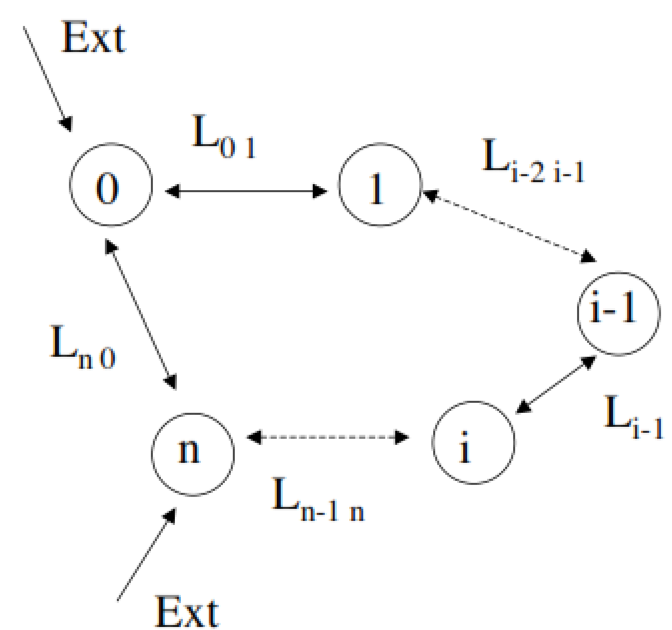
Définition
Le degré de mobilité d'une liaison correspond au nombre de paramètres indépendants du torseur cinématique tout comme celui d'un mécanisme.

Définition
On dit qu'un système est **hyperstatique** si le nombre des inconnues statiques est supérieur au nombre d'équations indépendantes obtenues en isolant les différents solides du système.

Dans le cas d'un nombre d'inconnues statiques égal au nombre d'équations indépendantes le système est **isostatique**.

Pour une chaîne ouverte, on peut montrer que le système est toujours isostatique ; tandis que pour une chaîne fermée il sera hyperstatique.



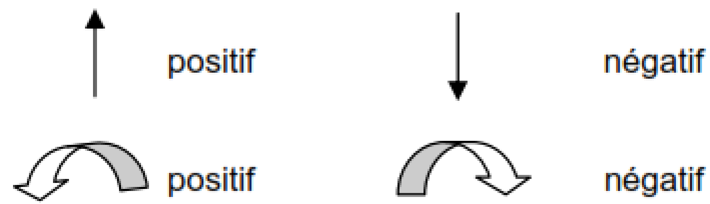


Réactions d'appuis

Conventions de signes

Pour le calcul des réactions, on choisira le repère suivant :

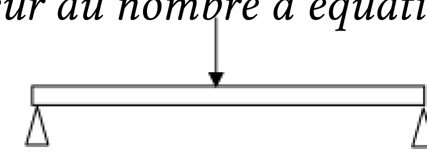
- Pour les forces et réactions :
- Pour les moments et couples



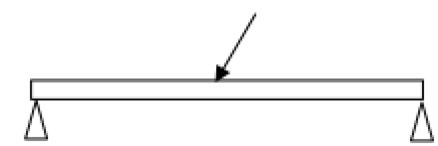
Calcul des réactions d’appui

Tout problème de Résistance des Matériaux commence obligatoirement par la détermination des réactions d’appui. Il est donc indispensable de bien maîtriser ce calcul.
Plusieurs cas peuvent se produire :

1. Le nombre des paramètres inconnus est inférieur au nombre d’équations

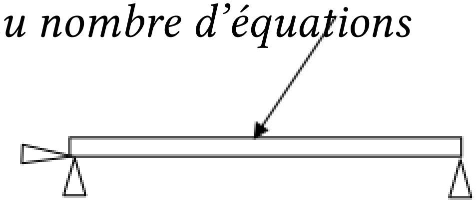


Cas A

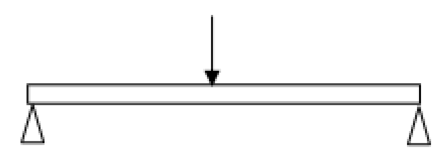


Cas B

2. Le nombre des paramètres inconnus est égal au nombre d’équations

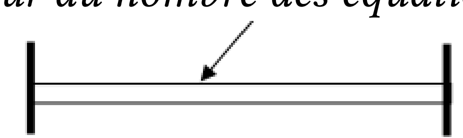


3 équations à 3 inconnus



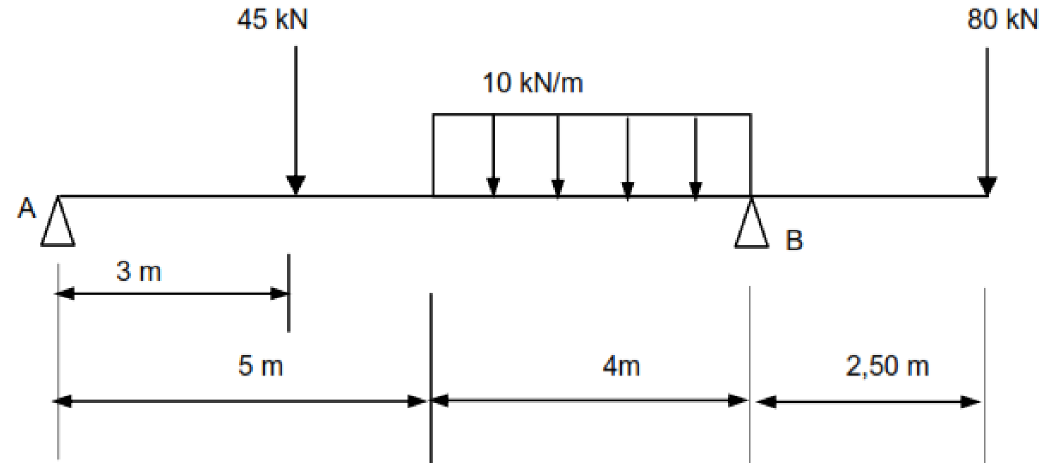
2 équations à 2 inconnus

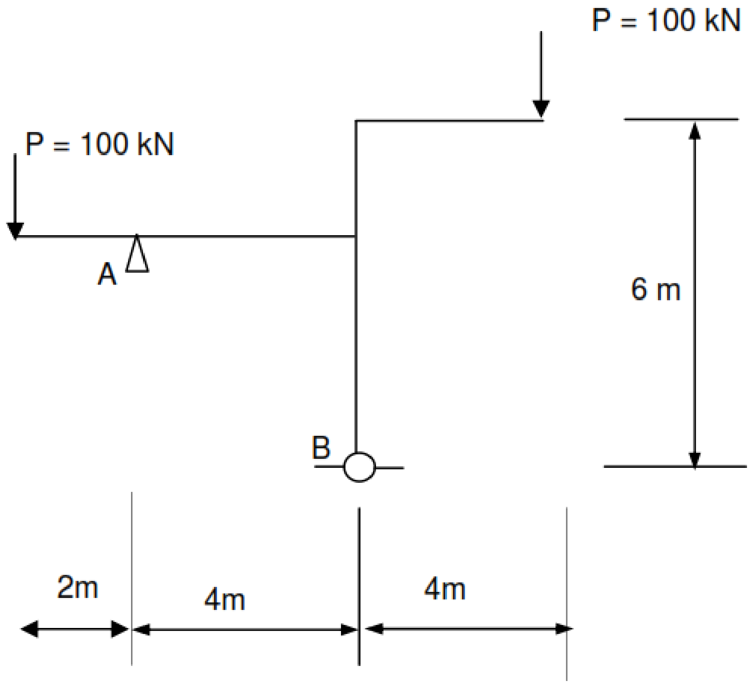
3. Le nombre des paramètres inconnus est supérieur au nombre des équations

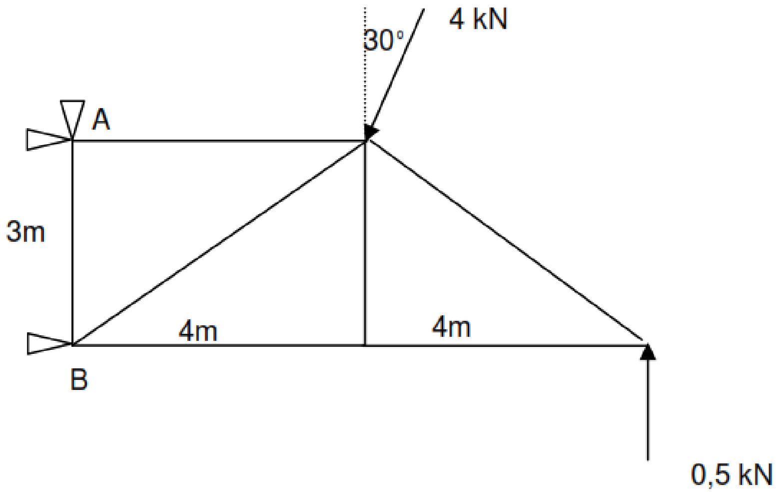


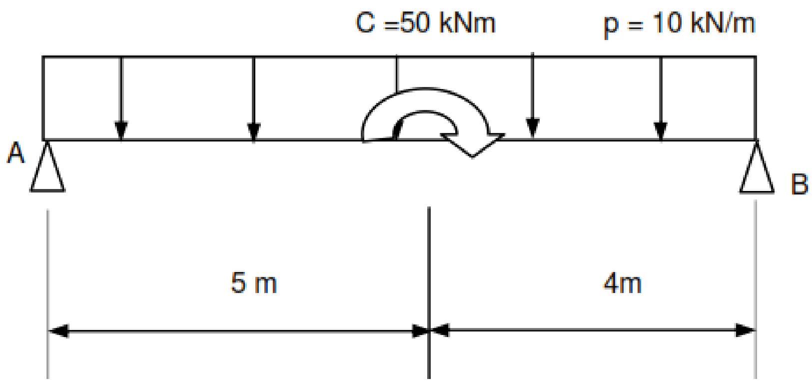
Exemples

Déterminer les réactions en A et B




P = 100 kN
P = 100 kN
A
B
6 m
2m
4m
4m


4 kN
30°
A
3m
4m
4m
B
0,5 kN


C =50 kNm
p = 10 kN/m
A
B
5 m
4m

Déterminer les réactions en A, B, C, D, I12 et I23