Cours de mécanique générale

Polytech Nice Sophia
UCA

Chapitre 1 Lois fondamentale de la mécanique du point et du solide

Rappels de vecteur position, vitesse, accélération
Définition d'un solide
Distribution des vitesses
Composition des mouvements
Eléments cinétiques d'un solide
Forces s'exerçant sur un solide
Dynamique du solide

Chapitre 2 Système de forces

Forces résultantes et couples
Principe fondamental de la statique
Liaisons mécaniques
Réactions d'appuis

Chapitre 3 Propriétés des sections

Barycentre
Moment d'inertie
Rayon de giration
Théorème d'Huygens
Axes principaux d'inertie

Chapitre 4 Treillis

Barres, câbles, poutres
Méthode analytique
Méthode des sections
Méthode des nœuds

Chapitre 5 Câbles

Câbles sous charges
Câbles réels, parabole, chainette

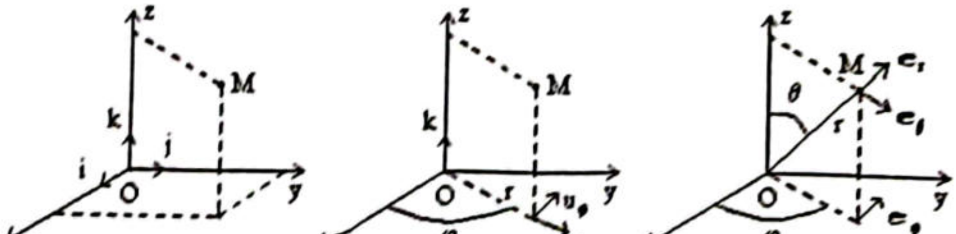
Chapitre 6 Hydrostatique

Pression
Masse volumique, densité
Statique des fluides
Principe de Pascal,
Principe d'Archimède,
Tension superficielle

BAT 3 – ROBO 3 jlburlet@unice.fr

Chapitre I : Lois fondamentales de mécanique du point et de mécanique du solide

Les différents repères



Coordonnées cartésiennes — Coordonnées cylindriques — Coordonnées sphériques

Coordonées cartesienne :

$\vec{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

$\vec{v_M} = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}.k$

$\vec{OM} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}.\vec{j} + \ddot{z}.k$

Coordonées cylindrique :

$\vec{OM} = r.\vec{u_r} + + z.\ \vec{k}$

$\vec{v_M} = \dot{r}\ \vec{u_r} + r\dot{\varphi}\ u_\varphi + \dot{z}\ \vec{k}$

$\vec{a_M} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\ (r^2\dot{\varphi})\vec{u_\varphi} + \ddot{z}\ \vec{k}$

Coordonnées spherique :

$\vec{OM} = r.\vec{e_r}$

$\vec{V_M} = \dot{r}.\vec{e_r} + r\dot{\theta}.\vec{e_\theta} + r.\sin\theta.\dot{\varphi}.\vec{e_\varphi}$

1. Définition d'un solide. Degrés de liberté

Un solide est un corps dont les différents points restent à des distances constantes les uns des autres au cours du mouvement.

Un solide pouvant se mouvoir librement a sa position déterminée par la donnée de six paramètres : la position d'un point (trois coordonnées) et trois angles qui, dans le cas général, sont les angles d'Euler et, plus souvent, des angles adaptés au solide (par exemple pour un bateau, des angles correspondant au changement de cap, au tangage et au roulis).

On dit que, dans le cas le plus général de mouvement, le solide possède six degrés de liberté.

Des liaisons peuvent réduire les mouvements possibles et, en conséquence, diminuer le nombre de degrés de liberté ; ainsi un solide en rotation autour d'un axe fixe a un degré de liberté.

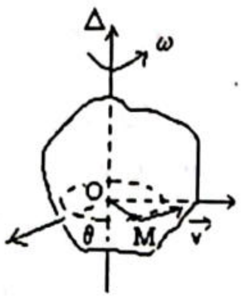
2. Distribution des vitesses dans un solide

2.1. Mouvements particuliers

Translation : à chaque instant, tous les points d'un solide ont même vitesse.

$\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_B}$ quelques soient A et B appartenant au solide.

Rotation autour d'un axe fixe Δ :



l'intensité de la vitesse du point $M \in$ Solide, situé à une distance $r = OM$ de l'axe de rotation est égale à $v_M = \omega r = r\dot{\theta}$.
Sa direction est dans le plan ⊥ à l'axe de rotation, tangentielle au cercle de rayon OM.
En introduisant le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{k}$ où $\vec{k}$ est le vecteur unitaire de l'axe de rotation, on peut écrire $\vec{v_M} = \vec{MO} \wedge \vec{\Omega} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$
Dans cette rotation le point O est qlcq sur Δ

2.2. Mouvement général d'un solide

Soient deux points A et B quelconques d'un solide.

$$(\vec{AB})^2 = cst$$

$$2.\vec{AB}.\frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$$

$$\vec{AB}.\frac{d(\vec{OA}+\vec{OB})}{dt} = 0$$

$$\vec{AB}.(\vec{V_A} - \vec{V_B}) = 0$$

$$\vec{AB}.\vec{V_A} = \vec{AB}.\vec{V_B}$$

Remarques sur la distribution des vitesses dans un solide

- à chaque instant la vitesse $\vec{v_A}$ d'un point quelconque et le vecteur rotation $\vec{\Omega}$, soient six composantes, définissent parfaitement le champ de vitesses dans le solide
- soient deux points I et J de l'axe instantané de rotation à un instant donné, c'est à dire de l'axe support de $\vec{\Omega}$, l'écriture du champ de vitesse pour ces deux points donne $\vec{v_J} = \vec{v_I} + \overrightarrow{JI} \wedge \vec{\Omega} = \vec{v_I}$

Les points de l'axe instantané de rotation sont en translation.

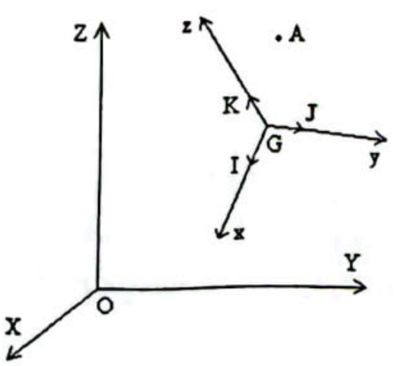
Le mouvement général, à un instant donné, d'un solide est la superposition d'une translation suivant l'axe instantané de rotation et d'une rotation autour de cet axe.

Le champ de vitesses dans un solide est un champ de moments dont le vecteur résultant est le vecteur rotation $\vec{\Omega}$. A chaque instant, le mouvement dans un solide se décompose en un mouvement de translation de direction le vecteur rotation et en une rotation autour de cette direction.

cette relation est caractéristique d'un torseur (ensemble d'un champ de moments et d'un vecteur résultant), le champ de vecteur est donné par $\vec{V_B} = \vec{V_A} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}$

3. Composition des mouvements

En Mécanique du solide, la composition des mouvements prend une importance particulière, le référentiel relatif a pour origine un point particulier G que nous définirons comme étant le **centre de masse** et les axes $Gxyz$ respecteront les éventuelles symétries du solide.



le mouvement de tout point A du solide peut être analysé dans le référentiel galiléen R_{OA} (Mouvement Absolu) d'origine O ou dans le référentiel R_{Rel} (Mouvement Relatif) d'origine G.

Le Rôle des référentiels est interchangeable en cinématique Mais pas en dynamique: on choisit R_{Gal}.

Un point A', coïncidant au temps t avec le point A, fixe dans R_{Rel} a un mouvement, appelé Mvt d'entraînement, dans R_{Gal}.

Scanné avec CamScanner

$$\vec{OA} = \vec{OG} + \vec{GA} = \vec{OG} + x.\vec{i} + y.\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{OA}}{dt} = \vec{v_A}(A) = \underbrace{\frac{d\vec{OG}}{dt} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}}_{\text{vitesse d'entrainement}} + \underbrace{\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}}_{\text{vitesse relative.}}$$

$$\frac{d^2\vec{OA}}{dt} = \vec{a_a}(A).$$

$$= \underbrace{\frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y.\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}}_{\text{acc d'entrainement}} + \underbrace{\ddot{x}.\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}.\vec{k}}_{\text{acc relative}} + \cdots$$

$$\cdots \underbrace{2\left(\dot{x}\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{k}}{dt}\right)}_{\text{acc de Coriolis}}$$

L'accélération absolue est la somme de l'accélération d'entraînement, de l'accélération relative et d'un terme appelé **accélération de Coriolis**, résultat d'un couplage entre le mouvement d'entraînement et le mouvement relatif. $\vec{a_a}(A) = \vec{a_e}(A) + \vec{a_r}(A) + \vec{a_c}(A)$

Interprétation du terme de Coriolis en termes de champ de vitesses dans un solide

Si nous remarquons que dans le référentiel R_{rel}, les points O, I, J, K sont à distances constantes et peuvent être considérés comme des points d'un même solide, alors on peut écrire :

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\Omega_e} \wedge \vec{i} \; ; \; \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\Omega_e} \wedge \vec{j} \; ; \; \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\Omega_e} \wedge \vec{k}$$

et $\vec{a_c} = 2\,\vec{\Omega_e} \wedge \vec{v_r}$ avec $\vec{\Omega_e}$ represente le vecteur rotation du mouvement d'entrainement (c à d de R_{rel} / R_{abs})

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{R_{abs}} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) + \vec{\Omega_e} \wedge \vec{v}$$

<u>operation de derivation</u> soit un vecteur qlcq $\vec{v} = v_x.\vec{i} + v_y.\vec{j} + v_z.\vec{k}$

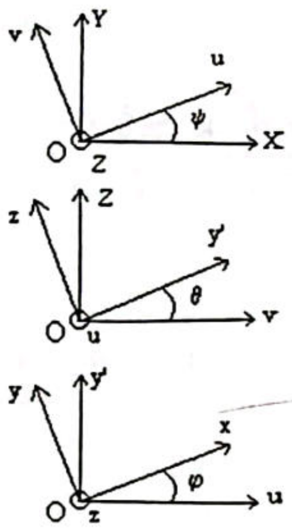
<u>operation des vitesses angulaires</u>

$$\vec{v_e}(B) = \vec{v_e}(A) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega_e}$$
$$\vec{v_r}(B) = \vec{v_r}(A) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega_r}$$
$$\vec{v_a}(B) = \vec{v_a}(A) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega_a}$$
$$\vec{v_a}(B) = \vec{v_e}(B) + \vec{v_r}(B) = \vec{v_e}(A) + \vec{v_r}(A) + \vec{BA} \wedge (\vec{\Omega_e} + \vec{\Omega_r})$$
$$\vec{v_a}(B) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega_a} = \vec{v_a}(A) + \vec{BA} \wedge (\vec{\Omega_e} + \vec{\Omega_r})$$
$$\Rightarrow \vec{\Omega_a} = \vec{\Omega_e} + \vec{\Omega_r}$$

On peut décomposer un mouvement de rotation en rotation autour d'axes connus.

Les angles d'Euler

Ils permettent la " transformation " du référentiel $OXYZ$ en référentiel $Oxyz$, parallèle à $Gxyz$.



Les angles ψ, θ, φ sont les 3 angles d'Euler.
Ils portent des noms liées à leurs applications en astronomie.

ψ précession ; θ nutation ; φ rotation propre

$\vec{\Omega}_e$ s'écrit alors dans la base de R_{rel} :

$\vec{\Omega}_e = \dot{\psi}\vec{Z} + \dot{\theta}\vec{v} + \dot{\varphi}\vec{z}$

$\vec{\Omega}_e = p\cdot\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$

$p = \dot{\psi}\cos(\theta) + \dot{\theta}\cos\varphi$

$q = \dot{\psi}\cdot\sin(\theta) - \dot{\theta}\sin(\varphi)$

$r = \dot{\varphi}$

$\vec{j} = \cos(\theta)\vec{x} + \sin(\theta)\vec{y}$

$\vec{v} = \cos(\varphi)\cdot\vec{x} - \sin(\varphi)\vec{y}$

4. Eléments cinétiques d'un solide

Un solide peut être constitué par une distribution discrète de masses ponctuelles ou par une distribution continue de masses. Dans ce dernier cas, on définit la masse volumique $\mu = \dfrac{dm}{dV}$

où dm est la masse contenue dans le volume élémentaire dV.

4.1. Masse. Centre de masse

La masse du solide M est définie par

$M = \sum_i m_i = \iiint_{solide} dm$

le centre de masse ou centre d'inertie :

$M\vec{CG} = \sum m_i \vec{CA_i} = \iiint_{solide} \vec{CA}\, dm$ avec C point qlcq

4.2. Torseur cinétique

Résultante cinétique :

$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v_i}$ en $\iiint_{solide} \vec{v}\, dm$ quantité de mouvement

$\vec{P} = \dfrac{d}{dt}(\sum m_i \vec{OA_i}) = M\dfrac{d\vec{OG}}{dt} = M\vec{v}(G)$

La resultante cinétique est egale à la quantité de mvt qu'aurait le centre de masse affecté de toute la masse.

Moment cinétique :

$\vec{\sigma_C} = \sum_i \vec{CA_i} \wedge m_i \vec{v_i} = \iiint_{solide} \vec{CA} \wedge \vec{v}\, dm$

$\vec{\sigma_D} = \vec{\sigma_C} + \vec{DC} \wedge \vec{P}$

Moment cinétique par rapport à un axe Δ

$\vec{u}$ = vecteur unitaire de Δ

E un point de l'axe.

$\sigma_\Delta = \vec{\sigma_E} \cdot \vec{u}$ independant du point E

D'où $\vec{\sigma_E} \cdot \vec{u} = \vec{\sigma_P} \cdot \vec{u}$ ou $F \in \Delta$

4.3. Torseur dynamique

Résultante dynamique :

$$\vec{S} = \sum_i m_i \vec{a_i} = \iiint_{solide} \vec{a}\, dm$$

$$\vec{S} = \sum m_i \vec{a_i} = M \frac{d^2 \vec{OC}}{dt^2} = \boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{S}}$$

Moment dynamique :

$$\vec{K_C} = \sum_i \vec{CA_i} \wedge m_i \vec{a_i} \text{ ou } \iiint_{solide} \vec{CA} \wedge \vec{a}\, dm$$

Relation de transfert $\vec{K_O} = \vec{K_C} + \vec{OC} \wedge \vec{S}$

4.4. Torseur dynamique et torseur cinétique

$$\frac{d\vec{\sigma_C}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{CA_i} \wedge m_i \vec{v_i}\right) = \sum_i (\vec{v_i} - \vec{v_C}) \wedge m_i \vec{v_i} + \sum_i \vec{CA_i} \wedge m_i \vec{a_i}$$

$$\frac{d\vec{\sigma_C}}{dt} = -\vec{v_C} \wedge M \vec{v}(G) + \vec{K_C} \quad \| \quad \frac{d\vec{\sigma_C}}{dt} = \vec{K_C} \text{ si } \| \text{ C fixe } \vec{v}(C) = \vec{0}$$

$\vec{a_i} = \frac{d\vec{v_i}}{dt}$..

$\vec{v}(C) \parallel \vec{v}(G)$

ou $C = G$

4.5. Energie cinétique

$$E_C = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \text{ ou } \iiint_{solide} \frac{1}{2} v^2\, dm$$

4.6. Théorèmes de Koenig

4.6.1 Référentiel barycentrique

4.6.2. Premier théorème de Koenig

4.6.3. Deuxième théorème de Koenig

4.7. Cas particulier du solide en mouvement autour d'un axe fixe Δ

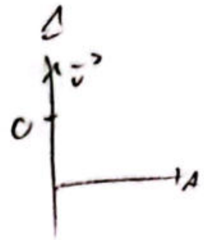
4.7.1. Moment cinétique par rapport à l'axe Δ

Soit $\vec{u}$ vecteur unitaire de l'axe Δ,

O un point de l'axe, A un point qlcq du solide

$\vec{V}(A) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OA}$

$= \omega (\vec{u} \wedge \vec{OA})$ $\quad r = |\vec{u} \wedge \vec{OA}|$



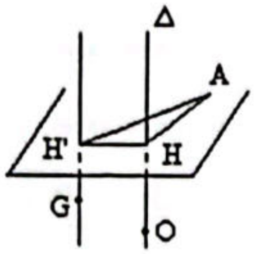
$\sigma_\Delta = \vec{u} \cdot \iiint_{solide} (\vec{OA} \wedge \vec{v})\, dm$

$\sigma_\Delta = \iiint_{solide} (\vec{u} \wedge \vec{OA}) \cdot \vec{v}\, dm$

$\sigma_\Delta = \omega \iiint_{solide} r^2\, dm$ $\quad \sigma_\Delta = \omega J_\Delta$

$J_\Delta = \iiint_{solide} r^2\, dm$ Moment d'inertie du solide /Δ.

4.7.2. Théorème d'Huygens



Par le centre de masse G, on trace un axe // à Δ

H et H' points d'orientation des 2 axes avec un plan ⊥ à les axes passant par A.

$J_\Delta = \iiint_{solide} HA^2\, dm$

$(\vec{HA})^2 = (\vec{HH'})^2 + (\vec{H'A})^2 + 2\, \vec{HH'} \cdot \vec{H'A})$

on passe par G et $\iiint_{solide} \vec{GA}\, dm = 0$

$J_\Delta = d^2 \times M + J_{\Delta'} + 0$

$J_\Delta = J_{\Delta'} + md^2$

4.7.3. Moment dynamique par rapport à l'axe Δ

$\vec{u} \in \Delta$

$K_\Delta = \vec{K_0} \cdot \vec{u}$

$\vec{K_0} = \dfrac{d\vec{\sigma_0}}{dt}$

$K_\Delta = \dfrac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{\sigma_0}) = \dfrac{d}{dt}(J_\Delta \cdot \omega) = J_\Delta \cdot \dot{\omega}$

4.7.4. Energie cinétique

$$E_c = \iiint_{solide} \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \omega^2 \iiint r^2 \, dm = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$$

4.8. Solide en rotation autour d'un point fixe O (ou mouvement du solide dans le référentiel barycentrique, G = O). Opérateur d'inertie.

4.8.1. Moment cinétique par rapport à O

$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OA}$ $\qquad \vec{OA} = \vec{r}$

Moment cinétique $\vec{\sigma_0} = \iiint_{solide} \vec{r} \wedge \vec{v} \, dm$

$$\vec{\sigma_0} = \iiint_{solide} \vec{r} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \, dm$$

$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$

$\vec{\Omega} = \omega_x \cdot \vec{i} + \omega_y \cdot \vec{j} + \omega_z \cdot \vec{k}$

$$\vec{r} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} = \begin{pmatrix} y(y\omega_x - x\omega_y) - z(x\omega_z - z\omega_x) \\ z(z\omega_y - y\omega_z) - x(y\omega_x - x\omega_y) \\ x(x\omega_z - z\omega_x) - y(z\omega_y - y\omega_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma_0} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} (\vec{\Omega}) = [I_0] \cdot \vec{\Omega}$$

↳ Tenseur d'inertie

$I_{xx} = \iiint_{solide} (y^2+z^2) \, dm$

Scanné avec CamScanner

4.8.2. Tenseur d'inertie

La matrice $[I_O]$ fait correspondre à tout vecteur $\vec{\Omega}$ un vecteur $\vec{\sigma}$ et ceci indépendamment du repère choisi. Cette matrice possède un caractère géométrique intrinsèque qui implique des propriétés bien particulières de transformation de ses coefficients (symétriques par rapport à la diagonale) vis à vis d'un changement de repère.
C'est pourquoi, on donne à $[I_O]$ le nom de tenseur d'inertie. Il est appelé tenseur central d'inertie si le point O coïncide avec le centre de masse G.

Nous pouvons appliquer les propriétés du calcul matriciel, en particulier la diagonalisation dans les directions propres de la matrice appelées, par définition, axes principaux du solide.
Le tenseur est alors appelé tenseur principal d'inertie et tenseur central principal d'inertie si le point O coïncide avec le centre de masse G.

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

Dans un certain nombre de problèmes simples, les axes principaux sont facilement repérables par l'étude des symétries du solide.

<u>Exemples</u>

Tenseur central principal pour un cylindre homogène de masse m, de rayon R, de hauteur h, d'axe de révolution autour de l'axe Gz.

$$A = B = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) \qquad C = \frac{1}{2}mR^2$$

Tenseur principal pour un cône homogène de masse m, de rayon à la base R, de hauteur h, de sommet O, de révolution autour de l'axe Oz.

$$A = B = m\left(\frac{3R^2}{20} + \frac{3h^2}{5}\right) \qquad C = \frac{3}{10}mR^2$$

Tenseur central principal pour une sphère homogène de masse m, de rayon R.

$$A = B = C = \frac{2}{5} m R^2$$

Tenseur central principal pour un ellipsoïde homogène de masse m $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$A = \frac{1}{5} m(b^2 + c^2) \qquad B = \frac{1}{5} m(c^2 + a^2) \qquad C = \frac{1}{5} m(a^2 + b^2)$$

4.8.3. Energie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint_{Solide} v^2 dm = \frac{1}{2} \iiint_{Solide} \vec{v}\,\vec{v}\, dm = \frac{1}{2} \iiint_{Solide} \vec{v}(\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) dm = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \iiint_{Solide} (\vec{r} \wedge \vec{v}) dm = \frac{1}{2} \vec{\Omega}\, \vec{\sigma}_O$$

$$E_c = \frac{1}{2} (\Omega^*) [I_O] (\Omega)$$

(Ω^*) vecteur ligne de (Ω)

4.8.4. Moment dynamique. Energie cinétique

4.8.5. Calcul du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque. Calcul des produits d'inertie.

5. Forces s'exerçant sur un solide

Outre les forces de champ (pesanteur, gravitation, électrostatique), interviendront les forces dues aux **liaisons** qui limitent les possibilités de mouvement du solide. Ces forces constituent l'ensemble des **forces extérieures** qui s'exercent sur le solide.
A ces forces, il convient d'ajouter les **forces intérieures** qui assurent la cohésion du solide.

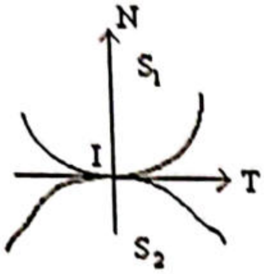
5.1. Champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$

$$\vec{P} = \sum_i m_i \cdot \vec{g} = \iiint_{solide} \vec{g}\, dm = M \cdot \vec{g}$$

Moment des Forces de Pesanteur :

$$\vec{M_C} = \sum_i \vec{CA_i} \wedge m_i \cdot \vec{g} = \vec{CG} \wedge M\vec{g}$$

2. Liaison par contact direct entre deux solides



Soit I le point de contact entre les solides 1 et 2.

$I \in S_1$ et $I \in S_2$.

Le mouvement de S_1 et S_2 peut être un mouvement :

* glissement
* roulement (rotation autour $\Delta \perp$ à N et T)
* pivotement. (rotation autour de N)

On appelle vitesse de glissement le vecteur $\vec{v_g} = \vec{v}(I_1) - \vec{v}(I_2) = v_g \cdot \vec{T}$

En absence de glissement $v_g = 0$ Roulement sans glissement

Lois du frottement de Coulomb

A cause de l'impénétrabilité des solides, le solide S_2 exerce sur le solide S_1 une force $\vec{N} = N\vec{n}$ (évidemment la réciproque est vraie, les deux forces obéissant au principe de l'action et de la réaction).
Les aspérités (rugosité des états de surface des solides) empêchent les mouvements relatifs.
D'une manière générale, les effets des forces qui s'opposent au roulement ou au pivotement sont faibles devant les effets des forces qui s'opposent au glissement et nous n'étudierons que ces dernières.
le solide S_2 exerce sur le solide S_1 une force $\vec{T} = -T\vec{\tau}$ qui s'oppose au glissement.

si $v_g \neq 0$ $T = f N$ f coefficient de frottement qui dépend de l'état de surface des 2 solides.

si $v_g = 0$ $T < f.N$

Travail des forces de frottement

$$\frac{\delta W}{dt} = \vec{R}\,\vec{v}(I_1) - \vec{R}\,\vec{v}(I_2) = \vec{R}\,\vec{v}_g = \vec{T}\,\vec{v}_g = -Tv_g \leq 0$$

Le travail des forces de frottement est négatif ou nul. Il se traduit par des pertes d'énergie mécanique.
Le cas du roulement sans glissement correspond à un travail des forces de frottement nul.

6. Dynamique du solide

Les forces extérieures sur un élément i sont notés $\overrightarrow{F_i^{ext}}$.

On se place dans un référentiel galiléen d'origine O noté R_{Gal}.

Théorème de la résultante dynamique $\quad M\dfrac{d\vec{v}(G)}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}}$

et théorème du moment dynamique $\quad \vec{K}_C = \sum_i \overrightarrow{CA_i} \wedge \overrightarrow{F_i^{ext}}$

Nous admettons les relations précédentes que nous appelons **Principe de la dynamique des solides** (dans un référentiel galiléen, le torseur dynamique en un point quelconque est égal au torseur des forces extérieures en ce point) et concluons au théorème de l'action et de la réaction pour les forces intérieures d'un solide.

Remarques :

- On montre, sans difficulté, que les forces extérieures forment un torseur puisqu'elles obéissent à la relation de transfert

$$\vec{M}_D(\text{des } \overrightarrow{F_i^{ext}}) = \sum_i \overrightarrow{DA_i} \wedge \overrightarrow{F_i^{ext}} = \vec{M}_C(\text{des } \overrightarrow{F_i^{ext}}) + \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{F_{ext}}$$

- On notera que le **mouvement du centre de masse est identique au mouvement d'un objet ponctuel de masse égale à la masse totale du solide**.

- De nombreux ouvrages utilisent systématiquement la dérivation du moment cinétique pour calculer le moment dynamique (paragraphe 4.4).

$$\frac{d\,\vec{\sigma}_C}{dt} = -\vec{v}(C) \wedge M\,\vec{v}(G) + \vec{K}_C$$

- En un point mobile C, nous préférons, à l'utilisation de la formule du paragraphe 4.4, le calcul du moment dynamique par la relation de transfert à partir du moment dynamique en G, à savoir :

$$\sum_i \overrightarrow{CA_i} \wedge \overrightarrow{F_i^{ext}} = \vec{K}_C = \vec{K}_G + \overrightarrow{CG} \wedge m\vec{a}(G) = \vec{K}_{G\,bar} + \overrightarrow{CG} \wedge m\vec{a}(G)$$

6.2. Le théorème de l'énergie cinétique

$dE_c = \sum_i \overrightarrow{F_i^{ext}}\, d\,\overrightarrow{OA_i} = \delta W_{ext}$ $\qquad \delta W_{ext}$ est le travail élémentaire des forces extérieures.

Soit, après intégration, $\quad \Delta E_c = W_{ext}$

6.3. Remarque sur la conservation de l'énergie mécanique

On peut séparer les forces extérieures en forces conservatives qui dérivent d'une énergie potentielle et en forces non conservatives.

On obtient $dE_m = d(E_c + E_p) = \delta W_{nc}$

Les forces non conservatives sont les forces d'opérateur extérieur ou les forces de frottement.

Le travail des forces de frottement est nul :

- en l'absence de forces de frottement
- dans le cas d'un roulement sans glissement (paragraphe 5.2)

C'est un résultat important, car en l'absence de forces d'opérateur extérieur, l'énergie mécanique se conserve. Son écriture fournit directement une intégrale première du mouvement et permet, généralement de se passer du théorème du moment dynamique

6.4. Ecriture générale du travail des forces extérieures

$$\delta W_{ext} = \sum_i \overrightarrow{F_i^{ext}}\, d\,\overrightarrow{OA_i} = \sum_i \overrightarrow{F_i^{ext}}\,\overrightarrow{v_A}\, dt = dt \sum_i \overrightarrow{F_i^{ext}}\,(\overrightarrow{v_C} + \overrightarrow{A_iC} \wedge \vec{\Omega})$$

$$\frac{\delta W_{ext}}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}}\,\overrightarrow{v_C} + \vec{\Omega} \sum_i \overrightarrow{CA_i} \wedge \overrightarrow{F_i^{ext}} = \overrightarrow{F_{ext}}\,\overrightarrow{v_C} + \overrightarrow{M_C}(\text{des } \overrightarrow{F_i^{ext}})\,\vec{\Omega}$$