# MECANIQUE : TD1A

## Exercice 1 :

Montrer les formules suivantes pour des vecteurs unités $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ et $\boldsymbol{e}_z$, alignés le long des axes $x$, $y$ et $z$, respectivement.

a) $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x = 1$,

b) $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = 0$,

c) $\boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z$,

## Exercice 2 :

Montrer les formules suivantes pour des vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ :

a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$,

b) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$,

c) $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$,

d) $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c}$,

e) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$,

f) $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}$.

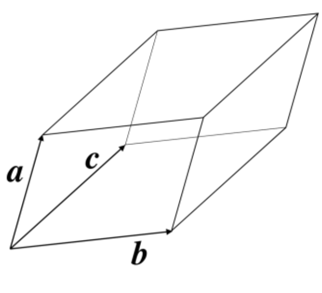
## Exercice 3 :

Considérons trois vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, et $\boldsymbol{c}$, dont les composantes $x$, $y$, et $z$ sont données comme suivant,

$$a = (1, 0, 0)\,, \quad b = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)\,, \quad c = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\,.$$

a) Calculer les surfaces $S_{\boldsymbol{ab}}$, $S_{\boldsymbol{bc}}$ et $S_{\boldsymbol{ca}}$ des parallélogrammes formés, respectivement, de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$, de $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$, et de $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{a}$.

b) Calculer le volume $V_{\boldsymbol{abc}}$ de l'hexaèdre formé des trois vecteurs (voir figure).




L'hexaèdre formé par des vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$.

## Exercice 4 : Un disque roulant sans aucun glissement

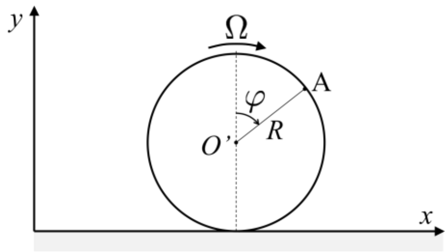
Un disque de rayon $R$ roule sur une surface horizontale sans aucun glissement. La vitesse de rotation du disque est constante et égale à $\Omega$. Déterminer le mouvement d'un point matériel $A$ qui est sur la circonférence du disque (voir figure), en répondant aux questions suivantes :

a) Quelle est le vecteur vitesse $\boldsymbol{V}$ du déplacement du centre $O'$ du disque, par rapport au référentiel $xyz$ fixé à la surface (voir figure) ?

b) Quelle est le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ du point $A$, par rapport au référentiel $xyz$, quand le point se trouve à une position angulaire $\varphi$ (voir figure pour la définition de $\varphi$) ? ?

c) La position angulaire du point $A$ est $\varphi = 0$ à l'instant $t = 0$. Exprimer la vitesse $\boldsymbol{v}$ en fonction du temps.

d) Les coordonnées du point $A$ sont $(0, 2R)$ à l'instant $t = 0$. Déterminer les coordonnées $(x, y)$ du point à l'instant $t$.



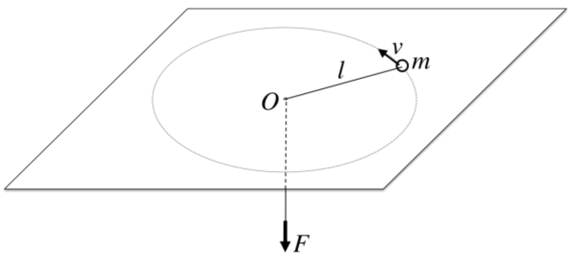

Un disque roulant sur une surface horizontale.

## Exercice 5 : Bilan de l'énergie, Conservation du moment cinétique

Une boule de masse $m$, attachée au bout d'un fil, est en mouvement circulaire autour du point $O$ sur une surface horizontale sans frottement (voir figure). En tirant l'autre bout du fil, on fait varier la distance $l$ entre la boule et le point $O$ de $l = l_1$ à $l = l_2$. La vitesse de la boule était $v = v_1$ lorsque $l = l_1$.

a) Déterminer la vitesse $v_2$ de la boule lorsque $l = l_2$.

b) Combien de travail a été fait pendant le tirage ?




Une boule attachée à un fil.